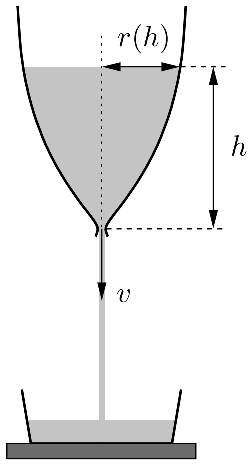
F6060 Programování zkouška – termín 13. 5. 2022

1. Vodní hodiny

Pomalé vytékání vody malým otvorem z objemné nádoby lze využít k přibližnému odměřování časových intervalů. Na tomto principu byla založena například starořecká klepsydra. Zejména kvůli silné teplotní závislosti viskozity vody je ovšem přesnost těchto hodin značně omezena a hodí se jen pro orientační měření. V této úloze prozkoumáme jednoduchý model vodních hodin, který viskozitu raději zcela zanedbává.

Uvažujme o vodních hodinách vyobrazených napravo. Mají podobu zavěšeného trychtýře, z nějž malým otvorem ve spodní části vytéká voda. Označíme-li jako h okamžitou výšku hladiny nad výtokovým otvorem, je výtoková rychlost dána Toricelliho vztahem $v = \sqrt{2gh}$, který plyne přímo z Bernoulliovy rovnice. Dále je třeba spojit objem vytékající vody s poklesem hladiny. Naše hodiny mají rotační tvar s poloměrem kruhových průřezů v různých výškách předepsaným funkcí $r(h)$. Je-li plocha výtokového otvoru S, je rychlost poklesu hladiny rovna výtokové rychlosti vynásobené poměrem ploch S a πr^2, kde r je $r(h)$ pro aktuální výšku h. Časová závislost výšky hladiny se pak řídí diferenciální rovnicí



$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{S}{\pi r^2}\,\sqrt{2gh}\,.$$

Počítejme s konkrétním profilem $r(h) = R\tanh(h/H)$, od kterého se odchýlíme jen v zanedbatelně malé oblasti poblíž výtokového otvoru. Potom výše uvedená diferenciální rovnice nabývá tvaru

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{S\sqrt{2gh}}{\pi R^2 \tanh^2(h/H)} = f(h)\,.$$

Výraz na pravé straně diferenciální rovnice byl pro jednoduchost dalšího zápisu označen jako funkce výšky hladiny symbolem $f(h)$.

Vaším úkolem bude pro hodnoty $S = 1\,\mathrm{mm}^2 = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $R = 0{,}07\,\mathrm{m}$, $H = 0{,}05\,\mathrm{m}$ a počáteční výšku $h(t = 0) = 0{,}085\,\mathrm{m}$ stanovit časovou závislost hladiny vody. Užijete k tomu jednoduchou Eulerovu metodu s pevným časovým krokem Δt popsanou v následujícím. Tato přibližná metoda poskytne posloupnost okamžitých hodnot výšky hladiny $h_n = h(t_n)$ v časových okamžicích $t_n = n\Delta t$, kde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ V počátečním čase $t_0 = 0$ začínáme s výchozí výškou $h_0 = h(t = 0)$. Abychom se posunuli do následujícího okamžiku $t_1 = \Delta t$, budeme předpokládat, že rychlost změny výšky hladiny $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ je v rámci krátkého intervalu mezi t_0 a t_1 přibližně konstantní a vezmeme pro ni na základě diferenciální rovnice hodnotu $f(h_0)$. Za tohoto předpokladu bude výška v čase t_1 rovna $h_1 = h_0 + f(h_0)\Delta t$. Tuto úvahu opakujeme i v následujích krocích – rychlost poklesu hladiny v časovém intervalu t_n až $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ odhadneme jako $f(h_n)$ a tím získáme předpis pro změnu výšky

$$h_{n+1} = h_n + f(h_n)\Delta t\,.$$

Postupným aplikováním tohoto předpisu se nám vytváří posloupnost okamžitých výšek hladiny h_n v jednotlivých časech t_n. Výpočet ukončíme, jakmile vyjde nulová nebo záporná výška h_{n+1}. Příslušná hodnota t_{n+1} pak je přibližný okamžik, kdy všechna voda vyteče, a můžeme ji chápat jako dobu odměřovanou našimi vodními hodinami. Při výpočtu používejte základní SI jednotky a zvolte velikost kroku $\Delta t = 0,1$s. Výsledek můžete zachytit jako tabulku dvojic hodnot t_n, h_n, nebo přímo jako graf závislosti h na t.

2. Aitkenova δ^2 metoda

Aitkenova δ^2 metoda je jednou z nejznámějších metod urychlení konvergence číselné posloupnosti. Spočívá v transformaci původní posloupnosti s_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ na novou posloupnost t_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ podle předpisu

$$t_n = s_n - \frac{(s_{n+1} - s_n)^2}{(s_{n+2} - s_{n+1}) - (s_{n+1} - s_n)}\,,$$

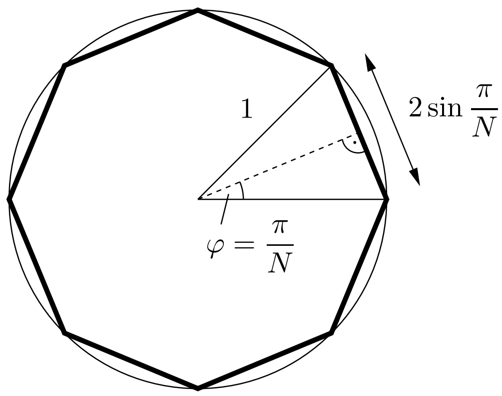
kterým se snaží vystihnout a „uspíšit“ trend posloupnosti s_n. Limity posloupností jsou stejné, tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n$, konvergence posloupnosti t_n je ovšem za příznivých podmínek výrazně rychlejší než s_n. Metodu popsal v roce 1926 Alexander Aitken, po němž nese své jméno, první zdokumentovanou aplikací této metody je ovšem výpočet čísla π, který provedl japonský matematik Takakazu Seki (1642?–1708), jehož přínos pro tehdy nezávisle rozvíjenou japonskou matematiku lze srovnávat s významem Leibnize či Newtona v matematice evropské. Na zmíněnou aplikaci se zaměří i naše úloha.

Číslo π lze aproximovat pomocí obvodu pravidelného N-úhelníku vepsaného kružici o jednotkovém poloměru (viz obrázek znázorňující případ s $N = 8$). Obvod tohoto útvaru je dán vztahem

$$L_N = 2N \sin\frac{\pi}{N}\,.$$

V limitě $N \to \infty$ pravidelný N-úhelník splývá s opsanou kružnicí, jeho obvod tedy bude konvergovat k 2π. Odtud dostáváme vztah

$$\pi = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} L_N = \lim_{N\to\infty} N \sin\frac{\pi}{N}\,.$$



Takakazu Seki neměl možnost přímého vyčíslení funkce sin a musel postupovat komplikovaně a pracně, my toto vyčíslení pro jednoduchost přenecháme počítači.

(a) Nejprve jednoduchým způsobem prozkoumáme rychlost konvergence uvedeného postupu. Pro $N = 3, 4, 5, 6, \ldots 100$ vypočtěte hodnoty L_N a znázorněte je v grafu závislosti na $1/N^2$, t.j. použijte v grafu jako horizontální souřadnici $1/N^2$ a jako vertikální L_N. Měli byste dostat přibližně lineární trend, protože pomocí Taylorova rozvoje funkce sin lze snadno nahlédnout, že platí

$$L_N = 2N \sin\frac{\pi}{N} \approx 2N\left[\frac{\pi}{N} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{N}\right)^3\right] = 2\pi - \frac{\pi^3}{3}\,\frac{1}{N^2}\,.$$

Chyba aproximace čísla π tedy bude klesat jako $1/N^2$.

(b) Při výpočtu čísla π Takakazu Seki postupně vyčísloval obvody mnohoúhelníků s $N = 2^n$, z nichž poté určoval číslo π. Označme členy příslušné posloupnosti $s_n = \frac{1}{2} L_{2^n}$. Sestavte program, který vypíše s_n pro $n = 2, 3, 4, \ldots, 20$ a také příslušné t_n vypočtené podle výše uvedeného Aitkenova vztahu. U obou čísel vypisujte i jejich odchylky od čísla π a přesvědčte se tak, že t_n vskutku konverguje k π mnohem rychleji než s_n.