

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy university v Brně

SOUTĚŽNÍ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY 1994/1995

Třetí série úloh

(25 bodů)

Co víme a nevíme o tření? Spontánní odpověď většiny lidí na tuto otázku by asi zněla: Co bychom o něm ještě mohli nevědět? Vždyť se s ním setkáváme v přeneseném i doslovném smyslu na každém kroku!

Prostřednictvím úloh této série si připomeneme, že s třením souvisí řada zajímavých fyzikálních problémů, které si v běžném životě možná ani neuvědomujeme. Půjde v nich o síly vlečného tření a odporu prostředí, jimiž na sebe působí navzájem se dotýkající tělesa pevná, kapalná či plynná, která jsou vůči sobě buď v klidu (statické tření) nebo v pohybu (dynamické tření, odpor prostředí).

ÚLOHA č.1 (2 body)

Odpor prostředí či tření jsou v řadě případů považovány za jevy natolik negativní a nežádoucí, že se dostávají přeneseně i do hovorové řeči ("... při jednání o uzavření smlouvy se objevily třecí plochy ..."). Jsou však i situace, kdy je tření jevem nanejvýš důležitým. Vyjmenujte alespoň tři příklady situací, v nichž je tření nebo odpor prostředí užitečným jevem a zdůvodněte jeho využití, a tři příklady situací, kdy se jedná o jevy nežádoucí a uveďte možnosti jejich eliminace nebo potlačení.

ÚLOHA č. 2 (4 body)

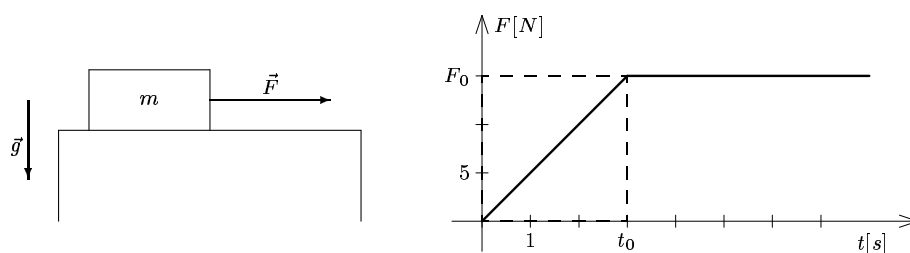
Už ze základní školy víte, že síly vlečného tření představují jeden z typů vzájemného působení těles, která jsou v přímém kontaktu určitými částmi svých povrchů (styčnými plochami), ať již jsou navzájem v klidu (statické tření), nebo je jedno vůči druhému vlečeno (dynamické tření). Jeden z nejjednodušších modelů umožňujících vyjádřit třecí sílu kvantitativně využívá veličiny zvané koeficient tření.

- (a) Pokuste se kvalitativně vysvětlit mechanismus vzniku sil tření (proč a jak k jejich vzniku dochází), definujte koeficient statického a dynamického tření a navrhněte způsob, jímž by bylo možné oba tyto koeficienty experimentálně určit.
- (b) Požádejte svého učitele fyziky o zapůjčení siloměrů, závaží a těles vhodných tvarů a rozměrů (dřevěné hranolky, apod.) a pokuste se experimentálně prošetřit, na kterých charakteristikách těles, jež jsou spolu v přímém kontaktu prostřednictvím styčných ploch, závisí třecí síly. Pomocí siloměru porovnejte také velikosti sil statického a dynamického tření.

Poznámka: Abyste interpretovali své výsledky správně, nezapomeňte, že můžete zkoušet táhnout tělíska na siloměru nejen ve vodorovném, ale i v šikmém směru.

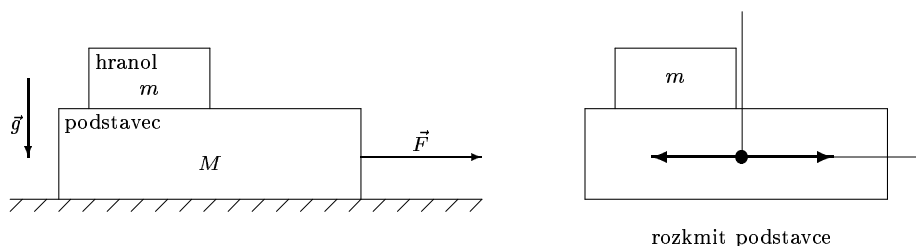
ÚLOHA č.3 (7 bodů)

Na vodorovném podstavci spočívá hranol o hmotnosti $m = 5,0$ kg. Třecí síly mezi podstavcem a hranolem lze charakterizovat koeficientem statického tření $f_0 = 0,30$ a koeficientem dynamického tření $f = 0,25$. Soustava je v tíhovém poli Země, které pokládáme za homogenní s tíhovým zrychlením $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.



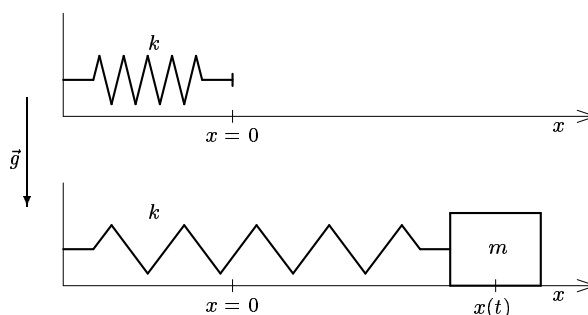
- (a) Na hranol začne působit vodorovná tahová síla $\vec{F}$, jejíž velikost se s časem mění lineárně (viz graf). V okamžiku t_0 se hranol pohne a síla $\vec{F}$ již zůstane konstantní.
- Výpočtem určete hodnotu F_0 a z grafu pak odečtěte hodnotu t_0 . Nakreslete graf časové závislosti velikosti třecí síly $\vec{F}_t$, kterou působí podstavec na hranol, v časovém intervalu $t \in [0, t_0 + 5]$ [s].
 - Jaký směr má síla $\vec{F}_t$? Jaký směr a velikost má třecí síla $\vec{F}_t^*$, jíž působí hranol na podstavec?
 - Nakreslete graf závislosti velikosti rychlosti hranolu vzhledem k podstavci na čase v intervalu $[0, t_0 + 5]$ [s].
- (b) Jak se změní odpovědi na otázky úkolu (a), bude-li podstavec s hranolem umístěn ve zdviži, která klesá se zrychlením o velikosti $a = 1,0 \text{ ms}^{-2}$? Co bychom pozorovali, kdyby se lano zdviže přetrhlo?
- (c) Podstavec s hranolem je nyní umístěn na vodorovné podložce, po níž se může pohybovat bez tření. Podstavec má hmotnost $M = 20$ kg. Síla $\vec{F}$, jejíž velikost roste lineárně s časem podle grafu v úkolu (a), působí nyní nikoli na hranol, ale na podstavec.

- Určete hodnotu F'_0 její velikosti, při níž se hranol pohne vzhledem k podstavci. Kterým směrem?
- Určete časový okamžik t'_0 , ve kterém tato situace nastane, začala-li síla $\vec{F}$ působit v okamžiku $t = 0$.
- Předpokládejte, že od okamžiku t'_0 je, podobně jako v případě (a), velikost síly $\vec{F}$ konstantní a rovna F'_0 . Nakreslete graf časové závislosti velikosti rychlosti podstavce vzhledem k pevné podložce, graf časové závislosti velikosti rychlosti hranolu vzhledem k pevné podložce a graf časové závislosti velikosti rychlosti hranolu vzhledem k podstavci pro časový interval $[t'_0, t'_0 + 5]$ [s]. Velikost společné rychlosti, již dosáhl podstavec s hranolem do okamžiku t'_0 , označte v_0 a považujte ji za známou. (*Mimo soutěž si můžete zkusit ji určit třeba s využitím dnešního pokračování matematického seriálu.*)



- (d) Podstavec harmonicky kmitá ve vodorovném směru s frekvencí $\nu = 10 \text{ s}^{-1}$. S jakou největší amplitudou může podstavec kmitat, aby se hranol vůči němu ještě nepohnul? Pro zopakování problematiky harmonických kmitů slouží "Dodatek", který je součástí zadání této série úloh.

ÚLOHA č.4 (5 bodů)



Tělísko o hmotnosti m je upevněno na pružině o tuhosti k vetknuté do stěny (viz obr.) a může se pohybovat po vodorovné podložce tak, že třecí síla je zanedbatelně malá.

- Tělísko spočívá v klidu na podložce. Je v takové situaci pružina natažena nebo stlačena? Zdůvodněte. V této poloze zvolíme počátek osy x .
- Tělísku udělíme v kladném směru osy x rychlost o velikosti v_0 , takže začne vykonávat harmonický kmitavý pohyb s kruhovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Jaká bude amplituda A tohoto kmitavého pohybu a kolem jaké rovnovážné polohy se budou kmitý odehrávat? Zapište závislost souřadnice x tělísky na čase, tj. funkci $x = x(t)$.

Poznámka: Základní údaje a úvahy o harmonickém kmitání vám pomůže zopakovat "Dodatek", který je součástí dnešní série.

Pod tělísko umístíme jinou podložku, takže na ně bude působit třecí síla. Koeficient statického tření mezi tělískem a podložkou je f_0 , koeficient dynamického tření je f .

- (c) Určete, v jakém rozmezí poloh na ose x může tělísko spočívat na podložce v klidu.
- (d) Tělísku nacházejícímu se v poloze $x = 0$ opět udělíme rychlost o velikosti v_0 v kladném směru osy x . Určete polohu x_1 bodu prvního obratu kmitajícího tělíska. Jakou minimální rychlost musíme tělísku v poloze $x = 0$ udělit, aby v bodě obratu neuvázlo?

Při výpočtech použijte tyto číselné hodnoty: $m = 0,20$ kg, $g = 10$ ms⁻², $v_0 = 2,0$ ms⁻¹, $k = 80$ Nm⁻¹, $f_0 = 0,35$, $f = 0,30$.

Mimo soutěž se můžete pokusit zodpovědět tyto otázky:

- (e) *Předpokládejte, že tělísko vykoná několik kmitů, než se zastaví. Dráhu, kterou urazí od okamžiku $t = 0$, kdy mu byla udělena počáteční rychlost, označme s . Ti z vás, kteří rádi počítají, si ji mohou zjistit přesně. K nalezení intervalu $[s_1, s_2]$, do něhož délka uražené dráhy s s určitostí padne, však stačí energetická úvaha. Pokuste se ji provést a pomocí ní interval určit.*

Poznámka: Pružná energie pružiny protažené nebo stlačené o délku x je $E_{\text{pruž}} = \frac{1}{2}kx^2$.

- (f) *Bude doba T , která uplyne mezi dvěma po sobě následujícími obraty tělíska, odlišná od případu (a), v němž jsme třecí síly zanedbali?*
- (g) *Co lze říci o rovnovážné poloze kmitajícího tělíska? K odpovědi na tuto otázku vám může být užitečné promyšlení následujících jednodušších případů:*

- *Tělísko kmitající na vodorovné pružině v případě (a).*
- *Tělísko kmitající na svislé pružině zavěšené v homogenním tíhovém poli Země s tíhovým zrychlením $\vec{g}$.*

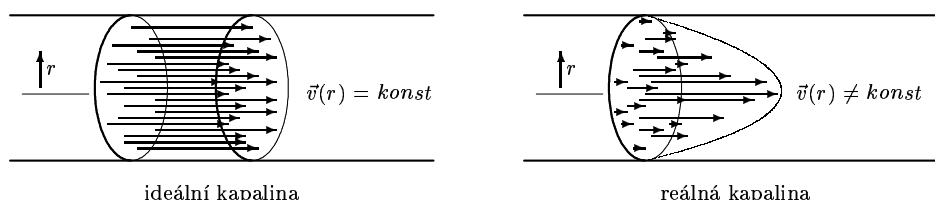
Srovnání těchto případů vám umožní zjistit, zda a jak jsou frekvence a rovnovážná poloha ovlivněny dodatečnou konstantní silou, působící na tělísko kromě síly pružné. Uvažte pak, že i třecí síla je vždy mezi dvěma body obratu konstantní a v bodě obratu mění směr. Rozmyslete, zda bude rovnovážná poloha tělíska kmitajícího na vodorovné pružině při započtení sil tření určena jednoznačně.

- (h) *Využitím grafického znázornění závislosti polohy tělíska na čase navrhnete postup, který by vedl k určení místa x_0 , v němž se tělísko nakonec zastaví, a na základě znalosti této hodnoty i k určení dráhy s , kterou tělísko urazí od začátku pohybu (okamžiku $t = 0$) do zastavení.*

Pokud byste si s některými úkoly nepovinné části nevěděli rady, nepovažujte to za neúspěch. Jedná se o problémy opravdu obtížné.

ÚLOHA č. 5 (4 body)

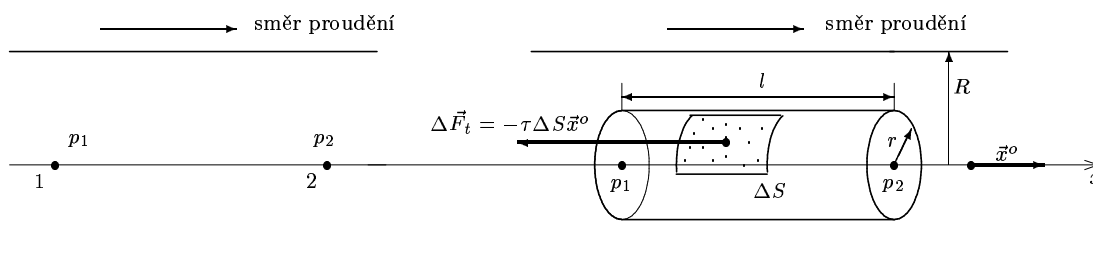
V minulé sérii úloh jste většinou správně definovali ideální kapalinu jako nestlačitelnou bez vnitřního tření. Při proudění reálné kapaliny se však třecí síly, jimiž na sebe při pohybu působí jednotlivé vrstvy kapaliny, významně projevují. Proudí-li trubicí ideální kapalina, můžeme její rychlost ve všech bodech daného průřezu považovat za stejnou.



Při proudění reálné kapaliny je situace jiná. Ze zkušenosti víme, že uprostřed trubice proudí kapalina nejrychleji a u stěn je její rychlost velmi malá. Mohli byste se o tom přesvědčit například u nějaké řeky, jejíž tok je velmi klidný, bez vírů: Plovoucí předměty budou unášeny nejrychleji uprostřed řeky. Také s tlakem podél trubice je to jiné než u ideální kapaliny. Zatímco ve vodorovné trubici konstantního průřezu, jíž proudí ideální kapalina, je tlak ve všech místech stejný, v reálné kapalině tomu tak být nemůže. Síly vnitřního tření mají snahu kapalinu brzdit a tlak se tedy musí v trubici ustavit tak, aby síly tlakové kapalinu trubicí přece jen "protlačily".

- (a) Reálná kapalina proudí vodorovnou trubicí konstantního průřezu. Určete znaménko rozdílu tlaků $p_1 - p_2$ v bodech 1 a 2 vyznačených v obrázku vlevo. Za předpokladu, že je kapalina nestlačitelná, porovnejte velikosti rychlostí v_1 a v_2 v těchto bodech.

Podobně jako u tlakových sil vztahujeme i velikost třecích sil v kapalině na jednotku plochy.



Označme symbolem F_t velikost třecí síly, již působí okolní kapalina na elementární plochu ΔS na povrchu válce vymezeného v proudící kapalině podle obrázku vpravo. Veličina $\tau = \frac{\Delta F_t}{\Delta S}$ představuje velikost třecí síly vztaženou na jednotku plochy, podobně jako $p = \frac{\Delta F_p}{\Delta S}$ je velikost tlakové síly vztažená na jednotku plochy. Síla $\Delta \vec{F}_t$ je tečná k povrchu válce a směřuje proti pohybu kapaliny. Vektor $\vec{x}^0$ v obrázku je jednotkový vektor podél trubice, orientovaný ve směru proudění kapaliny.

- (b) Zakreslete tlakové síly, jimiž působí okolní kapalina na podstavy válce, a vypočtete jejich velikost.

- (c) Co lze říci o tlakových silách, jimiž působí kapalina na plášť válce? Jaká je jejich výslednice?
- (d) Určete velikost a směr celkové třecí síly, již působí okolní kapalina na plášť válce. Působí třecí síly na podstavy válce?
- (e) Na základě odpovědí (b), (c), (d) zapište vztah pro velikost výsledné síly působící na vymezený válec. Pomocí úvahy o rychlostech v_1 a v_2 , provedené v úkolu (a), rozhodněte, jaká podmínka musí platit pro velikost výsledné síly. Z této podmínky určete závislost veličiny τ na vzdálenosti r od osy trubice a zakreslete ji graficky. Rozdíl tlaků $p_1 - p_2$ při tom považujte za známý.
- (f) *Mimo soutěž se můžete zamyslet nad následujícím problémem: Pomocí závislosti $\tau = \tau(r)$ lze určit i tzv. rychlostní profil, tj. závislost $v = v(r)$. Jedním z nejjednodušších modelů popisujících souvislost rychlostního profilu s veličinou $\tau(r)$ je model tzv. newtonovské kapaliny, pro kterou při malých změnách Δr vzdálenosti r platí*

$$\tau(r) \doteq -\eta \frac{\Delta v}{\Delta r} \xrightarrow{\Delta r \rightarrow 0} -\eta \frac{dv}{dr}$$

(Velikost rychlosti se vzdáleností od osy trubice klesá, při čemž je její změna vztažena na jednotkovou změnu vzdálenosti, tj. její derivace podle proměnné r , úměrná veličině $\tau(r)$. Konstanta η se nazývá dynamická viskozita kapaliny a je vlastně charakteristikou sil vnitřního tření v kapalině.) Přečtení dnešního pokračování matematického seriálu by vám mělo umožnit určit z tohoto vztahu rychlostní profil $v(r)$. Předpokládejte při tom, že rychlost u stěn, tj. hodnota $v(R)$, je nulová. Můžete se pokusit také určit závislost $v = v(r)$ numericky, užitím těchto číselných hodnot: $R = 10 \text{ cm}$, $p_1 - p_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$, $l = 1,0 \text{ m}$, $\eta \doteq 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-2}\text{s}$.

Poznámka: Předchozí úvahy platí za předpokladu, že proudění kapaliny je nejen ustálené, ale také laminární, tj. kapalina netvoří víry. K tomu stačí, aby proudila dostatečně pomalu, tj. aby její rychlost nepřekročila určitou kritickou hodnotu $v_{\text{krit}} = \frac{\eta K_R}{R\rho}$, kde K_R je kritická hodnota tzv. Reynoldsova čísla, pohybující se v empiricky stanoveném rozmezí hodnot $[1000, 20000]$, ρ je hustota kapaliny, η její dynamická viskozita a R poloměr trubice.

ÚLOHA č. 6 (3 body)

Vrzání dveří je nepříjemný jev, který neomylně upozorní např. na pozdního příchozího. Také na tomto jevu se podílejí třecí síly. Vysvětlete, jak charakteristický vrzavý zvuk vzniká a zda a jak souvisí výška "tónu" se způsobem manipulace s dveřmi. Je lépe otvírat vrzající dveře rychle nebo pomalu, chceme-li do místnosti vstoupit pokud možno nenápadně? Musí být vrzavý zvuk nutně slyšet po celou dobu otvírání nebo zavírání dveří?

Poznámka: Uvědomte si, že každý zvuk je mechanické vlnění, které má původ v nějakém kmitavém mechanickém pohybu. Uvažte také, že vazba spojující dveře s panty není ideálně tuhá, ale má jistou pružnost.

ÚLOHA č. 7 (prémiová)

Mluvíme-li o volném pádu tělesa, máme většinou na mysli situaci, kdy těleso padá výhradně pod vlivem tíhové síly v homogenním tíhovém poli Země. Taková představa je idealizací skutečnosti a volný pád ve skutečnosti není tak docela volný, neboť je brzděn odporem vzduchu. (Nebýt odporu vzduchu, nemohli by např. odvážlivci provozovat parašutismus.) Síla působící na těleso v odporujícím prostředí je závislá na jeho rychlosti. Nejjednodušším typem závislosti, která umožní odporovou sílu dostatečně dobře vyjádřit, není-li rychlost tělesa příliš velká, je závislost lineární: $\vec{F}_{odp} = -b\vec{v}$. V kladné konstantě úměrnosti b jsou zahrnuty další charakteristiky, například viskozita prostředí, tvar a rozměry tělesa. Uvažujte o pádu tělesa v homogenním tíhovém poli Země (tíhové zrychlení $\vec{g}$) a v odporujícím prostředí (vzduchu). Těleso je vypuštěno z výšky h nad zemským povrchem s nulovou počáteční rychlostí.

- (a) Je třeba uvažovat ještě o nějaké další síle, která na těleso působí při jeho pádu, kromě síly tíhové a odporové síly prostředí? Zvolte osu x ve svislém směru s počátkem například na povrchu Země. Zapište druhý Newtonův zákon pro těleso a uvažujte: Tíhová síla těleso urychluje stále stejně, zatímco velikost odporové síly, která těleso brzdí, se s jeho rostoucí rychlostí zvětšuje. Dosáhne někdy těleso jisté mezní rychlosti, která se již dále nebude zvětšovat? Pokud ano, jak velká bude tato rychlost?
- (b) Předpokládejte, že padajícím tělesem je pouťový nafukovací balóněk o hmotnosti $m = 20$ g a o poloměru $r = 15$ cm. Konstanta b je dána tzv. Stokesovým vztahem $b = 6\pi\eta r$, kde η je dynamická viskozita vzduchu. Najděte její hodnotu v tabulkách, stejně jako další potřebné údaje. Vypočítejte mezní rychlost balónku při pádu klidným vzduchem.
- (c) Pokuste se o numerické nalezení závislosti velikosti rychlosti v a souřadnice x balónku na čase. Pro výpočet zvolte výšku pádu h např. 1000 m. Postupujte způsobem, který jste navrhli pro řešení prémiové úlohy první série. Dobří počtáři, kteří pečlivě pročtou dnešní pokračování matematického seriálu, možná najdou způsob, jak určit závislost rychlosti a polohy balónku na čase, tj. $v = v(t)$ a $x = x(t)$, výpočtem, který numerické postupy nevyžaduje.

Poznámka 1: Hustotu i viskozitu prostředí považujte podél celé trajektorie padajícího tělesa za konstantní. Tento předpoklad je sice v uvažovaném případě splněn jen přibližně, jeho přijetím se však výpočet značně zjednoduší.

Poznámka 2: Tělesa větších rozměrů, která se pohybují v atmosféře značnou rychlostí (např. ptáci, auta, podzvuková letadla), jsou bržděna odporovou silou, jejíž závislost na rychlosti již není lineární. Lze ji však vyjádřit jako kvadratickou funkci rychlosti, tj. $\vec{F}_{odp} = -Kv^2\vec{v}^0$, kde $\vec{v}^0$ je jednotkový vektor ve směru rychlosti a K je koeficient určený tvarem a rozměry tělesa a vlastnostmi prostředí, který na rychlosti závisí velmi málo.

Také při pohybu větších těles ve vodě (ponorky, potápěči, ryby) je závislost síly $\vec{F}_{odp}$ na rychlosti složitější než pouhá přímá úměrnost. Nelineární závislost odporové síly na rychlosti je ve většině případů realističtější modelem, velmi však komplikuje nalezení

závislostí $v = v(t)$ a $x = x(t)$, které je pak nutno hledat numerickými metodami.

Připomínáme: Řešení každé úlohy napište na zvláštní list.

Termín odeslání řešení úloh třetí série: 15. březen 1995.

Příští série úloh bude věnována problematice relativnosti pohybu a setkáte se v ní se základními myšlenkami teorie relativity.

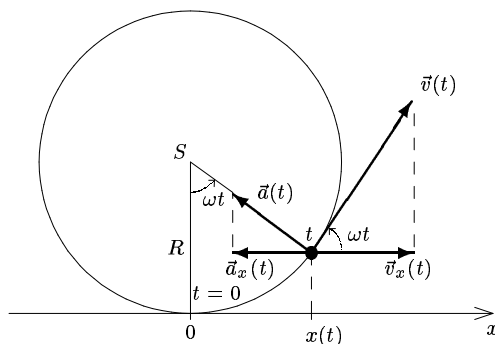
Dodatek:

Harmonický kmitavý pohyb a jeho charakteristiky

Představme si hmotný bod, pohybující se rovnoměrným pohybem po kružnici o poloměru R (viz obr.). V čase $t = 0$ je bod v místě O , *doba oběhu (perioda)* je T . Této periodě odpovídá *frekvence* $\nu = T^{-1}$ a *kruhová frekvence* $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$. Z obrázku vidíme, že kolmý průmět obíhajícího bodu do osy x bude konat kmitavý pohyb, okamžitou polohu průmětu v čase t lze z obrázku snadno určit:

$$x = x(t) = R \sin \omega t$$

Poněvadž je poloha průmětu dána *harmonickou funkcí* $\sin \omega t$, nazývá se jeho kmitavý pohyb *harmonickým kmitavým pohybem*.



Promítneme-li do směru osy x také okamžitou rychlost obíhajícího bodu, jejíž velikost je $v = \omega R$, a dostředivé zrychlení o velikosti $a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$, dostaneme pro tyto průměty vztahy

$$v_x(t) = v \cos \omega t = \omega R \cos \omega t, \quad a_x(t) = -a \sin \omega t = -\omega^2 R \sin \omega t$$

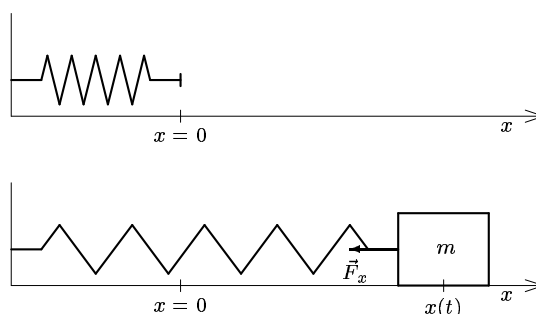
Využijeme-li znalostí z prvního dílu matematického seriálu, můžeme dospět ke stejným výsledkům pomocí derivací:

$$x(t) = R \sin \omega t,$$

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \omega R \cos \omega t, \quad a_x(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 R \sin \omega t = -\omega^2 x(t)$$

Z výsledků je vidět, že zrychlení harmonicky kmitajícího bodu je úměrné jeho výchylce z *rovnovážné polohy*. Výchylka je v našem případě totožná s okamžitou polohou kmitajícího bodu, rovnovážná poloha má souřadnici $x_0 = 0$. Se zrychlením $a_x(t)$ se hmotný bod pohybuje vlivem působení sil, jejichž výslednice je $F_x(t) = ma_x(t) = -m\omega^2 x(t)$. Můžeme učinit i opačný závěr: **Je-li hmotný bod, který může konat jednorozměrný pohyb (podél přímky x), podroben silovému působení, jehož výslednice je úměrná výchylce bodu z rovnovážné polohy a má k ní opačný směr (tzv. harmonická síla), bude konat harmonické kmity.** Toto tvrzení lze matematicky dokázat.

Typickým příkladem takové situace je pohyb tělíska na pružině.

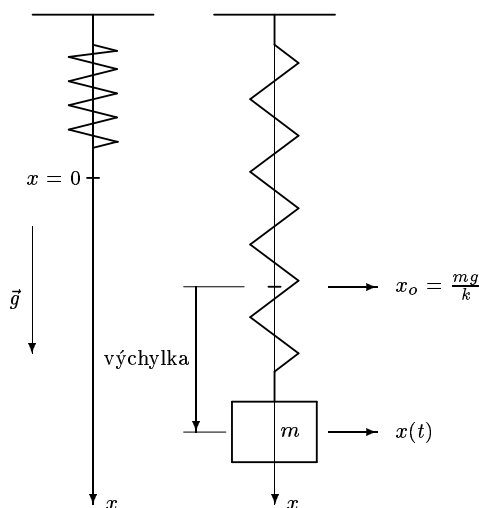


Je-li pružina nenapjatá, může tělísko spočívat na vodorovné podložce v klidu. (Třecí síly zanedbáváme.) Vychýlíme-li tělísko do polohy x podle obrázku, pružina se napne a působí na ně silou $F_x = -kx$. Pak podle druhého Newtonova zákona platí

$$ma_x = -kx, \quad \text{tj.} \quad a_x = -\frac{k}{m}x.$$

Porovnáme-li tento vztah se vztahem pro zrychlení průmětu kruhového pohybu, vidíme, že tělísko koná harmonické kmity s kruhovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Jejich perioda je $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. V rovnovážné poloze je $F_x = 0$ (pružina není ani napjata, ani stlačena). Rovnovážná poloha bude i obecně charakterizována skutečností, že v ní je výslednice sil působících na tělísko nulová.

Uvažujme nyní o kmitajícím tělísku na svislé pružině v homogenním tíhovém poli Země s tíhovým zrychlením $\vec{g}$.



Na těleso působí kromě pružné síly $F_x = -kx$ také konstantní síla tíhová $G = mg$. Pak $ma_x = -kx + mg \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)$. Označme $x_0 = \frac{mg}{k}$. Je-li těleso v této poloze, je $kx_0 = mg$ a pružná síla je kompenzována silou tíhovou. Vidíme, že x_0 představuje souřadnici rovnovážné polohy a rozdíl

$$x - x_0 = x - \frac{mg}{k}$$

je výchylkou z rovnovážné polohy. Zrychlení je opět úměrné výchylce z rovnovážné polohy, přičemž konstanta úměrnosti je stejná jako v případě vodorovné pružiny. Těleso bude při vychýlení z rovnovážné polohy konat harmonické kmity s toutéž frekvencí jako na vodorovné pružině. Rovnovážná poloha však nebude splývat s koncem nenapjaté pružiny, ale bude vůči němu posunuta o vzdálenost $\frac{mg}{k}$. Je-li těleso v rovnovážné poloze, je pružina napjata.

Závěr: Koná-li těleso harmonické kmity, pak působení dodatečné konstantní síly $\vec{P}$ nezmění frekvenci kmitů, ale posune rovnovážnou polohu o vzdálenost $x_0 = \frac{P}{m}$.