

# Fyzikální praktikum

Zpracování měření

**Jana Jurmanová, Zdeněk Navrátil**

Ústav fyzikální elektroniky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity, Brno

únor 2023

# Obsah

Úvod

Trochu statistiky

Nejistota přímo měřené veličiny

Nejistota nepřímo měřené veličiny

Jak (ne)má vypadat graf

Aproximace závislostí

Lineární interpolace a extrapolace

# Měření

## Měření

proces experimentálního získávání jedné nebo více hodnot veličiny, které mohou být důvodně přiřazeny veličině

- Žádné měření není přesné. Výsledek měření závisí na měřicím systému, metodě, dovednostech obsluhy, laboratorních podmínkách apod.
- I při snaze zachovat všechny parametry měření dostáváme různé hodnoty.
- Měřená hodnota je tedy pouze přiblížením či odhadem měřené veličiny a musí být doplněna o hodnocení kvality tohoto odhadu.

# Kvalita měření

- Pro porovnání výsledků měření (hodnot) používáme mezinárodní soustavu jednotek SI.
- Pro porovnání kvality měření bychom se měli řídit
  - BIPM: JCGM 100:2008 „Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement“, *GUM*
  - ČSN P ENV 13005 Směrnice pro vyjádření nejistoty měření
  
- *GUM* je k dispozici na interaktivní osnově předmětu v ISu.

# Koncept chyby měření a nejistoty měření

## chyba měření

naměřená hodnota veličiny minus pravá hodnota veličiny

## nejistota měření

parametr přidružený k výsledku měření, který charakterizuje rozptýlení hodnot, jež by mohly být důvodně prisuzovány k měřené veličině

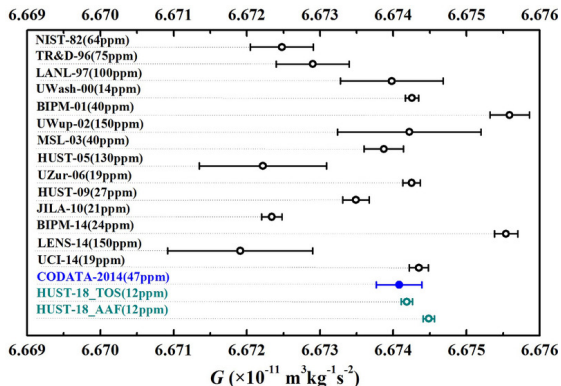
## Pravá hodnota fyzikální veličiny

(Konvenční) pravou hodnotu bychom změřili v ideálním měření, které však neexistuje. Pravá hodnota je tedy v principu nepoznatelná.

- Př. Rydbergova konstanta

$$R_{\infty} = 10\,973\,731,568\,160(21) \text{ m}^{-1}, \quad r(R_{\infty}) = 1,9 \cdot 10^{-12}$$

- Př. gravitační konstanta

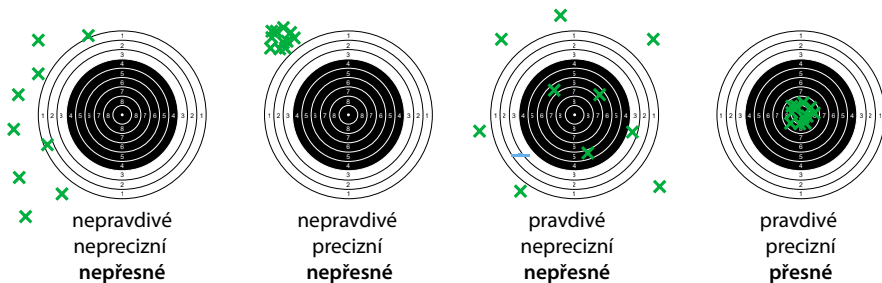


$$\kappa = 6,674\,30(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad r(\kappa) = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ (CODATA 2018)}$$

# Vlivy ovlivňující měření

- **hrubé chyby a omyly**
- **systematické vlivy** – ovlivňují měření deterministickým způsobem, za předpokladu dobré znalosti těchto jevů lze vlivy odstranit korekcemi.
- **náhodné vlivy** – ovlivňují měření nepředvídatelným způsobem, nelze je vyloučit ani kompenzovat → musíme měřit vícekrát a data statisticky zpracovat.

# Přesnost měření



přesnost (*accuracy*) = pravdivost (*správnost, trueness*) + preciznost (*precision*)

↑  
popisuje chyba měření

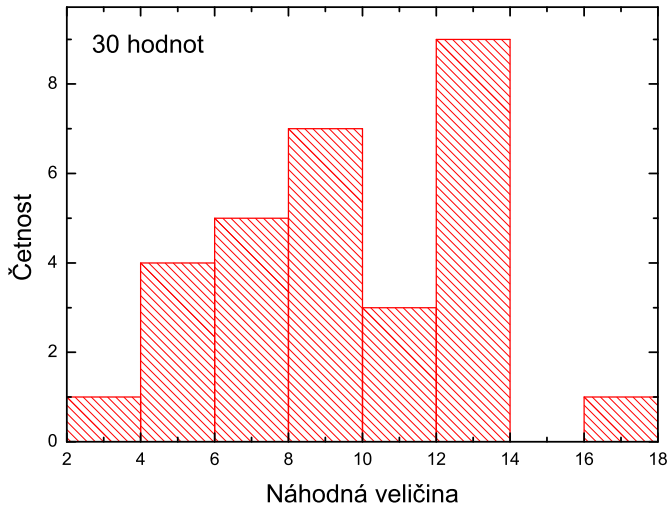
↑  
systematické vlivy  
popisuje systematická chyba

↑  
náhodné vlivy  
popisuje náhodná chyba

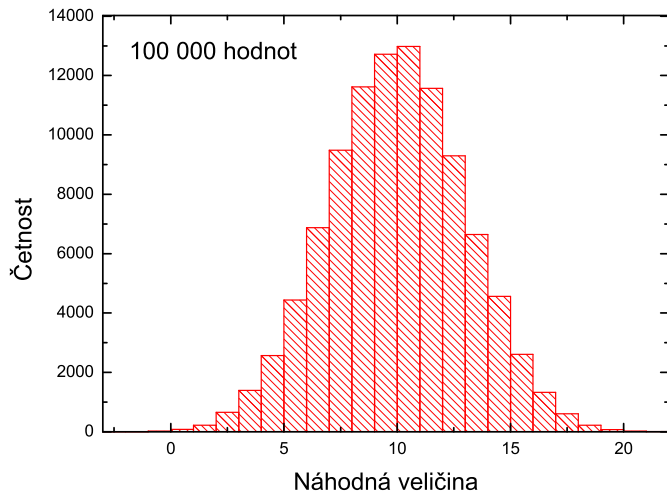
- Preciznost měření lze posuzovat na základě relativní statistické nejistoty měření.
- Přesnost měření na základě relativní chyby měření (pokud ji můžeme stanovit).
- Opakování měření nezajistí správnost, tj. potlačení systematických vlivů, může je však odhalit.



# Simulovaný experiment 1



# Simulovaný experiment 2



# Normální (Gaussovo) rozdělení

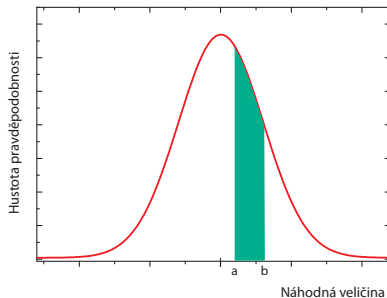
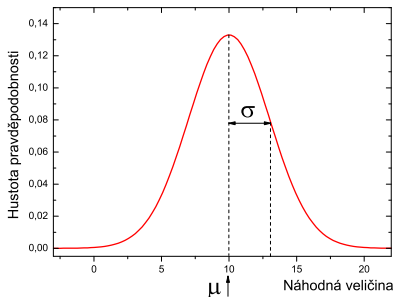
- spojité rozdělení je vyjádřeno pomocí hustoty pravděpodobnosti:

$$f_{\text{gauss}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

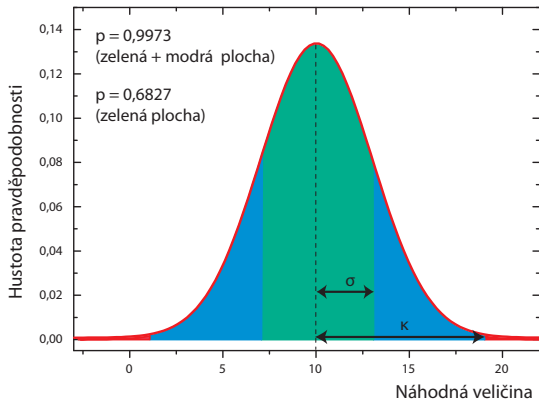
$\mu$  je střední hodnota,  $\sigma$  tzv. směrodatná odchylka.

- obecný význam hustoty pravděpodobnosti:

$$\text{pst}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$



# Statistický význam směrodatné odchylky



$\sigma$  – směrodatná odchylka,  $\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx \doteq 0,6827$

$\kappa = 3\sigma$  – krajní odchylka,  $\int_{\mu-\kappa}^{\mu+\kappa} f(x)dx \doteq 0,9973$

## Odhad parametrů Gaussova rozdělení

- Ideální je získat velké množství hodnot, zkonstruovat histogram a nalézt jeho střední hodnotu a šířku. To většinou nelze.
- Nejlepším odhadem střední hodnoty  $\mu$  je aritmetický průměr

$$\hat{\mu} = \bar{x} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

- Nejlepším odhadem směrodatné odchylky  $\sigma$  je

$$\hat{\sigma}(x) \equiv \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}.$$

### QtiPlot

Col[X]	Rows[Y]	Mean[Y]	StandardDev[Y]	StandardError[yEr]	Variance[Y]	Sum[Y]	IMax[Y]
1	1 [1:30]	5,6	0,6519202405203	0,2915475947423	0,425	28	

- směrodatná odchylka = *standard deviation*
- směrodatná odchylka aritmetického průměru = *standard error*

Štříška (\*) zdůrazňuje, že jde o odhad, nikoliv o přesný výpočet parametrů.

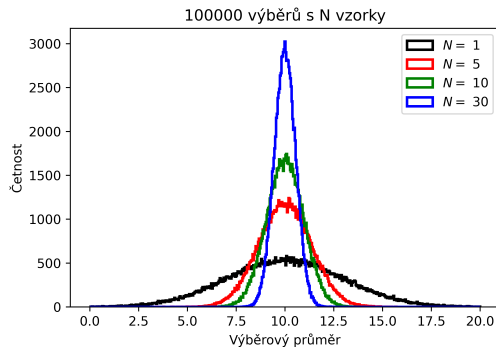
## Výsledek měření, nejistota typu A

- Výsledkem opakovaného měření fyzikální veličiny  $X$  je aritmetický průměr  $\bar{x}$  z naměřených hodnot. Nejistota průměru je dána jeho statistikou.
- Jako **statistická nejistota měření**  $u_A(x)$  se proto bere **směrodatná odchylka aritmetického průměru**

$$u_A(x) \equiv \hat{\sigma}(\bar{x}) \equiv \frac{\hat{\sigma}(x)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N - 1)}}.$$

- Směrodatná odchylka **aritmetického průměru**  $\hat{\sigma}(\bar{x})$  je menší než směrodatná odchylka  $\hat{\sigma}(x)$  a nelze je vzájemně zaměňovat.
- Nejistota určená statisticky se také označuje jako nejistota typu A.

## Proč jsou $\sigma(x)$ a $\sigma(\bar{x})$ odlišné?

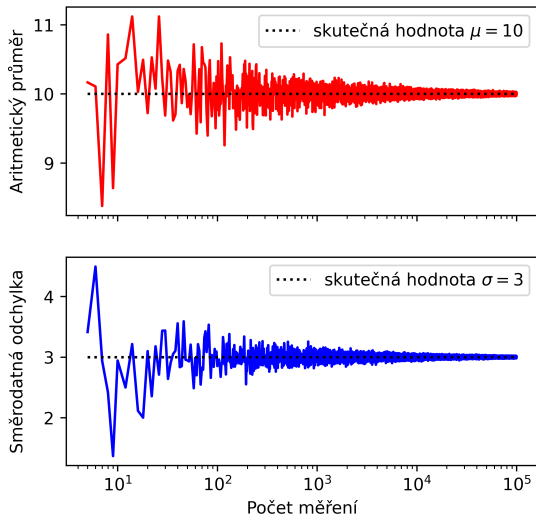


- $N = 1$ : histogram měřených hodnot
- $N > 1$ : histogram stejného počtu průměrů postupně získaných vždy z  $N$  měřených hodnot

**Statistika měřených hodnot a průměrů se liší, protože průměrováním se rozptýlení hodnot snižuje.**

Se zvyšujícím se počtem hodnot pro výpočet průměru se průměr více blíží skutečné (střední) hodnotě. Protože směrodatná odchylka aritmetického průměru  $\sigma(\bar{x})$  udává šířku histogramu pro průměr, je menší než směrodatná odchylka původního souboru měřených hodnot  $\sigma(x)$ . Platí  $\sigma(\bar{x}) = \sigma(x)/\sqrt{N}$ .

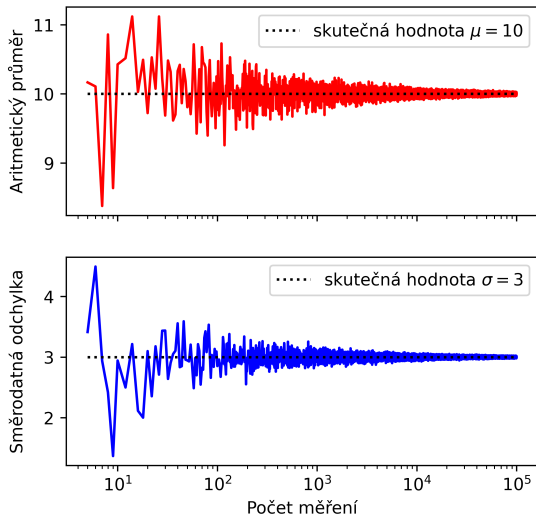
# Kvalita odhadu Gaussova rozdělení



- Malý počet měření poskytuje špatné odhady střední hodnoty a nejistoty.
- Kolik hodnot stačí změřit?
- Jak zaokrouhlovat nejistotu?

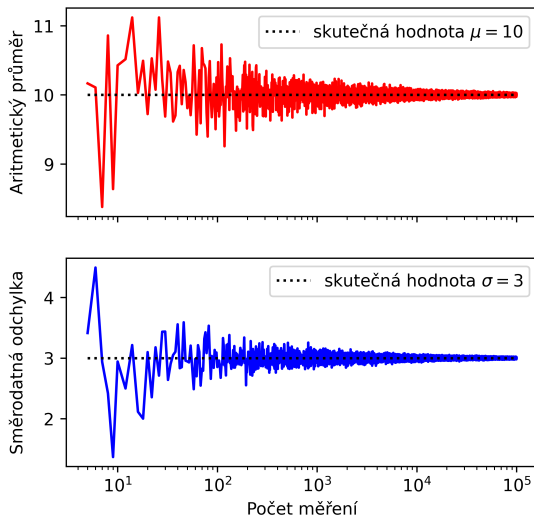


# Kvalita odhadu Gaussova rozdělení



- Malý počet měření poskytuje špatné odhady střední hodnoty a nejistoty.
- Kolik hodnot stačí změřit? Aspoň 30–40 pro dobré odhady. Akceptované minimum 10.
- Jak zaokrouhlovat nejistotu?

# Kvalita odhadu Gaussova rozdělení



- Malý počet měření poskytuje špatné odhady střední hodnoty a nejistoty.
- Kolik hodnot stačí změřit? Aspoň 30–40 pro dobré odhady. Akceptované minimum 10.
- Jak zaokrouhlovat nejistotu? Pro 10 měření má význam je první platná číslice.

## Standardní a rozšířená nejistota

- V řadě situací je potřeba zaručit přesnost výsledku (např. v energetice).
- Přesnost měření lze zajistit kalibrací přístroje u výrobce či u ČMI.
- Při měření nesmí nastávat neočekávané systematické vlivy.
- Potom interval daný standardní nejistotou

$$\langle \bar{x} - u(x), \bar{x} + u(x) \rangle$$

by při velkém počtu měření měl obsahovat pravou hodnotu veličiny s Gaussovým rozdělením s pravděpodobností 68,3 %.

### Problémy

- Nepraktická hladina 68,3 %. Vynásobíme třemi?
- Potřebujeme zohlednit kvalitu stanovení  $u$ . Při malém počtu měření není hladina zaručena. → rozšířená nejistota

## Rozšířená nejistota $U(x)$

Umožňuje s určitou spolehlivostí určit interval, ve kterém pravá hodnota veličiny leží (intervalový odhad).

Rozšířená nejistota je definována

$$U(x) = t_{p,\nu} u(x),$$

kde  $t_{p,\nu}$  je Studentův koeficient pro hladinu  $p$  a stupňů volnosti  $\nu = N - 1$ .

Do intervalu

$$\langle \bar{x} - t_{p,\nu} u(x), \bar{x} + t_{p,\nu} u(x) \rangle$$

pak pravá hodnota  $x$  spadne s pravděpodobností  $p$ .  
Ve fyzice obvykle pracujeme s  $p = 68,3\%$  a  $99,7\%$ .

### Excel

Studentův koeficient počítá funkce  $t_{p,\nu} = \text{TINV}(1 - p; \nu)$ .

## Test konzistence – odstranění hrubých chyb

Leží-li některá z naměřených hodnot mimo interval vymezený krajní odchylkou  $\kappa(x)$ , je pravděpodobnější vychýlení měřené hodnoty hrubou chybou než souhlasným působením mnoha náhodných vlivů (s pravděpodobností  $1 - 0,9973$ ). Hodnotu proto vyloučíme.

Postup:

1. Určíme aritmetický průměr  $\bar{x}$  a odhad krajní odchylky (**nikoliv krajní nejistoty**)

$$\hat{\kappa}(x) = 3\hat{\sigma}(x) = 3\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}.$$

Pokud je počet měření  $N$  malý, místo trojky můžeme vzít Studentův koeficient  $t_{0,9973,N-1}$ . S malým počtem měření bychom ale test konzistence dělat neměli.

2. Určíme hraniční body intervalu  $\bar{x} - \hat{\kappa}(x) \leq X \leq \bar{x} + \hat{\kappa}(x)$  a vyškrkáme ty naměřené hodnoty, které leží **vně** tohoto intervalu.
3. Tento postup opakujeme tak dlouho, dokud všechny hodnoty neleží uvnitř uvedeného intervalu.

## Nejistota typu B

- Nejistotu měření můžeme získat i jiným postupem než statisticky, např. ze specifikace přístroje od výrobce.
- Typicky nejistota přístrojů, konstant, hodnot etalonů apod. zahrnující systematické i náhodné vlivy.
- Nejistota určená *jinak než statisticky* se označuje jako nejistota typu B a značí se  $u_B$ .

## Kombinovaná nejistota (C)

Mohou nastat dvě situace:

1. Čtená hodnota na přístroji se při opakovaném měření nemění, neboť náhodné fluktuace jsou menší než poslední zobrazené místo (obvykle měření elektrických veličin nebo vážení).

**V tomto případě měříme jen jedenkrát a nejistota měření je dána nejistotou  $u_B$ .**

2. Čtená hodnota na přístroji se při opakovaném měření mění.

Ukazuje-li přístroj při opakovaném měření různé hodnoty, statistickým zpracováním stanovíme nejistotu  $u_A$ . Celkovou **kombinovanou** nejistotu vypočteme jako

$$u_C(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)}$$

## Zápis výsledku měření, zaokrouhlování

- Nejistota se zaokrouhluje na jednu platnou číslici, aritmetický průměr pak na stejné desetinné místo, jako je řád nejistoty.<sup>1</sup>
- Správná forma zaokrouhlení výsledků zvyšuje čitelnost zápisu (a patří k základním požadavkům při zpracování měření).

### Rozšířená nejistota – zapisujeme jako interval

$$x = (\bar{x} \pm U_C(x))_j \quad (p = \dots, \nu = \dots)$$

#### Příklady

$$l = (209,9 \pm 0,1) \text{ m} \quad (p = 0,6827, \nu = 9)$$

$$l = (2099 \pm 1) \text{ dm} \quad (p = 0,6827, \nu = 9)$$

$$l = (20990 \pm 10) \text{ cm} \quad (p = 0,6827, \nu = 9)$$

$$l = (20991 \pm 14) \text{ cm}^1 \quad (p = 0,6827, \nu = 9)$$

$$l = (20991 \pm 15) \text{ cm}^1 \quad (p = 0,6827, \nu = 9)$$

<sup>1</sup>Můžeme výjimečně použít dvou platných míst v zápisu nejistoty, zejména když by zaokrouhlením na jedno místo nejistota značně vzrostla/klesla. Potom průměr zaokrouhluje na stejné desetinné místo, jako je nižší platné místo nejistoty. Použití více míst vyžaduje mnohonásobné opakování měření a je spíše metrologickou záležitostí.



# Zápis výsledku měření, zaokrouhlování

Standardní nejistota – nezapisujeme jako interval

$$x = \bar{x}(u(x)) \text{ j}$$

## Příklady

$$l = 209,9(0,1) \text{ m}$$

$$l = 209,9(1) \text{ m} \leftarrow \text{zkrácený zápis, nejistota je opět } 0,1 \text{ m}$$

$$l = 2099(1) \text{ dm}$$

$$l = 20990(10) \text{ cm}$$

$$l = 20991(14) \text{ cm}$$

$$\kappa = 6,673\,84(0,000\,80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\kappa = 6,673\,84(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \leftarrow \text{zkrácený zápis}$$

$$R_{\infty} = 10\,973\,731,568\,160(21) \text{ m}^{-1} \leftarrow \text{zkrácený zápis}$$

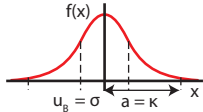
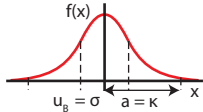
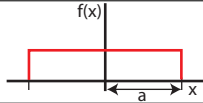
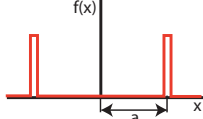
- Zaokrouhlování se řídí stejnými pravidly jako u rozšířené nejistoty.
- Výsledky přesných měření často udávají nejistotu zkráceně v řádu posledního platného místa hodnoty. Chybné zaokrouhlení výsledku v tomto případě změní řád nejistoty!

## Nalezení nejistoty typu B

- Výrobce většinou udává krajní nejistotu „*accuracy*“ jako  $\pm a$ .
- Standardní nejistotu spočteme podle vztahu

$$u_B(x) = a/k,$$

$k$  závisí na typu předpokládaného statistického rozdělení.

Rozdělení		$k$	Příklad užití
normální		3	kalibrované přístroje (multimetry, váhy)
rovnoměrné		$\sqrt{3}$	odhad z nejmenšího dílku (měřítka délky)
bimodální Diracovo		1	třída přesnosti (analogová el. měřidla)

- U analogových přístrojů nejistotu můžeme odhadnout podle nejmenšího dílku, který je typicky 1 mm ( $a = 0,5$  mm).
- Počet stupňů volnosti u nejistoty specifikované výrobcem je  $\approx 30-50$  — „dobře změřeno“.

## Nejistota typu B digitálních vah

Výrobce vah udává většinou dva údaje

- citlivost, *readout*  $d$  – nejmenší hodnota čtená na displeji, může být shodná s reprodukovatelností,
- ověřovací dílek, *verification value*  $e$  – nejvyšší dovolený rozdíl mezi údajem vah a etalony hmotnosti použitými při ověření vah.

**Za krajní nejistotu měření tedy vezmeme ověřovací dílek  $e$ . Standardní nejistota je tedy  $u_B = e/3$ .**

V praxi máme váhy, u kterých platí  $e = 10d$ . Nejdůležitějším údajem vah je ovšem váživost.

## Nejistota typu B digitálních měřidel elektrických veličin

Přesnost měření (*accuracy*) závisí na měřené hodnotě i na zvoleném rozsahu. Krajní absolutní nejistota je udána způsobem

$$U_B = \pm(x \% \text{ of reading} + \text{count}),$$

kde *reading* je hodnota na displeji a *count* je příspěvek k nejistotě udaný v jednotkách nejnižšího zobrazeného místa (*digit/resolution*).

### Př. Keysight U3402A – stanovení nejistoty při čtení 5,0025 V DC

V režimu automatické volby rozsahů a pomalého měření přístroj zvolí rozsah slow 12 V. Krajní nejistota tedy je  $U_B = 0,012 \cdot 10^{-2} \cdot 5,0025 \text{ V} + 5 \cdot 100 \mu\text{V} = 1,1 \text{ mV}$ . Výsledek zahrnuje náhodné chyby i systematické drifty během 1 roku od kalibrace.



Keysight U3402A

Rate	Range	Resolution	Maximum reading	Accuracy (One year; 23°C ± 5°C)	Typical input impedance <sup>[1]</sup>
Slow	120.000 mV	1 μV	119.999	±0.012% + 8 <sup>[2]</sup>	10.0 MΩ
	1.20000 V	10. μV	1.19999	±0.012% + 5	10.0 MΩ
	12.0000 V	100 μV	11.9999	±0.012% + 5	11.1 MΩ
	120.000 V	1 mV	119.999	±0.012% + 5	10.1 MΩ
	1000.00 V	10 mV	1000.00 <sup>[3]</sup>	±0.012% + 5	10.0 MΩ
Medium	400.00 mV	10 μV	399.99	±0.012% + 5	10.0 MΩ
	4.0000 V	100 μV	3.9999	±0.012% + 5	11.1 MΩ
	40.000 V	1 mV	39.999	±0.012% + 5	10.1 MΩ
	400.00 V	10 mV	399.99	±0.012% + 5	10.0 MΩ
	1000.0 V	100 mV	1000.0 <sup>[3]</sup>	±0.012% + 5	10.0 MΩ
Fast	400.0 mV	100 μV	399.9	±0.012% + 2	10.0 MΩ
	4.000 V	1 mV	3.999	±0.012% + 2	11.1 MΩ
	40.00 V	10 mV	39.99	±0.012% + 2	10.1 MΩ
	400.0 V	100 mV	399.9	±0.012% + 2	10.0 MΩ
	1000 V	1 V	1000 <sup>[3]</sup>	±0.012% + 2	10.0 MΩ

## Nejistota typu B ručkových měřidel elektrických veličin

- třída přesnosti přístroje je uvedena nad symbolem měření stejnosměrné/střídavé veličiny
- je to standardní nejistota typu B uvedená jako procento z rozsahu ( $k = 1$ )
- rozsah je dán použitými svorkami přístroje



VIZ <https://shop.normy.biz/detail/503169#nahled>

## Zákon přenosu nejistoty (ZPN)

Nechť nepřímo měřená veličina  $y$  závisí na nezávislých, přímo měřených veličinách  $x_1, x_2, \dots, x_p$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Nechť tyto veličiny mají standardní kombinované nejistoty  $u_c(x_1), u_c(x_2), \dots, u_c(x_p)$ . Pak nejistotu nepřímo měřené veličiny lze určit jako

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2_{[x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2, \dots, x_p=\bar{x}_p]} u_c^2(x_k)},$$

kde  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$  jsou odhady přímo měřených veličin.

Derivace funkce  $f$  podle zvolené proměnné  $x_k$  jsou parciální, čili při tomto derivování považujeme ostatní proměnné  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p$  za konstanty.

## Pravidla pro počítání s nejistotami

Nechť  $x_1, x_2$  jsou přímo měřené veličiny se standardními kombinovanými nejistotami  $u(x_1)$ ,  $u(x_2)$  a  $y$  je nepřímo měřená veličina z nich počítaná. Dále označme  $r(x_i) = u(x_i)/|\bar{x}_i|$  relativní nejistoty veličin.

$$\begin{array}{ll}
 y = x_2 \pm x_1 & u(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)} \\
 y = A \cdot x_1 & u(y) = |A| \cdot u(x_1) \\
 y = x_1 \cdot x_2, y = \frac{x_1}{x_2} & r(y) = \sqrt{r^2(x_1) + r^2(x_2)} \\
 y = x^n & r(y) = |n| \cdot r(x)
 \end{array}$$

- Pravidla obdržíme aplikací ZPN. Platí tedy stejné předpoklady (nezávislost veličin).
- Pravidla lze snadno zobecnit i na součet/rozdíl/součin/podíl více veličin.
- V příhodných situacích pravidla velmi ulehčují výpočet nejistoty.

# Rozšířená nejistota nepřímo měřené veličiny

## Teoretický postup podle GUM:

1. Do ZPN nebo pravidel pro počítání s nejistotami dosadíme standardní nejistoty  $u_c(x_1) \dots u_c(x_p)$  přímo měřených veličin  $x_1 \dots x_p$  (kombinované nejistoty **nerozšířené** Studentovým koeficientem).
2. Při tomto výpočtu si všimneme příspěvků od jednotlivých přímých měření  $u_i(y)$ :

$$u_c(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u_c^2(x_1) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_p}\right)^2 u_c^2(x_p)} = \sqrt{u_1^2(y) + \dots + u_p^2(y)}.$$

3. Rozšířenou nejistotu nepřímo měřené veličiny  $y$  pak spočteme

$$U(y) = t_{p, \nu_{\text{eff}}} u(y),$$

kde  $\nu_{\text{eff}}$  označuje efektivní počet stupňů volnosti daný Welchovou-Satterthwaiteovou formulí

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^p \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}.$$



## Rozšířená nejistota nepřímo měřené veličiny

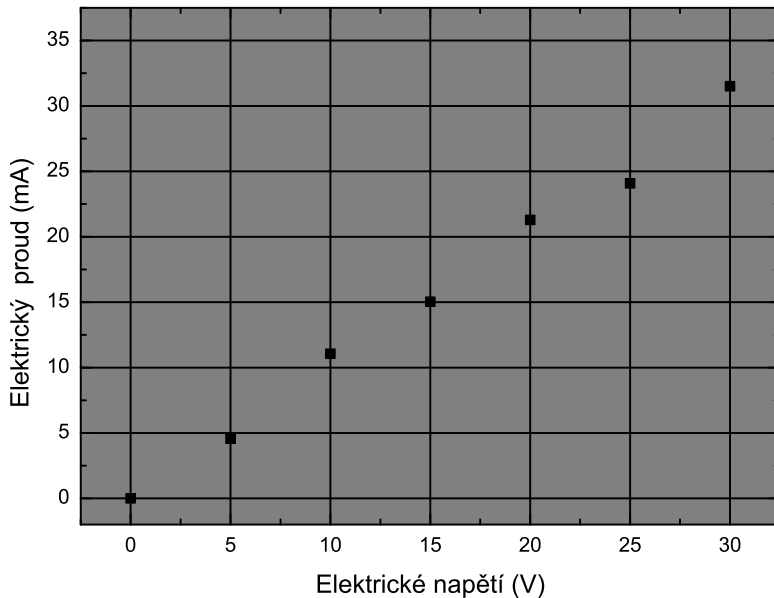
Předešlý postup je složitý a v našich podmínkách nemá význam. Možné alternativy, jak si ulehčit práci:

- Všechna přímá měření provedeme se stejným počtem stupňů volnosti (resp. počtem měření, obvykle  $\nu_i = N - 1$ ). Výsledek bude mít stejný počet stupňů volnosti.
- Za efektivní počet stupňů volnosti vezmeme nejnižší hodnotu:  $\nu_{\text{eff}} = \min(\nu_i)$ .
- Pokud není zapotřebí, na stanovení rozšířené nejistoty rezignujeme a pracujeme pouze se standardní kombinovanou nejistotou  $u_C(y)$  výsledku. Výsledek ale musíme zapisovat jako standardní nejistotu (ne konfidenčním intervalem).

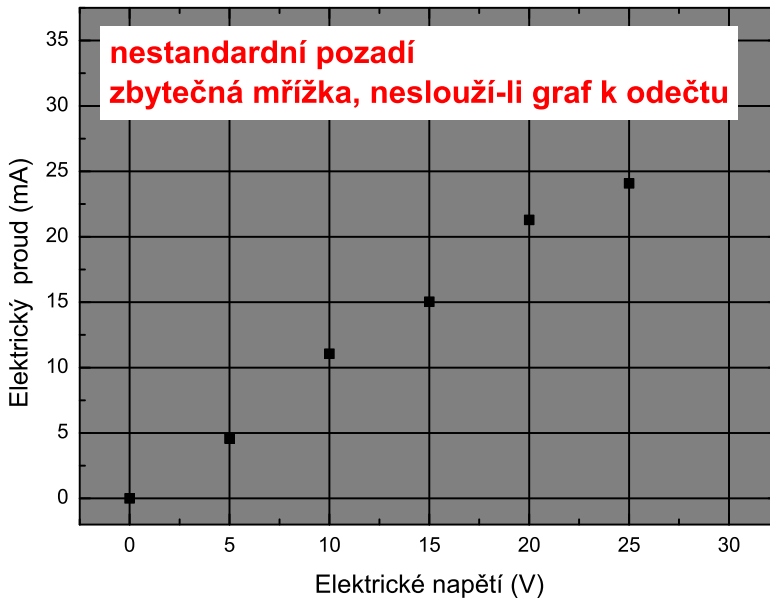
## Struktura pojmů vztahujících se k nejistotě měření

způsob vyjádření	v jednotkách veličiny	v procentech hodnoty	
označení	absolutní	relativní	
příklady	$u_A, U_C$	$r_A, R_C$	
způsob stanovení	statisticky	jinak	výsledek
označení	nejistota typu A,	nejistota typu B	kombinovaná
příklady	$u_A, U_A, r_A, R_A$	$u_B, U_B, r_B, R_B$	$u_C, U_C, r_C, R_C$
hladina spolehlivosti	neurčena	určena	
označení	standardní	rozšířená	
příklady	$u_A, r_C$	$U_A, R_C$	
zápis	$\bar{x}(u(x))$	$\bar{x} \pm U(x)$	
způsob měření	měření $x$	$y = y(x_1, x_2, \dots)$	
označení	přímé	nepřímé	
vyhodnocení	$u_A, u_B \rightarrow u_C \rightarrow U_C$	$u_C(x_i) \xrightarrow{\text{ZPN}} u_C(y) \rightarrow U_C(y)$	

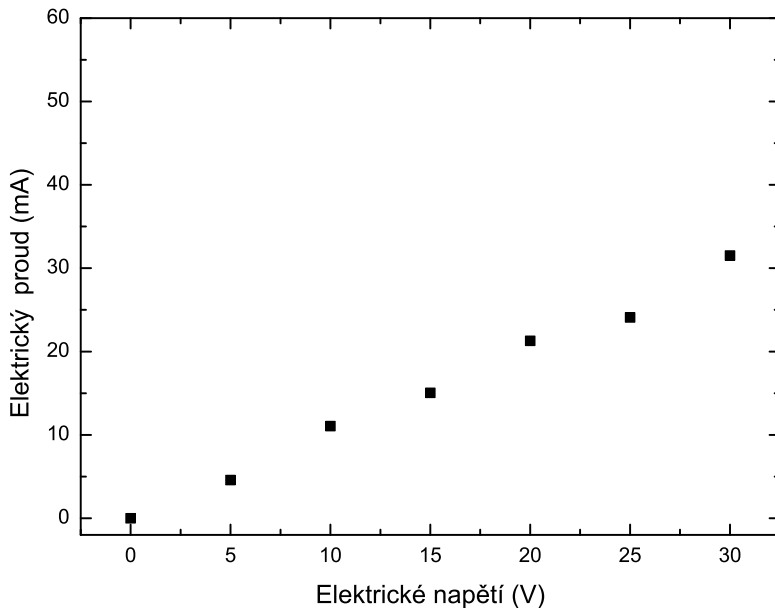
# Jak (ne)má vypadat graf



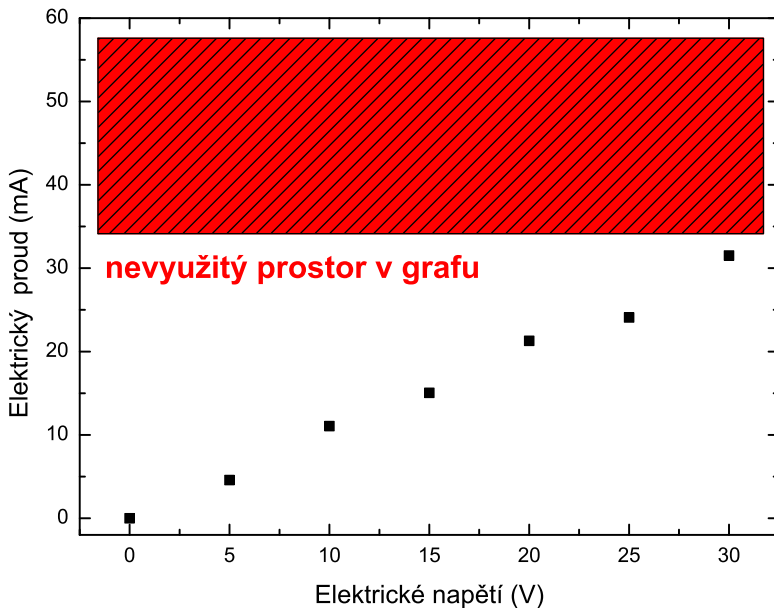
# Jak (ne)má vypadat graf



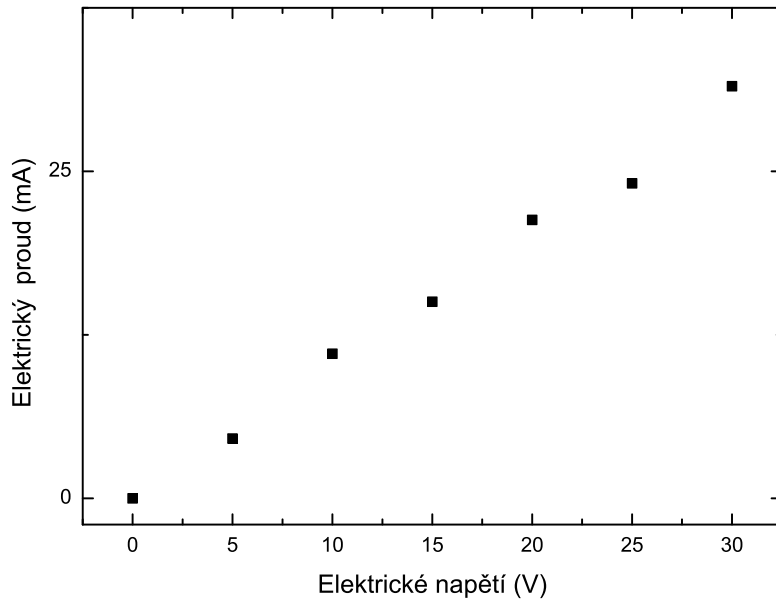
## Jak (ne)má vypadat graf



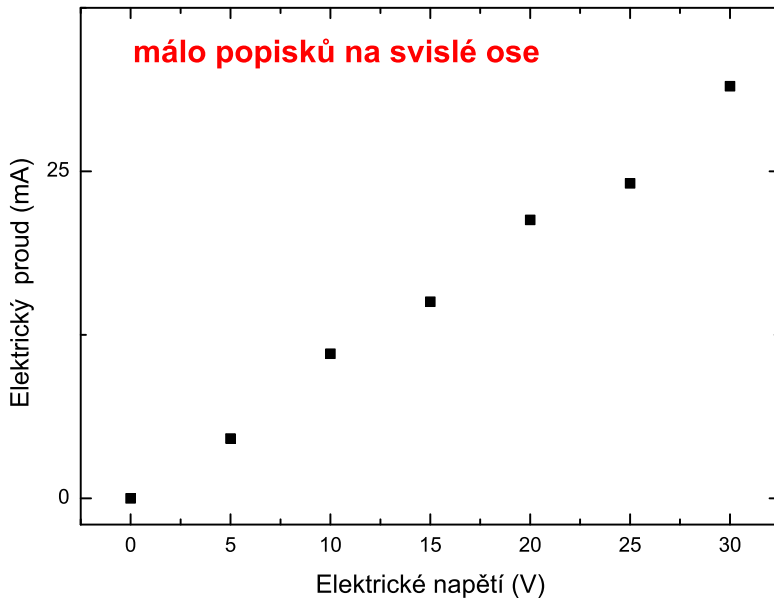
# Jak (ne)má vypadat graf



# Jak (ne)má vypadat graf

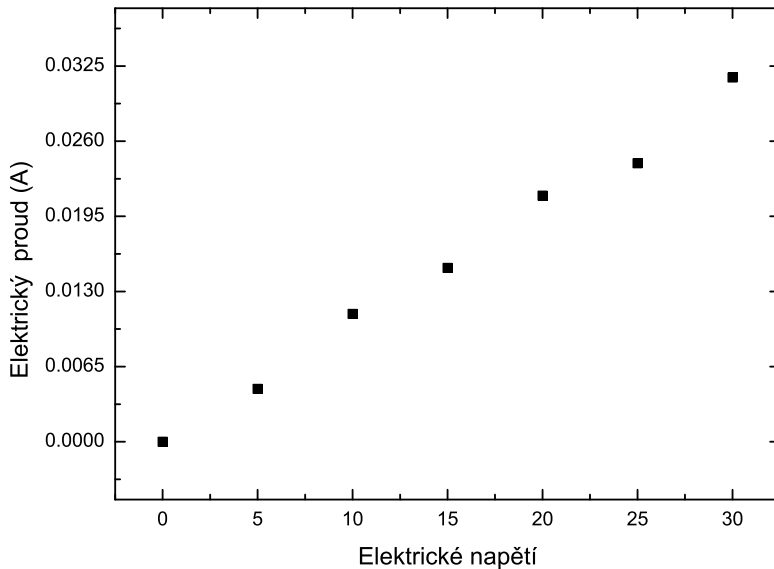


# Jak (ne)má vypadat graf

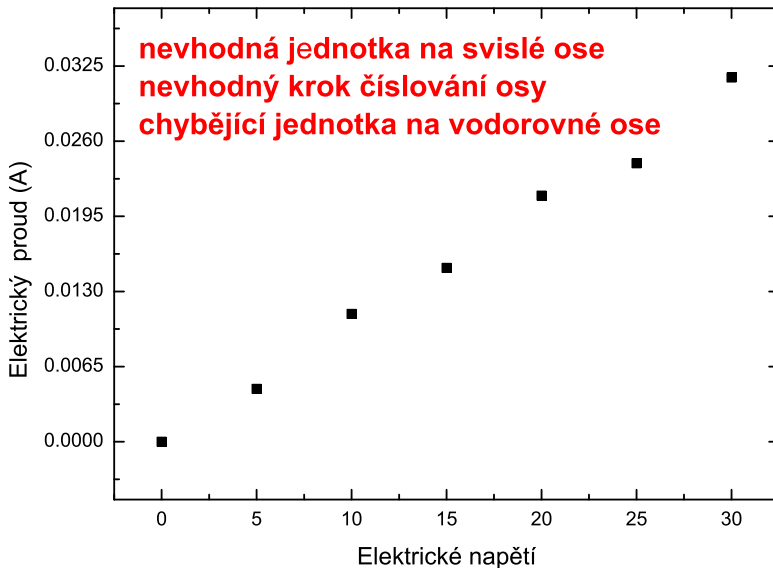




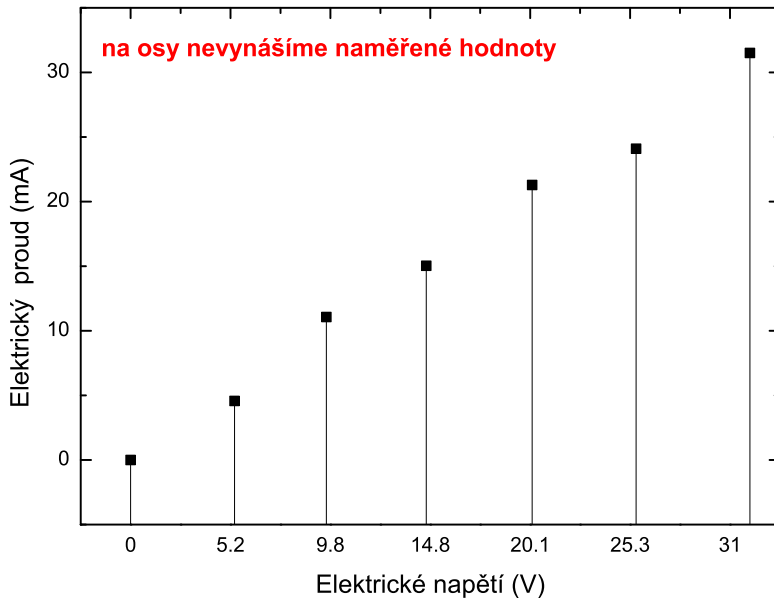
# Jak (ne)má vypadat graf



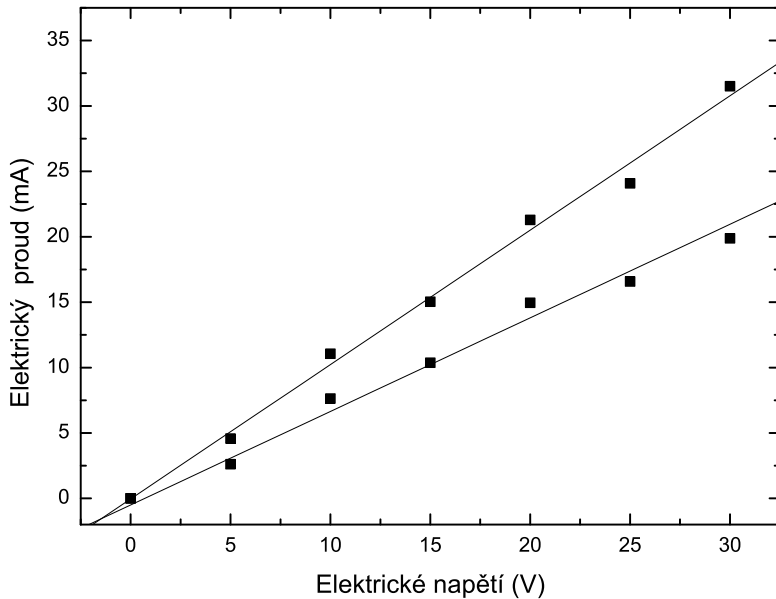
# Jak (ne)má vypadat graf



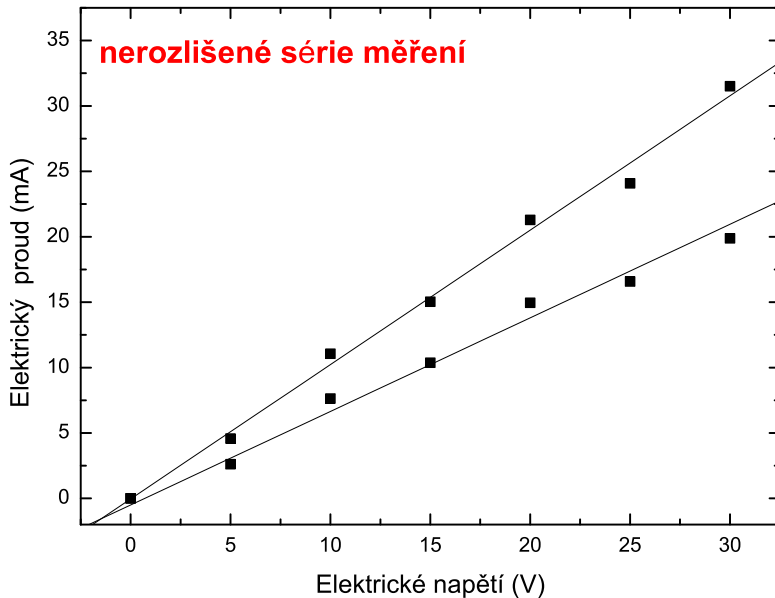
# Jak (ne)má vypadat graf



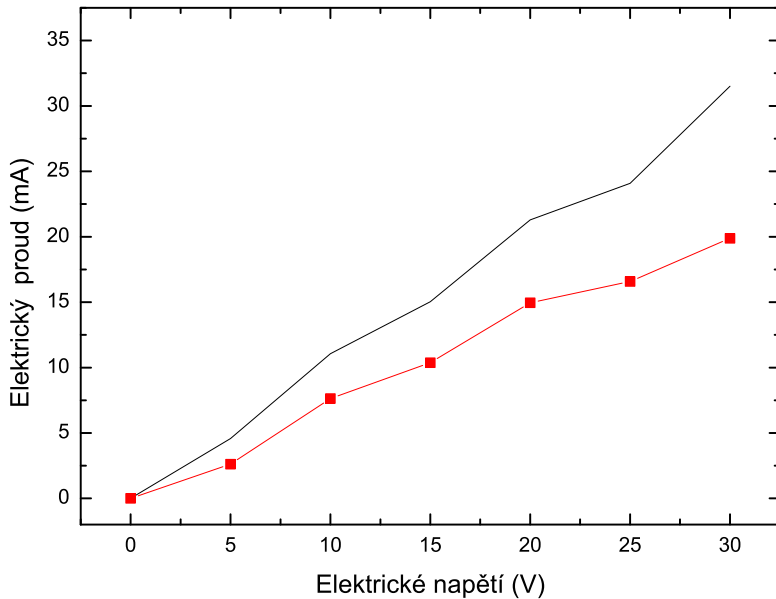
# Jak (ne)má vypadat graf



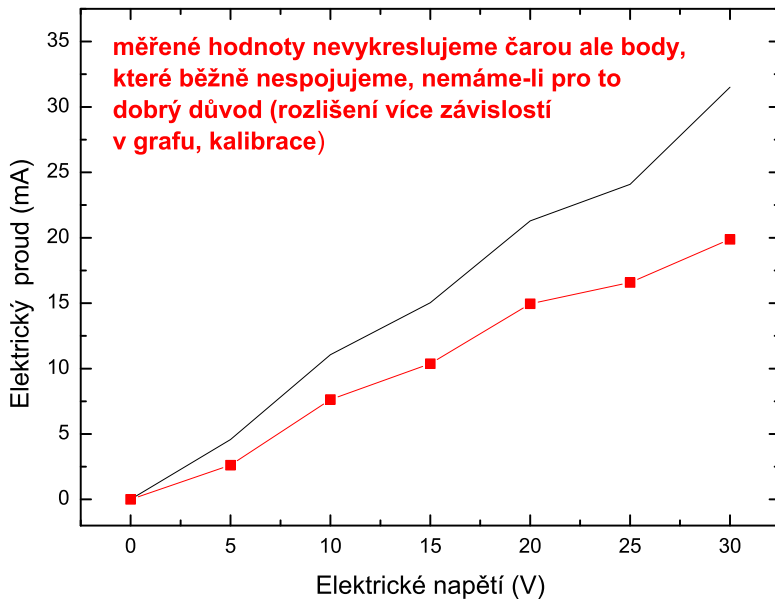
# Jak (ne)má vypadat graf



# Jak (ne)má vypadat graf

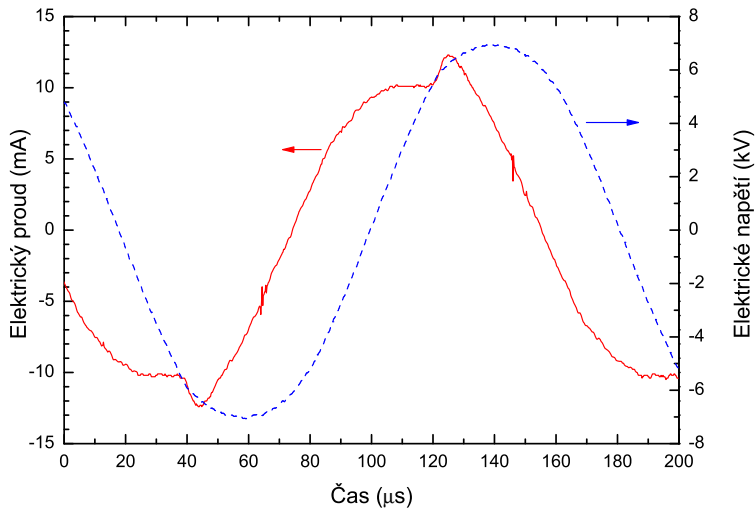


# Jak (ne)má vypadat graf



# Jak (ne)má vypadat graf

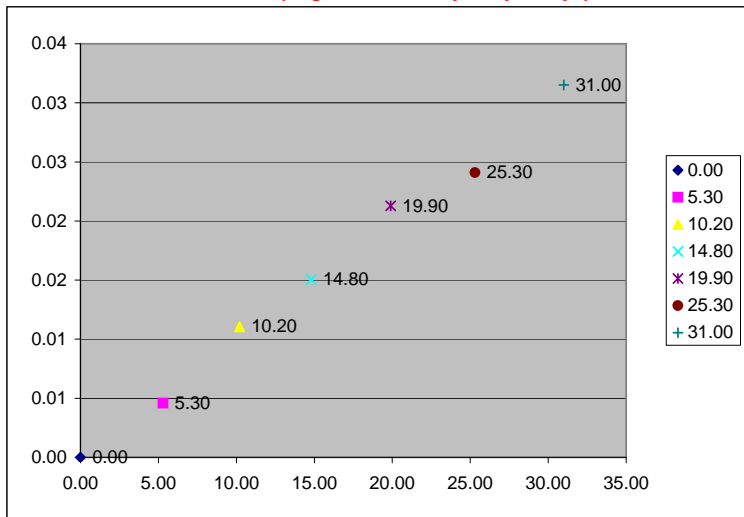
Hustě měřené závislosti (spektra, osciloskopická měření) kreslíme čarami.



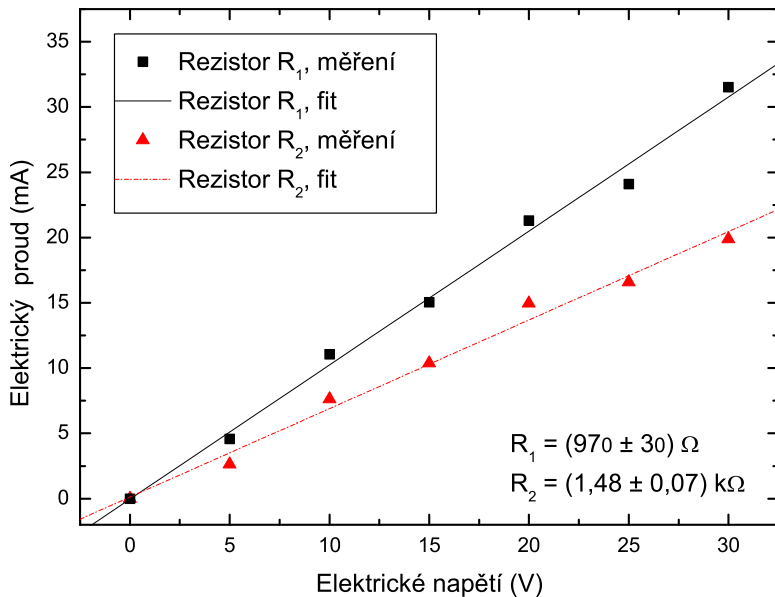


# Jak (ne)má vypadat graf

Standardní nastavení programu nemusí být vždy to nejlepší



## Jak má vypadat graf



# Jak má vypadat graf

- Na vodorovnou osu vynášíme nezávisle proměnnou, na svislou závisle proměnnou.
- Jednotky na osách, počátek os a další parametry grafu volíme tak, aby graf pokryl na šířku i výšku cca 80% plochy, graf by neměl být natěsnán v úzkém proužku.
- Do grafů nezakresluje mřížky ani pozadí.
- Stupnice popisujeme rovnoměrně, nevynášíme na ně naměřené hodnoty. Vhodné řady pro popis úseček jsou

0, 1, 2, 3 ...	0, 2, 4, 6 ...
0, 5, 10, 15, 20 ...	0, 25, 50, 75, 100 ...

- U každé osy uvedeme měřenou veličinu a její vhodnou jednotku ( $10^{11}$  Pa,  $\mu\text{A}$ ).

## Jak má vypadat graf

- Body vyznačujeme křížky, kolečky, čtverečky atd. vhodné velikosti, ne tečkami, nikdy k nim nevypisujeme hodnoty.
- Místo propojení jednotlivých bodů se snažíme body proložit předpokládanou závislostí.
- **Pokud pro stanovení výsledku měření bylo nutné body proložit křivku (regrese), proložená křivka musí být součástí grafu.**
- Je-li v grafu více křivek, odlišíme je barevně i typem čáry a přidáme legendu.
- Do záhlaví grafu nebo do popisku obrázku zapíšeme název vystihující obsah grafu.

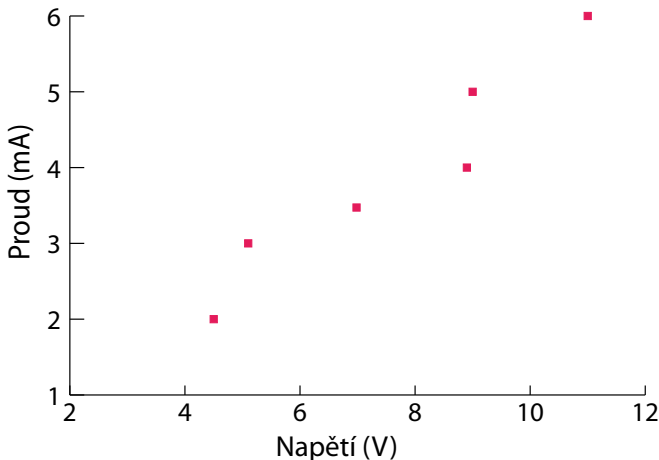
### Doporučený program

Máme kampusovou licenci k programu *QtiPlot* (obdoba *Originu*).

Ke stažení na <https://is.muni.cz/auth/el/sci/jaro2021/F2180/software/>.

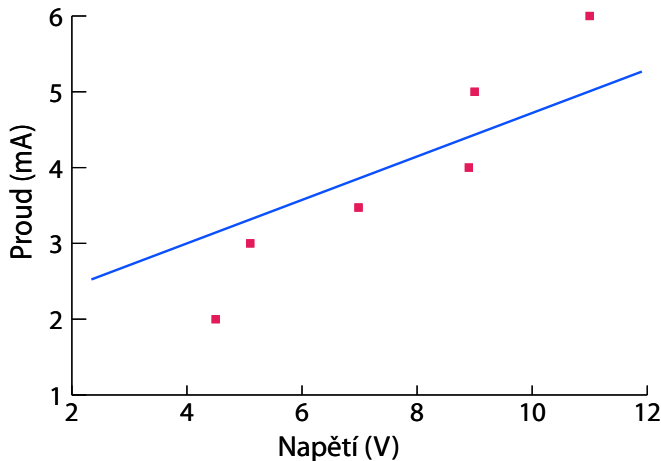
## Aproximace závislostí

- Máme změřenou závislost  $y = f(x)$ , tj. řadu dvojic  $[x_i, y_i]$ . Hledáme funkční průběh, který ji nejlépe aproximuje.
- Nepožadujeme, aby průběh změřenými hodnotami procházel.
- Jak zvolit prokládanou funkci  $y = f(x)$ ?



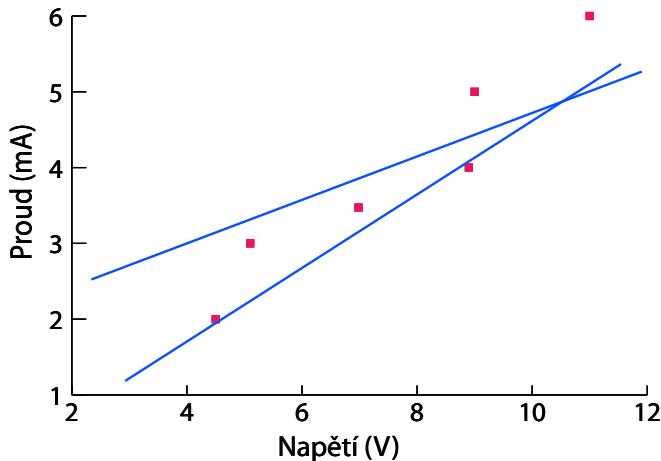
## Aproximace závislostí

- Máme změřenou závislost  $y = f(x)$ , tj. řadu dvojic  $[x_i, y_i]$ . Hledáme funkční průběh, který ji nejlépe aproximuje.
- Nepožadujeme, aby průběh změřenými hodnotami procházel.
- Jak zvolit prokládanou funkci  $y = f(x)$ ?



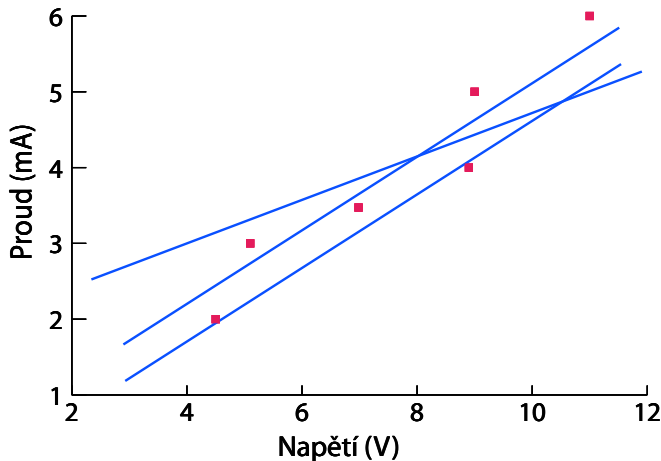
## Aproximace závislostí

- Máme změřenou závislost  $y = f(x)$ , tj. řadu dvojic  $[x_i, y_i]$ . Hledáme funkční průběh, který ji nejlépe aproximuje.
- Nepožadujeme, aby průběh změřenými hodnotami procházel.
- Jak zvolit prokládanou funkci  $y = f(x)$ ?



## Aproximace závislostí

- Máme změřenou závislost  $y = f(x)$ , tj. řadu dvojic  $[x_i, y_i]$ . Hledáme funkční průběh, který ji nejlépe aproximuje.
- Nepožadujeme, aby průběh změřenými hodnotami procházel.
- Jak zvolit prokládanou funkci  $y = f(x)$ ?

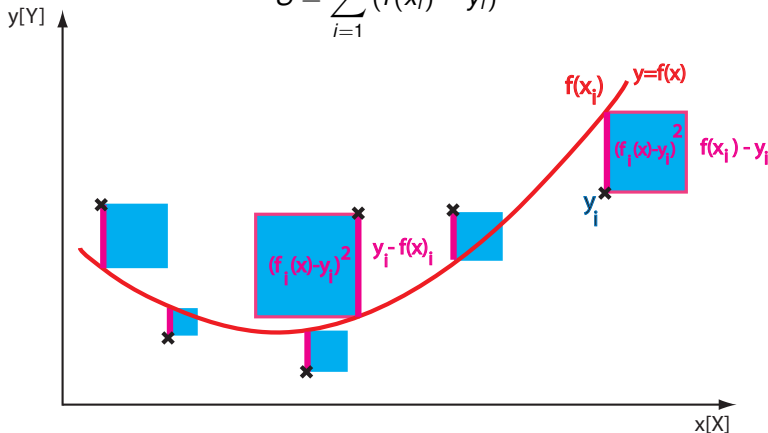




## Metoda nejmenších čtverců

Typ a hodnoty parametrů funkce  $f(x; b_0, b_1, b_2 \dots)$  hledáme tak, aby tzv. suma čtverců  $S$  měla minimální hodnotu

$$S = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$



Kdyby byl proklad přesný, bylo by  $S = 0$ , obvykle je  $S$  malé kladné číslo.

## Metoda nejmenších čtverců

Hledání optimálních hodnot parametrů  $b_i$  funkce  $f$ , při které suma  $S$  nabývá minima, se provádí derivováním  $S$  podle parametrů  $b_i$  a položením derivací rovným nule. Řeší se tak systém  $m$  rovnic

$$\frac{\partial S}{\partial b_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Je vhodné rozlišit dva případy:

### lineární regrese

funkce  $f$  závisí lineárně na parametrech  $b_0, b_1 \dots$

Př:  $f(x; b_0, b_1, b_2) = b_0 + b_1x + b_2x^2$

Obecné vztahy pro optimální hodnoty parametrů odvodit **lze**.

### nelineární regrese

Př:  $f(x; b_0, b_1) = b_0 \cdot e^{b_1x}$

Obecné vztahy odvodit **nelze**, optimální hodnoty se hledají iteračně. Někdy je možnost, jak převést druhý případ na první – linearizace.

## Lineární regrese lineární závislosti $y = b_0 + b_1 x$

Měření poskytlo  $n$  dvojic  $[x_i, y_i]$ ,  $n \geq 3$

Odhady optimálních hodnot parametrů (sčítáme přes všechna  $n$ )

$$b_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad b_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Odhady nejistot parametrů jsou

$$u(b_0) = s \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad u(b_1) = s \cdot \sqrt{\frac{n}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

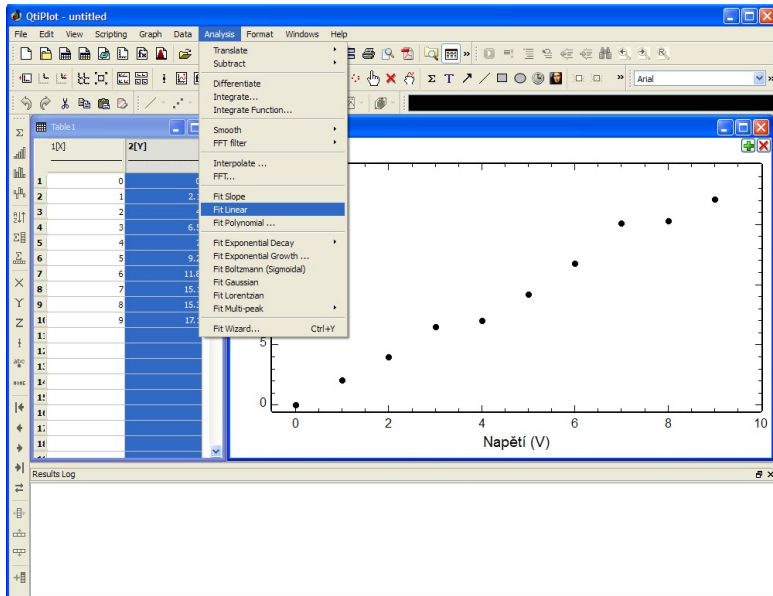
$$s = \sqrt{\frac{S_0}{n-2}}, \quad S_0 = \sum (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2$$

Výsledkem je tedy intervalový odhad parametrů  $b_0$  a  $b_1$

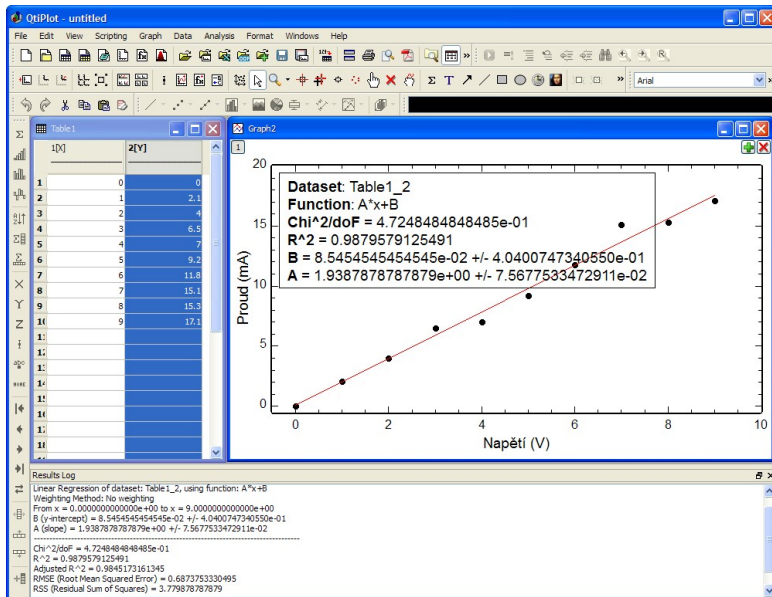
$$b_0 = b_0 \pm u(b_0) t_{p, n-2} \quad b_1 = b_1 \pm u(b_1) t_{p, n-2},$$

kde  $t_{p, n-2}$  jsou koeficienty Studentova rozdělení.

# Lineární regrese v QtiPlotu

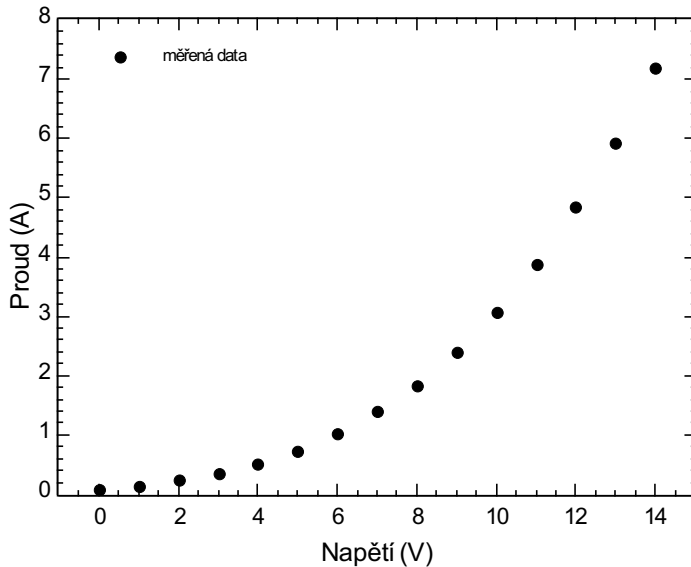


# Lineární regrese v QtiPlotu



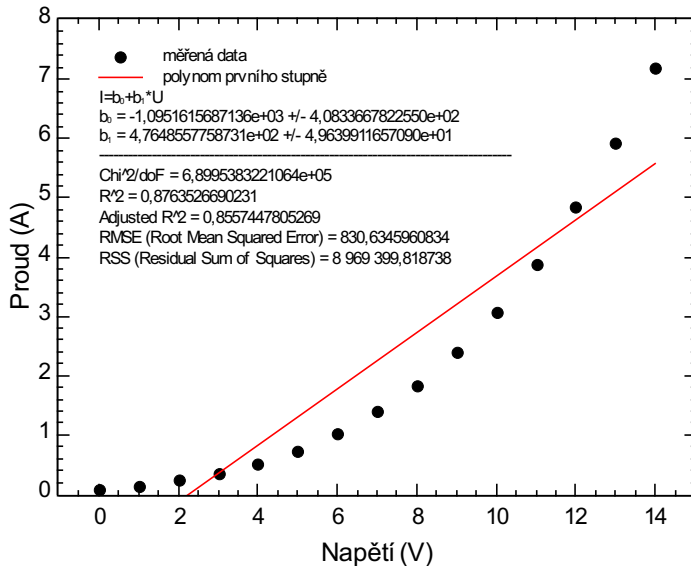
# Lineární regrese polynomem

$$I(U) = 80 + 60U + 4U^2 + 2U^3 + N(0, \sigma) \text{ mA}, \quad [U] = \text{V}, \sigma = 10 \text{ mA}$$



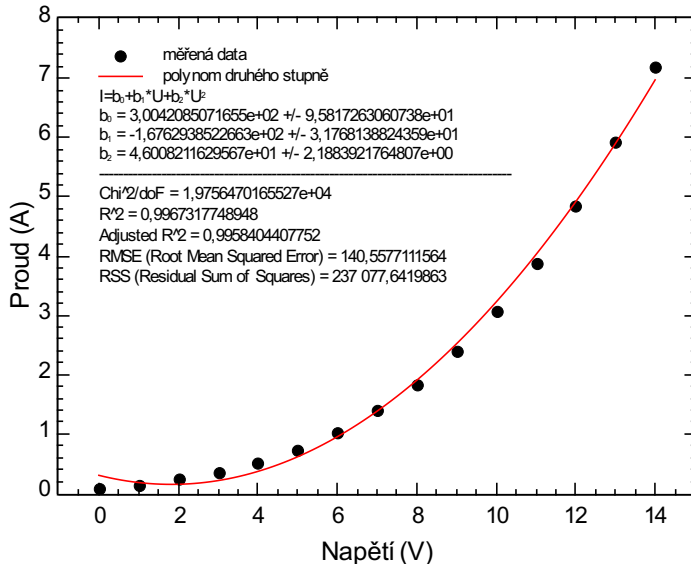
# Lineární regrese polynomem

$$I(U) = 80 + 60U + 4U^2 + 2U^3 + N(0, \sigma) \text{ mA}, \quad [U] = \text{V}, \sigma = 10 \text{ mA}$$



# Lineární regrese polynomem

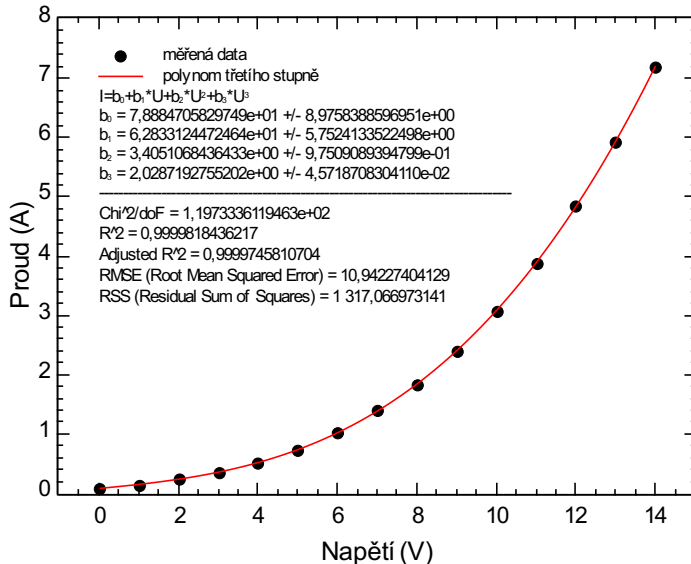
$$I(U) = 80 + 60U + 4U^2 + 2U^3 + N(0, \sigma) \text{ mA}, \quad [U] = \text{V}, \sigma = 10 \text{ mA}$$





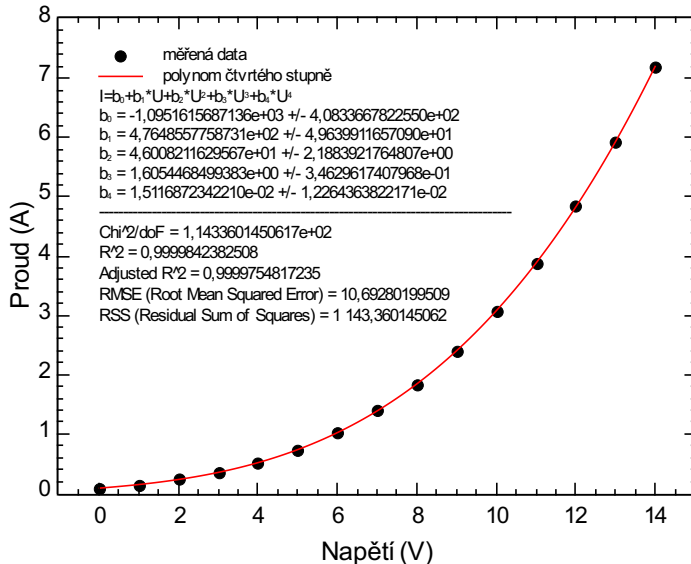
# Lineární regrese polynomem

$$I(U) = 80 + 60U + 4U^2 + 2U^3 + N(0, \sigma) \text{ mA}, \quad [U] = \text{V}, \sigma = 10 \text{ mA}$$



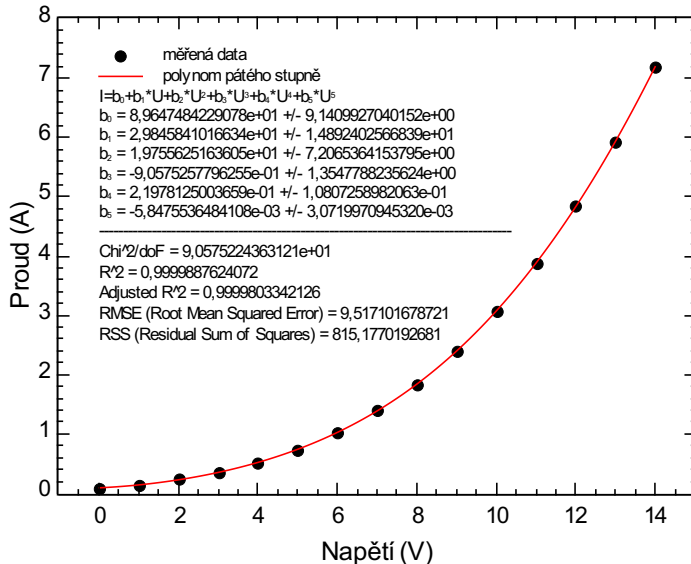
# Lineární regrese polynomem

$$I(U) = 80 + 60U + 4U^2 + 2U^3 + N(0, \sigma) \text{ mA}, \quad [U] = \text{V}, \sigma = 10 \text{ mA}$$



# Lineární regrese polynomem

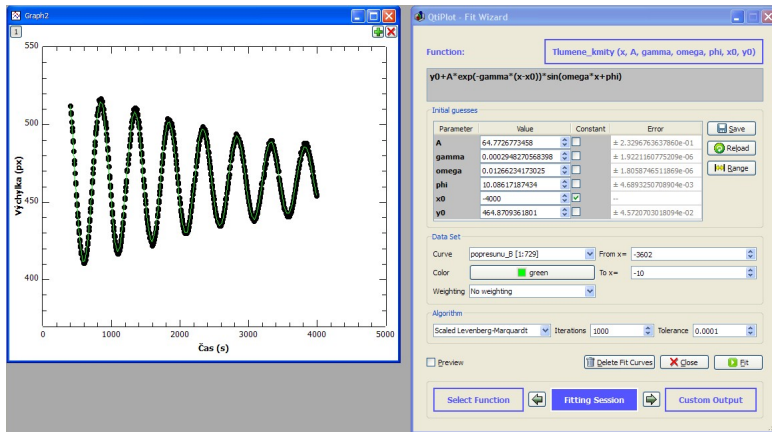
$$I(U) = 80 + 60U + 4U^2 + 2U^3 + N(0, \sigma) \text{ mA}, \quad [U] = \text{V}, \sigma = 10 \text{ mA}$$



# Nelineární regrese v *QtiPlotu*

Přesné nalezení rovnovážné polohy, frekvence kmitání a koeficientu tlumení Cavendishových torzních vah

$$y(t) = y_0 + Ae^{-\gamma(t-t_0)} \sin(\omega t + \phi)$$



# Platnost metody nejmenších čtverců

- Mezi veličinami  $x$  a  $y$  opravdu existuje závislost.
- K určení hledaných parametrů funkce  $f$  stačí teoreticky naměřit alespoň tolik různých dvojic  $[x_i, y_i]$ , kolik je hledaných parametrů (např. na proklad přímkou  $y = b_0 + b_1 x$  alespoň dvě dvojice).
- Ve skutečnosti potřebujeme mnohem více hodnot. Např. 10–12 pro posouzení linearity.
- Předpokládáme, že hodnoty  $x$  nejsou zatíženy žádnou chybou. Pokud tento předpoklad neplatí, používáme tento postup vědomě se systematickou chybou. Přesnější je v takovémto případě použít ortogonální regresi.
- Hodnoty  $y_i$  jsou náhodné, nejsou však zatíženy hrubými nebo systematickými chybami.

## Linearizace exponenciální závislosti $y = b_0 \cdot e^{b_1 x}$

Závislost převedeme na lineární tvar:

$$\begin{aligned}
 y &= b_0 \cdot e^{b_1 x} \\
 \ln y &= \ln (b_0 \cdot e^{b_1 x}) \\
 \ln y &= \ln b_0 + \ln (e^{b_1 x}) \\
 \underbrace{\ln y}_{\text{ozn. } Y} &= \underbrace{\ln b_0}_{\text{ozn. } B_0} + (b_1 x) \\
 Y &= B_0 + b_1 x.
 \end{aligned}$$

- Stačí tedy do grafu vynášet místo dvojic hodnot  $[x, y]$  dvojice hodnot  $[x, \ln y] = [x, Y]$ , a pak těmito body proložit přímkou.  $\ln y$  si předem spočítáme v tabulce.
- Prokladem stanovíme optimální hodnoty a nejistoty konstant  $B_0$  a  $b_1$ . Optimální hodnoty a nejistoty původních konstant dopočítáváme ze ZPN.

V tomto případě  $b_0 = e^{B_0}$ ,  $u(b_0) = |e^{B_0}| \cdot u(B_0)$ , tedy  $r(b_0) = u(B_0)$ .

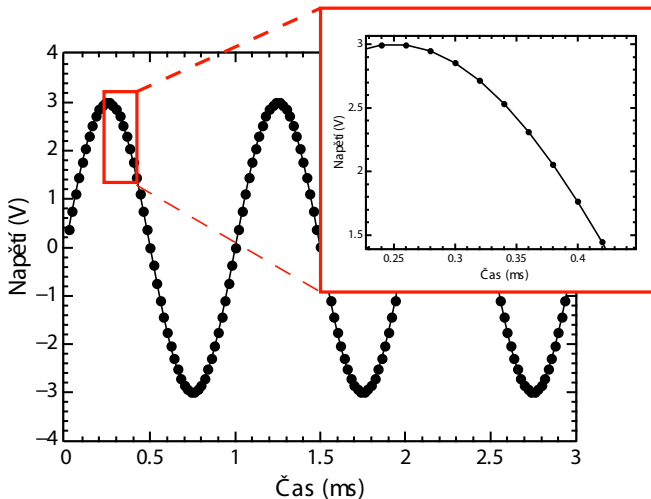
# Interpolace a extrapolace

Interpolace a extrapolace jsou metody nalezení odhadu hodnoty veličiny uvnitř a vně intervalu dvojic veličin  $[x_i, y_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 2$

- Typické použití: přesný odečet hodnoty funkce dané tabulkou.
- Hodnoty, ze kterých vycházíme, považujeme za přesné. Požadujeme tedy, aby závislost body procházela.
- Interpolace přímkou, polynomem, splajnem . . .

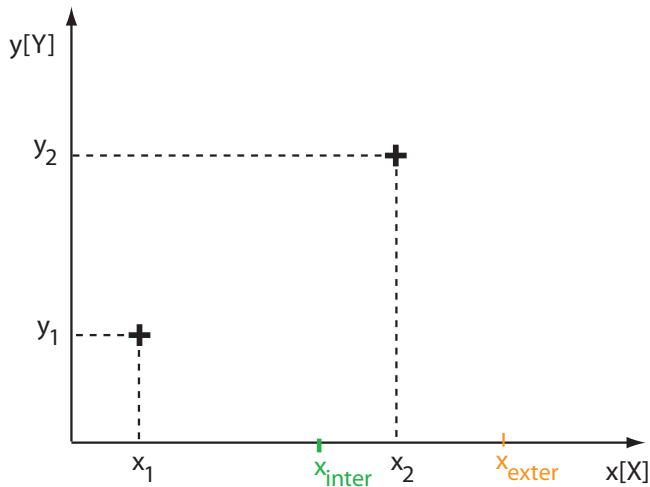
## Interpolace a extrapolace

Pokud o závislosti nic nevíme, použijeme většinou lineární interpolaci. Předpokládáme, že hodnoty v tabulce jsou natolik blízké, aby funkční závislost mezi nimi byla přibližně lineární.





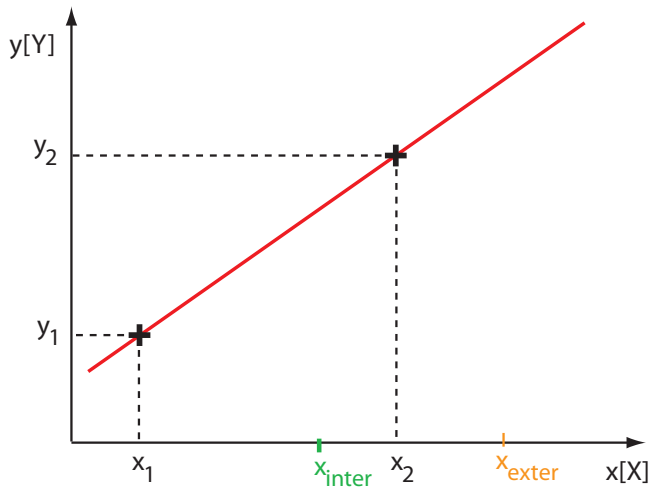
# Lineární interpolace a extrapolace



Hledanou hodnotu  $y$  příslušnou k danému  $x$  vypočteme ze vztahu:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

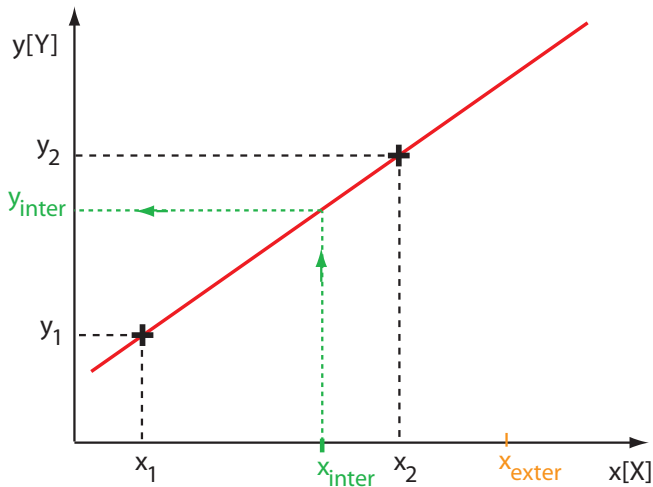
# Lineární interpolace a extrapolace



Hledanou hodnotu  $y$  příslušnou k danému  $x$  vypočteme ze vztahu:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

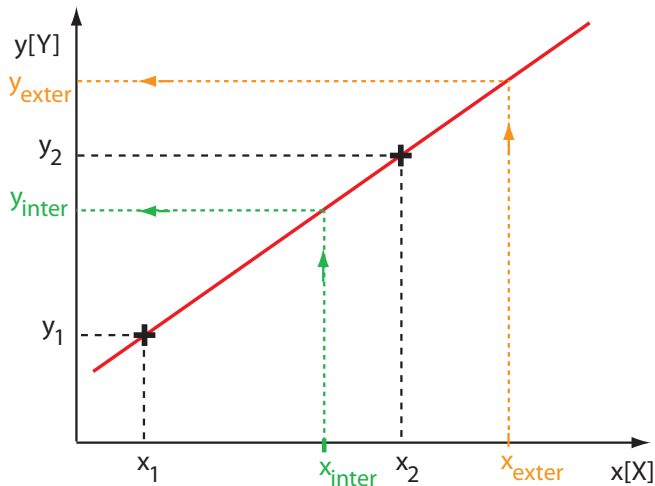
# Lineární interpolace a extrapolace



Hledanou hodnotu  $y$  příslušnou k danému  $x$  vypočteme ze vztahu:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

# Lineární interpolace a extrapolace



Hledanou hodnotu  $y$  příslušnou k danému  $x$  vypočteme ze vztahu:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

# Interpolace v tabulce

## 4E. Hustota vzduchu v závislosti na tlaku a teplotě

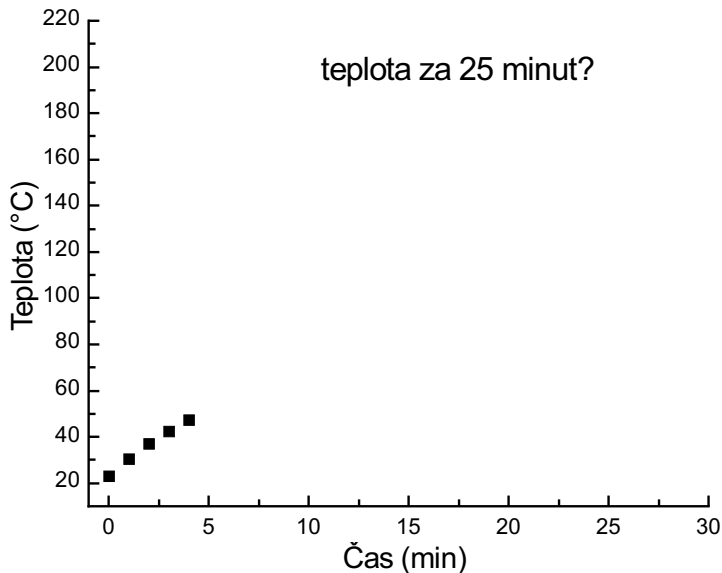
$\rho_{vz}$  [kg·m<sup>-3</sup>] – hustota suchého vzduchu.

1014,1 Pa

tlak [hPa]	993	1 000	1 007	1 011	1 013	1 016	1 019	1 021	1 024	1 027	1 033
tlak [mmHg]	745	750	755	758	760	762	764	766	768	770	775
teplota [°C]	$\rho_{vz}$	$\rho_{vz}$	$\rho_{vz}$	$\rho_{vz}$	$\rho_{vz}$	$\rho_{vz}$	$\rho_{vz}$	$\rho_{vz}$	$\rho_{vz}$	$\rho_{vz}$	$\rho_{vz}$
15	1,201	1,210	1,218	1,223	1,226	1,229	1,232	1,236	1,239	1,242	1,250
16	1,197	1,205	1,213	1,218	1,221	1,224	1,228	1,231	1,235	1,238	1,246
17	1,193	1,201	1,209	1,214	1,217	1,220	1,223	1,227	1,230	1,233	1,241
18	1,189	1,197	1,205	1,210	1,213	1,216	1,219	1,223	1,226	1,229	1,237
19	1,185	1,193	1,201	1,206	1,209	1,212	1,215	1,219	1,222	1,225	1,233
20	1,181	1,189	1,197	1,202	1,205	1,208	1,211	1,215	1,218	1,221	1,229
21	1,177	1,185	1,193	1,198	1,201	1,204	1,207	1,210	1,213	1,216	1,224
22	1,173	1,181	1,189	1,194	1,197	1,200	1,203	1,206	1,209	1,212	1,220
23	1,169	1,177	1,185	1,190	1,193	1,196	1,199	1,202	1,205	1,208	1,216
24	1,165	1,173	1,181	1,186	1,189	1,192	1,195	1,198	1,201	1,204	1,212
25	1,161	1,169	1,177	1,182	1,185	1,188	1,191	1,194	1,197	1,200	1,208
26	1,157	1,165	1,173	1,178	1,181	1,184	1,187	1,190	1,193	1,196	1,204
27	1,153	1,161	1,169	1,174	1,177	1,180	1,183	1,186	1,189	1,192	1,200
28	1,150	1,157	1,165	1,170	1,173	1,176	1,179	1,182	1,185	1,188	1,196
29	1,146	1,153	1,161	1,166	1,169	1,172	1,175	1,178	1,181	1,184	1,192
30	1,142	1,150	1,158	1,163	1,165	1,168	1,171	1,174	1,177	1,180	1,188

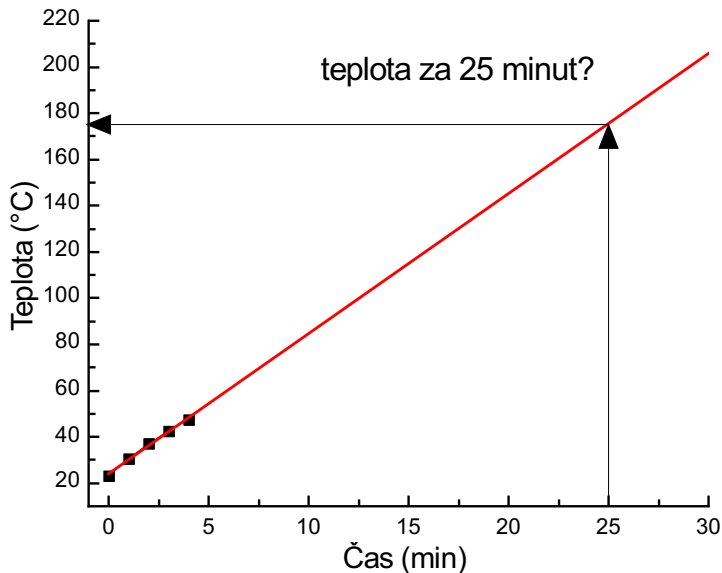
21,3 °C

## Extrapolace – odstrašující případ



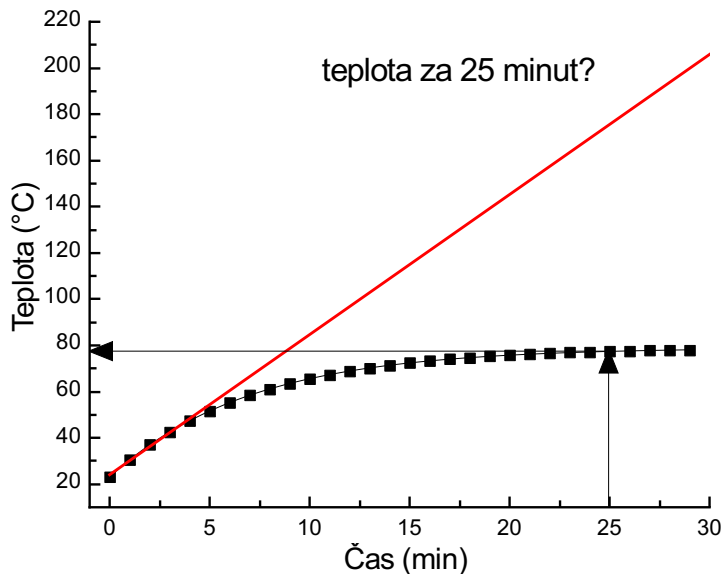
Extrapolace je rizikový druh interpolace generující hodnoty vně oblasti naměřených hodnot.

## Extrapolace – odstrašující případ



Extrapolace je rizikový druh interpolace generující hodnoty vně oblasti naměřených hodnot.

## Extrapolace – odstrašující případ



Extrapolace je rizikový druh interpolace generující hodnoty vně oblasti naměřených hodnot.



# Literatura

- [1] BIPM: JCGM 100:2008 *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*
- [2] Pánek Petr, *Úvod do fyzikálních měření*, Masarykova univerzita, Brno 2001
- [3] Novák Miroslav, *Úvod do praktické fyziky*, výrobní skript rektorátu UJEP Brno, Brno 1989
- [4] Anděl Jiří, *Statistické metody*, MATFYZPRESS, Praha 2003
- [5] Humlíček Josef, *Statistické zpracování výsledků měření*, UJEP Brno 1984
- [6] Meloun Milan, Militký Jiří, *Statistické zpracování experimentálních dat*, PLUS Praha 1994

**M A S A R Y K O V A**  
**U N I V E R Z I T A**