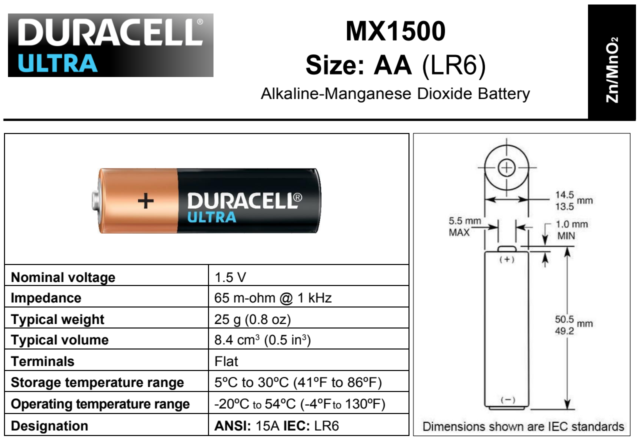
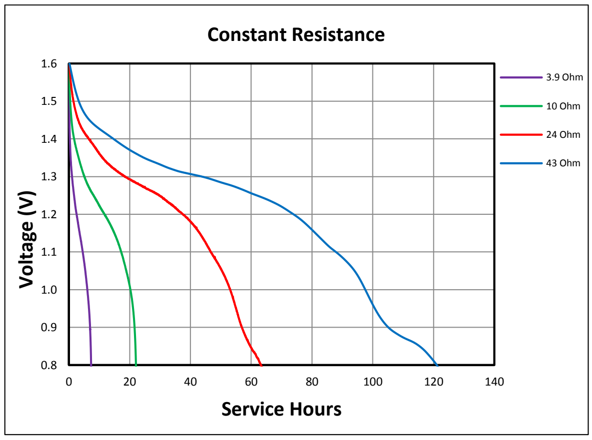
F6060 Programování zkouška – termín 25. 6. 2021

1. Vybíjecí křivka monočlánku

Kapacita baterií se obvykle udává v jednotce Ah (ampérhodina) a odpovídá součinu proudu dodávaného baterií a času, po který je baterie schopna tento proud vydávat, než dojde k jejímu vybití. S využitím nominálního napětí baterie bychom tuto kapacitu mohli převést na celkovou dodanou energii. Vybíjení baterie je ovšem složitější proces, v průběhu něhož se mění její napětí i vnitřní odpor. Přesnější představu o vybíjení dává tzv. vybíjecí křivka zachycující přímo časový průběh sledované veličiny, typicky napětí. Může být vykreslena například pro konstantní odebíraný proud, konstantní odebíraný výkon nebo konstantní zatěžovací odpor. V této úloze se budeme zabývat posledním zmíněným případem a vyhodnotíme vybíjecí křivku AA monočlánku Duracell Ultra. Vybíjecí křivky lze nalézt v datasheetu příslušného monočlánku odkud pochází i následující obrázky (datasheet byl získán z www stránky `https://www.duracell.com/en-us/techlibrary/product-technical-data-sheets/`).


MX1500
Size: AA (LR6)
Alkaline-Manganese Dioxide Battery
Zn/MnO2

Nominal voltage	1.5 V
Impedance	65 m-ohm @ 1 kHz
Typical weight	25 g (0.8 oz)
Typical volume	8.4 cm³ (0.5 in³)
Terminals	Flat
Storage temperature range	5ºC to 30ºC (41ºF to 86ºF)
Operating temperature range	-20ºC to 54ºC (-4ºF to 130ºF)
Designation	**ANSI:** 15A **IEC:** LR6



V obdrženém souboru `data_AA-Duracell-Ultra_R43.txt` je obsažena vybíjecí křivka pro konstantní zatěžovací rezistor o odporu $R = 43\,\Omega$ ve formě dvojic (čas v hodinách, napětí ve voltech).

(a) Ze závislosti napětí U na čase t získejte pomocí vztahů $I = U/R$ a $P = U^2/R$ závislost okamžitého proudu $I(t)$ na čase a závislost okamžitého výkonu $P(t)$ dodávaného do zatěžovacího rezistoru na čase a vyneste tyto závislosti graficky.

(b) Integrací okamžitého proudu podle času získejte celkovou kapacitu monočlánku

$$K = \int_0^{t_{\max}} I(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Přitom použijte lichoběžníkové pravidlo, které hodnotu integrálu aproximuje sumou

$$K \approx \sum_{i=1}^{N-1} \tfrac{1}{2}(I_i + I_{i+1})\,(t_{i+1} - t_i)\,.$$

Zde t_i s indexy $i = 1\ldots N$ jsou jednotlivé časy a I_i jsou příslušné hodnoty proudu v těchto časech. Hodnota $t_{\max} = t_N$ je poslední čas obsažený v obdrženém souboru a můžeme ji chápat jako okamžik vybití monočlánku.

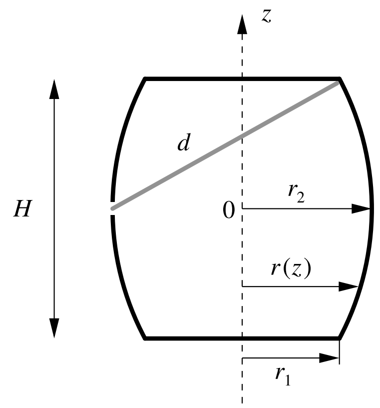
(c) Stejným způsobem integrujte okamžitý výkon a získejte tak celkovou dodanou energii

$$E = \int_0^{t_{\max}} P(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

která se na rezistoru proměnila v Jouleovo teplo.

2. Keplerovo zkoumání vinných sudů

Největším matematickým dílem Jana Keplera je monografie nazvaná *Nova Stereometria Dolorium Vinariorum* neboli *Nová stereometrie vinných sudů* (stereometrie ve smyslu „umění měření objemů“), která byla významným krokem k formulaci integrálního počtu. Zrodila se poněkud překvapivě na základě příhody související s Keplerovou druhou ženitbou. Jako hlava nové rodiny obstarával Jan Kepler, působící tehdy v rakouském Linci, několik sudů s vínem. Kupec stanovoval objemy sudů jednoduchou metodou, kdy otvorem v sudu vsunul tyč, jejímž koncem se dotkl nejvzdálenějšího vnitřního bodu (viz obrázek) a na základě délky tyče d uvnitř sudu rozhodl o jeho objemu V. Tento na první pohled nedůvěryhodný způsob měření Keplera nejprve rozhněval, domníval se totiž, že jej šejdíř kupec chce podvést, poté se ovšem jal problémem určení objemu sudu zabývat matematicky a pokusil se stanovit, jaké proporce sudu by mu zajistily maximální objem při dané délce d. Přitom s podivem zjistil, že geometrie rakouských sudů je pro tuto metodu obzvlášť výhodná, neboť $V(d)$ se jen velice málo mění v rozmezí používaných proporcí.



Vyzbrojeni diferenciálním a integrálním počtem dokážeme dnes úlohu vyřešit zcela analyticky, zde ovšem v rámci procvičování programování použijeme zčásti numerickou hrubou sílu. Budeme uvažovat o sudu, který vznikne rotací useknuté elipsy kolem osy z. Profil sudu je dán funkcí $r(z) = \sqrt{r_2^2 - 4z^2(r_2^2 - r_1^2)/H^2}$, kde H je výška sudu a r_1 a r_2 jsou poloměr podstavy, resp. poloměr sudu v nejširší střední části. Za předpokladu, že se otvor do sudu nachází přesně uprostřed boku sudu, platí pro zanořenou délku měřící tyče vztah

$$d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2} .$$

Objem sudu lze vypočíst snadno integrací

$$V = \int_{-H/2}^{+H/2} \pi [r(z)]^2 \, \mathrm{d}z = \pi \, \frac{r_1^2 + 2r_2^2}{3} \, H .$$

Budeme se zajímat o konstantu K ze vztahu $V = Kd^3$, která přirozeně závisí na proporcích sudu. Ty zachytíme dvěma čísly: (1) poměrem poloměrů u dna a ve střední části tedy $\alpha = r_1/r_2$, (2) poměrem průměrného poloměru a výšky sudu $\lambda = (r_1 + r_2)/2H$.

(a) Sestavte program, který pro předepsanou hodnotu α najde optimální hodnotu λ, pro kterou je K maximální. Program bude postupovat takto: V rámci jednoho pokusu vygeneruje náhodné číslo z intervalu $[0, 2]$, které bude představovat zkušební hodnotu λ. Dále se položí $r_1 = \alpha$, $r_2 = 1$ a pomocí zkušební hodnoty λ se určí H. Nyní již lze stanovit na základě výše uvedených vzorců d i V a nalézt poměr $K = V/d^3$ pro zkušební hodnotu λ. Těchto pokusů se provede velké množství (např. $N = 1000$) a identifikuje se pokus, který poskytl největší hodnotu K, a příslušné λ, které bude výstupem programu. Popsaný způsob maximalizace je velmi neefektivní, ale velmi prostý a univerzálně použitelný. Pro válcový sud s $\alpha = 1$ pomocí vašeho programu ověřte, že pro optimální λ je splněna relace $H = 2d/\sqrt{3}$, kterou odvodil Jan Kepler.

(b) Program rozšiřte tak, že bude v každém pokusu náhodně vybírat i hodnotu α z intervalu $[0, 1]$. Provedením velkého množství pokusů (například $N = 100000$) pak najděte dvojici hodnot parametrů α a λ, pro které je K maximální.