

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

4. ročník — 1997/1998

Čtvrtá série úloh (25 bodů)

Řešení elektrických sítí

Stejnoseměrná elektrická síť představuje soustavu větví a uzlů. Větvě obsahují zdroje elektromotorického napětí, lineární a nelineární rezistory. Známe-li elektromotorická napětí a polaritu všech zdrojů, hodnoty odporů lineárních rezistorů a voltampérové charakteristiky nelineárních rezistorů, je tím síť úplně zadána. Řešením takové sítě rozumíme nalezení proudů ve všech větvích. Znalost všech proudů pak umožňuje určit potenciálové rozdíly (napětí) mezi libovolnými místy v síti i výkony zdrojů a spotřebičů.

V případě, že v síti protékají stacionární nebo kvazistacionární proudy, platí Kirchhoffovy zákony, které vedou k rovnicím pro řešení sítí. Tyto zákony vyplývají ze zákona zachování náboje (I. Kirchhoffův zákon) a ze zákona zachování energie (II. Kirchhoffův zákon). Můžeme je formulovat takto:

- I. Kirchhoffův zákon: Celkový proud tekoucí libovolným uzlem sítě je nulový. Vstupující a vystupující proudy jsou přitom do součtu započítávány s opačnými znaménky.
- II. Kirchhoffův zákon: Celkový součet potenciálových rozdílů (tj. napětí) v libovolné části sítě tvořící uzavřený obvod je nulový. Potenciálové rozdíly sečítáme takto: Postupujeme podél obvodu stále v jednu směru. Potenciálový rozdíl přičteme s kladným znaménkem, překračujeme-li jej při tomto postupu od nižšího k vyššímu potenciálu zdroje nebo rezistoru, v opačném případě se znaménkem záporným.

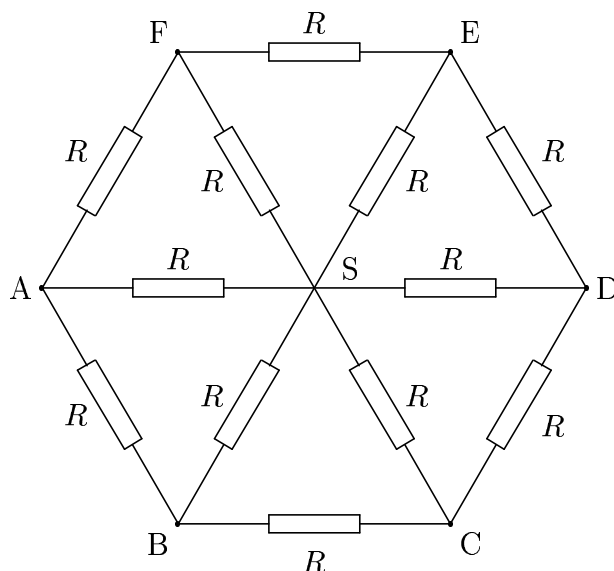
Při řešení sítí je často výhodné síť nebo její část zjednodušit. Je to možné za určitých předpokladů, například u částí sítí obsahujících pouze lineární rezistory.

Cílem této série úloh je proniknout do problematiky řešení sítí. Úlohy jsou koncipovány tak, aby ozřejmily i oprávněnost postupů při zjednodušování sítí. Prémiová úloha je věnována řešení jednoduchého nelineárního obvodu.

Úloha č.1 (6 bodů)

Dvanáct stejných rezistorů o odporu $R = 1.00\,\Omega$ je zapojeno do sítě tak, že šest z nich tvoří strany šestiúhelníka a zbývajících šest spojuje střed šestiúhelníka se všemi jeho vrcholy. Schéma zapojení sítě je na obr. 1. Tuto síť můžeme nahradit mezi dvěma libovolnými uzly jediným rezistorem. (Znamená to, že po připojení do libovolného elektrického obvodu v některých dvou uzlech se bude síť chovat jako náhradní rezistor, jehož odpor bude sítí a dvěma zvolenými uzly jednoznačně určen.)

- (a) Upravte a nakreslete schéma zapojení sítě tak, aby k výpočtu takového náhradního rezistoru bylo možné použít pouze vztahy pro sériové a paralelní zapojení rezistorů. Úpravu postupně proveďte pro náhradu sítě jedním rezistorem mezi uzly A a D , A a C , A a B .
- (b) Vypočtěte pomocí této úpravy odpory sítě R_{AD} mezi uzly A a D , R_{AC} mezi uzly A a C , R_{AB} mezi uzly A a B .



Obr. 1

Návod: Po připojení sítě ke zdroji elektromotorického napětí potečou jejími větvemi proudy jednoznačně určené sítí a zdrojem, mezi uzly se ustaví jednoznačně dané hodnoty napětí. Úpravou sítě rozumíme provedení takových změn, které nevedou ke změně proudu v žádné větvi ani ke změnám napětí mezi uzly. K možným úpravám patří vypuštění větve, která spojuje dva uzly se stejným potenciálem (a tedy jí neprotéká proud), spojení dvou uzlů se stejným potenciálem, případně částečné rozpojení nebo i úplné zrušení uzlu. Je výhodné překreslit síť do pravoúhlého tvaru, tj. tak, aby větve sítě byly vzájemně rovnoběžné nebo kolmé.

Úloha č.2 (8 bodů)

Odpor sítě R_{AC} mezi uzly A a C vypočtete nyní užitím Kirchhoffových zákonů: Předpokládejte, že k původní neupravené síti, znázorněné na obr. 1, je mezi uzly A a C připojen zdroj elektromotorického napětí E s nulovým vnitřním odporem. Pomocí Kirchhoffových zákonů určete proud I tekoucí zdrojem a z definice odporu pak i hodnotu R_{AC} . Postupujte v následujících krocích:

- Jaký je největší počet rovnic, které pro tuto síť můžeme získat zapsáním Kirchhoffových zákonů?
- Jaký je nejmenší počet nezávislých rovnic potřebných pro řešení sítě? Kolik z nich představuje zápis I. Kirchhoffova zákona?
- Nakreslete větve úplného stromu, s jehož pomocí určíte nezávislé obvody. Kolik je nezávislých obvodů?
- Napište nezávislé rovnice potřebné pro řešení sítě. Vypočtete z nich pouze proud tekoucí zdrojem a hodnotu odporu R_{AC} .

Návod: Při řešení sítě je třeba sestavit tolik nezávislých rovnic, kolik je neznámých proudů, tj. kolik je větví v síti. Část těchto rovnic představuje zápis I. Kirchhoffova zákona pro uzly, zbývající vyjadřují II. Kirchhoffův zákon pro obvody. Protože v síti existuje větší počet obvodů, než je potřeba k výpočtu, je vhodné nalézt nezávislé obvody předem. Tento problém řeší tzv. *topologie sítě*.

Postup: V síti najdeme a vyznačíme větve, které tvoří tzv. *úplný strom*, užitím následujících dvou pravidel:

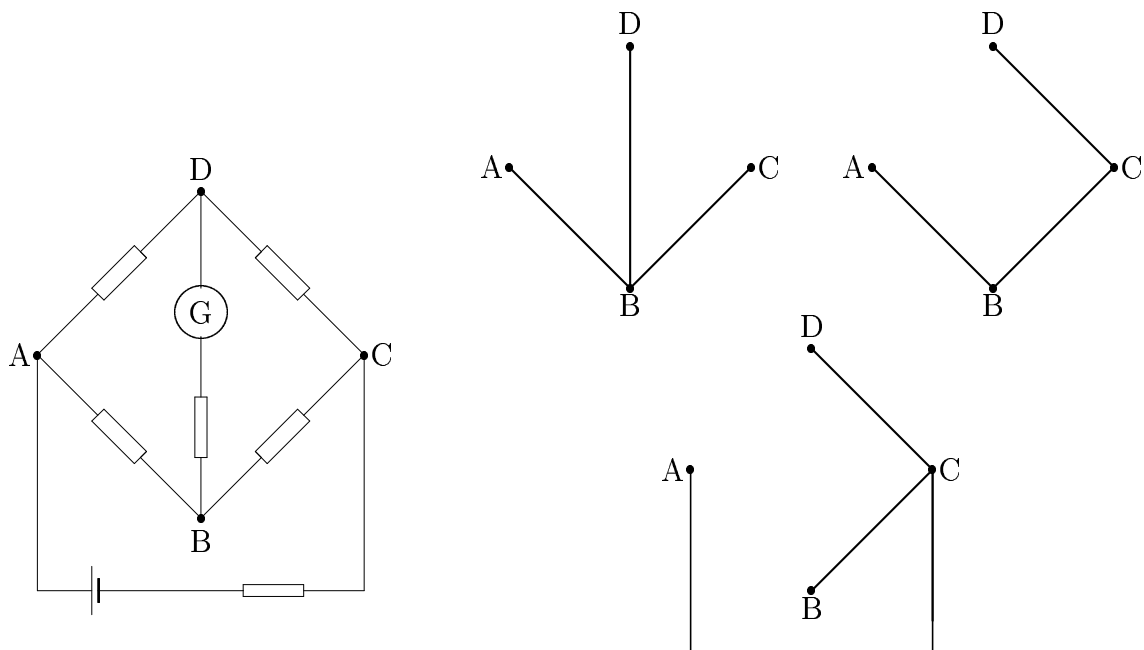
- Větve úplného stromu spojují každý uzel sítě s každým.
- Vyjmutím libovolné větve úplného stromu dojde k porušení předchozího pravidla.

Výběr *nezávislých větví* sítě se řídí těmito pravidly:

- Nezávislá větev je jednou z větví sítě.
- Nezávislá větev nepatří do úplného stromu.

Každý *nezávislý obvod* obsahuje právě jednu nezávislou větev. Má-li síť $(q + 1)$ uzlů a p větví, má úplný strom q větví a počet nezávislých větví je shodný s počtem nezávislých obvodů a je roven $(p - q)$. Napišeme-li I. Kirchhoffův zákon pro q uzlů a II. Kirchhoffův zákon pro $(p - q)$ nezávislých obvodů, obdržíme p nezávislých rovnic pro p neznámých proudů ve všech p větvích sítě.

Příklad volby úplného stromu je na obr. 2 pro síť se čtyřmi uzly a šesti větvemi. Tato síť představuje schema zapojení *Wheatstoneova mostu* pro měření odporu. Na obrázku jsou vyznačeny tři z možností volby úplného stromu.



Obr. 2

Úloha č.3 (5 bodů)

Zdroj připojený mezi uzly A a C původní neupravené sítě (obr. 1) má elektromotorické napětí $E = 3,00\text{ V}$ a nulový vnitřní odpor. Vypočtěte proudy ve všech větvích sítě.

Úloha č.4 (6 bodů)

K síti upravené pro přímý výpočet odporu mezi uzly A a C (viz úloha č.1(a)) je připojen zdroj elektromotorického napětí $E = 3,00\text{ V}$ s nulovým vnitřním odporem. Vypočtěte proudy ve všech větvích upravené sítě.

- Kolik potřebujete nezávislých rovnic pro výpočet proudů a kolik z nich lze získat zápisem I. Kirchhoffova zákona?
- Nakreslete větve úplného stromu. Určete počet nezávislých obvodů.
- Určete proudy ve všech větvích sítě.
- Pomocí proudu tekoucího zdrojem vypočtěte odpor R_{AC} upravené sítě mezi uzly A a C .
- Porovnejte získanou hodnotu odporu R_{AC} s výsledky úloh 1(b) a 2(d).
- Porovnejte hodnoty proudů získané pro upravenou síť s odpovídajícími proudy vypočtenými v úloze 3. pro neupravenou síť.
- Pomocí výsledků úlohy 3. určete napětí mezi těmi uzly, mezi nimiž jste při úpravě sítě v úloze 1(a) vypustili větve.

Úloha č.5 – prémiová

Elektrickou síť dvanácti stejných rezistorů o odporu $R = 1,00\,\Omega$ (obr. 1) připojíme v uzlech A a C ke zdroji elektromotorického napětí $E = 3,00\,V$ přes sériově zapojenou polovodičovou diodu. Předpokládejme, že dioda má *nelineární voltampérovou charakteristiku* (závislost proudu na napětí) danou vztahem

$$I = I_0 \left(\exp \frac{e_0 U}{k_B T} - 1 \right) ,$$

kde I_0 je *saturační*, tj. závěrný, proud, $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19}\,C$ je elementární náboj, $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}\,JK^{-1}$ je Boltzmannova konstanta a T je absolutní teplota (pokojová teplota je $T = 300\,K$).

- (a) Platí Kirchhoffovy zákony i pro obvody, které obsahují nelineární prvky? Zdůvodněte.
- (b) Nakreslete schéma zapojení obvodu, ve kterém bude 12 lineárních rezistorů původní sítě nahrazeno jedním lineárním rezistorem R_{AC} a diodu nahradí nelineární rezistor R_d .
- (c) Určete proud I_{d1} protékající obvodem a napětí U_{d1} na diodě, je-li zapojena v propustném směru. Řešte graficky i poččetně.
- (d) Určete proud I_{d2} protékající obvodem a napětí U_{d2} na diodě, je-li dioda zapojena v závěrném směru. Řešte graficky i poččetně.
- (e) Určete „náhradní“ odpor diody R_{d1} při proudu I_{d1} v propustném směru a odpor R_{d2} při proudu I_{d2} ve směru závěrném.

Poznámka: Při zapojení diody v propustném směru je v rovnici její voltampérové charakteristiky napětí kladné, v závěrném směru záporné (rovněž proud je v tomto případě záporný). Je-li velikost závěrného napětí na diodě větší než $U_T = \frac{k_B T}{e_0}$, protéká diodou závěrný proud o velikosti $I_z = I_0$ a je téměř nezávislý na hodnotě tohoto napětí. Vypočtete hodnotu U_T při teplotě $T = 300\,K$.

Návod: V tomto případě vede zápis II. Kirchhoffova zákona k tzv. *transcendentní rovnici* pro proud nebo pro napětí na diodě (v rovnici se například neznámé napětí objeví jak přímo v první mocnině, tak v exponentu funkce $\exp \frac{e_0 U}{k_B T}$). Řešení rovnice nelze vyjádřit analyticky (vzorcem pro neznámou), je třeba je hledat graficky či numericky, nebo použít vhodné aproximace při náhradě exponenciální funkce pro hodnoty napětí velmi blízké správné hodnotě U_s (určené například graficky). Nejjednoduššími aproximacemi exponenciální závislosti jsou lineární nebo (přesnější) kvadratická funkce:

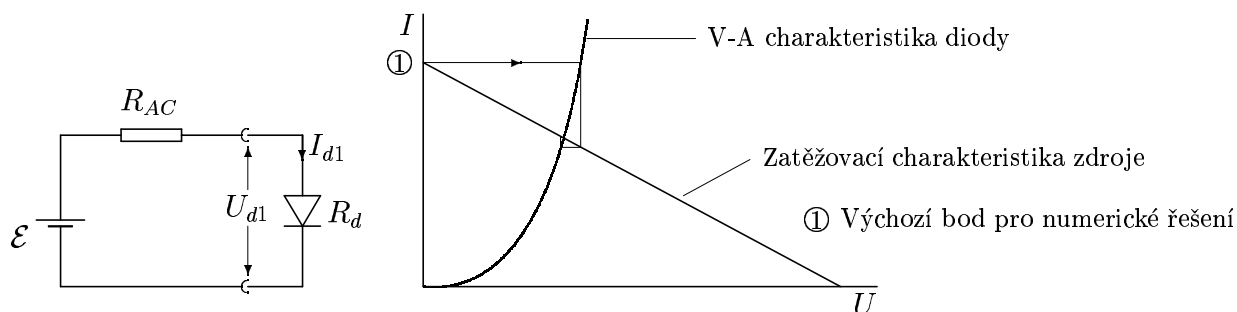
$$\exp x \approx 1 + x , \quad \exp x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 ,$$

$$\exp x = \exp x_0 [1 + (x - x_0)] , \quad \exp x = \exp x_0 \left[1 + (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \right] ,$$

$$x = \frac{e_0 U}{k_B T} , \quad x_0 = \frac{e_0 U_s}{k_B T}$$

Tyto náhrady jsou tím přesnější, čím je menší hodnota x . Pro grafické řešení je výhodná následující interpretace II. Kirchhoffova zákona: Obvod s ideálním zdrojem (o nulovém vnitřním odporu) a dvěma sériově zapojenými prvky, lineárním rezistorem R_{AC} a diodou s náhradním odporem R_d , si lze představit jako obvod s reálným zdrojem o vnitřním odporu R_{AC} a jediným „cizím“ prvkem v obvodu, diodou. Napětí na diodě je při této představě a podle II. Kirchhoffova zákona (zapište jej) shodné se svorkovým napětím zdroje. Zapište vztah pro tzv. *zatěžovací charakteristiku* reálného zdroje, tj. závislost proudu protékajícího zdrojem s vnitřním odporem R_{AC} na svorkovém napětí a znázorněte ji do grafu. Do téhož grafu zakreslete voltampérovou charakteristiku diody, tj. závislost proudu diody na napětí na ní. Jaký fyzikální význam má průsečík grafů?

Numerické řešení představuje nalezení průsečíku grafů postupnými aproximacemi. Princip postupu je zřejmý z obr. 3, postačí takové řešení, kdy se hodnoty získané v posledním kroku liší od hodnot kroku předchozího o méně než 1%.



Obr. 3