F6060 Programování zkouška – termín 25. 5. 2022

1. Četnost slunečních skvrn

Skvrny na slunci jsou fenoménem, kterému astronomové již dlouhá léta věnují systematickou pozornost. Jsou tak k dispozici poměrně obsáhlá data, ve kterých je možné vypozorovat zajímavé trendy. V této úloze budete analyzovat časovou závislost četnosti skvrn obsaženou v souboru `sunspots.dat` pocházejícím z Královské belgické observatoře v Bruselu. Tento soubor ve svém prvním sloupci obsahuje časy pozorování zachycené jako reálná čísla, jejichž celá část odpovídá letopočtu a desetinná část zlomku z příslušného roku. Můžeme je tedy chápat jako časové okamžiky pozorování t_i měřené v letech. Druhý sloupec obsahuje čísla x_i charakterizující počty slunečních skvrn v daných okamžicích. Jejich konstrukce je ovšem poněkud komplikovanější, proto se spokojme s tím, že tato charakteristika je monotónní a tedy větší číslo odpovídá vyššímu počtu skvrn.
Poskytnutý soubor představuje záznamy pokrývající přibližně dvě století a umožňuje tak odhalit i jevy s časovou škálou v řádu desetiletí. My se konkrétně zaměříme na zkoumání periodického kolísání četnosti skvrn, které je nápadné již při pouhém vykreslení dvojic (t_i, x_i) do grafu. Soubor dat proto podrobíme jednoduché Fourierově analýze, při které budeme vyčíslovat dvě veličiny definované vztahy

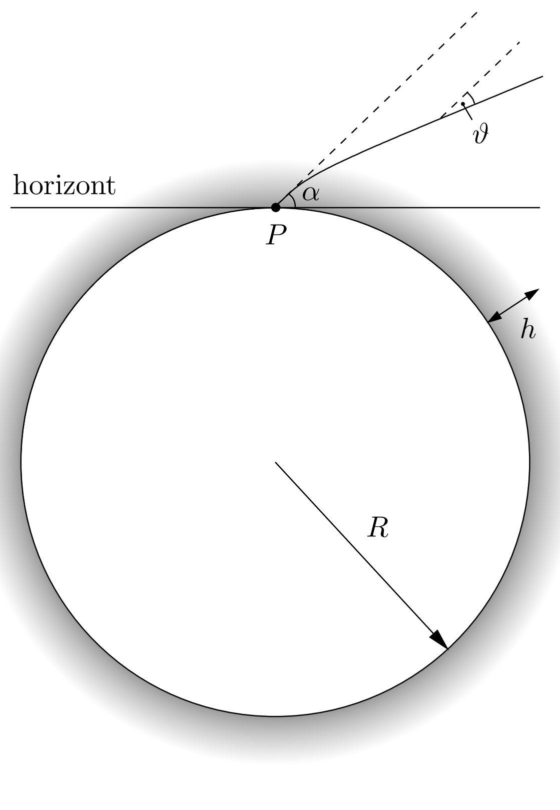
$$A(T) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cos\left(\frac{2\pi t_i}{T}\right) \qquad \text{a} \qquad B(T) = \sum_{i=1}^{N} x_i \sin\left(\frac{2\pi t_i}{T}\right),$$

kde T je perioda a sumace probíhá přes všechny záznamy z datového souboru, jejichž počet je označen jako N. Tyto veličiny velmi zhruba odpovídají Fourierovým koeficientům. „Spektrum“ či periodogram získáme výpočtem $A(T)$ a $B(T)$ pro řadu hodnot periody T a vykreslením součtu jejich kvadrátů, to jest $I(T) = A^2(T) + B^2(T)$, v závislosti na periodě T. Graf $I(T)$ nám umožní detekovat periodické výkyvy četnosti skvrn, které se v něm projeví jako špička na pozici odpovídající příslušné periodě.

Vaším úkolem bude sestavit program vyčíslující $A(T)$ a $B(T)$ pro 500 hodnot T rovnoměrně pokrývajících interval 1 až 20 let. Na základě těchto hodnot pak sestrojte graf závislosti veličiny $I = A^2 + B^2$ na T a odhalte tak periodu kolísání počtu slunečních skvrn.

2. Ohyb paprsků v zemské atmosféře

Chod světelných paprsků, které k nám vysílají nebeská tělesa, není v okolí zemského povrchu přímočarý, ale je ovlivňován přítomností zemské atmosféry představující gradientní prostředí, tedy prostředí s nehomogenním indexem lomu. Situace je schematicky (a se záměrně zveličeným ohybem) znázorněna na vedlejším obrázku. Pozorovatel v bodě P pozoruje paprsek přicházející k němu s úhlem α vůči horizontu. V případě absence atmosféry by se tento paprsek šířil po naznačené čárkované trajektorii. Ve skutečnosti je ovšem v atmosféře ohnutý a jeho trajektorie odpovídá plné čáře. Odchylku zdánlivého směru a skutečného směru příchodu paprsku nad atmosférou označme ϑ. S touto odchylkou se nám pak jeví nebeské objekty posunuté vůči jejich skutečným polohám. Ohyb způsobený atmosférou je překvapivě veliký, například kotouč zapadajícího slunce, který se právě dotýká svým spodním okrajem horizontu, by byl v nepřítomnosti atmosféry již zcela skrytý pod horizontem. Velikost ohybu je závislá na úhlu nad horizontem, pod kterým objekt pozorujeme. Největší je právě v případě téměř horizontálních paprsků zapadajícího slunce, neboť tyto urazí v atmosféře nejdelší dráhu.



V této úloze si o velikostech odchylek paprsků v atmosféře uděláme představu na základě jednoduché formule, kterou lze odvodit za předpokladu, že se trajektorie paprsku příliš neodchýlí od přímky. Tento předpoklad je v pozemských podmínkách poměrně přijatelně splněn. Velikost odchylky ϑ pro danou hodnotu α je v uvedené aproximaci určena vztahem

$$\vartheta = \int_0^\infty g(h)\,\frac{1}{1+h/R}\,\cos\alpha\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

přičemž $g(h)$ je velikost gradientu indexu lomu atmosféry (ten míří do středu Země) a

$$h = \sqrt{R^2 + 2R\zeta\sin\alpha + \zeta^2} - R$$

je výška nad povrchem Země představované koulí o poloměru R (viz obrázek). Konečně veličina ζ odpovídá dráze paprsku směrem od pozorovatele. Přijmeme zjednodušený model atmosféry, jejíž hustota ubývá exponenciálně s výškou a index lomu se řídí vztahem

$$n(h) = 1 + \beta\,\exp\left(-\frac{h}{h_0}\right)\,,$$

kde β a h_0 jsou konstanty. Funkce $g(h)$ je v tom případě rovna

$$g(h) = \frac{\beta}{h_0}\,\exp\left(-\frac{h}{h_0}\right)\,.$$

Složením předchozích vztahů získáme explicitní výraz pro odchylku

$$\vartheta = \frac{\beta}{h_0}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{h_0}\left(\sqrt{R^2+2R\zeta\sin\alpha+\zeta^2} - R\right)\right]\frac{R\cos\alpha}{\sqrt{R^2+2R\zeta\sin\alpha+\zeta^2}}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

S tímto integrálem si neporadíme analytickými postupy a musíme se uchýlit k numerickému vyčíslení.

Vaším úkolem bude pro sekvenci úhlů $\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \ldots, 90^\circ$ vypočítat odpovídající ϑ. Hodnoty parametrů atmosféry jsou $\beta = 3\cdot 10^{-4}$ a $h_0 = 10$ km, poloměr Země je roven $R = 6378$ km. Při vyčíslení výše uvedeného integrálu nahraďte nekonečnou horní mez konečnou hodnotou $\zeta_{\max} = 1000\,\mathrm{km}$ a hodnotu integrálu počítejte tzv. lichoběžníkovým pravidlem s $N = 1000$ kroky:

$$\int_0^{\zeta_{\max}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \;\approx\; \frac{\zeta_{\max}}{N}\left[\tfrac{1}{2}f(0) + \sum_{j=1}^{N-1} f\left(\frac{j\zeta_{\max}}{N}\right) + \tfrac{1}{2}f(\zeta_{\max})\right]\,.$$

Získané hodnoty program vypíše ve formě přehledné tabulky obsahující v každém řádku hodnotu α ve stupních, odchylku ϑ ve stupních a tutéž odchylku vyjádřenou v úhlových minutách.

Poznámka: Programovací jazyky obvykle pracují s úhly vyjádřenými v radiánech, nezapomeňte proto na příslušný převod.