FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

SOUTĚŽNÍ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY 1996/1997

Druhá série úloh

(25 bodů)

Při zběžném pročtení zadání úloh právě předkládané série korespondenční soutěže by méně pozorný čtenář mohl nabýt dojmu, že oproti dosavadní zvyklosti nemají tentokrát příliš mnoho společného. To proto, že je můžeme zařadit do různých tématických celků fyziky: První dvě spadají do různých oblastí mechaniky, třetí se týká problematiky absorpce záření při průchodu látkou a čtvrtá souvisí s rozpadem radioaktivních jader. Pečlivější úvaha však ukáže, že jejich společným rysem je matematický tvar rovnice vyjadřující závislost změny veličiny y, která charakterizuje daný fyzikální proces jakožto závisle proměnná, na časové resp. prostorové souřadnici t resp. x, nebo na jiné veličině, vystupující v roli nezávisle proměnné.

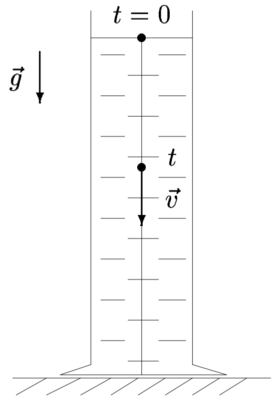
Sama funkce $y = y(t)$ resp. $y = y(x)$ představuje tzv. *exponenciální závislost*, pomocí níž lze dobře popsat celou řadu fyzikálních situací. Blíže se s ní seznámíme v prémiové úloze.

<u>ÚLOHA č.1</u> (7 bodů)

Pohyb tělesa v odporujícím prostředí

Hliníková kulička o průměru 1 mm je vložena do vysoké válcové nádoby s vodou a volně puštěna (obr. 1). Velikost síly charakterizující odpor prostředí proti pohybu kuličky lze v nejhrubším přiblížení popsat tzv. Stokesovým vztahem $F_{odp} = 6\pi\eta r v$, kde v je velikost okamžité rychlosti kuličky, r její poloměr a η dynamická viskozita prostředí (pro vodu η =1,0.10^{-3} Pa s^{-1}). Hustota hliníku je $\rho = 2,7.10^3$ kg m^{-3} a vody $\rho_V = 1,0.10^3$ kg m^{-3}.

$\boxed{u = u(t)}$



Obr. 1

(a) Určete velikost rychlosti v_m, kterou kulička nemůže při žádné výšce nádoby překročit (tzv. *mezní rychlost*).

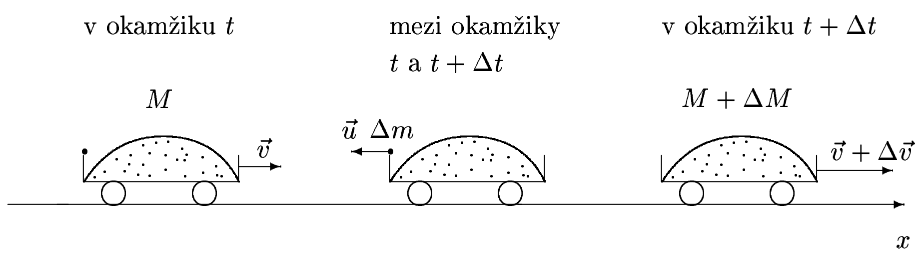
(b) Označte $u = v_m - v$ odchylku mezní rychlosti od rychlosti okamžité a Δu její změnu za velmi krátký časový úsek Δt. Ukažte, že změna veličiny u za jednotku času, tj. $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, je přímo úměrná okamžité hodnotě u a určete konstantu úměrnosti.

<u>ÚLOHA č.2</u> (8 bodů)

Pohyb tělesa s proměnnou hmotností

Plochý železniční vůz s nákladem štěrku stojí na ideálně vodorovné trati. Tření a odpor prostředí jsou zanedbatelné. Hmotnost vozu s nákladem a člověkem nacházejícím se ve voze je M_0. Člověk začne vyhazovat štěrk podél trati tak, že relativní rychlost $\vec{v}_r$ kaménků vzhledem k vozu je stálá a hmotnost štěrku, který za velmi krátkou dobu Δt opustí vůz, je Δm. Změna rychlosti vozu za tuto dobu je $\Delta \vec{v}$. Okamžitou hmotnost vozu s člověkem a zbytkem nákladu označte M, jeho okamžitou rychlost $\vec{v}$ a rychlost štěrkových kaménků vůči trati nechť je $\vec{u}$ (obr. 2). (Vyjádřete $\vec{u}$ pomocí $\vec{v}$ a $\vec{v}_r$.)

$\boxed{M = M(v)}$



Obr. 2

(a) Považujte soustavu tvořenou vozem s člověkem a zbytkem nákladu a vyhozeným štěrkem o hmotnosti Δm v každém okamžiku za izolovanou. (Tento předpoklad je realistický proto, že vnější silové působení na soustavu je kompenzováno — vysvětlete.) Zapište její hybnost $\vec{p}_t$ v okamžiku t a hybnost $\vec{p}_{t+\Delta t}$ v okamžiku $t+\Delta t$. Jaký je vztah mezi $\vec{p}_t$ a $\vec{p}_{t+\Delta t}$? Jaký vztah platí mezi ΔM a Δm, je–li ΔM změna hmotnosti vozu za dobu Δt?

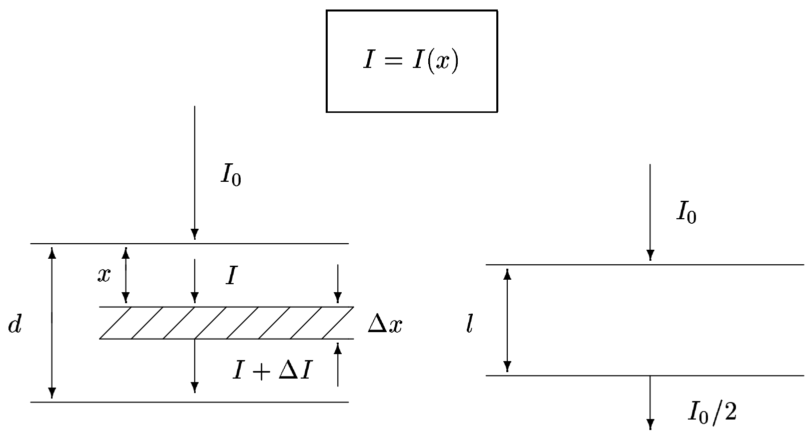
(b) Zvolte soustavu souřadnic tak, aby osa x směřovala podél pohybu vozu a zapište v této soustavě vztah pro $\vec{p}_t$ a $\vec{p}_{t+\Delta t}$ z části (a). Za předpokladu, že součin $\Delta m \Delta v$ je zanedbatelně malý, vyjádřete změnu hmotnosti vozu s nákladem vztaženou na jednotkovou změnu rychlosti, tj. $\frac{\Delta M}{\Delta v}$, v závislosti na okamžité hmotnosti M. Ukažte, že jde o přímou úměrnost a určete konstantu úměrnosti.

ÚLOHA č.3 (5 bodů)

Absorpce záření v látce

Na horní povrch vodorovné desky tloušťky d dopadá kolmo záření o intenzitě I_0. Při průchodu deskou se intenzita záření postupně zmenšuje v důsledku absorpce. Relativní úbytek intenzity $\left(-\frac{\Delta I}{I}\right)$ při průchodu záření vrstvou o tloušťce Δx uloženou v libovolné hloubce x pod horním povrchem desky je úměrný této tloušťce. Konstanta úměrnosti α se nazývá *lineární koeficient absorpce.*

(a) Vyjádřete změnu intenzity ΔI vztaženou na jednotkovou tloušťku vrstvy, tj. $\frac{\Delta I}{\Delta x}$, v závislosti na intenzitě I dopadající na horní povrch vrstvy (viz obr. 3a) a porovnejte výsledek s výsledky předchozích úloh.



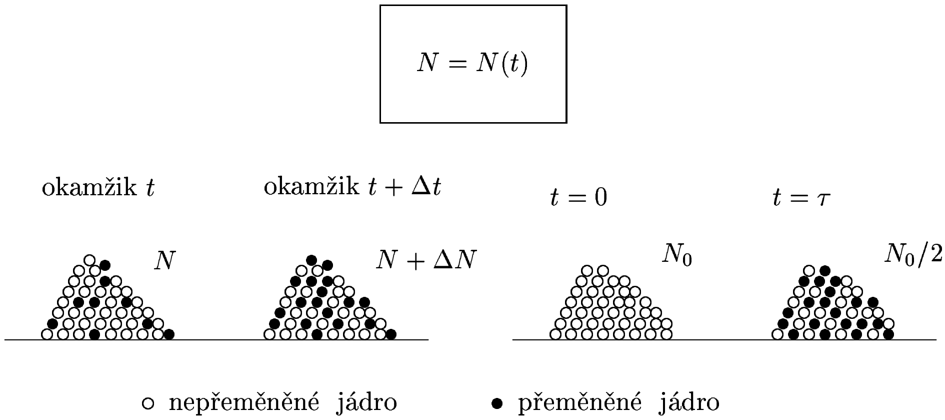
Obr. 3a Obr. 3b

(b) Tloušťka vrstvy l, v níž se absorbuje právě polovina intenzity záření, se nazývá *polotloušťka* (viz obr. 3b). Vypočtěte intenzitu záření po průchodu vrstvou tloušťky $0, l, 2l, \ldots, nl, \ldots$. Znázorněte závislost graficky. Na základě znalosti hodnot intenzity $I(x)$ pro $x = 0, l, 2l, \ldots, nl, \ldots$ se pokuste odhadnout vyjádření $I(x)$ v libovolné hloubce x pod povrchem desky.

ÚLOHA č.4 (5 bodů)

Radioaktivní rozpad

Radioaktivní preparát obsahuje v počátečním okamžiku $t = 0$ N_0 nepřeměněných, tj. radioaktivních, jader. Pravděpodobnost rozpadu jádra za jednotku času je konstantní a rovna λ (tzv. *rozpadová konstanta*) (obr. 4).



Obr. 4

(a) Vyjádřete změnu počtu nepřeměněných jader za jednotku času, tj. $\frac{\Delta N}{\Delta t}$, v závislosti na okamžitém počtu nepřeměněných jader N. Výsledek komentujte ve vztahu k předchozím úlohám.

(b) *Poločasem rozpadu* nazýváme dobu τ, za kterou se jádro rozpadne s pravděpodobností $p = \frac{1}{2}$. Vyjádřete počet nepřeměněných jader v okamžicích $0, \tau, 2\tau, \ldots, n\tau, \ldots$. Zakreslete závislost N na čase. Na základě znalosti hodnot $N(t)$ pro $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots$, $n\tau, \ldots$ odhadněte vyjádření počtu nepřeměněných jader $N(t)$ v libovolném okamžiku t.

ÚLOHA č.5 — prémiová

Nechť x představuje nezávisle a y závisle proměnnou fyzikální veličinu $y(x)$ a Δy změnu odpovídající velmi malému přírůstku Δx, tj. změní-li se nezávisle proměnná z hodnoty x na $x+\Delta x$, změní se y z hodnoty $y(x)$ na hodnotu $y(x+\Delta x) = y(x)+\Delta y$. Předpokládejme, že platí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -ay,$$

kde a je kladná konstanta. Určitě jste zjistili, že tímto typem zákonitosti se řídí veličiny vyšetřované ve všech předchozích úlohách.

(a) Nechť například $a = 5,0$ a pro $x = x_0 = 0$ je $y(0) = y_0 = 1,0$. Zvolte vhodný krok Δx, například $\Delta x = 0,01$. (Všechny veličiny musí být uváděny ve správných jednotkách odpovídajících vždy konkrétní fyzikální situaci.) Užitím následujícího *iteračního postupu* najděte vztah pro hodnotu y_n veličiny y pro $x_n = n\Delta x$:

1. krok	$x_0 = 0$	$y = y_0$	$\Delta y_0 = -ay_0\Delta x$
2. krok	$x_1 = x_0 + \Delta x$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$\Delta y_1 = -ay_1\Delta x$
3. krok	$x_2 = x_1 + \Delta x$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	$\Delta y_2 = -ay_2\Delta x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-$tý krok	$x_n = x_{n-1} + \Delta x$	$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$	$\Delta y_n = -ay_n\Delta x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Na základě získaného vztahu pro y_n vyplňte následující tabulku:

n	0	2	5	10	20	30	50	70	100
x_n	0								
y_n	1,0								

Výsledek znázorněte graficky. Ze znalosti hodnot y_n pro $x_n = n\Delta x$, tj. $\Delta x = \frac{x_n}{n}$, zapište předpokládanou závislost $y = y(x)$.

(b) Pro čísla m rostoucí nade všechny meze (značíme $m \to \infty$) se hodnota výrazu $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$ blíží číslu e^{-1}, kde $e = 2,71828\ldots$ je tzv. *základ přirozených logaritmů.* Vyjádřete závislost $y = y(x)$, nalezenou v části (a), s využitím této skutečnosti.

(c) Pomocí výsledku části (b) zapište řešení úloh 1 až 4, tj. $u = u(t), M = M(v)$, $I = I(x), N = N(t)$.

(d) V úloze 3 najděte vztah mezi polotloušťkou a lineárním koeficientem absorpce, v úloze 4 vztah mezi poločasem rozpadu a rozpadovou konstantou.

Poznámka 1:

Platí-li $z = e^\alpha$ pro kladné číslo z, nazýváme číslo α přirozeným logaritmem čísla z a píšeme $\alpha = \ln z$.

Poznámka 2:

Vztahy získané pro $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ u jednotlivých úloh bychom mohli interpretovat také tak, že ve všech případech je relativní změna veličiny y vztažená na jednotkovou změnu veličiny x, tj. $\frac{1}{y}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, konstantní (stejná pro všechny výchozí hodnoty x).