FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

7. ročník — 2000/2001

Čtvrtá série úloh

(25 bodů)

S příchodem jarních měsíců se zvyšuje provoz na cyklistických stezkách. Mnozí příznivci cyklistického sportu vlastní velmi dobře vybavená kola, jimž často nechybí ani rychloměr. Tento „minipočítač“ dokáže kromě časových údajů a uražené dráhy vyhodnotit další zajímavé charakteristiky pohybu, zejména průměrnou a s dobrou přesností i okamžitou velikost rychlosti. Jestliže je i vaše kolo opatřeno rychloměrem, nemusíte tuto sérii řešit výhradně doma u stolu. Můžete o ní přemýšlet přímo během cyklistického výletu.

Než sednete na kolo a pustíte se do sledování údajů na rychloměru, je třeba ujasnit si definice základních pojmů. Částice na obr. 1 se pohybuje po křivce $\mathcal{C}$ vzhledem k vztažné soustavě $\mathcal{S}$. V okamžiku t má polohu určenou vektorem $\vec{r}(t)$, v okamžiku $t + \Delta t$ vektorem $\vec{r}(t + \Delta t)$. Vektor jejího *posunutí* $\Delta\vec{r}$ *v časovém intervalu* $[t, t + \Delta t]$ je

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

a její *průměrná rychlost* v tomto intervalu je

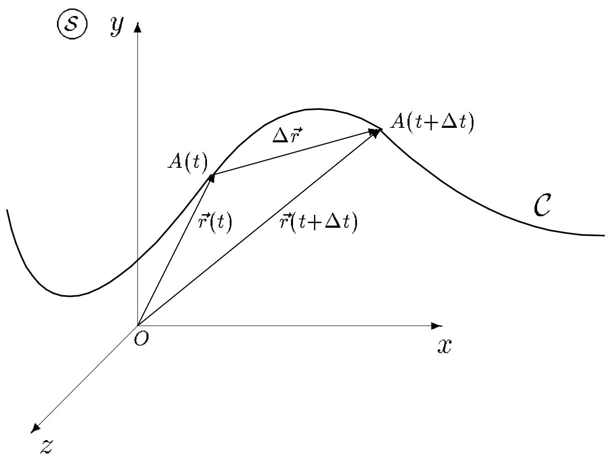
$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Všimněte si, že průměrná rychlost je vektor (!) a je závislá na volbě intervalu $[t, t + \Delta t]$. Uvědomte si také, že průměrná rychlost bude velmi špatnou charakteristikou toho, „jak rychle“ se částice pohybuje, bude-li hodnota Δt příliš velká. Naopak, zmenšováním hodnoty Δt můžeme informační hodnotu průměrné rychlosti jako charakteristiky pohybu zvýšit.

Pro velmi malé hodnoty Δt (píšeme $\Delta t \to 0$) se bude průměrná rychlost blížit jistému limitnímu vektoru, který představuje *okamžitou rychlost v okamžiku* t:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Z obrázku také vidíme, že při $\Delta t \to 0$, tj. při „sbližování“ bodů $A(t)$ a $A(t+\Delta t)$ na křivce $\mathcal{C}$, přechází směr vektoru $\Delta\vec{r}$ a tedy i vektoru $\langle \vec{v} \rangle$ do směru tečny ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě $A(t)$. Okamžitá rychlost v čase t má tedy směr tečny k trajektorii částice.



Obr. 1

Velikostí průměrné rychlosti rozumíme velikost vektoru $\langle \vec{v} \rangle$, tj.

$$| \langle \vec{v} \rangle | = \sqrt{\langle v_x \rangle^2 + \langle v_y \rangle^2 + \langle v_z \rangle^2},$$

kde $\langle v_x \rangle$, $\langle v_y \rangle$, $\langle v_z \rangle$ jsou složky průměrné rychlosti v dané kartézské soustavě souřadnic:

$$\langle v_x \rangle = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad \langle v_y \rangle = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \quad \langle v_z \rangle = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}.$$

Jinou, praktičtější, průměrnou charakteristikou pohybu je *průměrná velikost rychlosti* částice v intervalu $[t, t + \Delta t]$, definovaná jako podíl dráhy Δs, kterou částice v tomto časovém intervalu urazila (tj. délky oblouku, který opsala) a doby Δt:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Pozor, tato veličina je skalár a $\langle v \rangle \neq | \langle \vec{v} \rangle |$ (!) (přesvědčíme se o tom hned v první úloze). Velikost průměrné rychlosti *není* totéž, co průměrná velikost rychlosti! Limitu výrazu $\langle v \rangle$ pro $\Delta t \to 0$ bychom mohli nazvat *okamžitou velikostí rychlosti* v okamžiku t:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Pohyb nazýváme *přímočarým*, je-li trajektorií částice přímka. V opačném případě je pohyb *křivočarý*. Pohyb nazýváme *rovnoměrným*, je-li $v(t)$ konstantní, bez ohledu na to, zda je přímočarý či křivočarý. V opačném případě jde o pohyb *nerovnoměrný*.

O tom, že jste právě definované pojmy dobře pochopili, se snadno přesvědčíte, vyřešíte-li následující dvě úlohy:

Úloha č. 1 (6 bodů)

Částice se pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru $R = 30$ cm s periodou $T = 4$ s. V okamžiku $t = 0$ je v počátku soustavy souřadnic (viz obr. 2).

(a) Vyjádřete úhel $\varphi(t)$ jako funkci času.

(b) Ukažte, že polohový vektor částice v okamžiku t má složky

$$x(t) = R\,\sin\frac{2\pi}{T}\,t, \quad y(t) = R\left(1 - \cos\frac{2\pi}{T}\,t\right).$$

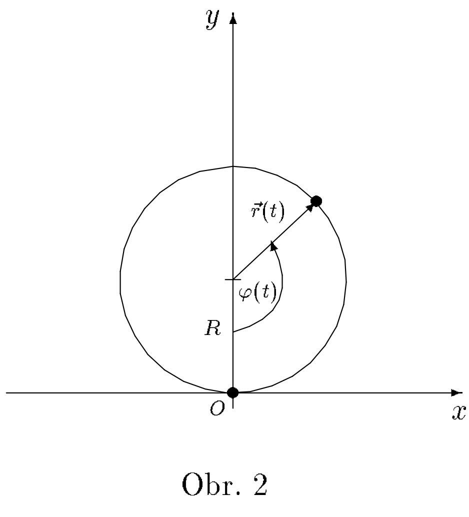
(c) Určete složky polohového vektoru částice v okamžicích $t = 1$ s a $t + \Delta t = 2$ s.

(d) Určete složky průměrné rychlosti v intervalu $[t, t + \Delta t]$.

(e) Určete průměrnou velikost rychlosti v intervalu $[t, t + \Delta t]$.

(f) Určete složky vektorů okamžité rychlosti $\vec{v}_1 = \vec{v}(t)$ a $\vec{v}_2 = \vec{v}(t + \Delta t)$ v okamžicích t a $t+\Delta t$ a velikost těchto vektorů. Výsledek porovnejte s řešením úlohy (e). Překvapuje vás toto srovnání?

(g) Určete velikost průměrné rychlosti $|\langle\vec{v}\rangle|$ a průměrnou velikost rychlosti $\langle v\rangle$ v intervalu $[t_1, t_2]$ pro $t_2 - t_1 = nT$, kde n je přirozené číslo.



Obr. 2

Úloha č. 2 (8 bodů)

Uvažujte o částici z úlohy č. 1 a doplňte následující tabulku:

$[t, t+\Delta t]$ [s]	$\langle v_x \rangle$ [cm.s^{-1}]	$\langle v_y \rangle$ [cm.s^{-1}]	$\langle v_z \rangle$ [cm.s^{-1}]	α [°]
$t = 1{,}000$ $t+\Delta t = 2{,}000$				
$t = 1{,}000$ $t+\Delta t = 1{,}500$				
$t = 1{,}000$ $t+\Delta t = 1{,}250$				
$t = 1{,}000$ $t+\Delta t = 1{,}125$				

α je úhel mezi vektorem průměrné rychlosti a osou x.

V úloze č. 1 jste vypočetli složky vektoru okamžité rychlosti $\vec{v}\,(t)$ v okamžiku $t = 1{,}000$ s. Označte je v_x, v_y a doplňte tabulku:

$[t, t+\Delta t]$ [s]	$\langle v_x \rangle - v_x$ [cm.s^{-1}]	$\langle v_y \rangle - v_y$ [cm.s^{-1}]	$\mid \langle \vec{v} \rangle \mid - \mid \vec{v} \mid$ [cm.s^{-1}]	$\alpha - \alpha_0$ [°]
$t = 1{,}000$ $t+\Delta t = 2{,}000$				
$t = 1{,}000$ $t+\Delta t = 1{,}500$				
$t = 1{,}000$ $t+\Delta t = 1{,}250$				
$t = 1{,}000$ $t+\Delta t = 1{,}125$				

α_0 je úhel, který svírá vektor okamžité rychlosti $\vec{v}$ s osou x v čase $t = 1{,}000$ s.
Komentujte získané výsledky.

Se znalostí potřebných pojmů se v dalších dvou úlohách vydáme na cyklistický výlet.

Úloha č. 3 (5 bodů)

Rychloměr, jímž je opatřeno kolo, funguje takto:

- Měří celkovou uraženou dráhu s od okamžiku vynulování.
- Měří čas τ od okamžiku vynulování.
- Průměrná hodnota velikosti rychlosti je v každém okamžiku vyhodnocována jako podíl údajů s, τ, tj.

$$\langle v \rangle = \frac{s}{\tau}.$$

Měření probíhá neustále, jestliže cyklista na kole jede, nebo jde pěšky a kolo vede. Měření času se však zastaví, pokud se kolo nepohybuje (čekání u semaforu apod.).

Výlet probíhá v jednotlivých časových úsecích takto:

ÚSEK	ČAS. ROZPĚTÍ		ÚDAJE NA RYCHLOMĚRU
1.	8.00 – 8.30	cesta v městském provozu na sraz cyklistů	6 km
2.	8.30 – 8.45	čekání na místě srazu A	
3.	8.45 – 10.15	cesta po silnici v rovinatém terénu do vesnice B	30 km
4.	10.15 – 10.30	krátký odpočinek ve vesnici B, svačina	
5.	10.30 – 11.15	jízda lesní cestou v náročném terénu do kopce do vesnice C	průměrná velikost rychlosti 6 $\mathrm{km.h^{-1}}$
6.	11.15 – 14.00	koupání ve vesnici C	
7.	14.00 – 14.15	jízda do vesnice D po silnici s kopce	10 km
8.	14.15 – 16.00	jízda lesní cestou do železniční stanice Ž	průměrná velikost rychlosti 25 $\mathrm{km.h^{-1}}$
9.	16.00 – 17.00	návrat vlakem do místa A	

Předpokládejte, že kromě plánovaných zastávek se cyklisté již po cestě nezastavují.

(a) Jaký je údaj o průměrné velikosti rychlosti na rychloměru na konci každého časového úseku?

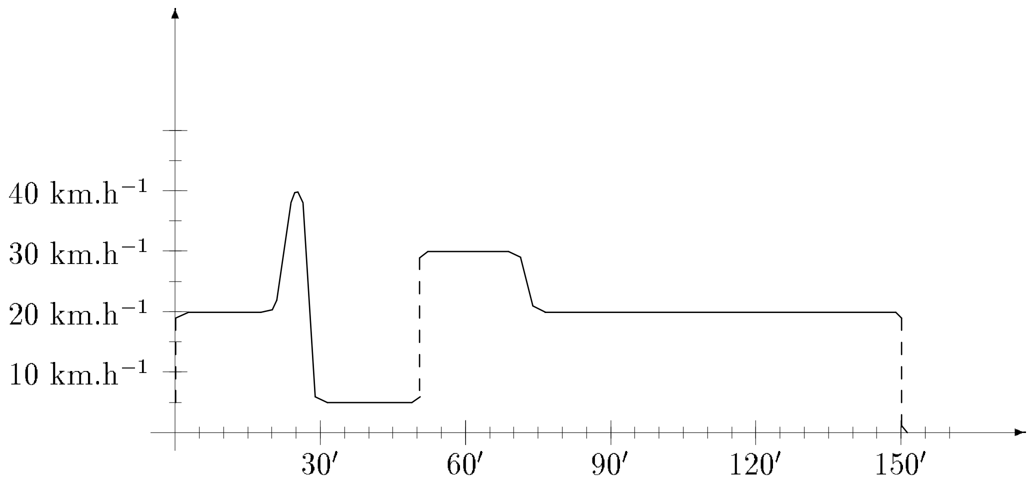
(b) Jaká je správná hodnota průměrné velikosti rychlosti na konci každého časového úseku?

(c) Nakreslete graf správné hodnoty průměrné velikosti rychlosti pro celý výlet.

(d) Nakreslete graf závislosti dráhy na čase pro celý výlet za předpokladu, že v jednotlivých úsecích je pohyb rovnoměrný a změny velikosti rychlosti proběhnou vždy v zanedbatelném časovém intervalu.

Úloha č. 4 (6 bodů)

Cyklista jede po pohodlné silnici s malým provozem, a tak má možnost sledovat údaje na rychloměru. Na začátku jízdy jsou údaje vynulovány. Údaj o okamžité velikosti rychlosti se s časem mění podle obr. 3.



Obr. 3

(a) Jakou dráhu urazil cyklista za 2,5 hodiny?

(b) Jakou hodnotu průměrné velikosti rychlosti ukazoval rychloměr v okamžicích $30'$, $60'$, $90'$, $120'$?

(c) Z grafu vidíme, že od okamžiku $t_0 = 75'$ již cyklista jel rovnoměrně. Nakreslete graf závislosti průměrné velikosti rychlosti na čase od tohoto okamžiku ($t_0 = 75'$) do konce výletu.

Změny velikostí rychlosti v okamžicích $0'$, $50'$ a $150'$ (přerušované čáry na obr. 3) probíhají v zanedbatelně krátkých časových intervalech.

(d) Jaký údaj o průměrné hodnotě velikosti rychlosti ukazuje rychloměr na konci výletu ($t = 150'$)? Závisí tento údaj na dráze, kterou cyklista urazil do okamžiku t_0?

(e) Jak velkou okamžitou rychlostí by musel cyklista jet v posledním úseku trasy, aby byl údaj o průměrné hodnotě velikosti rychlosti na konci výletu o 5 km.h^{-1} vyšší než v úloze (d)? Závisí výsledek na dráze, kterou cyklista urazil do okamžiku t_0?

Úloha č. 5 – prémiová

Na základě analogie s úvodním textem k této sérii definujte následující pojmy:

(a) změnu rychlosti,

(b) průměrné zrychlení,

(c) velikost průměrného zrychlení,

(d) okamžité zrychlení.

Může být pohyb rovnoměrný, je-li okamžité zrychlení nenulové? Může být pohyb přímočarý, je-li okamžité zrychlení nenulové? Může být pohyb rovnoměrný i přímočarý, je-li okamžité zrychlení nenulové? Odpovědi zdůvodněte.