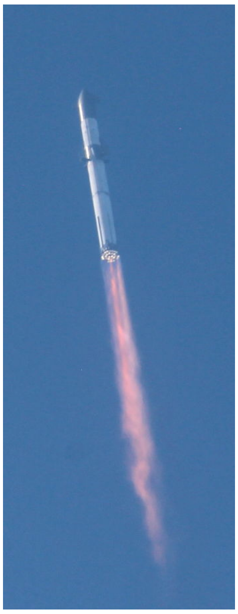
F6060 Programování zkouška – termín 19. 5. 2023

1. Start kosmické lodi Starship



20. dubna 2023 se odehrál testovací let kosmické lodi Starship nesené raketou Super Heavy. Obě součásti této sestavy byly dílem americké technologické společnosti SpaceX, která se od roku 2002 zabývá vývojem a výrobou raketových nosičů, kosmických lodí a satelitů. Let nebyl příliš zdařilý, v důsledku selhání části motorů se raketa potýkala s nestabilitou a musela být po čtyřech minutách letu řízeně zničena. Přesto však podle Elona Muska, zakladatele společnosti SpaceX, přinesl mnohá ponaučení, která budou užitečná při přípravě dalších startů.
V této úloze se pokusíte simulovat kolmý vzlet Starship s využitím parametrů uvedených na Wikipedii.[1] Za předpokladu ryze vertikálního pohybu a s mnoha dalšími zjednodušujícími předpoklady popíšeme vzlet kosmické lodi soustavou diferenciálních rovnic pro vertikální rychlost v a výšku h

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F_{\mathrm{tah}}}{m(t)} - g\,, \qquad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v\,.$$

Tah rakety působící proti tíhovému zrychlení $g = 9.81$ m je vyjádřený tahovou silou F_{tah} a budeme jej považovat za konstantní v čase. Hmotnost $m(t)$ je závislá na čase v důsledku spotřebovávání paliva. Považujme tuto závislost za lineární, $m(t) = m_0 + m_p - qt$, kde m_0 je prázdná hmotnost, m_p hmotnost paliva a q hmotnostní tok spalin. Hmotnost nesené kosmické lodi Starship je 1300 tun včetně paliva, raketa Super Heavy má prázdná hmotnost 200 tun a plně natankovaná pojme 3400 tun paliva. Počítejme tedy s $m_0 = 1{,}5 \cdot 10^6$ kg a $m_p = 3{,}4 \cdot 10^6$ kg. Každý z 33 motorů Raptor 2 použitých v raketě Super Heavy má tah přibližně 2300 kN (ekvivalent asi 230 t), jejich celkový tah je $F_{\mathrm{tah}} = 74{,}5 \cdot 10^6$ N. Motory pohání směs kapalného kyslíku a metanu, která se proměňuje na spaliny tryskající vysokou rychlostí ze spalovacího prostoru, čímž je raketa urychlována. Tok spalin z jednoho motoru odpovídá $650\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$, což dává celkový tok $q = 33 \times 650\ \mathrm{kg\,s^{-1}}$.

Soustavu diferenciálních rovnic řešte Eulerovou metodou s pevným krokem Δt (je možné použít např. hodnotu 0,1s). Vyjděte přitom z počátečních podmínek $v_0 = 0\mathrm{ms^{-1}}$ a $h_0 = 0$m a konstruujte posloupnost hodnot rychlosti a výšek v časových okamžicích $t_n = n\Delta t$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) podle předpisu

$$v_{n+1} = v_n + \left[\frac{F_{\mathrm{tah}}}{m(t_n)} - g\right]\Delta t\,, \qquad h_{n+1} = h_n + v_n\Delta t\,.$$

Výpočet ukončete, jakmile bude spotřebováno palivo, to jest při překročení času $T = m_p/q$. Výsledkem bude dosažená rychlost přibližně v okamžiku spotřebování paliva Super Heavy a příslušná výška.

2. Loděnka hlubinná geometrem

Wikipedia o předmětu našeho zájmu píše: Loděnka hlubinná (*Nautilus pompilius*), také známá jako perleťová loděnka, je druh mořského hlavonožce z čeledi loděnkovitých (*Nautilidae*), jeden ze čtyř dodnes žijících druhů rodu Nautilus. Žije v hloubkách přibližně od 300 do 500 metrů zejména v jižním Pacifiku (nalezeny byly u pobřeží Austrálie, Japonska a Mikronésie). Nejstarší fosilie tohoto druhu jsou známy z raně pleistocenních sedimentů uložených u pobřeží Luzonu na Filipínách. Patří mezi tzv. živoucí fosilie, protože podobní tvorové žili už před 500 miliony let, kdy ovšem dosahovaly jejich schránky až 2,5 m v průměru, zatímco dnešní loděnky hlubinné dosahují průměru ulit okolo 20–25 cm. Jejich potravou jsou jak živé ryby a jiní drobní tvorové, tak i těla

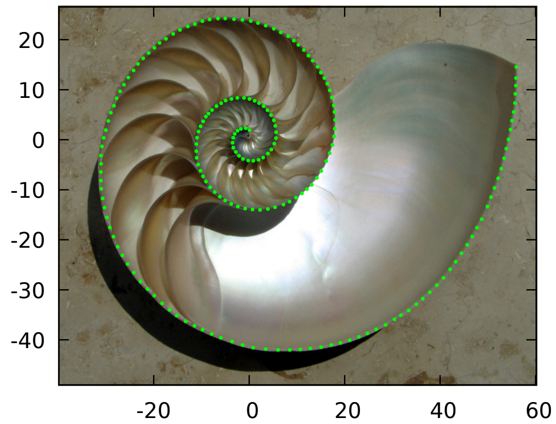
[1] Údaje o kosmické lodi Starship a jejím nosiči lze nalézt na adrese `https://en.wikipedia.org/wiki/SpaceX_Starship` a bližší údaje o použitých motorech pak na `https://en.wikipedia.org/wiki/SpaceX_Raptor`.

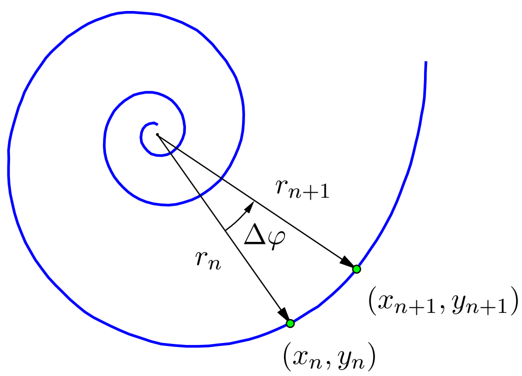
odumřelých živočichů na mořském dně. Podobně jako jiné druhy loděnek (ale na rozdíl od většiny hlavonožců) se loděnky hlubinné dožívají poměrně vysokého věku; dospělosti dosáhnou až v pátém roce života. Všechny druhy loděnek jsou ohroženy kvůli nadměrnému rybolovu pro jejich lasturu, která se primárně používá pro šperky a jiné ozdobné artefakty. V roce 2016 byly přesunuty do přílohy II Washingtonské úmluvy, která omezuje mezinárodní obchod, a později byly loděnky v USA uznány jako ohrožený druh podle zákona o ohrožených druzích.

V této úloze se přesvědčíte, že loděnky mají schopnost vytvářet tzv. logaritmickou spirálu, to jest křivku, která je v polárních souřadnicích zadána předpisem

$$\ln \frac{r}{a} = b\varphi\,,$$

kde a, b jsou parametry spirály. Ta se objeví na řezu ulitou loděnky, jak je ukázáno níže.[2] V souboru `nautilus.txt` naleznete souřadnice posloupnosti bodů vyznačených zeleně v levém obrázku. Souřadnice jsou vztaženy ke středu spirály, ten má tedy pozici $(0,0)$. Vyznačené body podrobíte dvěma jednoduchým testům, které prověří pečlivost, s jakou loděnka konstruovala svou logaritmickou spirálu.





(a) Prvním testem bude ověření výše uvedeného vztahu mezi vzdáleností od středu a polárním úhlem. Označme nejprve souřadnice bodů ze souboru `nautilus.txt` jako (x_n, y_n), $n = 1, 2, 3, \ldots, N$. K ověření vztahu je třeba je převést do polárních souřadnic r, φ. Vzdálenosti od středu lze vyčíslit jednoduše jako $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, polární úhly ovšem musí respektovat víceotáčkovost spirály. Počítejme je pro jednoduchost relativně vůči φ prvního bodu. Položte proto $\varphi_1 = 0$ a následující úhly vypočtěte podle vztahu

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \arccos \frac{x_n x_{n+1} + y_n y_{n+1}}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}\sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}}\,,$$

který vychází z náčrtku v pravé části obrázku (pro přehlednost zde mají body mnohem větší rozestup než ve skutečnosti). Ze získaných hodnot r_n, φ_n sestrojte graf závislosti $\ln r_n$ na φ_n. V případě, že se loděnce logaritmická spirála zdařila, měl by být s dobrou přesností lineární.

(b) Logaritmickou spirálu lze zachytit ekvivalentním vztahem $r = a\exp(b\varphi)$. Odtud snadno nahlédneme, že kruhová inverze logaritmické spirály (získaná transformací $r \to 1/r$) je opět logaritmická spirála otáčející se v opačném smyslu a rozvíjející se stejnou rychlostí danou parametrem b. Abychom posoudili, jak se loděnce podařilo naplnit tuto vlastnost, použijeme modifikovanou transformaci $r' = 150/r$ a $\varphi' = \Phi - \varphi$, kde $\Phi = 5{,}1$ v radiánech, a porovnáme původní a transformovanou spirálu. Vykreslete proto přes sebe sady bodů dané $(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$ s $n = 1, 2, 3, \ldots, N$ (odpovídají otočené původní spirále) a $(r'_n \cos\varphi'_n, r'_n \sin\varphi'_n)$ (odpovídají transformované spirále).

Pozn.: Konstanty v transformačních vztazích byly přirozeně voleny tak, aby vynikl překryv obou spirál.

[2] Obě fotografie použité v zadání pocházejí z `https://cs.wikipedia.org/wiki/Loděnka_hlubinná`