FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy university v Brně

SOUTĚŽNÍ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY 1994/1995

Prvá série úloh

(25 bodů)

ÚLOHA č.1 (4 body)

Na okenní římse ve výšce a sedí kos, který má hnízdo s mladými ve výšce b na protějším stromě ve vzdálenosti d (viz obrázek). Políčko mezi domkem a stromem bylo právě oseto. Kos se při letu pohybuje stálou rychlostí v.

(a) V jaké vzdálenosti x od zápraží domu má zvednout zrnko, aby je co nejdříve donesl mláďatům?

(b) Jaký bude vztah mezi úhly α a α', bude-li podmínka nejkratšího času letu splněna? Vypočtěte i minimální dobu letu. Úlohu řešte
- geometrickou konstrukcí,
- výpočtem.

Poznámka: Úloha je jednoduchým případem tzv. variačního problému: Kos se může mezi body A, B za podmínky, že se dotkne země v některém bodě C, pohybovat po různých křivkách $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, ... Čas t, který k tomu potřebuje, je závislý na volbě křivky, tj. $t = t(\mathcal{C})$, $t_1 = t(\mathcal{C}_1)$, $t_2 = t(\mathcal{C}_2)$, ..., přitom obecně $t_1 \neq t_2 \neq \ldots$
Cílem variační úlohy je najít takovou křivku $\mathcal{C}_0$ z množiny přípustných křivek, jíž by ze všech možných hodnot času odpovídala ta nejmenší. V obecnějším případě může být variační úloha formulována jako požadavek nalezení extremální (minimální nebo maximální) hodnoty i jiné fyzikální veličiny v závislosti na volbě křivky, plochy, apod.

ÚLOHA č.2 (8 bodů)

Stejně jako kos v předchozí úloze se chová světlo (světelný paprsek) při šíření prostředím. „Vybírá si“ dráhu, po níž z bodu A dospěje do bodu B za nejkratší možný čas. Tato skutečnost byla zjištěna experimentálně a povýšena na fyzikální princip – tzv. princip Fermatův. Na základě Fermatova principu zdůvodněte:

(a) Proč se v homogenním (stejnorodém) prostředí šíří světlo přímočaře? Je-li prostředí homogenní, znamená to, že i rychlost šíření světelného paprsku je v každém jeho místě stejná.

(b) Proč při odrazu světla na rozhraní dvou prostředí platí zákon odrazu $\alpha = \alpha'$?

(c) Proč při průchodu světla rozhraním dvou prostředí platí zákon lomu (Snellův zákon)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n,$$

kde $n_1 = \frac{c}{v_1}$, $n_2 = \frac{c}{v_2}$ jsou tzv. absolutní indexy lomu prostředí (1) a (2), v_1, v_2 jsou rychlosti šíření světla v těchto prostředích, c je rychlost světla ve vakuu (známá

hodnota $c \approx 300\,000\,km/s$), $n = n_2/n_1$ je tzv. relativní index lomu prostředí (2) vzhledem k prostředí (1).

Poznámka: Při dopadu světla na rozhraní dvou prostředí dochází obecně jak k odrazu, tak k lomu. Intenzita odraženého a prošlého světla závisí zejména na materiálu obou prostředí, vlnové délce a stavu polarizace světla.

Pomůcka: K řešení části (b) použijte analogie s úlohou 1. Formulujte podobnou úlohu pro řešení části (c). Nápovědou je obrázek na předchozí straně dole. K výpočtu „správné“ hodnoty x, odpovídající minimální hodnotě času $t(x) = t_{min}$ potřebujete také trochu goniometrie. Variační úlohu je pro případ tohoto výpočtu vhodné formulovat také takto: Je-li hodnota x taková, že odpovídá času t_{min}, pak při její velmi malé změně o Δx se čas „prakticky“ nezmění, tj. $\Delta t = 0$. Využijte této skutečnosti.

V následující úloze si vyzkoušíte praktické použití zákona odrazu a znalosti o zobrazování rovinným zrcadlem.

ÚLOHA č.3 (6 bodů)

Novákovi se přestěhovali do bytu v panelovém domě. Zjistili, že předsíň v jejich novém bytě je vlastně chodba, široká 150 cm. Maminka si přála mít u stěny za dveřmi lavičku na přezouvání bot, její sedací plocha je široká 40 cm a je 40 cm nad podlahou. A za lavičkou na stěně mělo být namontováno zrcadlo tak, aby se v něm všichni členové rodiny viděli od hlavy až k patě. Jirka, žák gymnázia, dostal za úkol vypočítat, jaké minimální rozměry musí toto zrcadlo mít a jak vysoko nad podlahou musí být na stěně připevněno. Na obrázku vidíte řez předsíní s příslušnými rozměry.

Jirka si změřil výšku všech členů rodiny: tatínek měří 180 cm, maminka 168 cm, Jirka 176 cm a Eva, mladší sestra, 124 cm. Brzy celý problém správně vyřešil. Dokážete to také?
Řešte nejprve obecně a své řešení doplňte nákresem, ze kterého bude patrný význam všech používaných symbolů. Jak by se změnila situace, kdyby zrcadlo bylo pověšeno tak, aby svíralo se stěnou jistý úhel α? Je možné, že některá další měření členů rodiny musel Jirka ještě k řešení úlohy dodatečně provést. V tomto případě to udělejte i vy, třeba odhadem.

ÚLOHA č.4 (4 body)

Sousedovi hoří chata. S kbelíkem vody se pohybuji dvakrát pomaleji než s prázdným.

(a) Vím, že pokud naberu vodu v místě C na břehu řeky (vzdálenost x je známa), budu na místě požáru v nejkratší možné době. Jak daleko je sousedova chata?

(b) Určete x, je-li známo d.

Využijte analogie s úlohou 3.

Úloha č. 5 je již z jiného soudku a uvede nás do světa těles makroskopických rozměrů. K jejímu vyřešení stačí však také trocha geometrie.

ÚLOHA č.5 (3 body)

Můžeme ráno vidět na obloze dorůstající Měsíc? Nakreslete potřebné obrázky a zdůvodněte svou odpověď.
Co je chybné v následujícím obrázku a proč?

V úloze 3. jsme pracovali s velmi malými (dokonce libovolně malými) změnami veličin x a t, označenými Δx a Δt. Případy, kdy se zabýváme sledováním změn některé z veličin, například f, která je funkcí veličin např. $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, v případě, že změny $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$ jsou libovolně malé (mluvíme o limitním přechodu $\Delta\ x_1\ \rightarrow\ 0$, $\Delta\ x_2\ \rightarrow\ 0,\ \ldots$), jsou ve fyzice velmi časté. Matematickým nástrojem je při tom tzv. infinitezimální počet, jenž bychom mohli nazvat „matematikou libovolně, nebo dokonce nekonečně, malého“. Základy infinitezimálního počtu, jehož součástí jsou počet diferenciální a integrální, se pokusíme názorně vyložit v našem letošním seriálu na pokračování. Začněme „motivujícím“ fyzikálním úvodem, který nás přirozeně dovede k formulaci úlohy.

Že planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách blízkých kružnicím, ví jistě každý školák (stejně se chovají při oběhu kolem Země její umělé družice i Měsíc.) Že je tato skutečnost obsahem jednoho ze tří Keplerových zákonů, formulovaných J. Keplerem na základě rozboru pozorování pohybů planet, pečlivě prováděných jím samým a jeho předchůdcem Tychonem de Brahe, je známo poučenějším. Že je však právě takový pohyb planet a družic bezprostředním důsledkem zákona všeobecné gravitace, stejně jako tak obyčejný a každodenní jev, jakým je pád těles na povrch Země, si mnozí již s takovou samozřejmostí pravděpodobně neuvědomují.

Jak tedy zákon všeobecné gravitace určuje dráhu planet? Jakákoliv dvě hmotná tělesa o hmotnostech $m_1,\ m_2$ na sebe navzájem působí přitažlivými interakčními silami, majícími původ v jejich hmotnostech. Jsou-li rozměry těles zanedbatelné ve srovnání s jejich vzdáleností r, můžeme je nahradit hmotnými body. Pak velikost zmíněných sil je $F = \kappa m_1 m_2 / r^2$, $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\, Nm^2 kg^{-2}$ je univerzální gravitační konstanta. Tento významný silový zákon objevil I. Newton. Abychom mohli jakoukoli dynamickou úlohu řešit, potřebujeme ještě zákon pohybový, nalezený rovněž Newtonem (druhý Newtonův zákon). Ten umožní zjistit v daném okamžiku zrychlení $\vec{a}$ sledovaného hmotného bodu, tj. veličinu přímo související s jeho pohybem, umíme-li v témže okamžiku popsat kvantitativně všechny interakce hmotného bodu s okolními objekty, tj. zapsat silové zákony pro všechny síly $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \ldots$, jimiž na hmotný bod o hmotnosti m okolní objekty působí.

Pohybový zákon (pro $m = konst.$):

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$$

Tento zápis pohybového zákona zahrnuje i tzv. princip superpozice, podle něhož lze jednotlivá silová působení $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2, \ldots$ okolních objektů na hmotný bod vektorově sečíst v tzv. výslednici sil. Pro zrychlení $\vec{a}(t)$ planety m, pohybující se v gravitačním poli Slunce M, lze v každém časovém okamžiku t přibližně psát

$$m\vec{a}(t) = \frac{\kappa m M}{r^2(t)} \left(-\frac{\vec{r}(t)}{r(t)} \right) \quad ,$$

tj.

$$\vec{a}(t) = -\frac{\kappa M}{r^3(t)} \vec{r}(t) \quad , \qquad (PR)$$

$\left(-\frac{\vec{r}(t)}{r(t)}\right)$ je jednotkový vektor směřující proti směru spojnice Slunce a planety, má tedy

souhlasný směr s přitažlivou silou $\vec{F}$, jíž působí Slunce na planetu. Poslední rovnice by umožnila určit vektor zrychlení planety vzhledem ke Slunci v časovém okamžiku t, kdybychom v tomto okamžiku znali její polohový vektor $\vec{r}(t)$. Ten však obecně znám není, neboť právě on je veličinou, jejíž nalezení v závislosti na čase je cílem celé úlohy. Koncové body vektorů $\vec{r}$ v různých časových okamžicích určují totiž křivku, po níž se planeta pohybuje.

I když na první pohled se problém zdá být neřešitelný, ve skutečnosti situace beznadějná není. Matematika „libovolně malého“, pracující s velmi malými změnami veličin, umožní pohybovou rovnici (PR) (která se při vhodném zápisu stane tzv. diferenciální rovnicí) řešit pouze na základě znalosti polohového vektoru $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ a rychlosti $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$ planety v jediném časovém okamžiku $(t = 0)$, např. na počátku sledování jejího pohybu a zjistit tak polohový vektor planety ve všech dalších i předchozích okamžicích.

Jak takový postup prakticky vypadá, uvidíme na jednoduchých příkladech po absolvování matematického seriálu. Prozatím se však sami pokuste vyřešit úlohu o pohybu planety alespoň přibližně, aniž byste příslušné matematické postupy při řešení pohybových rovnic znali. Pro získání přibližného řešení postačí místo počítání s „libovolně malými“ změnami veličin počítat se změnami „dostatečně malými“. Z fyziky pak vystačíte se znalostí vztahů mezi zrychlením, rychlostí a dráhou přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu.

ÚLOHA č.6 – prémiová

Představte si, že planeta je v okamžiku t_1 v místě o polohovém vektoru $\vec{r}_1$, v okamžiku t_2 v místě o polohovém vektoru $\vec{r}_2$. Je-li časový interval $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$ dostatečně malý, tak, aby se vektor zrychlení planety během něj nestačil příliš změnit, můžeme se pokusit nahradit skutečný pohyb, který je křivočarý a nerovnoměrně zrychlený, pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením určeným z rovnice (PR) v časovém okamžiku t_1 a počáteční rychlostí $\vec{v}_1$ v témže okamžiku.

Vektor $\vec{r}_2'$ určuje polohu hmotného bodu v čase t_2 při tomto „náhradním“ pohybu a shoduje se tím lépe se skutečným polohovým vektorem $\vec{r}_2$, čím menší je časový interval Δt_{12}.

(a) Předpokládejte, že vektory $\vec{r}_1$ a $\vec{v}_1$ jsou zadány např. svými souřadnicemi v rovině pohybu planety. Popište, jak určíte vektor $\vec{r}_2'$ v čase t_2 a výpočet proveďte. Můžete počítat jak přímo s vektory, tak v souřadnicích.

Po jaké křivce se pohybuje „náhradní“ hmotný bod (čárkovaná křivka v obrázku)? Nápovědou vám může být následující obrázek, který připomíná pootočený nákres šikmého vrhu.

(b) Navrhněte postup, kterým byste přibližně získali celou křivku, po níž se planeta kolem Slunce pohybuje, kdybyste měli možnost provádět velké množství početních operací v krátkém čase, např. pomocí počítače. Ti, kteří k počítači mají přístup a rádi programují, mohou přiložit výsledky. Ostatní mohou postup pouze popsat. Konkrétní výchozí údaje týkající se polohy a rychlosti v čase $t = 0$ vyhledejte v astronomických tabulkách např. pro Zemi.

(c) V úvodu k této úloze bylo řečeno, že rovnice $\vec{a} = -\frac{\kappa M}{r^3}\vec{r}$ platí přibližně. Uveďte dva hlavní fyzikální důvody její nepřesnosti.

Mimo soutěž vyhledejte v literatuře historické údaje, zejména časové, týkající se Keplerových a Newtonových objevů. Mohl Kepler použít postupů, kterých užíváme v naší úloze?

Tato úloha ukazuje, jak je pro fyziku užitečný vektorový počet. Abyste se naučili s vektory dobře zacházet, zašleme vám během školního roku brožurku, která vás s nimi na přijatelné úrovni seznámí.

Řešení úloh pište vždy na zvláštní list, nezapomeňte uvést své jméno. Prémiové úlohy budou vyhodnoceny zvlášť, mimo vlastní soutěž.

Křivka, odpovídající v časovém intervalu (t_1, t_2) rovnoměrně zrychlenému pohybu se zrychlením $\vec{a}_1$ a počáteční rychlostí $\vec{v}_1$ (přerušovaná čára)

Skutečná křivka, po níž se pohybuje těleso pohybem křivočarým nerovnoměrně zrychleným (plná čára)

$\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$
$\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$
$\vec{a}_1 = (a_{1x}, a_{1y})$ =vyjádřete z pohybové rovnice