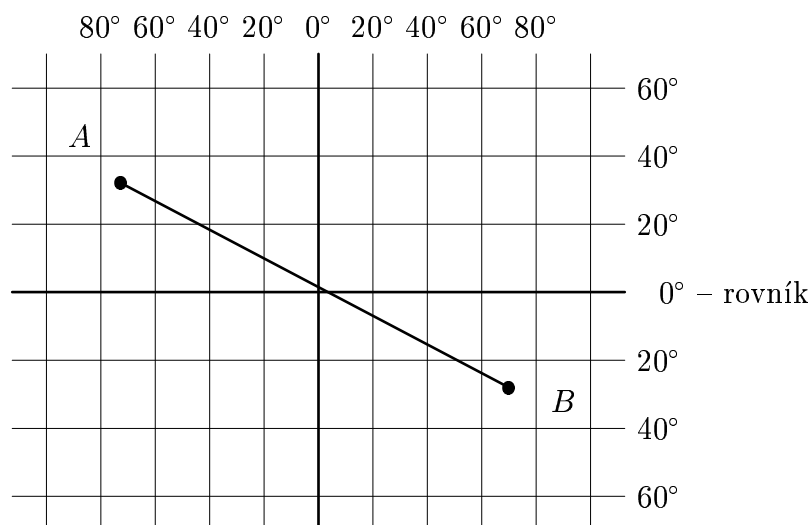
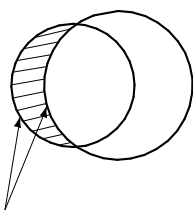


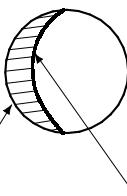


Malíř A:



oblouky kružnic

Malíř B:



oblouk kružnice oblouk elipsy

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy university v Brně

SOUTĚŽNÍ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY 1995/1996

Čtvrtá série úloh — 1. kategorie

(25 bodů)

Přehled o základních skutečnostech a jevech souvisejících s vesmírem, sluneční soustavou i samotnou Zemí jako její součástí patří samozřejmě k nezbytné "informační výbavě" nejen každého maturanta, ale každého gramotného obyvatele této planety. Jistě se těžko můžeme setkat s člověkem, který neví, že je Země kulatá, rotnuje kolem své osy a obíhá kolem Slunce, že existují fáze Měsíce a jevy jako zatmění Slunce a zatmění Měsíce, že do sluneční soustavy patří kromě Země dalších osm planet a že světlo z hvězdy nejbližší sluneční soustavě k nám dorazí zhruba za čtyři roky. Tyto i řada jiných skutečností a jevů jsou pro nás tak běžné, že nás většinou nenapadne o nich hlouběji uvažovat. Přitom jde o věci nanejvýš zajímavé a tak se v poslední sérii úloh letošního ročníku zkusíme nad některými z nich zamyslet.

ÚLOHA č.1 (7 bodů)

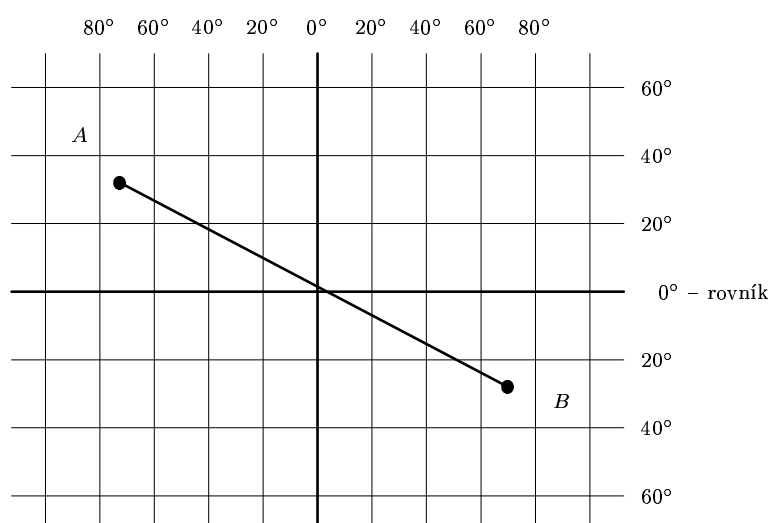
Země

(a) *Vzdálenost*

Úkolem námořního kapitána je dovést loď z mysu Dobré naděje k místu ležícímu na jižním pobřeží Austrálie na téže zeměpisné šířce po nejkratší možné trase. Na základě zeměpisné polohy míst startu a cíle zjištěných z mapy, eventuálně dalších potřebných údajů o Zemi, uvedených ve Fyzikálních a matematických tabulkách, určete délku této optimální dráhy. Jak se zjištěná vzdálenost liší od nejkratší spojnice daných míst na běžné mapě? Jak byste trasu vytyčili na mapě a na glóbusu?

Poznámka:

Při skutečných cestách zaoceánských lodí se námořníci požadavkem nejkratší dráhy zpravidla neřídí. Námořní mapy se od běžných map dosti liší. Jsou kresleny v tzv. *Mercatorově projekci* (Mercator byl nizozemský zeměpisec žijící v 16. století), v níž jsou poledníky i rovnoběžky zobrazeny jako soustava rovnoběžných přímek. Vzniká tak obdélníková síť (viz obrázek). Trasy lodí se v těchto mapách vytyčují jako přímkové — tzv. *kosoběžky* neboli *loxodromy*. Jejich výhodou je tzv. stálý kurz, neboť svírají pevný úhel s poledníky, které přetínají. (Nejkratší spojnice dvou míst, vyznačená na mapě, se nazývá *ortodroma*.)



Obr. 1: Síť Mercatorovy mapy. Vodorovné přímky znázorňují rovnoběžky, svislé poledníky. Úsečka spojující místa A , B je loxodroma.

(b) *Čas*

Zamysleli jste se někdy nad zdánlivě jednoduchou otázkou: "Kolik je hodin?" ? I když je dnes základní jednotka času, jedna sekunda, velmi precizně definována pomocí frekvence záření cesiového atomu, nejběžnější jednotky užívané v každodenním životě jsou odvozeny od pohybů Země (případně Měsíce). V souvislosti s pohybem Země kolem vlastní osy a kolem Slunce můžeme hovořit o čase slunečním, hvězdném, místním a pásmovém. Vysvětlete podrobněji, co tyto čtyři pojmy znamenají

a co vlastně sděluje běžná odpověď na častou otázku: "Kolik je hodin?".
Odpovědi dokumentujte vhodně zvolenými příklady časových údajů.

(c) *Noc a den*

Víte, že každou polokouli naší Země lze podle charakteristického střídání dne a noci rozdělit na pět pásem zeměpisné šířky?

I.	0^0	-	49^0	...	pásmo normálního střídání dne a noci
II.	49^0	-	$65^030'$	...	pásmo bílých nocí
III.	$65^030'$	-	$67^030'$	...	pásmo půlnočního Slunce
IV.	$67^030'$	-	$83^030'$	...	pásmo černých dní
V.	$83^030'$	-	90^0	...	pásmo bez zavedeného názvu

Pokuste se podrobněji popsat střídání dne a noci v jednotlivých pásmech v průběhu celého roku. Potřebné údaje o pohybech Země kolem její osy i kolem Slunce najdete ve Fyzikálních a matematických tabulkách.

ÚLOHA č.2 (5 bodů)

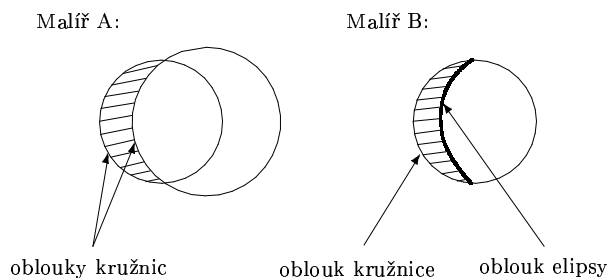
Měsíc

(a) *Fáze Měsíce*

Každý jistě umí vyjmenovat čtyři fáze Měsíce tak, jak je můžeme vidět na obloze: nov, první čtvrt, úplňk, poslední čtvrt. V období mezi novem a úplňkem Měsíc takzvaně *dorůstá*, mezi úplňkem a novem naopak *couvá*. Pomůckou, která nám umožní snadno jednotlivé fáze rozpoznat, je skutečnost, že srpek dorůstajícího Měsíce má tvar písmene *D*, couvající Měsíc se podobá stále více písmenu *C*. Platí toto pravidlo na každém místě zeměkoule? Vysvětlete podrobně vznik měsíčních fází.

(b) *Záhada měsíčního srpku*

Malíři *A* a *B* kreslili noční krajinu se srpkem Měsíce takto (obr. 2).:



Obr. 2

Který obrázek je správně a proč?

(c) *Proč Měsíc obíhá kolem Země a nikoliv kolem Slunce?*

Porovnejte zhruba velikost gravitační síly, kterou je Měsíc přitahován k Zemi, s velikostí síly, kterou jej přitahuje Slunce. Jak je možné, že Měsíc nespadne na Slunce? Údaje potřebné pro výpočet velikostí gravitačních sil vyhledejte ve Fyzikálních a matematických tabulkách.

ÚLOHA č.3 (5 bodů)

Slunce

Naše nejbližší hvězda — Slunce — osvětluje všechny objekty pohybující se v její blízkosti (o blízkosti lze hovořit, i když jde o obrovské vzdálenosti, například v porovnání se vzdálenostmi ostatních hvězd). V důsledku pohybů planet a jejich měsíců vznikají zajímavé úkazy — zatmění. O těchto jevech bychom mohli hovořit velmi dlouho a stále by nebyly problémy s nimi spojené vyčerpány. Mohli bychom se například zajímat nejen o zatmění Měsíce a Slunce, pozorovaná ze Země, ale i o zatmění Země pozorovaná z Měsíce. Všimněme si však nyní pouze těch zatmění, která každý z nás už někdy viděl — zatmění Měsíce nebo Slunce očima pozemského pozorovatele. Odpovězte na následující otázky:

- (a) Která zatmění nastávají častěji, sluneční nebo měsíční?
- (b) Je vidět sluneční nebo měsíční zatmění ze všech míst na povrchu Země?
- (c) Liší se nějak zatmění Slunce na severní a na jižní polokouli? Pokud ano, jak?

Všechny odpovědi zdůvodněte.

ÚLOHA č.4 (3 body)

Planety

Pohyb devíti planet sluneční soustavy i pohyb všech těles obíhajících kolem Slunce, například komet, se řídí známými Keplerovými zákony:

- (1) Planety obíhají kolem Slunce po elipsách, v jejichž společném ohnisku je Slunce.
- (2) Plocha opsaná průvodičem planety za jednotku času je stálá.
- (3) Poměr třetí mocniny velké poloosy eliptické dráhy planety a druhé mocniny její oběžné doby je pro všechny planety stejný.

Johann Kepler formuloval svoje zákony na základě pečlivého rozboru pozorování pohybu Marsu, která prováděl jeho předchůdce Tycho Brahe. Dnes je umíme odvodit z Newtonových pohybových zákonů a jeho zákona všeobecné gravitace, ale tento postup vyžaduje znalost vyspělého matematického aparátu. Pokuste se však zamyslet nad následujícím problémem, k jehož vyřešení stačí matematiky jen velmi málo:

Platnost třetího Keplerova zákona pro jakékoli těleso obíhající kolem Slunce umožňuje nalézt hodnotu poměru třetí mocniny velké poloosy oběžné dráhy a druhé mocniny příslušné oběžné doby společnou pro všechna taková tělesa na základě úvah o jediném z nich. Určete tuto hodnotu vyšetřením pohybu co nejvhodněji zvolené hypotetické "modelové" planety.

ÚLOHA č.5 (5 bodů)

Hvězdy

- (a) *Vzdálenosti hvězd*

Obrovské vzdálenosti hvězd je velmi nepohodlné vyjadřovat pomocí

délkových jednotek běžně užívaných v pozemských rozměrech. Proto astronomové definují pro účely měření vzdálenosti hvězd speciální, vhodnější, jednotky:

<i>světelný rok</i>	... vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za 1 rok,
<i>parsek</i>	... vzdálenost, ze které je střední poloměr dráhy Země kolem Slunce vidět pod úhlem jedné obloukové vteřiny (předpokládáme, že dráha je kruhová a pozorovatel je na přímce jdoucí středem této kružnice kolmo k její rovině),
<i>astronomická jednotka</i>	... střední vzdálenost Země od Slunce.

Určete vztahy mezi uvedenými jednotkami. Vyjádřete tyto jednotky v metrech (stačí s přesností na tři platná místa). Jak byste postupovali při měření vzdálenosti hvězdy?

(b) *Hvězdná velikost*

Důležitou charakteristikou hvězd je tzv. *hvězdná velikost* neboli *magnituda*. Údaj o hvězdné velikosti říká, jak jasná se jeví hvězda na obloze. Tato "zdánlivá" jasnost závisí nejen na tom, jak intenzivním zdrojem světla hvězda je, ale i na její vzdálenosti od pozorovatele. Poněvadž stupnice jasnosti hvězd sestavená pozorovatelem by byla velmi subjektivní, je třeba definovat hvězdnou velikost fyzikálně korektně, pomocí tzv. *fotometrických veličin*. Všimněme si některých z nich blíže.

Hvězda, jako každý objekt o vysoké teplotě, je intenzivním zdrojem elektromagnetického záření všech vlnových délek. (Zastoupení různých vlnových délek ve spektru záření hvězdy není stejné a závisí na její teplotě.) energii tohoto záření vyslanou do prostoru za jednotku času nazýváme *zářivým tokem* a udáváme jej ve *wattech*. Jeho část odpovídající vlnovým délkám viditelného světla, tj. zhruba od 400 nm do 750 nm, a vyvolávající tedy zrakový vjem, představuje *světelný tok* Φ , jehož jednotkou je *lumen* (lm). Světelný tok vyslaný do jednotkového prostorového úhlu (jednotka prostorového úhlu je *steradián*) určuje *svítivost* zdroje I . Září-li zdroj všemi směry stejně, je $I = \frac{\Phi}{4\pi}$. Jednotka svítivosti je *kandela* (cd). Dopadá-li na plochu ΔS povrchu osvětleného tělesa světelný tok $\Delta\Phi$, pak podíl $E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}$ nazýváme *osvětlení* tělesa v daném místě. Jeho jednotkou je *lux* (lx). Je zřejmé, že subjektivní pocit "jasnosti" hvězdy úzce souvisí s osvětlením pozorovacího místa

způsobeným sledovanou hvězdou, ale i se závislostí zrakového vjemu na velikosti tohoto osvětlení. Tato závislost je zhruba logaritmická, podobně jako souvislost sluchového vjemu s intenzitou zvuku (Weberův - Fechnerův zákon). Je tedy přirozené definovat *hvězdnou velikost* (*magnitude*) m jako veličinu úměrnou dekadickému logaritmu osvětlení $\log E$. Ve starověku byly nejjasnější hvězdy oceněny jako hvězdy první velikosti. Hvězdami druhé, třetí a vyšších velikostí byly, snad poněkud paradoxně, nazývány hvězdy slabší. Později (Pogson 1856) byla stupnice matematicky vyjádřena tak, že hvězda každé následující velikosti je n -krát slabší než hvězda velikosti předcházející, tj. dává n -krát menší osvětlení. Číslo n je stálé a osvětlení od hvězdy první velikosti je oproti osvětlení způsobenému hvězdou šesté velikosti stonásobné.

Nyní již máte k dispozici všechny údaje pro zodpovězení následujících otázek:

- (a) Dvě hvězdy o magnitudách m_1, m_2 dávají v pozorovacím místě na Zemi osvětlení E_1, E_2 . Vyjádřete rozdíl $m_2 - m_1$ pomocí E_1, E_2 .

Poznámka:

Je zřejmé, že hvězdná velikost nemusí být nutně celočíselná a že existují i hvězdy s nulovou nebo zápornou magnitudou. Např. Sirius má magnitudu -1,6, Vega 0,1, Altair 0,9, Slunce asi -27. (Hodnota 1 je vlastně smluveným standardem hvězdné velikosti. Žádná ze známých hvězd tuto jasnost přesně nemá.)

- (b) Hvězdy H_1 a H_2 jsou zdroji stejné svítivosti $I_1 = I_2$. Přitom $m_1 - m_2 = 5$. Lze na základě těchto údajů učinit nějaký závěr o vzdálenostech obou hvězd od sluneční soustavy? Jaký?
- (c) Hvězdná velikost Slunce je -26,8, Měsíce v úplňku -12,6. Kolikrát větší osvětlení na povrchu Země dává Slunce než Měsíc? Jaký je poměr svítivosti Slunce a Měsíce? Další potřebné údaje vyhledejte ve Fyzikálních a matematických tabulkách.

Poznámka:

Měsíc sice vysílá pouze odražené světlo, fotometrické veličiny jsou však definovány stejně jako u zářících těles.

ÚLOHA č.6 — prémiová

Proč není na Měsíci atmosféra?

Proč si Titan (jeden z měsíců Saturna) uchoval atmosféru a Merkur nikoliv?

Formulace těchto otázek je sice velmi jednoduchá, odpovědi na ně však již tak jednoduché nejsou. Vyžadují znalosti nejen z mechaniky, ale i z molekulové fyziky.

Pokuste se odpovědět na uvedené otázky alespoň kvalitativně. Dobří počtáři je mohou doprovodit úvahou obsahující srovnání rychlosti molekuly nutné pro její únik z dosahu gravitačního působení Měsíce (popřípadě Titanu, Merkura) a střední nebo střední kvadratické rychlosti molekul plynu o určité teplotě. Potřebné číselné údaje vyhledejte v literatuře.

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy university v Brně

SOUTĚŽNÍ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY 1995/1996
--

Čtvrtá série úloh — 2. kategorie

(25 bodů)

Dnešní, poslední, sérii úloh fyzikální korespondenční soutěže by už skoro bylo možné nazvat prázdninovou. Proto jsou úlohy svým způsobem zábavné, i když nikoli oddechové. Přestože je můžeme zařadit do různých oblastí fyziky (mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa, hydromechanika, optika), mají jeden rys společný: týkají se soustav složených z konečného počtu stejných nebo podobných objektů. Úlohy tohoto typu lze řešit nalezením tzv. rekurentních vztahů, umožňujících popsat vlastnosti $(i+1)$ -tého objektu pomocí vlastností i -tého nebo, obecněji, pomocí vlastností objektů předchozích. Postupnou aplikací těchto vztahů lze nakonec popsat chování všech objektů, tedy celého systému. (Tento postup poněkud připomíná matematickou indukci.) Některé z úloh však lze vyřešit s trochou vtípu, uvědomíme-li si obecné zákonitosti platné pro systém jako celek. V takových případech se ukazuje, že stačí všimnout si prvního a posledního objektu, jako by tam ostatní vůbec nebyly.

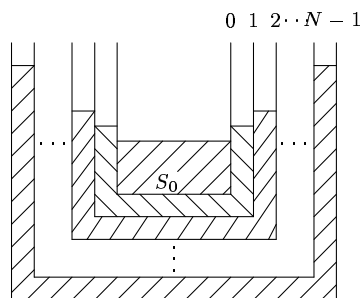
ÚLOHA č.1 (5 bodů)

Válce

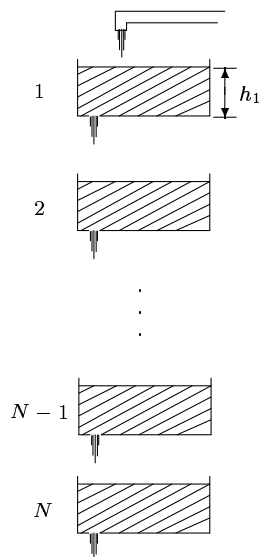
Velké množství dutých válců se zmenšujícími se průřezy je vnořeno do sebe a zalito vodou tak, že válec s menší plochou dna vždy plave ve válci, do kterého je vsazen, největší válec plave ve velké nádrži s vodou (viz obr. 1). Do nejmenšího válce vhodíme

- (a) hliníkovou krychli o hraně a ,
- (b) korkovou krychli o hraně a .

Po vhození krychle dovnitř v sobě válce stále plavou. O kolik a kterým směrem se (vzhledem k zemi) posune dno nejmenšího válce ?



Obr. 1



Obr. 2

ÚLOHA č.2 (3 body)

Vodohospodářský problém

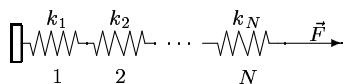
V systému N válcových nádrží proudí voda podle obr. 2. Výška hladiny v nejvyšší nádrži je udržována na stálé hodnotě h_1 . Otvary ve dnech nádrží mají obecně různé průřezy, které jsou však vždy mnohem menší než plochy hladiny v nádržích. Jediný další údaj kromě výšky h_1 , který se nám o tomto zařízení podařilo zjistit, je rovnost průřezu S výtokových otvorů nejvyšší a nejnižší nádrže. Můžeme z těchto údajů určit

- jaká je výška hladiny ve spodní nádrži a ,
- kolik vody proteče tímto zařízením za sekundu?

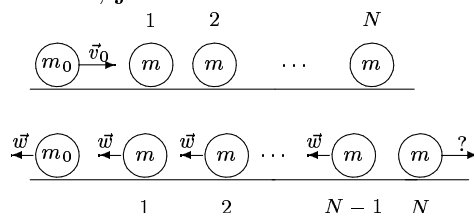
Předpokládáme, že žádná voda se neztrácí, t.j. nevytéká z žádné z nádrží jinudy než otvorem ve dně (tedy ani nepřetéká přes okraj).

Pružiny

Uvažujme N ideálních pružin o tuhostech $k_1, k_2, \dots, k_N$ spojených podle obr. 3. Chová se takovýto systém ideálních pružin také jako ideální pružina? Pokud ano, jakou má tuhost? Pokud ne, jakou silou musíme táhnout, abychom dosáhli prodloužení Δx ?



Obz. 3



Obz. 4

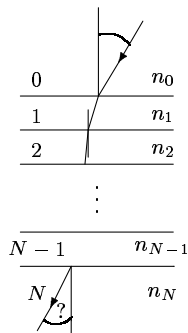
Kulečník

Za předpokladu, že s výjimkou nulté (t.j. té koule, co přiletěla zleva) a poslední koule se každá koule srazila právě dvakrát, určete hmotnost m koulí a rychlost poslední koule po proběhnutí všech srážek. Je úloha jednoznačně řešitelná bez tohoto předpokladu?

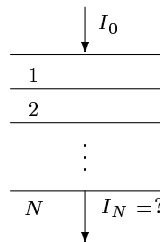
13

Lom světla

Máme soustavu N rovnoběžných optických rozhraní mezi prostředími s indexy lomu $n_0, n_1, \dots, n_N$. Na první rozhraní dopadá paprsek pod úhlem α (viz obr. 5). Pod jakým úhlem vychází za posledním rozhraním, předpokládáme-li, že na žádném rozhraní nedojde k úplnému odrazu? Jaké musí být indexy lomu $n_0, n_1, \dots, n_N$, aby byl tento předpoklad splněn?



Obr. 5



Obr. 6

ÚLOHA č.6 (5 bodů)

Odraz a průchod světla

Máme soustavu N rovnoběžných optických rozhraní. Na první kolmo dopadá nekoherentní svazek světla o intenzitě I_0 (viz obr. 6). Na každém rozhraní se odrazí paprsek o intenzitě $R \cdot I$, kde I je intenzita paprsku na toto rozhraní dopadajícího. S jakou intenzitou světlo na druhé straně ze soustavy vychází?

Poznámka 1:

Stejnou odrazivost R všech rozhraní lze zajistit například střídáním dvou hodnot indexu lomu prostředí mezi nimi, tj. $n_1, n_2, n_1, n_2, \dots$

Poznámka 2:

Nezapomeňte, že paprsek se na rozhraní částečně odrazí a částečně jím projde bez ohledu na to, z které strany na ně dopadá.

ÚLOHA č.7 — prémiová

Skládání krychlí

Máme k dispozici neomezeně velkou zásobu stejných krychlí o hraně a a hmotnosti m .

- (a) Jaké největší vodorovné vzdálenosti D od okraje první krychle (viz obr. 7) můžeme dosáhnout, budeme-li je na sebe skládat tak jako na obrázku? První krychle leží na zemi, každá další leží na právě jedné krychli, na každé krychli leží právě jedna krychle. Žádné další podmínky na skládání krychlí neklademe.
- (b) Jak se změní výsledek, budeme-li požadovat, aby si na pravý okraj horní krychle mohla sednout moucha o hmotnosti m_0 , aniž by se sloupec zhroutil?
- (c) V praxi ovšem nemůžeme skládat krychle naprosto přesně. Jak se změní maximální vzdálenost D , jestliže si u každé krychle necháme rezervu d — každá krychle tedy bude posunuta o d oproti své ideální poloze? Jak vysoký bude sloupec krychlí, budeme-li chtít dosáhnout vzdálenosti D' ?

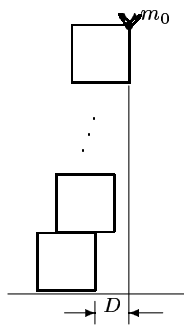
Číselně řešte pro $a = 10$ cm, $m = 0.1$ kg, $m_0 = 0.5$ kg (hodně těžká moucha), $d = 0.5$ mm, $D' = 10$ m.

Poznámka:

Při řešení části (c) by se vám mohlo hodit, že pro hodně velká n platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \ln(n) + \gamma,$$

kde γ je tzv. Eulerova konstanta $\gamma = 0,5772156649015\dots$



Obr. 7