Ústav fyziky kondenzovaných látek, PřF MU, Brno

Stručný návod pro zpracování výsledků měření

Cílem měření je zjištění správné hodnoty fyzikální veličiny. Je na místě si položit otázku jaké informace o správné hodnotě dostáváme z výsledku jednoho nebo řady opakovaných měření. Každé měření je zatíženo jednak systematickou chybou, jednak chybou náhodnou. *Systematická chyba* je způsobena měřícími přístroji a nevhodným postupem – snažíme se ji v maximální možné míře potlačit. Opakovaná měření za stejných podmínek (označíme je x_i, i = 1,2,…) se mezi sebou poněkud liší, měření je zatíženo *náhodnou chybou*.

Soubor nekonečně mnoha naměřených hodnot x_i se nazývá *populace*, přičemž předpokládáme, že testovaná veličina je během měření konstantní. *Průměrná hodnota* $\langle x \rangle$ populace je dána vztahem

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \quad , \qquad N \to \infty \qquad (1)$$

kde N je počet měření. *Střední kvadratickou* (směrodatnou, standardní) *odchylkou* rozumíme veličinu

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{N} (x_i - \langle x \rangle)^2}{N-1}} \quad , \qquad N \to \infty \qquad (2)$$

Veličina σ je mírou rozptylu hodnot našeho měření. Má -li populace *normální rozdělení*, pak do intervalu

$$\langle x \rangle \pm k\,\sigma$$

padne 68,3 % hodnot x_i pro k = 1, 95,5 % pro k = 2 a 99,7 % pro k = 3.

Ve skutečnosti je vždy N (počet měření) konečné číslo a ze vztahu (1) pak dostaneme *aritmetický průměr* $\bar{x}$ a ze vztahu (2) pak obdržíme *standardní odchylku* s jednoho měření. Střední hodnotu populace $\langle x \rangle$ sice neznáme, ale interval

$$\bar{x} \pm 2\sigma/\sqrt{N} \qquad (3)$$

má naději 95,5 %, že v něm leží střední hodnota $\langle x \rangle$, kterou neznáme.

Z našeho měření dostaneme veličiny $\bar{x}$, s, N a sestrojíme interval hodnot

$$\bar{x} \pm t \frac{s}{\sqrt{N}} \tag{4}$$

přičemž vzniká otázka, jakou úroveň *spolehlivosti* lze tomuto intervalu přiřadit. Problém se řeší použitím *Studentova rozdělení*; úroveň spolehlivosti intervalu daného vztahem (4) závisí nejen na volbě parametru t, ale také na počtu měření N. Tento fakt bude objasněn v následujícím textu.

Zpracování výsledků opakovaných přímých měření

Máme naměřený soubor N hodnot x_i. Z něho určíme aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \quad . \tag{5}$$

Střední kvadratická odchylka jednoho měření se vypočítá ze vztahu

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \tag{6}$$

a střední kvadratická odchylka aritmetického průměru je dána výrazem

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}} \quad . \tag{7}$$

Pro zvolenou úroveň spolehlivosti P a provedený počet měření určíme z tabulky uvedené na konci tohoto textu Studentův koeficient $t_{P,N}$ a vypočítáme náhodnou krajní chybu aritmetického průměru

$$k(\bar{x}) = t_{P,N} \frac{s(x)}{\sqrt{N}} \quad . \tag{8}$$

Výsledek měření tedy zapíšeme ve tvaru $x = \bar{x} \pm k(\bar{x})$.

Postup si ukážeme na jednom příkladu. Bylo provedeno $N = 10$ měření doby kmitu kyvadla v sekundách:

1,82; 1,81; 1,79; 1,80; 1,81; 1,81; 1,80; 1,83; 1,80; 1,81.

Aritmetický průměr dle vztahu (5) vychází $\bar{x}$ = 1,808 s a střední kvadratická odchylka jednoho měření pak $s(x)$ = 0,011 s. Střední kvadratická odchylka aritmetického průměru je podle vztahu (7) pro náš případ $s(\bar{x})$ = 3,5·10^{-3} s. Pro úroveň spolehlivosti 99 % a počet měření N = 10 pak dostáváme z tabulky Studentův koeficient $t_{P,N}$ = 3,106 a tedy náhodná krajní chyba aritmetického průměru dle vztahu (8) je pak $k(\bar{x})$ = 0,011 s. Výsledek našeho měření tedy zapíšeme následovně: x = (1,808 ± 0,011) s. Tento zápis znamená, že zjišťovaná hodnota doby kmitu kyvadla leží v tomto intervalu s pravděpodobností 99 %.

Zpracování výsledků nepřímých měření

Může nastat případ, že žádanou hodnotu veličiny dostaneme nepřímo z měření jiných veličin. Jako jednoduchý příklad může sloužit stanovení plochy obdélníka C z opakovaného měření jeho stran A a B. Obecně, je-li veličina C funkcí veličin A a B, tj. $C = f(A,B)$, pak v případě součtu (rozdílu) je $C = A \pm B$, resp. v případě součinu (podílu) veličin je $C = A{\cdot}B$ a $C = A/B$. Pak výsledek našeho měření je dán vztahem

$$C = \overline{C} \pm s(C) \quad , \quad \text{kde} \quad \overline{C} = f(\overline{A},\overline{B}) \quad .$$

Pro jednoduché případy součtu a rozdílu resp. součinu a podílu dvou měřených veličin A a B pak platí následující jednoduché vztahy:

$$s(A \pm B) = [s^2(\overline{A}) + s^2(\overline{B})]^{1/2} \tag{9}$$

$$s_r(A \cdot B) = s_r(A/B) = [s_r^2(\overline{A}) + s_r^2(\overline{B})]^{1/2} \tag{10}$$

kde $s(\overline{A})$ a $s(\overline{B})$ jsou střední kvadratické odchylky aritmetických průměrů veličin A resp. B. Ve vztahu (10) totéž platí pro relativní chyby s_r, kde relativní chybou rozumíme podíl

$$s_r(\overline{A}) = \frac{s(\overline{A})}{\overline{A}} \quad . \tag{11}$$

Stanovená chyba se uvádí na jednu až dvě platné cifry a počet desetinných míst měřené veličiny odpovídá přesnosti uváděné chyby. Tak např. pro měřený elektrický odpor lze uvést

R = (37,25 ± 0,07) Ω

případně

R = (37,253 ± 0,074) Ω .

Literatura:

V. Mitvalský, Zpracování naměřených hodnot, VUT Brno (1978).

P. Pánek, Úvod do fyzikálních měření, MU Brno (2001).

Tabulka koeficientů $t_{P,N}$ *Studentova rozdělení. Počet měření* $N = \nu + 1$, *kde* ν *je počet stupňů volnosti.*

Stupňů volnosti	**Počet měření**	**P = 50 %**	**68 %**	**90 %**	**95 %**	**98 %**	**99 %**
1	2	1,000	1,839	6,314	12,706	31,821	63,657
2	3	0,816	1,322	2,920	4,303	6,965	9,925
3	4	0,765	1,198	2,353	3,182	4,541	5,841
4	5	0,741	1,142	2,132	2,776	3,747	4,604
5	6	0,727	1,111	2,015	2,571	3,365	4,032
6	7	0,718	1,091	1,943	2,447	3,143	3,707
7	8	0,711	1,077	1,895	2,365	2,998	3,499
8	9	0,706	1,067	1,860	2,306	2,896	3,355
9	10	0,703	1,059	1,833	2,262	2,821	3,250
10	11	0,700	1,053	1,812	2,228	2,764	3,169
11	12	0,697	1,048	1,796	2,201	2,718	3,106
12	13	0,695	1,044	1,782	2,179	2,681	3,055
13	14	0,694	1,041	1,771	2,160	2,650	3,012
14	15	0,692	1,038	1,761	2,145	2,624	2,977
15	16	0,691	1,035	1,753	2,131	2,602	2,947
16	17	0,690	1,033	1,746	2,120	2,583	2,921
17	18	0,689	1,031	1,740	2,110	2,567	2,898
18	19	0,688	1,029	1,734	2,101	2,552	2,878
19	20	0,688	1,028	1,729	2,093	2,539	2,861
20	21	0,687	1,026	1,725	2,086	2,528	2,845
21	22	0,686	1,025	1,721	2,080	2,518	2,831
22	23	0,686	1,024	1,717	2,074	2,508	2,819
23	24	0,685	1,023	1,714	2,069	2,500	2,807
24	25	0,685	1,022	1,711	2,064	2,492	2,797
25	26	0,684	1,021	1,708	2,060	2,485	2,787
26	27	0,684	1,020	1,706	2,056	2,479	2,779
29	30	0,683	1,018	1,699	2,045	2,462	2,756
30	31	0,683	1,018	1,697	2,042	2,457	2,750

ÚFKL PřF MU, Brno, únor 2008