

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

SOUTĚŽNÍ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY 1996/1997

Čtvrtá série úloh

(25 bodů)

Jednou ze čtyř základních fyzikálních interakcí je gravitace. Poněvadž jí podléhá každé těleso, v jehož okolí se nacházejí jiná tělesa, jsou gravitačnímu působení podrobeny všechny hmotné objekty — od vesmírných těles až po mikročástice.

Na projevy gravitace jsme natolik zvyklí, že při jejich sledování neočekáváme žádná překvapení: předměty upuštěné z ruky, míče zahrané při tenisu či odbíjené, všechny vypálené střely, které nenašly cíl, zákonitě dopadnou v důsledku gravitačního působení Země na její povrch. Vlivem gravitace obíhají planety po svých stabilních drahách kolem Slunce, stejně jako Měsíc kolem Země. Přijali jsme dokonce i fakt, že gravitace dokáže zakřivit dráhu světelného paprsku. A tak se nezdá, že bychom se mohli při studiu gravitační interakce dostat do nějakých potíží. K otestování tohoto sebevědomí může posloužit následující série úloh.

ÚLOHA č.1 (5 bodů)

Neštěstí ve výtahu

Je známo, že člověk může bezpečně spadnout z výšky $h_B = 3$ m a také, že dokáže při odrazu z místa vyskočit (tj. zvednout svoje těžiště) zhruba o $h_0 = 0,5$ m. Nešťastník, se kterým se utrhla kabina výtahu, se snaží zachránit tím, že se těsně před jejím dopadem pokusí co nejvíce vyskočit. Určete, z jaké výšky h může kabina spadnout, aby šlo ještě o bezpečný pád. Při tom předpokládejte, že se člověk dokáže při výskoku odrazit okamžitě a že kabina je velmi těžká.

ÚLOHA č.2 (8 bodů)

Kde je bezpečno?

Tomáš si pořídil nový prak a střílí s ním po všem co uvidí. Zjistěte, kde je před ním bezpečno (tj. nalezněte rovnici „ochranné obálky“ popsané níže v poznámce), předpokládáme-li, že dokáže střílet nejvyšší rychlostí v , která není tak velká, aby při střelbě kamenů hrál významnou roli odpor vzduchu.

Poznámka: Celý prostor se při dané poloze Tomáše rozpadá na dvě disjunktní části, z nichž jedna obsahuje body, které může Tomáš (stojící na zemi) zasáhnout, a druhá místa, kam jeho střely doletět nemohou. Jde tedy v podstatě o nalezení rovnice plochy oddělující tyto dvě části. Uvážíme-li při tom, že trajektorie střely je rovinná, stačí problém studovat jen v rovině. Pokud v ní zvolíme souřadnicový systém tak, že osa x je vodorovná, osa y svislá a Tomáš stojí v jeho počátku, pak — podaří-li se nám najít rovnici „ochranné obálky“ ve tvaru $y = f(x)$ — je zřejmě ohrožená oblast této roviny určena nerovnicí $y \leq f(x)$, zatímco pro bezpečnou oblast platí $y > f(x)$.

ÚLOHA č.3 (6 bodů)

Kameny a bubliny

Uvažujme prostor zaplněný vodou (o konstantní hustotě), ve kterém není gravitační pole. (Této poněkud abstraktní představě se blíží například okolí středu velké vodní koule umístěné mimo dosah gravitačního působení jiných těles.) V tomto prostoru se mohou nacházet kameny (tělesa o hustotě větší než je hustota vody) a vzduchové bubliny (tělesa o hustotě menší než je hustota vody). Určete, zda se v důsledku gravitačního působení budou objekty ve dvojicích kámen-kámen, kámen-bublina a bublina-bublina přitahovat či odpuzovat.

ÚLOHA č.4 (6 bodů)

Gravitační pole nebo neinerciální soustava?

Podle základního principu obecné teorie relativity — *principu ekvivalence* — nemůže pozorovatel rozlišit, nachází-li se (bez pohybu) v tíhovém poli či zda se pohybuje společně s neinerciální vztažnou soustavou. Uvažujte o pozorovatelích, pevně spojených s neinerciálními vztažnými soustavami pohybujícími se v homogenním gravitačním poli v blízkosti povrchu Země, které je charakterizováno gravitačním zrychlením $\vec{g}$ ($g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$). Určete zrychlení $\vec{g}'$ charakterizující gravitační pole, jehož působení na nehybného pozorovatele by bylo ekvivalentní následujícím situacím:

- (a) pozorovatel ve zdviži, která se pohybuje s konstantním zrychlením $\vec{a}$ vzhůru, resp. dolů,
- (b) pozorovatel v automobilu, jedoucím s konstantním vodorovným zrychlením $\vec{a}$,
- (c) pozorovatel v bedně, volně klouzající bez tření po nakloněné rovině o úhlu sklonu α ,
- (d) pozorovatel na sedačce kolotoče o poloměru R , otáčejícího se kolem svislé osy úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$.

ÚLOHA č.5 — prémiová

Kosmické katastrofy

Uvažujte o modelové planetě o hmotnosti m , obíhající kolem svého „Slunce“ (tzv. *gravitačního centra*), majícího hmotnost M , po kružnici, jejíž poloměr je roven střední vzdálenosti Země od Slunce. Vztažnou soustavu spojenou s centrem považujte za inerciální. (Tento předpoklad je dobře splněn, jestliže hmotnost centra převyšuje hmotnost planety mnohonásobně — např. $m_{\text{Země}}/M_{\text{Slunce}} \approx 10^{-6}$.)

- (a) Předpokládejte, že hmotnost centra M náhle naroste na dvojnásobek své původní hodnoty. Změní se v důsledku toho trajektorie planety? Pokud ano, popište jak a určete novou dobu oběhu planety a její nejmenší a největší vzdálenost od centra (tzv. *perihelium* a *afelium*).

Poznámka: K řešení úlohy využijte Keplerových zákonů, zákona zachování mechanické energie a vztahu pro potenciální energii planety ve vzdálenosti r od centra $U(r) = -\kappa m M / r$ (κ je gravitační konstanta). Uvědomte si, že při pohybu po kružnici je rychlost planety kolmá k jejímu průvodiči. Tato skutečnost určuje výchozí situaci při pohybu po nové trajektorii. (Které body eventuální nové trajektorie této situaci odpovídají?)

- (b) K jiné katastrofě by došlo, kdyby se planeta obíhající po kruhové dráze, náhle zastavila. Pak by totiž zřejmě „spadla“ na centrální těleso. Za jak dlouho?

Poznámka: Při řešení tohoto problému postupujte obdobně jako v části (a). Předpokládejte, že velikost rychlosti planety poklesne (při zachování směru pohybu) z původní hodnoty v_0 na hodnotu $v = k v_0$, $0 < k < 1$, kde k je velmi blízké nule.

Poznámka:

Hodnoty konstant potřebné pro číselné řešení úloh lze najít například v příručce Brož J., Roskovec V., Valouch M.: Fyzikální a matematické tabulky. SNTL, Praha 1980.