

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy university v Brně

SOUTĚŽNÍ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY 1994/1995
--

Čtvrtá série úloh

(25 bodů)

Každý z vás jistě občas použije okřídleného rčení "Všechno je relativní". Jeho hluboký smysl je v tom, že relativnost a její důsledky jsou součástí každodenního života. Stokoruna může být velkou nebo malou sumou podle toho, jak velkou celkovou částku máme k dispozici. Hlemýžď, považovaný za vzor pomalosti, se například vzhledem ke Slunci pohybuje obrovskou rychlostí asi 30 km/s. Podobných příkladů relativnosti bychom našli celou řadu.

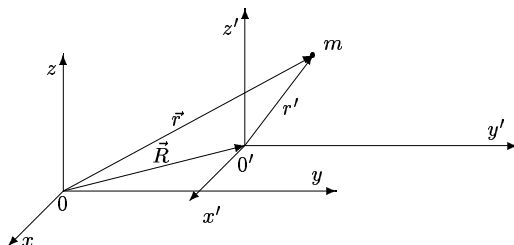
Dnešní série úloh je věnována relativnosti pohybu, tj. popisu pohybu pozorovateli, jejichž laboratoře jsou umístěny v různých vztažných soustavách, navzájem se pohybujících. Mezi veličinami popisujícími pohyb hmotných bodů vzhledem k různým vztažným soustavám platí převodní vztahy, které závisí na vzájemném pohybu vztažných soustav. Tyto vztahy se liší v případě tzv. klasické mechaniky, v jejímž rámci neexistuje mezní rychlost a hmotné body se tedy mohou pohybovat neomezeně rychle, a v případě relativistické mechaniky, k jejímž základním axiomům patří fakt, že žádný objekt se nemůže pohybovat větší rychlostí než je rychlost světla ve vakuu 300000 km/s. Vyřešením čtvrté série úloh byste o nich měli získat základní představu.

ÚLOHA č.1 (4 body)

Běžíme-li v dešti, zjišťujeme, že máme mokrou hruď a suchá záda. Určete, (a) jak velkou rychlostí V a (b) pod jakým úhlem α dopadá déšť na hrudník běžce, pohybujícího se rychlostí o velikosti $v = 5 \text{ ms}^{-1}$, padají-li dešťové kapky svisle k povrchu Země rychlostí $u = 3 \text{ ms}^{-1}$.

Poznámka: Projevem relativnosti pohybu je v tomto případě skutečnost, že z hlediska běžce padají kapky šikmo, zatímco stojící člověk prohlásí směr jejich pohybu za svislý. Také velikost rychlosti dopadu kapky je z hlediska každého z pozorovatelů jiná.

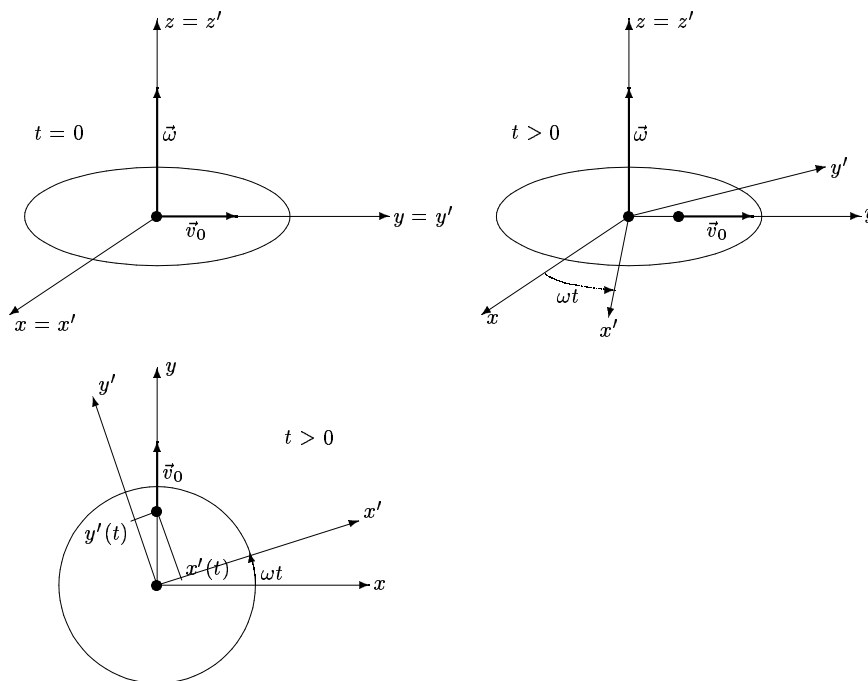
Vztažné soustavy $S = \langle 0; x, y, z \rangle$ a $S' = \langle 0'; x', y', z' \rangle$ s trvale rovnoběžnými souřadnicovými osami se pohybují navzájem translačním pohybem. Polohový vektor počátku $0'$ vzhledem k soustavě S v okamžiku t je $\vec{R}$, okamžitá rychlost soustavy S' vůči S je $\vec{v}$. Zapište vztah mezi polohovými vektory $\vec{r}, \vec{r}'$ a rychlostmi $\vec{u}, \vec{u}'$ hmotného bodu m , měřenými v soustavách S, S' .



ÚLOHA č. 2 (5 bodů)

V předchozí úloze vystupovali pozorovatelé, jejichž vztažné soustavy se navzájem pohybovaly translačním pohybem konstantní rychlostí $\vec{v}$. Situace bude složitější, jestliže jedna ze vztažných soustav rotuje vzhledem k druhé.

Uvažujme o vodorovném kotouči, který vzhledem k vodorovné podložce spjaté se Zemí rotuje stálou úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. Jedna otočka kotouče trvá $T = 8\text{s}$. Označme x, y, z resp. x', y', z' kartézské souřadnicové osy spojené s pevnou vodorovnou podložkou resp. s kotoučem. Společným počátkem obou soustav je střed kotouče. V každém časovém okamžiku je $z \equiv z'$, v časovém okamžiku $t = 0$ splývají osy x, x' a y, y' . Vztažnou soustavu spojenou s pevnou podložkou resp. s kotoučem označme $S = \langle 0; x, y, z \rangle$ resp. $S' = \langle 0; x', y', z' \rangle$. Hmotný bod se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí $\vec{v}_0$ po ose y vzhledem k pozorovateli v soustavě S . V čase $t = 0$ prochází bod počátkem soustavy souřadnic.

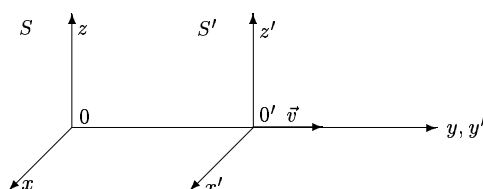


- (a) Vyjádřete polohový vektor $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ hmotného bodu vzhledem k soustavě S .
- (b) Vyjádřete polohový vektor $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ hmotného bodu vzhledem k soustavě S' .
- (c) Zakreslete tvar trajektorie hmotného bodu v rovině kotouče, tj. v souřadnicové rovině $x'y'$ v časovém intervalu $[0; 8]$ s.

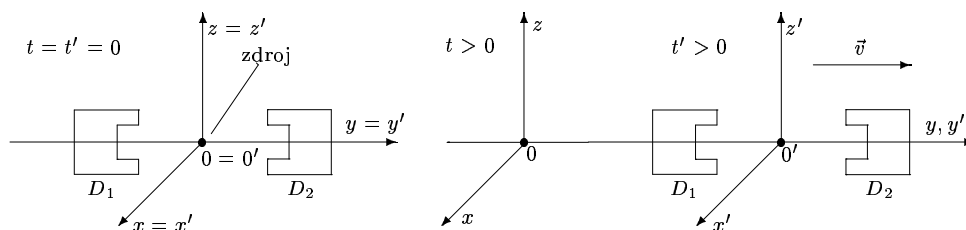
ÚLOHA č.3 (3 body)

Pravidlo pro skládání rychlostí, tj. vztah mezi rychlostmi $\vec{u}, \vec{u}'$ hmotného bodu vůči vztažným soustavám S, S' , pohybujícím se navzájem rychlostí $\vec{v}$, které jste odvodili v úloze 2, platí v rámci tzv. klasické (nerelativistické) mechaniky, kde neexistuje mezní rychlost. Ve skutečnosti nemohou pohybující se objekty překročit v žádné vztažné soustavě rychlost $c = 300\,000$ km/s, již se šíří světelný signál ve vakuu. Důsledkem existence této mezní rychlosti je jeden ze základních principů speciální teorie relativity, tzv. *princip stálé rychlosti světla*. Podle něj je rychlost světla ve vakuu stejná vzhledem ke všem inerciálním vztažným soustavám. (Platnost tohoto principu lze experimentálně ověřit, ať již přímo (Michelsonův pokus), nebo ověřením důsledků teorie relativity, která je na něm založena.) Přijmeme-li princip stálé rychlosti světla, musíme se vzdát klasického pravidla pro skládání rychlostí a připustit existenci řady neobvyklých jevů, k nimž patří například kontrakce délek, dilatace času, růst hmotnosti tělesa s jeho rychlostí. Jedním z nich je i tzv. *relativnost současnosti*.

Uvažujme o následujícím pokusu: Vztažná soustava $S' = \langle 0'; x', y', z' \rangle$ se pohybuje vzhledem k vztažné soustavě $S = \langle 0; x, y, z \rangle$ stálou rychlostí $\vec{v}$ tak, že $x' \parallel x$, $z' \parallel z$ a počátek $0'$ se pohybuje po ose y (viz obr.).



Předpokládejme, že v okamžiku, kdy počátek $0'$ splývá s 0 , si oba pozorovatelé v S i S' seřídí hodiny tak, aby ukazovaly čas 0 s. V počátku $0'$ je umístěn zdroj světla a na ose y' detektory D_1, D_2 , jejichž vzdálenosti l od zdroje jsou stejné. Detektory i zdroj jsou v klidu vůči S' .



Označme jako

UDÁLOST U_0 ... vyslání světelného signálu zdrojem v okamžiku $t = t' = 0$

UDÁLOST U_1 ... detekce světelného signálu detektorem D_1

UDÁLOST U_2 ... detekce světelného signálu detektorem D_2

Každá událost U je v dané vztažné soustavě určena čtyřmi souřadnicemi: třemi souřadnicemi místa, v němž nastala, a časem, v němž nastala – ten představuje čtvrtou souřadnici. Píšeme $U = (x, y, z, t)_S$ vzhledem k S resp. $U = (x', y', z', t')_{S'}$ vzhledem k S' .

- Zapište událost U_0 vzhledem k soustavám S a S' .
- Určete souřadnice x_1, z_1 a x'_1, z'_1 události U_1 a souřadnice x_2, z_2 a x'_2, z'_2 události U_2 .
- Budeme nyní pracovat jen s y -ovými a časovými souřadnicemi událostí. Označme

$$\begin{aligned} U_1 &= (y_1, t_1)_S & \text{resp.} & & U_1 &= (y'_1, t'_1)_{S'} \\ U_2 &= (y_2, t_2)_S & \text{resp.} & & U_2 &= (y'_2, t'_2)_{S'} \end{aligned}$$

Předpokládejte platnost principu stálé rychlosti světla. Světelný signál se tedy šíří rychlostí c jak vůči pozorovateli v S , tak vůči pozorovateli v S' . Porovnejte okamžiky t'_1, t'_2 a okamžiky t_1, t_2 , tj. rozhodněte, zda je t'_1 větší, rovno anebo menší než t'_2 a podobně pro t_1 a t_2 . Rozhodnutí zdůvodněte.

Na základě získaného výsledku objasněte pojem "relativnost současnosti".

ÚLOHA č. 4 (5 bodů)

Uvažujme opět o vztažných soustavách S a S' z Úlohy 3. (S' se vzhledem k S pohybuje stálou rychlostí $\vec{v}$ podél osy y , v čase $t = t' = 0$ je $0 = 0'$.)

- Předpokládejme, že události U_1 a U_2 nastaly v počátku soustavy S v časech t_1 a t_2 , kde $t_2 - t_1 = \Delta t > 0$. Je tedy

$$\begin{aligned} U_1 &= (y_1, t_1)_S = (0, t_1)_S, \\ U_2 &= (y_2, t_2)_S = (0, t_2)_S. \end{aligned}$$

Vzhledem k soustavě S' jsou tyto události popsány souřadnicemi $U_1 = (y'_1, t'_1)_{S'}$ a $U_2 = (y'_2, t'_2)_{S'}$. Označme $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. V důsledku principu stálé rychlosti světla platí

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Časový interval $\Delta t'$ mezi událostmi měřený hodinami v soustavě S' je tedy delší než časový interval Δt mezi týmiž událostmi, avšak měřený hodinami v soustavě S , v níž události nastaly ve stejném místě. Uvedený jev se nazývá *dilatace času*.

- Nechť je v soustavě S v klidu tyč, jejíž počátek má souřadnici y_3 a konec souřadnici y_4 , $y_3 < y_4$. Pak délka tyče $\Delta l = y_4 - y_3$ bez ohledu na to, v kterých okamžicích budou polohy počátku a konce zaznamenány. Aby byla délka tyče změřena v soustavě S' , musí být poloha y'_3 jejího počátku a poloha y'_4 jejího konce zaznamenána v témže čase, např. $t' = 0$. Máme tedy události $U_3 = (y'_3, 0)_{S'} = (y_3, t_3)_S$; $U_4 = (y'_4, 0)_{S'} = (y_4, t_4)_S$. Při označení $\Delta l' = y'_4 - y'_3$ platí

$$\Delta l' = \Delta l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Délka tyče Δl měřená v soustavě S' , vůči níž se tyč pohybuje, je tedy menší než její klidová délka v soustavě S . Tento jev se nazývá *kontrakce délek*.

Na základě znalosti těchto vztahů řešte nyní znovu Úlohu 1 (b) v rámci speciální teorie relativity.

Poznámka 1.: Pro případ, že v je rychlost Země vzhledem k Slunci a $u = c$, představuje získaný vztah pro $\tan \alpha$ popis jevu zvaného *aberrace světla*. (Světelný paprsek ze vzdálené hvězdy dopadá na Zemi pod jiným úhlem, než jaký odpovídá spojnici hvězdy v okamžiku emise paprsku a Země v okamžiku jeho dopadu. Tento úhel se v průběhu roku mění a umožňuje tak dokázat oběh Země kolem Slunce.)

Poznámka 2.: Je-li událost popsána v S resp. S' souřadnicemi $U = (x, y, z, t)_S = (x', y', z', t')_{S'}$, platí tzv. *Lorentzova transformace*

$$\begin{aligned} x &= x', & y &= \frac{y' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & z &= z', & t &= \frac{t' + \frac{vy'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ x' &= x, & y' &= \frac{y - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & z' &= z, & t' &= \frac{t - \frac{vy}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Je-li $v \ll c$, můžeme považovat rychlost světla c v předešlých formulích za nekonečnou. Pak tyto vztahy přejdou v klasickou Galileovu transformaci

$$\begin{aligned} x &= x', & y &= y' + vt', & z &= z', & t &= t', \\ x' &= x, & y' &= y - vt, & z' &= z, & t' &= t. \end{aligned}$$

Pro skládání rychlostí platí v rámci speciální teorie relativity pravidlo

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_y}{c^2}}, & u_y &= \frac{u'_y + v}{1 + \frac{vu'_y}{c^2}}, & u_z &= u'_z \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_y}{c^2}}, \\ u'_x &= u_x \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_y}{c^2}}, & u'_y &= \frac{u_y + v}{1 - \frac{vu_y}{c^2}}, & u'_z &= u_z \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_y}{c^2}}, \end{aligned}$$

kde jsme označili $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)_S$ resp. $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)_{S'}$ rychlost částice měřenou v soustavě S resp. S' . Všimněte si, že dosadíte-li za u'_y kteroukoli hodnotu z intervalu $< 0, c >$, nepřevyší ani u_y rychlost světla. Je to v souladu s existencí mezní rychlosti c .

ÚLOHA č. 5 (8 bodů)

V souvislosti s relativností pohybu dochází k zajímavému jevu při detekci zvukového nebo světelného signálu. Jestliže se zdroj a detektor navzájem pohybují, liší se detekovaná frekvence od frekvence vysílané zdrojem a závisí na rychlosti pohybu zdroje vůči detektoru (tzv. *Dopplerův jev*).

(a) *Dopplerův jev při šíření zvukových vln*

Předpokládejte, že zdroj Z , vysílající zvuk o frekvenci $f_0 = 440$ Hz se vůči prostředí pohybuje rychlostí $\vec{v}$ o velikosti $v = 30$ ms⁻¹. Pozorovatel P je vzhledem k prostředí v klidu. Určete frekvenci f detekovanou pozorovatelem, jestliže se zdroj

- vzdaluje
- přibližuje.

Rychlost šíření zvuku ve vzduchu je $w \doteq 334$ ms⁻¹.

(Tento jev jste jistě pozorovali např. při přibližování a vzdalování projíždějícího motocyklu.)

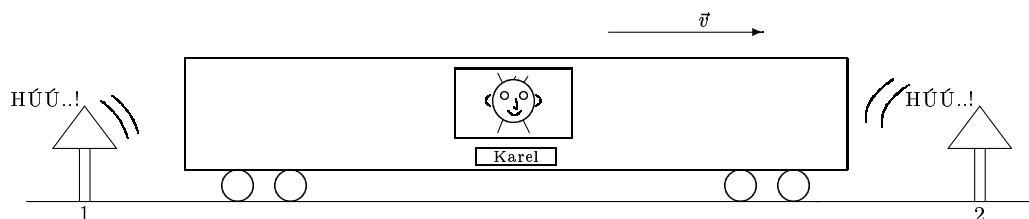
Řešte předchozí úlohu za předpokladu, že zdroj je v klidu vůči prostředí, zatímco pozorovatel se pohybuje rychlostí $\vec{v}$.

(b) *Aplikace Dopplerova jevu při šíření zvukových vln*

Představte si nádraží, na jehož opačných koncích jsou umístěny dvě stejné sirény, vydávající tón o frekvenci $f = 200$ Hz. Nádražím právě projíždí vlak rychlostí 18 km/hod. V prostředním vagónu sedí zvědavý fyzik Karel a poslouchá zvuk sirén. Co uslyšel Karel, když byla zapnuta a) jen siréna první, b) jen siréna druhá? Když byly zapnuty obě sirény najednou, byl Karel překvapen tím, co slyšel. Se svým poznatkem se svěřil svým dvěma kamarádům, rovněž zvědavým fyzikům, a ti mu řekli své domněnky:

Honza: Díky Dopplerovu jevu jsi slyšel přední sirénu houkat s frekvencí vyšší než 200 Hz, zadní naopak s nižší frekvencí. Interferencí těchto dvou různých tónů vznikl tón s frekvencí opět 200 Hz s patrnými záznějemi neboli rázy. Tón o frekvenci 200 Hz je tedy slyšet střídavě hlasitě a potichu, tj. zeslabující se a opět zesilující.

Kamil: Mezi sirénami vzniklo stojaté vlnění, samozřejmě o frekvenci 200 Hz. Jak jsi míjel jednotlivé kmitny a uzly, slyšel jsi zvuk rychle se zeslabovat a zesilovat - v kmitně byl nejsilnější, v uzlu slabý nebo vůbec žádný, takže jsi slyšel jakési "rázy". Který z Karlových kamarádů měl pravdu, měl-li ji vůbec někdo? Co vlastně Karel slyšel? Ověřte, že složením dvou tónů podle Honzova vysvětlení dostaneme původní frekvenci 200 Hz. Vypočtete frekvenci rázů F a srovnajte ji s frekvencí "rázů" podle Kamilova vysvětlení. Jaké vysvětlení byste podali Karlovi vy? (Rychlost zvuku je $w = 334$ m/s.)



(c) *Dopplerův jev při šíření světelných vln*

Úvahami o Dopplerově jevu při šíření zvukových vln jsme zjistili, že vztahy mezi vysílanou a detekovanou frekvencí zvukového signálu umožňují rozlišit, zda se pohybuje zdroj vůči pozorovateli a prostředí nebo pozorovatel vůči zdroji a prostředí. Takové rozlišení při šíření světelného signálu není možné, neboť by to bylo v rozporu s principem relativity. Vztahy získané pro zvuk nelze proto využít pro světlo pouhým dosazením $w = c$.

Vztah mezi detekovanou a vysílanou frekvencí světelného signálu tedy bude souviset pouze se vzájemnou rychlostí zdroje a pozorovatele. (Třetí objekt, jímž bylo v případě zvuku hmotné prostředí, nemá v popisu šíření světelného signálu svůj ekvivalent.)

Na základě úvah o dilataci času odvoďte vztah mezi vysílanou a detekovanou frekvencí světelného signálu, je-li velikost rychlosti zdroje vůči pozorovateli v a jestliže se zdroj

- k pozorovateli přibližuje,
- od pozorovatele vzdaluje.

ÚLOHA č.6 – prémiová

Každý jistě viděl, jak se po srážce běžící a stojící kulečnickové koule obě rozletí pod pravým úhlem.

- (a) Ukažte, že pokud je srážka pružná, tj. neztrácí-li se při ní kinetická energie, je pravost úhlu důsledkem zákonů zachování energie a hybnosti. (Kulečnickové koule mají stejnou hmotnost.)
- (b) V teorii relativity jsou vzorce pro hybnost a energii jiné než v nerelativistické mechanice. Pro hybnost tělesa o klidové hmotnosti m , pohybujícího se rychlostí $\vec{v}$ totiž platí vztah

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

energie je dána vztahem

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Uvažujte o srážce dvou stejných relativistických částic, z nichž jedna je před srážkou v klidu a druhá má rychlost $\vec{v}$, a posuďte, zda i v tomto případě se rozletí pod úhlem 90° . Určete úhel, který svírají rychlosti částic po srážce za předpokladu, že velikosti obou rychlostí po srážce jsou stejné.