

Kompatibilní a nekompatibilní veličiny, komutátory

definice:

komutátor $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ (když $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, lze zaměňovat pořadí působení $\hat{A}, \hat{B}$)

1) $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ ($\hat{A}, \hat{B}$ komutují) $\rightarrow$ veličiny A, B jsou **kompatibilní**

2) $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ ($\hat{A}, \hat{B}$ nekomutují) $\rightarrow$ veličiny A, B jsou **nekompatibilní**

Př. poloha a hybnost

v 1D: výpočet provedeme v souřadnicové reprezentaci $\hat{x} \rightarrow x$ $\hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$

$$[\hat{x}, \hat{p}] \psi(x) = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \psi(x) = x \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x) - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} x \psi(x) = x \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi}{dx} - \frac{\hbar}{i} x \frac{d\psi}{dx} - \frac{\hbar}{i} \psi$$
$$= i\hbar \psi \rightarrow \text{komutátor je konstanta } [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \text{ (precizněji: } [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{1})$$

ve 3D: operátory složek polohy $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ - triviální působení v souř. reprezentaci

operátory složek hybnosti: $\hat{p}_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}$, $\hat{p}_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar \quad [\hat{x}, \hat{p}_y] = 0 \quad [\hat{y}, \hat{p}_x] = 0 \quad \text{apod.}$$

1 Kompatibilní veličiny - společné vlastní stavy

veličiny A, B s komutujícími operátory $\hat{A}, \hat{B}$, t.j. $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

důsledky nulového komutátoru:

- Je-li $|\psi\rangle$ vlastní stav $\hat{A}$ s vlastní hodnotou α , pak $|\varphi\rangle = \hat{B}|\psi\rangle$ je rovněž vlastní stav $\hat{A}$ se stejnou vlastní hodnotou α .

$$\text{odvození: } \hat{A}|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle \rightarrow \hat{A}|\varphi\rangle = \hat{A}\hat{B}|\psi\rangle = \hat{B}\hat{A}|\psi\rangle = \hat{B}\alpha|\psi\rangle = \alpha|\varphi\rangle$$

- Lze najít **úplný soubor společných vlastních stavů** $\hat{A}$ a $\hat{B}$

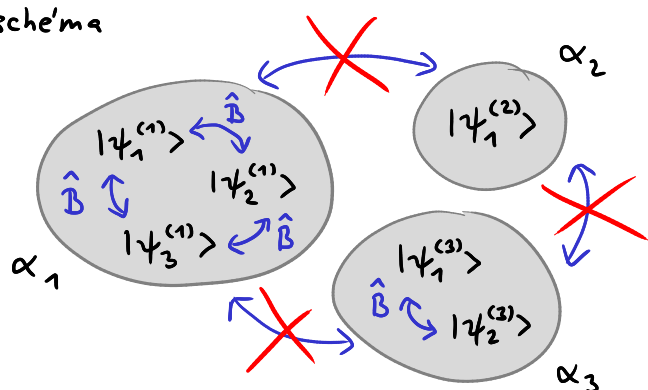
odvození: 1. vlastní stavy $\hat{A}$ tvoří disjunktivní podprostory Hilbertova prostoru

2. podle 1. důsledku působení operátoru $\hat{B}$ na vl. stavy $\hat{A}$ nevede k opuštění (ani částečnému) příslušného podprostoru

$\rightarrow$ vlastní podprostory $\hat{A}$ jsou invariantní vůči působení $\hat{B}$

3. v každém podprostoru můžeme diagonalizovat $\hat{B}$ a najít tak společné vl. stavy $\hat{A}$ a $\hat{B}$

schéma



diagonalizace v rámci α_3 podprostoru

$$\hat{B}|\psi_1^{(3)}\rangle = B_{11}|\psi_1^{(3)}\rangle + B_{21}|\psi_2^{(3)}\rangle$$

$$\hat{B}|\psi_2^{(3)}\rangle = B_{12}|\psi_1^{(3)}\rangle + B_{22}|\psi_2^{(3)}\rangle$$

$$\text{diag.} \rightarrow \begin{aligned} \hat{B}|\alpha_3 \beta_1^{(3)}\rangle &= \beta_1^{(3)}|\alpha_3 \beta_1^{(3)}\rangle \\ \hat{B}|\alpha_3 \beta_2^{(3)}\rangle &= \beta_2^{(3)}|\alpha_3 \beta_2^{(3)}\rangle \end{aligned}$$

- obecně - společné vlastní stavy $|\alpha_m \beta_n^{(m)}\rangle$: $\hat{A}|\alpha_m \beta_n^{(m)}\rangle = \alpha_m |\alpha_m \beta_n^{(m)}\rangle$
 $\hat{B}|\alpha_m \beta_n^{(m)}\rangle = \beta_n^{(m)} |\alpha_m \beta_n^{(m)}\rangle$

- při měření takové stavy poskytnou ostrou hodnotu $A = \alpha_m$ i $B = \beta_n^{(m)}$

• využití symetrie systému při hledání vlastních stavů $\hat{H}$

symetrie systému - Hamiltonián komutuje s operátorem spojeným s danou symetrií
 (je invariantní vůči dané operaci symetrie)

→ lze hledat společné vlastní stavy

→ předchystaný symetrický tvar vlastních stavů $\hat{H}$

Př. vlastní stavy částice v symetrickém 1D potenciálu splňující $V(-x) = V(x)$

operátor symetrie - operátor parity $\hat{\Pi}$ s působením $\hat{\Pi} f(x) = f(-x)$

Hamiltonián $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ komutuje s $\hat{\Pi}$: $[\hat{H}, \hat{\Pi}] = 0$

tj. nezávislá na pořadí aplikace $\hat{H}$ (výčíslení energie) a $\hat{\Pi}$ (záměna $x \rightarrow -x$)

vlastní funkce $\hat{\Pi}$ jsou sudé a liché funkce :

$$\hat{\Pi} f(x) = f(-x) = \lambda f(x) \rightarrow \lambda = +1 \text{ sudé}, \lambda = -1 \text{ liché}$$

(formačně důsledkem $\hat{\Pi}^\dagger = \hat{\Pi}$ a $\hat{\Pi}^2 = 1 \rightarrow$ reálné vl. hodnoty λ splňující $\lambda^2 = 1$)

→ podle věty o společných vl. stavech hledáme řešení $\hat{H}\psi = E\psi$ ve tvaru sudých a lichých ψ

2 Nekompatibilní veličiny - princip neurčitosti

• důsledek nenulového komutátoru $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$: zobecněný **Heisenbergův princip neurčitosti**

$$\sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle} \sqrt{\langle (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \quad \text{pro libovolný stav } |\psi\rangle$$

zkráceně $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$, kde ΔA je neurčitost zavedena jako

$$\Delta A = \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle} \quad (\text{střední kvadratická odchylka od střední hodnoty})$$

odvození: počítáme normu $|\varphi\rangle = (\alpha \hat{A} + i \hat{B})|\psi\rangle$, kde α je libovolné reálné číslo

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \langle \psi | (\alpha \hat{A} - i \hat{B}) (\alpha \hat{A} + i \hat{B}) | \psi \rangle = \alpha^2 \langle \hat{A}^2 \rangle + \langle \hat{B}^2 \rangle + \alpha \underbrace{i \langle \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \rangle}_{\text{reálné } K \text{ (zkusit!)}}$$

norma ≥ 0 pro $\forall \alpha \rightarrow$ diskriminant rovnice v $\alpha \leq 0$

$$\text{diskriminant} = K^2 - 4 \langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \leq 0 \rightarrow \langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} K^2$$

další nahradíme $\hat{A} \rightarrow \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$, $\hat{B} \rightarrow \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$ - komutátor nezměněn

Pozn. I když je komutátor $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ nenulový operátor, může existovat stav s $\langle \hat{C} \rangle = 0$ a potom je přípustné $\Delta A = 0$ při konečném ΔB a naopak nebo dokonce $\Delta A = \Delta B = 0$

Př. relace neurčitosti: poloha - hybnost

- speciální případ s konstantním $[\hat{A}, \hat{B}]$, kdy nezáleží na stavu

$$\hat{A} = \hat{x}, \hat{B} = \hat{p} : \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle| = \frac{1}{2} \hbar, \text{ protože } [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

- rovnost neplňuje např. základní stav HO s $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ a $\Delta p = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}$

- vztah reciprocity mezi Δx a Δp byl dobře patrný u vlnových balíků:

balík užký v prostoru (malé Δx) $\leftrightarrow$ široké spektrum zastoupených vln (velké Δp)

- relace umožňuje „kvalifikovaný“ hrubý odhad energie základního stavu v jednoduchých případech (viz cvičení)