F6060 Programování zkouška – termín 1. 6. 2023

1. Dokonalá termoska

Cílem této úlohy bude posoudit teoretické limity schopnosti termosky uchovat nápoj teplý. Přitom zanedbáme přenos tepla vedením (zejména v oblasti hrdla termosky) a zahrneme pouze radiační ztráty, to jest ztráty v důsledku tepelného vyzařování. V tomto smyslu je naše termoska „dokonalá“. Termosku si představíme jako dlouhou válcovou nádobu s poloměrem R_1 a délkou L_1, do které je vložena o něco menší válcová nádoba s poloměrem R_2 a délkou L_2. Mezera mezi nádobami je evakuována, mezi povrchem vnitřní a vnější nádoby tak dochází pouze k radiačnímu přenosu. Ke kvantitativnímu zachycení radiačního přenosu tepla užijeme Stefanův-Boltzmannův zákon, který udává tepelný výkon vyzařovaný dokonale černým tělesem – z plochy S je vyzařován výkon $S\sigma T^4$. Zde $\sigma \approx 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a T je absolutní teplota měřená v kelvinech. Oproti dokonale černému tělesu je u reálných povrchů vyzařování sníženo, příslušný poměr vyjadřuje tzv. emisivita ε, kterou je třeba vynásobit výše uvedený tok. Jako reprezentativní údaj vezměme například tabulkovou hodnotu pro leštěnou nerezovou ocel $\varepsilon = 0,075$. Předpokládejme, že evakuovaná mezera je velmi úzká a nádoby mají téměř shodné poloměry a délky. Položíme tedy $R_1 = R_2 = R$ a $L_1 = L_2 = L$. Dále pro zjednodušení uvažujme o radiačním přenosu pouze pláštěm obou válcových nádob a zanedbejme příspěvek podstav, což je přiměřenou aproximací v případě $R \ll L$ (značně protáhlý tvar termosky). Pro tepelný tok z vnitřní nádoby o teplotě T na vnější nádobu udržovanou na teplotě T_{ext} (stálá teplota okolí) pak lze odvodit vztah

$$q = \frac{\sigma}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}\, S\,(T^4 - T_{\mathrm{ext}}^4) \qquad \text{s plochou pláště rovnou} \quad S = 2\pi R L\,.$$

Tento tok porovnáme s časovou změnou teploty vnitřní nádoby v diferenciální rovnici

$$C\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -q\,,$$

v níž vystupuje tepelná kapacita obsahu vnitřní nádoby $C = c\rho V$. Zde c značí měrnou tepelnou kapacitu náplně, ρ její hustotu a $V = \pi R^2 L$ objem zcela naplněné vnitřní nádoby. Po zavedení relativní teploty vztažené k T_{ext} a sloučení všech konstant do jedné dojdeme k finální diferenciální rovnici popisující chladnutí obsahu termosky:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\alpha(x^4 - 1)\,, \quad \text{kde} \quad x = \frac{T}{T_{\mathrm{ext}}} \quad \text{a} \quad \alpha = \frac{\sigma}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}\,\frac{2}{c\rho R}\,T_{\mathrm{ext}}^3\,.$$

(a) Diferenciální rovnici řešte pro případ chladnutí vody ($c = 4184\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, $\rho = 998\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) při vnější teplotě $T_{\mathrm{ext}} = 293\ \mathrm{K}$ (odpovídá 20°C). Poloměr termosky položme roven $R = 4\ \mathrm{cm}$. Konstanta α má s uvedenými údaji hodnotu $\alpha \approx 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{h^{-1}}$. Čas t budeme počítat v hodinách. Při řešení použijte Eulerovu metodu s pevným krokem $\Delta t = 0{,}1\ \mathrm{h}$. Jako počáteční teplotu zvolte $T_0 = 363\ \mathrm{K}$ (odpovídá 90 °C). Tato hodnota určuje počáteční $x_0 = T_0/T_{\mathrm{ext}}$ v čase $t_0 = 0$. Hodnoty x_n v následujících časech $t_n = n\Delta t$ s $n = 1, 2, 3, \ldots$ konstruujte podle předpisu

$$x_{n+1} = x_n - \alpha(x_n^4 - 1)\Delta t\,.$$

Výpočet ukončete, jakmile teplota poklesne pod hodnotu $T_{\mathrm{fin}} = 303\ \mathrm{K}$ (odpovídá 30 °C). Výsledek vykreslete jako graf závislosti $T(t)$.

(b) Diferenciální rovnice umožňuje analytické řešení, to je ovšem v implicitním tvaru udávajícím čas t jako funkci teploty T:

$$t = \frac{1}{\alpha}\left[f\left(\frac{T}{T_{\mathrm{ext}}}\right) - f\left(\frac{T_0}{T_{\mathrm{ext}}}\right)\right]\,, \quad \text{kde} \quad f(x) = \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}\,.$$

Pomocí uvedené formule vypočtěte časy t příslušné teplotám pokrývajícím interval $T_{\mathrm{fin}} = 303\ \mathrm{K}$ až $T_0 = 363\ \mathrm{K}$ s krokem 1 K a vyneste získané body pro srovnání do grafu $T(t)$ z bodu (a).

2. Harmonická syntéza tajemného obrazce

Tato úloha vychází vstříc studujícím, které nebaví číst zadání s obšírnými úvodními pasážemi zasazujícími problém do náležitého kontextu a touží se namísto toho co nejdříve pustit do řešení.

V souboru `coeffs.txt` najdete frekvence a koeficienty vystupující v následujících vztazích pro superpozice harmonických příspěvků

$$x(t) = \sum_{m=1}^{M} \left(a_m \cos \omega_m t + b_m \sin \omega_m t \right),$$
$$y(t) = \sum_{m=1}^{M} \left(c_m \cos \omega_m t + d_m \sin \omega_m t \right).$$

Na každém řádku souboru jsou přitom vypsány hodnoty frekvence a koeficientů jedné dvojice harmonických příspěvků v tomto pořadí: ω_m, a_m, b_m, c_m, d_m. Celkem je v souboru M neprázdných řádků. Vaším úkolem bude vyčíslit funkce $x(t)$ a $y(t)$ na intervalu $[0, 1)$ a to v bodech $t_j = j/N$, kde $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$. Vzniklé hodnoty $x_j = x(t_j)$ a $y_j = y(t_j)$ vyneste jednak do grafu závislostí na t (x i y společně do jednoho grafu) a také jako sadu bodů v rovině xy. Za N si zvolte některé číslo z rozsahu 1000 až 2000. Budete-li mít štěstí a vaše volba N se shodne s určitou speciální hodnotou, vytvoří body velmi překvapivý obrazec. Nápovědou budiž, že tato magická hodnota N odpovídá letopočtu narození učence, který patří mezi největší oblíbence zkoušejícího. Uhodnutí správného N samozřejmě není podmínkou úspěšného absolvování zkoušky.