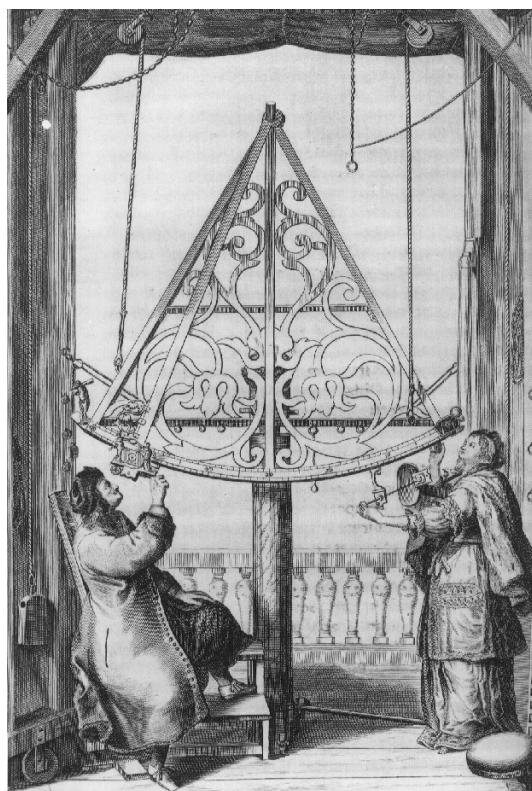


Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity  
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

---

# ASTRONOMICKÉ PRAKTIKUM

FILIP HROCH



Brno 2024



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Copyright © 2005 – 2024 Filip Hroch

Je povoleno kopírovat, šířit a/nebo upravovat tento dokument za podmínek GNU Free Documentation License, verze 1.3 nebo jakékoli další verze vydané nadací Free Software Foundation; bez neměnných oddílů, bez textů předních desek a bez textů zadních desek. Kopie této licence je zahrnuta v oddílu jménem „GNU Free Documentation License“.

### **Upozornění**

Čtete pracovní verzi. Veškeré údaje, výroky nebo tvrzení jsou proto uváděny bez jakékoli záruky a mohou být chybné. Taktéž některé pasáže mohou být nedokončené a i samotný autor s nimi může polemizovat.

Tento dokument je dostupný on-line včetně zdrojových souborů:

<http://www.physics.muni.cz/~hroch/apraktik.pdf>

<http://www.physics.muni.cz/~hroch/apraktik.tar.gz>

# Obsah

<b>Obsah</b>	<b>i</b>
<b>Předmluva</b>	<b>v</b>
<b>I Praktické úlohy</b>	<b>1</b>
<b>1 Určení zeměpisné polohy</b>	<b>3</b>
1.1 Zeměpisné souřadnice . . . . .	3
1.2 Vztahy mezi souřadnicemi . . . . .	4
1.3 Odhad zeměpisné polohy . . . . .	4
1.4 Měření zeměpisné polohy . . . . .	5
1.5 Newtonova metoda . . . . .	6
1.6 Tečná rovina a zeměpisné souřadnice . . . . .	8
1.7 Numerický výpočet zeměpisné polohy . . . . .	10
1.8 Rozmarná úloha? . . . . .	12
<b>2 Měření atmosférické refrakce</b>	<b>13</b>
2.1 Rovinný model atmosférické refrakce . . . . .	13
2.2 Výpočet obzorníkových souřadnic . . . . .	15
2.3 Hvězdný čas . . . . .	15
2.4 Juliánské datum . . . . .	17
2.5 Refrakční formule . . . . .	18
2.6 Optický index lomu vzduchu . . . . .	20
2.7 Refrakční optické jevy . . . . .	21
<b>3 Výšky měsíčních útvarů</b>	<b>23</b>
3.1 Měsíční souřadnice . . . . .	23
3.2 Měsíční stíny . . . . .	23
<b>4 Astrometrie na CCD snímku</b>	<b>25</b>
4.1 Úvodní úvahy . . . . .	25
4.2 Definice souřadnic . . . . .	25
4.3 Postup . . . . .	26

4.4	Výpočet přesné polohy hvězdy . . . . .	26
4.5	Průmět sférických souřadnic do roviny . . . . .	27
4.6	Transformace mezi měřeními a gnomonickými polohami . . . . .	29
4.7	Výpočet polohy objektu na snímku . . . . .	32
4.8	Groombridge 1830 . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Fotometrie na CCD snímku</b>	<b>37</b>
5.1	Fyzikální veličiny popisující záření . . . . .	37
5.2	CCD snímky . . . . .	43
5.3	Korekce CCD snímků . . . . .	44
5.4	Aperturní fotometrie . . . . .	46
5.5	Profilová fotometrie . . . . .	47
5.6	Měření objektů na CCD snímku . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Spektroskopie s CD</b>	<b>51</b>
6.1	Difrakce na CD . . . . .	51
6.2	Konstrukce spektroskopu z CD . . . . .	55
6.3	Jednoduchá analýza spektra . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Spektroskopie Vegy</b>	<b>63</b>
7.1	Spektrum . . . . .	63
7.2	Spektrum absolutně černého tělesa . . . . .	64
7.3	Určení poloměru Vegy . . . . .	65
7.4	Identifikace vodíkových čar . . . . .	66
7.5	Analýza profilu čáry . . . . .	66
7.6	Proč jsou ve spektru jen čáry vodíku? . . . . .	70
<b>8</b>	<b>Měření sluneční konstanty</b>	<b>71</b>
8.1	Sluneční konstanta . . . . .	71
8.2	Bolometr . . . . .	72
8.3	Teplota bolometru . . . . .	72
8.4	Tepelná kapacita bolometru . . . . .	75
8.5	Atmosferická extinkce . . . . .	76
<b>9</b>	<b>Barevný diagram hvězdokupy</b>	<b>77</b>
9.1	HR diagram . . . . .	77
9.2	Barevný diagram . . . . .	78
9.3	Vyhodnocení měřených snímků . . . . .	78
9.4	Teoretický barevný diagram . . . . .	80
<b>10</b>	<b>Atmosférická extinkce</b>	<b>81</b>
10.1	Extinkce . . . . .	81
10.2	Vzdušná hmota . . . . .	82
10.3	Určení extinkce z pozorování . . . . .	83

<b>11 Barevná kalibrace fotometrického systému</b>	<b>85</b>
11.1 Fotometrie ve více barvách . . . . .	85
11.2 Filtry . . . . .	86
11.3 Fotometrické systémy . . . . .	86
11.4 Barevné transformace světelných toků . . . . .	87
11.5 Barevné transformace magnitud . . . . .	88
11.6 Falešné barvy . . . . .	90
11.7 M 67 . . . . .	90
<b>12 Plošná fotometrie</b>	<b>91</b>
12.1 Plošná magnituda . . . . .	91
12.2 Radiální profily galaxií . . . . .	92
12.3 Radiální profily komet . . . . .	92
12.4 Určení radiálního profilu . . . . .	93
<b>II Teoretické úlohy</b>	<b>95</b>
<b>13 Určení polohy planety</b>	<b>97</b>
13.1 Úvodní úvahy . . . . .	97
13.2 Postup výpočtu . . . . .	97
13.3 Dráhové elementy Marsu . . . . .	98
13.4 Definice soustavy souřadnic . . . . .	98
13.5 Výpočet polohy tělesa ve své dráze . . . . .	99
13.6 Výpočet heliocentrických souřadnic . . . . .	101
13.7 Poloha Země . . . . .	102
<b>A Zpracování naměřených dat</b>	<b>105</b>
A.1 Aritmetický průměr . . . . .	105
A.2 Histogram . . . . .	106
<b>B FITS formát</b>	<b>109</b>
<b>C Python</b>	<b>111</b>
C.1 První kontakt . . . . .	112
C.2 Přehled možností Pythonu . . . . .	113
C.3 Načtení astronomického snímku . . . . .	116
C.4 Aritmetické operace se snímky . . . . .	117
C.5 Statistika na snímcích . . . . .	118
C.6 Jak zpracovat velké množství souborů . . . . .	121
<b>D GNU Free Documentation License</b>	<b>125</b>
<b>Literatura</b>	<b>129</b>

iv

*Obsah*

**Rejstřík**

**131**

# Předmluva

Praktické zvládnutí rozmanitých astronomických úloh je základem dobrému porozumění vesmírnému řádu. Od pátého roku nového tisíciletí jsem měl možnost vést Praktikum z astronomie konané na Masarykově universitě pro astronomické adepty studující dokonalou harmonii Vesmíru a snažil jsem se ukázat některé cesty vedoucí k porozumění magických zákonitostí tohoto druhu vědeckého umění. Klíčové myšlenky jsem se pokusil nastínit v tomto textu. Tajně doufám, že se snad, dříve nebo později, najde osvětlená duše, jež se prostřednictvím zachycených úvah naučí odkrývat myšlenky jež před námi nebesa cudně skrývají.

V textu je snaha o dodržení několika konvencí. Především je každá kapitola věnována jedné úloze a je koncipována jako víceméně samostatný celek nezávislý na ostatních částech. Porozumění jednomu tématu tedy není vázáno na ostatní úlohy.

V celém textu je přísně používáno teček jako symbolu pro oddělení celých a desetinných částí čísel. Vždy píšeme  $1/2 = 0.5$  a naopak  $1/2 = 0,5$  se v textu nikde nevyskytuje. Důvodem zavedení tohoto pravidla je předcházení nedorozuměním v prostředí moderních počítačových systémů.

V astronomii se lze běžně setkat s času-podobnými jednotkami pro úhly (v případě rektascenze nebo hodinového úhlu). Aby se zabránilo zbytečnému zmatku, píšeme časové údaje ve tvaru  $t = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4.0905 \text{ s}$ , kdežto rektascenzi ve tvaru připomínajícím úhlové jednotky  $\alpha = 23^{\text{h}}56^{\text{min}}4^{\text{s}}.0905 = 359^{\circ}1'1''357$ .

Za trefné poznámky k textu jsem vděčný Tomáši (Fantómovi) Henychovi.

Filip Hroch (hroch@physics.muni.cz),  
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky,  
Přírodovědecká fakulta,  
Masarykova univerzita,  
Kotlářská 2, 611 37 Brno.





**Část I**

**Praktické úlohy**



# Kapitola 1

## Určení zeměpisné polohy

Za starých dobrých časů, byl jeden z klíčových úkolů, čekající na odvážné mořeplavce, určení jejich polohy na moři, neboť nepřesné souřadnice pro ně mohly znamenat život nebo smrt, bohatství či chudobu. Námořní kapitáni, kormidelníci a lodivodi tak byli vybaveni důkladnými znalostmi sférické trigonometrie a důmyslnými pomůckami na měření poloh nebeských těles. Metody, které používaly, byly generacemi matematiků, astronomů ale i hodinářů pečlivě rozvíjeny, až k dnešní skoro dokonalosti. Paradoxně tak na konci svého rozkvětu už vlastně nejsou, na první pohled, třeba, protože moderní systémy družicové navigace udávají polohu neznalému uživateli o mnoho řádů přesněji a přitom bez jakýchkoli předchozích dovedností. Zkušenosti a metody námořní navigace, v moderní době, přešly do obvodů elektronických systémů. Přesto jsou její základy stále součástí učiva na školách přímořských států. A taktéž branou k pochopení sférické astronomie.

### 1.1 Zeměpisné souřadnice

Za zeměpisné souřadnice byla zvolena dvojice úhlů s počátkem ve středu Země, kterou si modelujeme koulí. Za zeměpisnou šířku byl zvolen úhel  $\varphi$  s nulovou hodnotou v rovině rotace Země. Jako zeměpisná délka  $\lambda$  pak úhel v kolmé rovině. [obr?]

Zeměpisnou šířku měříme od rovníku směrem k pólům v intervalu  $0^\circ$  až  $90^\circ$  pro severní šířky a od  $-90^\circ$  do  $0^\circ$  pro šířky jižní. Jako počátek zeměpisné délky byla vybrána poloha observatoře v Londýnské čtvrti Greenwich. Ve způsobu používání délkových souřadnic neexistuje shoda. Logicky by měla zeměpisná délka růst kladně směrem na západ od Evropy k americkému kontinentu. Z ne úplně jasných důvodů se lze ovšem v pracích evropanů často setkat s kladným měřením na východ od nultého poledníku. Zeměpisná délka nabývá hodnot od  $0^\circ$  do  $360^\circ$  a nebo se používá konvenčně rozsah od  $-180^\circ$  do  $+180^\circ$ .

## 1.2 Vztahy mezi souřadnicemi

Základem metod astronomického určení zeměpisné polohy jsou vztahy mezi obzorníkovými a rovníkovými souřadnicemi.

Obzorníkové souřadnice jsou opět úhly. Azimut  $A$ , s počátkem od Jihu<sup>1</sup> je úhel kolem vertikální osy a nabývá hodnot  $0^\circ$  až  $360^\circ$  (někdy ovšem také  $\pm 180^\circ$ ). Druhý úhel je zenitová vzdálenost  $z$ , která udává úhlovou vzdálenost od zenitu nabývající hodnot  $0^\circ$  (zenit) až  $90^\circ$  (obzor) pro objekty nad obzorem. Často se lze také setkat s úhlovou výškou nad obzorem  $h = 90^\circ - z$  jako doplňkem do  $\pi/2$ .

Rovníkové souřadnice udávají polohy hvězd vzhledem k souřadnému systému danému vzhledem ke kvasarům (jakožto nejvzdálenějším nejpřesněji pozorovaným bodovým objektům). Jsou navrženy jako obdoba zeměpisné délky, tedy odklonu od nultého poledníku v okamžiku Jarní rovnodennosti (od pravé pozice — right ascension) kterou je rektascenze  $\alpha$  a deklinace (úhlová odchylka od rovníku)  $\delta$ .

Za pomoci sférické věty kosinové [5] nebo rotačních matic ([6]) obdržíme z rovníkových souřadnic obzorníkové za pomoci vztahů

$$\begin{aligned}\sin z \sin A &= \cos \delta \sin H, \\ \sin z \cos A &= \sin \varphi \cos \delta \cos H - \cos \varphi \sin \delta, \\ \cos z &= \cos \varphi \cos \delta \cos H + \sin \varphi \sin \delta,\end{aligned}\tag{1.1}$$

ve kterých se snažíme určit: azimut  $A$  a zenitovou vzdálenost  $z$  s použitím hodinového úhlu  $H$ . Ten je definován jako rozdíl mezi greenwichským hvězdným časem (Greenwich mean sidereal time, GMST)  $t_{\text{GMST}}$  a rektascenzí hvězdy na poledníku s  $\lambda$ :

$$H = 15 t_{\text{GMST}} + \lambda - \alpha.\tag{1.2}$$

Hvězdný čas  $t_{\text{GMST}}$  je ve vzorci (2.9) uváděn v hodinách, kdežto všechny ostatní úhly ve stupních. Vzájemný převod mezi nimi zajišťuje konstanta  $15^\circ/\text{h} = 360^\circ/24\text{ h}$ , která má význam úhlové rychlosti rotace Země vyjádřené ve stupních za časovou jednotku. Země se za hodinu otočí o  $15^\circ$ , za 1 min o  $15'$ , za 1 s o  $15''$  atd. Podrobnější popis hvězdného času včetně jeho výpočtu nalezneme v oddíle 2.3.

## 1.3 Odhad zeměpisné polohy

Při měření zeměpisné polohy astronomickými metodami vycházíme z pozorování význačných nebeských těles.

Jedno se základních, pro určení zeměpisné délky na severní polokouli, je Polárka, jejíž deklinace je přibližně  $\delta \approx 90^\circ$ . Pozorujeme ji vždy nad severem

<sup>1</sup>Někdy se také lze setkat s azimutem měřeným od severu, jak je definovaný pro zeměpisná měření. Pro takto měřený azimut by se ovšem vztahy (1.1) musely upravit.

v úhlové výšce ( $h = 90^\circ - z$ ) nad obzorem odpovídající zeměpisné šířce. Ze vztahů (1.1) máme pro  $\cos H \approx \cos 180^\circ = -1$ , což nám zjednoduší vzorce na

$$\cos z \approx \sin \varphi \sin \delta - \cos \varphi \cos \delta.$$

Užitím součtových vzorců tak pro Polárku máme

$$z \approx \varphi.$$

Symbol  $\approx$  užíváme proto, že jde pouze o aproximativní vztah a platící jen v současné době. Polárka neleží přímo na pólu, ale v důsledku precese Země je v době, kdy provádíme tuto aproximaci, poměrně blízko k němu.

Polárku nelze užít pro jižní polokouli, neboť leží pod obzorem. Na jižní obloze je konvenčním pólem rovnoramenný trojúhelník mezi Magelanovými mračky a Jižním křížem (opravdu?).

V případě zeměpisné délky už je situace složitější neboť nemáme vždy k dispozici vhodný pevný objekt. Z historických důvodů se jako pevný bod bere tzv. Jarní bod (na souřadnicích  $\alpha, \delta = 0$ ), avšak díky složení rotace a oběhu kolem Slunce u Země se jeho úhlová poloha během roku mění podobně jako je tomu u hvězd. Musíme proto znát nejen polohu hvězdy, ale i přesný čas. Jako nejvhodnější se jeví změřit jeho rektascenzi a za pomoci známého času odhadnout zeměpisnou délku.

Právě určení zeměpisné délky dělalo starým mořeplavcům největší problémy. Je totiž vázané na určení času s přesností několika sekund, k čemuž je třeba velmi přesných hodin. Užívalo se řady náhrad, například určení času prostřednictvím fáze Měsíce. Avšak solidní měření délky přineslo až sestavení přesných hodin — lodních chronometrů — na které dokonce vyhlásila soutěž samotná anglická královna. Podmínky byly jasné: odchylka mezi chronometrem, který absolvoval cestu lodí do Karibiku a zpátky, a přesnými hodinami ve Greenwichi nesmí být větší než pár sekund.

## 1.4 Měření zeměpisné polohy

Předpokládejme, že jsme v průběhu večera změřili zenitovou vzdálenost  $z_1, z_2$  dvou objektů nad obzorem ve dvou přesně určených časech  $t_1, t_2$  a přitom nezaznamenali azimut obou objektů. Pro jednoznačné určení polohy jsme použili dva objekty: první ve vhodné výšce nad západním  $\alpha_1, \delta_1$  a druhý pak nad východním obzorem  $\alpha_2, \delta_2$ . Dostali jsme tak dvojici údajů:

$$\begin{aligned} t_1, z_1, \alpha_1, \delta_1, \\ t_2, z_2, \alpha_2, \delta_2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pro zjištění zeměpisných souřadnic přepíšeme vztah pro zenitovou vzdálenost ze vztahů (1.1) do tvaru

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(H + \lambda), \tag{1.4}$$

v němž jsme označili hodinový úhel hvězdy na Greenwichském poledníku jako  $H = 15 t_{\text{GMST}} - \alpha$ . Ten nás pak vede k soustavě dvou rovnic se dvěma neznámými:

$$\begin{aligned} z_1 &= \arccos[\sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos(H_1 + \lambda)], \\ z_2 &= \arccos[\sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos(H_2 + \lambda)]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Jejím řešením získáme hodnoty zeměpisné délky a šířky. Rovnice jsou na první pohled poměrně složité, jde totiž o soustavu dvou nelineárních rovnic pro dvě neznámé a při bližším ohledání se snadno přesvědčíme, že neznámé  $\lambda$  a  $\varphi$  z nich nelze vyjádřit a tedy řešení nemůžeme napsat ve tvaru

$$\lambda = \dots, \quad \varphi = \dots$$

přestože určitě existuje (na daných souřadnicích jsme měřili). Rovnice lze řešit pouze numericky, kdy sice nemůžeme napsat obecný tvar, ale numerickou hodnotu zjistit můžeme. K řešení soustavy (1.5) lze použít několik metod:

**Metoda Monte Carlo** Správné řešení se snažíme uhádnout. Zkoušíme různé hodnoty souřadnic  $\lambda, \varphi$  tak, aby rozdíl mezi spočteným a změřeným  $z$  byl co nejmenší. Tato metoda je velmi jednoduchá, avšak poměrně pracná a časově náročná.

**Metoda sítí** V podstatě jde o vylepšenou předchozí metodu. Řešení tentokrát nehledáme náhodně, ale systematicky prohledáváme čtverec řešení pokrytý sítí. Po jeho nalezení čtverec zmenšíme a opět prohledáváme dokud nedosáhneme požadované přesnosti. Tato je sice principiálně snadná, ale vyžaduje znalost programování, neboť lokalizace s přesností na tisíce stupně vyžaduje řádově  $10^6$  vyhodnocení soustavy (1.5).

**Newtonova metoda** Jde o matematicky sofistikovanou metodu, jež vede nejrychleji k cíli. Je popsána v části 1.5.

## 1.5 Newtonova metoda

Newtonova metoda, neboli metoda tečen, je metoda na řešení rovnice typu

$$f(x) = 0. \quad (1.6)$$

Tato rovnice může mít mnoho podob. Typickým astronomickým případem je Keplerova rovnice

$$E - \varepsilon \sin E = M, \quad (1.7)$$

v níž se snažíme určit neznámou hodnotu excentrické anomálie<sup>2</sup>  $E$  ze známé střední anomálie  $M$  a excentricity elipsy  $\epsilon$ . Na první pohled je vidět, že se nám nemůže podařit napsat řešení ve tvaru

$$E = \dots$$

V úvahu tedy připadá pouze numerické řešení nebo řešení ve tvaru nekonečné řady. Proto se tomuto typu rovnic říká transcendentní rovnice.

Přesto je jasné, že řešení existuje a můžeme ho určit právě Newtonovou metodou. Předpokládejme, že kolem přibližného odhadu řešení  $x^{(0)}$  rovnice (1.6) rozvineme funkci do Taylorova rozvoje

$$f(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + \dots \quad (1.8)$$

Omezíme-li se pouze na první dva členy, vidíme, že jde o rovnici přímky. Tato přímka má sklon daný derivací a proto jde o rovnici tečny. Odtud pochází i květnatý název této metody.

Zanedbáme-li členy vyšších řádů, a zajímá-li nás opravdu řešení rovnice  $f(x) = 0$ , pak můžeme vyjádřit  $x$  ve kterém má hledaná rovnice nulovou hodnotu:

$$x = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}. \quad (1.9)$$

Obvykle dostaneme lepší odhad, než byl ten původní. Pokud by jsme chtěli dostat kořen přece jen přesněji, musíme daný postup opakovat

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{f(x^{(i)})}{f'(x^{(i)})}, \quad \text{pro } i = 0, \dots \quad (1.10)$$

a to tak dlouho, dokud nedosáhneme potřebné přesnosti měřené prostřednictvím  $|x^{(i+1)} - x^{(i)}|$ .

Použití metody je vázané na to, aby derivace  $f'(x)$  byla nenulová, počáteční odhad byl dostatečně přesný a druhá derivace byla konečná.

**Keplerova rovnice pro Zemi** Pro ukázkový příklad si zvolíme naprosto náhodně pravou stranu v (1.7), například  $\pi/4$ , a řešíme tak rovnici

$$E - 0.017 \sin E = \pi/4. \quad (1.11)$$

Převedením do obecného tvaru

$$f(x) = (x - 0.017 \sin x) - \pi/4 \quad (1.12)$$

a derivováním dostaneme

$$f'(x) = 1 - 0.017 \cos x. \quad (1.13)$$

---

<sup>2</sup>Anomálie je astronomicko-astrologické označení pro úhel.

$i$	$x^{(i)}$	$f(x^{(i)})$	$f'(x^{(i)})$	$ x^{(i+1)} - x^{(i)} $
0	0.78540	-0.01131	0.98869	0.01144
1	0.79684	0.00026	0.98856	0.00026
2	0.79658	-0.00001	0.98856	0.00001
3	0.79658	0.00000	0.98856	0.00000

Tabulka 1.1: Postupné iterace Newtonovy metody pro (1.12)

Jelikož je excentricita velmi malá, dráha je prakticky kruhová a jako počáteční odhad můžeme zvolit pravou stranu  $x^{(0)} = \pi/4$  (volba počátečních hodnot obvykle vychází ze znalosti problému). Výsledky Newtonových iterací jsou uvedeny v tabulce 1.1. Vidíme, jak se postupně blížíme k řešení a již po třech iteracích známe řešení s přesností na pět míst.

## 1.6 Tečná rovina a zeměpisné souřadnice

Vraťme se opět k výpočtu zeměpisných souřadnic podle vztahů (1.5). Vidíme, že v tomto případě, hledáme kořen pro dvě proměnné a budeme tedy muset naše úvahy poněkud rozšířit i když našťastí princip zůstává v platnosti.

V případě Newtonovy metody pro dvě neznámé se obecně zajímáme o řešení soustavy dvou nelineárních rovnic typu

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

na kterou snadno převedeme soustavu (1.5).

Ve dvou dimenzích ovšem místo tečny ke grafu funkce sestojíme dvě tečné roviny. Tyto roviny mají sklon vůči souřadnicovým osám daným derivací funkce vůči příslušné souřadnicové proměnné. Pokud tyto derivace existují, pak příslušná tečná rovina protíná nulovou rovinu  $z = 0$  v přímce.

Máme-li dvě tečné roviny, které vytínají dvě přímky, můžeme z jejich průsečíku určit souřadnice bodu udávající lepší odhad kořene příslušné nelineární rovnice. Postup můžeme opakovat tak dlouho, dokud neznáme polohu kořene s dostatečnou přesností.

Podobně jako v jednorozměrném případě, lze i nyní odvodit Newtonovu metodu mechanickým způsobem z Taylorova rozvoje. Rovnice tečné roviny k ploše zadané funkcí  $f(x, y)$  v bodě  $(a, b)$  je zobecněním tečny ke křivce a píšeme ji ve tvaru

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b). \quad (1.15)$$

přičemž derivace počítáme v bodě  $(a, b)$ . Avšak k nalezení souřadnic bodu představujícího přibližné řešení (1.14) musíme mít k dispozici dvě funkce ke



kterým sestrojíme tečné roviny a dostaneme tak dvě přímky v jejichž průsečíku se nachází toužebně očekávané řešení. Tečné roviny k dvěma plochám jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} z &= f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y - b), \\ z &= f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(y - b), \end{aligned} \quad (1.16)$$

jež řešíme za podmínky  $z = 0$  (derivace a funkce opět bereme v bodě  $(a, b)$ ). Dostáváme tak soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých představující vlastně hledání průsečíku dvou přímek v rovině. Substituce  $x_i \equiv a, y_i \equiv b, f(x_i) \equiv f(a), f(y_i) \equiv f(b), \dots$  a polohu kořene pro konkrétní řešení  $x_{i+1}, y_{i+1}$  a elementární úpravy nás vedou k výrazům

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i - x_{i+1}) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y_i - y_{i+1}) &= -f_1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_i - x_{i+1}) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(y_i - y_{i+1}) &= -f_2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Abychom se v této změti písmen lépe orientovali, lineární soustavu přeznačíme  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i), \Delta_i = (x_i - x_{i+1}, y_i - y_{i+1}), \mathbf{f} = (f_1, f_2)$  a dále

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}, & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}, & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

(derivace počítáme v  $(x_i, y_i)$ ) dostáváme soustavu rovnic v maticové notaci

$$\mathbf{A}_i \cdot \Delta_i = -\mathbf{f}_i, \quad (1.19)$$

a řešení naší původní soustavy tak získáme jako

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta_i. \quad (1.20)$$

**Newtonova metoda pro zeměpisné souřadnice** V případě soustavy rovnic (1.5) je řešení přímočaré. Vektorová funkce  $\mathbf{f}_i$  má tvar

$$\mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} \arccos q_1 - z_1 \\ \arccos q_2 - z_2 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

ve níž jsme použili substituce

$$\begin{aligned} q_1 &= \sin \delta_1 \sin \varphi + \cos \delta_1 \cos \varphi \cos(H_1 + \lambda), \\ q_2 &= \sin \delta_2 \sin \varphi + \cos \delta_2 \cos \varphi \cos(H_1 + \lambda), \end{aligned} \quad (1.22)$$

a hledáme řešení pro

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i+1} - \lambda_i \\ \varphi_{i+1} - \varphi_i \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Prvky matice  $A_i$  jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} &= -u \cos \delta_1 \cos \varphi \sin(H_1 + \lambda), \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} &= -v \cos \delta_2 \cos \varphi \sin(H_2 + \lambda), \\ \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} &= u [\sin \delta_1 \cos \varphi - \cos \delta_1 \sin \varphi \cos(H_1 + \lambda)], \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} &= v [\sin \delta_2 \cos \varphi - \cos \delta_2 \sin \varphi \cos(H_2 + \lambda)], \end{aligned} \quad (1.24)$$

v nichž jsme použili pomocné proměnné

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\sqrt{1 - q_1^2}} \\ v &= -\frac{1}{\sqrt{1 - q_2^2}} \end{aligned} \quad (1.25)$$

## 1.7 Numerický výpočet zeměpisné polohy

Vztahy (1.21) až (1.24) nepochybně budí respekt. V principu lze jejich iterace spočítat za pomoci kalkulačky, tabulek či logaritmického pravítka ovšem je třeba se obrnit velkou trpělivostí a mít spoustu volného času. Proto je zde uveden výpis skriptu pro Python<sup>3</sup> jež může pomoci v řešení této úlohy a může být vodítkem pro vlastní způsob na zpracování.

Listing 1.1: zemepis.py

```
1 #!/usr/bin/env python
2 # Spouštět jako: python zemepis.py
3
4 from numpy import *
5
6 # radian
7 r = 180/pi
8
9 # namerene zenitove vzdalenosti
10 z1 = 50
11 z2 = 70
```

<sup>3</sup>Python je moderní programovací jazyk volně dostupný na <http://www.python.org>, kde je k nalezení podrobný manuál, instalační soubory a odkazy na další zdroje.

```

12
13 # souradnice a hvezdny cas, stupne
14 a1 = 15*(4+36/60) # [deg]
15 d1 = 16+30/60     # [deg]
16 h1 = 20           # [hodiny]
17 H1 = 15*h1 - a1   # hodinovy uhel
18
19 # souradnice a hvezdny cas, stupne
20 a2 = 15*(5+17/60)
21 d2 = 46
22 h2 = 23
23 H2 = 15*h2 - a2
24
25 # priblizny (pocatecni) odhad zemepisne polohy
26 l = 15
27 f = 50
28
29 print("RESENI:")
30 print("Iterace_{}_zemepisna_delka_{}_zemepisna_sirka".format(0,0))
31
32 for i in 1,2,3,4,5:
33
34     # pomocne veliciny
35     q1 = sin(d1/r)*sin(f/r)+cos(d1/r)*cos(f/r)*cos((l+H1)/r)
36     q2 = sin(d2/r)*sin(f/r)+cos(d2/r)*cos(f/r)*cos((l+H2)/r)
37
38     # prave strany, rozdil mezi merenou a
39     # vypoctenou zenitovou vzdalenosti ve stupnich
40     p = array([r*arccos(q1) - z1, r*arccos(q2) - z2])
41
42     # substituce
43     u = -1/sqrt(1 - q1**2)
44     v = -1/sqrt(1 - q2**2)
45
46     # matice derivaci
47     m11 = -u*sin((H1+l)/r)*cos(d1/r)*cos(f/r)
48     m12 = u*(sin(d1/r)*cos(f/r) - cos(d1/r)*sin(f/r)*cos((H1+l)/r))
49     m21 = -v*sin((H2+l)/r)*cos(d2/r)*cos(f/r)
50     m22 = v*(sin(d2/r)*cos(f/r) - cos(d2/r)*sin(f/r)*cos((H2+l)/r))
51     m = array([[ m11, m12 ], [m21, m22 ]])
52
53     # vypocet linearnich rovnic
54     x = linalg.solve(m,p)
55
56     # pricteni rozdilu k pocatecnimu odhadu
57     l = l - x[0]
58     f = f - x[1]
59
60     print(i,l,f)
61
62 # fin

```

## 1.8 Rozmarná úloha?

Určovat zeměpisnou polohu pomocí úhloměru nebo sextantu se může zdát v dnešní době poněkud rozmarné. Nejen proto, že existuje několik družicových systémů udávající přesný čas i polohu s až zbytečně velkou přesností (odchylky od správné polohy jsou menší než velikosti lidských těl!).

Nicméně princip této metody má široké uplatnění v astronomii, kdy z různých důvodů můžeme měřit jen jednu souřadnici. V nedávné době tak byla tato metoda hojně rozšířená při určování poloh gama záblesků.

Přesná detekce slabých gama zdrojů, které se navíc objevují náhodně, je poměrně těžký úkol. Pokud se používají nesměrové detektory (představované kusem materiálu ve kterém dopadající gama fotony indukují jiné, lépe zachytitelné fotony) nemáme jinou možnost, než měřit časové zpoždění mezi jednotlivými detektory rozmístěných například na opačných koncích družice nebo na několika družicích rozestých po sluneční soustavě. Tato zpoždění odpovídají právě námi měřeným kružnicím o jistých poloměrech, a proto nepřekvapuje, že zdroje se tak nachází v průsečících několika kružnic přesně stejným způsobem jako při našem měření. Nicméně i tato metoda se již pomalu začíná řadit k překonaným díky družici Swift.

## Kapitola 2

# Měření atmosférické refrakce

Termínem refrakce se obecně označuje lom světla. V případě astronomické refrakce se zajímáme o vliv lomu světla v zemské atmosféře na zdánlivé polohy objektů na nebeské sféře.

---

Zadání: **Atmosférická refrakce**

Úkolem je určit hodnotu refrakčního úhlu  $R$  (viz. 2.3) zapadajícího nebo vycházejícího nebeského tělesa měřením a výpočtem.

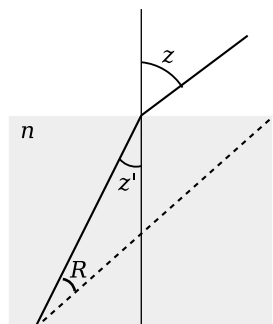
- Změřte polohu známého objektu v obzorníkových souřadnicích pro různé zenitové vzdálenosti nízko nad obzorem.
- Vyneste měřená data do grafu azimut – zenitová vzdálenost společně s vypočítanými obdoby těchto veličin.
- Vyneste rozdíl mezi měřenými a vypočtenými daty a otestujte na nich modely atmosférické refrakce (odstavec 2.5).

## 2.1 Rovinný model atmosférické refrakce

Asi nejjednodušší model představuje refrakce v rovinné vrstvě. V takovém modelu si atmosféru jednoduše představujeme jako homogenní vrstvu nad rovinným povrchem Země. Pokud do takové vrstvy dopadá záření z okolního prostoru s indexem lomu  $n_1$  pod úhlem  $\theta_1$  měřeným od kolmice, pak se na rozhraní láme a v této homogenní vrstvě s indexem lomu  $n_2$  se dál pohybuje pod rozdílným úhlem  $\theta_2$  dle Snellova zákona

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (2.1)$$

V astronomické symbolice identifikujeme úhel  $\theta_1$  jako (geometrickou) zenitovou vzdálenost  $z$ . V případě, že záření dopadá do homogenní atmosféry z



definice refrakčního  
úhlu

vakua, kde index lomu  $n_1 = 1$ , pak po průchodu atmosférou vidíme objekt pod odlišným úhlem (zenitovou vzdáleností)  $\theta_2 = z'$  daným indexem lomu atmosféry  $n_2 = n$ . V tomto značení tak vztah (2.1) nabývá tvaru

$$\sin z = n \sin z'. \quad (2.2)$$

Ve vzduchu předpokládáme hodnotu indexu lomu jen málo odlišnou od jedné, a proto je malý i rozdíl mezi pozorovanou a geometrickou zenitovou vzdáleností

$$R = z - z', \quad (2.3)$$

jenž definuje refrakční úhel  $R$ . V tomto přiblížení můžeme výraz

$$\sin(z' + R) = n \sin z' \quad (2.4)$$

upravit. Nejprve rozepíšeme levou stranu podle součtového vzorce pro úhly

$$\sin z' \cos R + \cos z' \sin R = n \sin z' \quad (2.5)$$

a poté pro malé hodnoty  $R$  ( $\cos R \approx 1$ ,  $\sin R \approx R$ ) ignorujeme chyby aproximace vyšších řádů a dostáváme

$$\sin z' + R \cos z' = n \sin z'. \quad (2.6)$$

rovinný model

Algebraickou úpravou se tak dostáváme k vyjádření refrakčního úhlu (2.3) v rovinném modelu

$$R = (n - 1) \tan z'. \quad (2.7)$$

Tento vztah nám ukazuje, že refrakce roste se zenitovou vzdáleností úměrně indexu lomu vzduchu. Nízko nad obzorem se nám objekty jeví výše, než by měly geometricky být. Přesně na obzoru ( $z' = 90$ ) tento model selhává, ale z měření víme, že nabývá hodnoty lehce nad půl stupně.

Rovinný model nepopisuje refrakci zcela korektně, neboť povrch Země je zakřiven a v atmosféře klesá hustota (jíž je index lomu úměrný) s výškou. Proto bylo sestaveno několik aproximativních formulí, uvedených v 2.5 a snažících se o sofistikovanější popis. V odstavci 2.7 je zmíněno několik jevů jež jsou důsledkem atmosférické refrakce.

Samotné měření refrakčního úhlu  $R$  můžeme provést poměrně snadno. Za pomoci přístroje schopného přesně určovat úhly pořídíme sadu měření vhodného objektu nízko nad obzorem. Při vizuální pozorování je ideální teodolit. Alternativou může být vhodný fotografický přístroj. Známe-li časy měření obzorníkových souřadnic, pak můžeme ze známých rovníkových souřadnic objektu  $\alpha, \delta$  a znalosti zeměpisných souřadnic místa pozorování<sup>1</sup>  $\lambda, \varphi$  určit geometrickou zenitovou vzdálenost  $z$  a podle definice (2.3) určit refrakci  $R$  v závislosti na  $z'$ .

<sup>1</sup>V této kapitole bude proměnná  $\lambda$  označovat zeměpisnou délku. Tento symbol se také běžně používá pro ekliptikální délku, se kterou tu ovšem operovat nebudeme.

## 2.2 Výpočet obzorníkových souřadnic

Převod mezi rovníkovými  $(\alpha, \delta)$  a obzorníkovými souřadnicemi je popsán následujícími všeobecně známými vztahy

$$\begin{aligned}\sin z \cos A &= -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos H, \\ \sin z \sin A &= \cos \delta \sin H, \\ \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,\end{aligned}\tag{2.8}$$

pomocí kterých se snažíme určit neznámé obzorníkové souřadnice: azimut  $A$  a zenitovou vzdálenost  $z$  s použitím hodinového úhlu  $H$ . Ten je definován jako rozdíl mezi greenwickským hvězdným časem (Greenwich mean sidereal time, GMST)  $t_{\text{GMST}}$  a rektascenzí hvězdy na poledníku s  $\lambda$ :

$$H = 15 t_{\text{GMST}} + \lambda - \alpha.\tag{2.9}$$

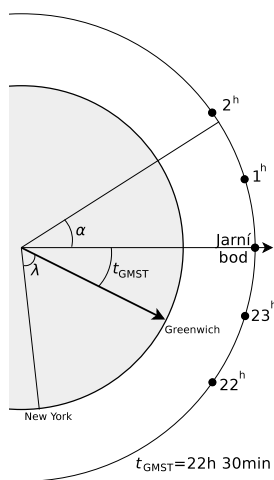
Hvězdný čas  $t_{\text{GMST}}$  je v tomto vzorci uváděn v hodinách, kdežto všechny ostatní úhly ve stupních. Převod mezi nimi zajišťuje konstanta  $15^\circ/\text{h} = 360^\circ/24 \text{ h}$ , která má význam úhlové rychlosti rotace Země vyjádřené ve stupních za časovou jednotku. Země se za hodinu otočí o  $15^\circ$ , za 1 min o  $15'$ , za 1 s o  $15''$  atd.

## 2.3 Hvězdný čas

V běžném fyzikálním smyslu se pod pojmem perioda rotace myslí doba, za kterou se těleso při otáčení dostane z hlediska vzdáleného pozorovatele zpět do výchozí polohy. Tato siderická perioda  $P_{\text{sid}}$  (siderický neboli hvězdný den) je pro Zemi asi 23 h 56 min. Avšak pokud bychom čas měřili v hvězdných dnech, rychle by se ukázalo, že se rozchází s našimi zvyky. Například dvanáct hodin by po čtvrt roce odbilo za večerního klekání. Jde o důsledek skládání zemské rotace a oběhu kolem Slunce. Poněvadž lidské rytmy jsou spíše vázané na Slunce, než na vzdálený vesmír, za délku (slunečního) dne volíme synodickou periodu  $P_{\text{syn}} = 24 \text{ h}$ .

V astronomii se obvykle zajímáme o vzdálené objekty, a proto nás zajímá, jak měřit čas vzhledem k nim. Hvězdný čas definujeme jako úhel s vrcholem ve středu otáčení Země mezi směrem k jarnímu bodu a zeměpisnou délkou Greenwiche. Tento úhel počítáme kladně ve směru rotace Země tak, aby narůstal s časem a vyjadřujeme jej v časových jednotkách. Z pohledu pozorovatele na nultém poledníku je to doba, která uběhla od kulminace (průchodu poledníkem) jarního bodu. Rektascenze hvězdy  $\alpha$  právě procházející greenwickským poledníkem tak odpovídá hvězdnému času  $t_{\text{GMST}}$  dle vztahu

$$\alpha = \frac{2\pi}{P_{\text{sid}}} t_{\text{GMST}} + \alpha_0.\tag{2.10}$$



Faktor<sup>2</sup> před  $t_{\text{GMST}}$  v prvním členu má význam úhlové rychlosti siderické rotace Země a rektascenzi jarního bodu bereme jako  $\alpha_0 \equiv 0$ .

Uvažujeme-li pro jednoduchost, že se Země otáčí rovnoměrně kolem své osy a nijak se nemění směr této osy rotace v prostoru, pak poměr mezi dvěma okamžiky běžného (slunečního) času  $\Delta t_{\text{UT}}$  (UT) se synodickou periodou  $P_{\text{syn}}$  a greenwickským hvězdným časem  $\Delta t_{\text{GMST}}$  s periodou  $P_{\text{sid}}$  bude prostě poměr jejich period

$$\frac{P_{\text{syn}}}{P_{\text{sid}}} = \frac{24 \text{ h}}{23 \text{ h } 56 \text{ min } 4.0905 \text{ s}} = 1.002\,737\,909\,3. \quad (2.11)$$

Rozdíl obou časů se stejným počátkem bude lineárně růst. V praxi byl za počátek (kdy jsme položili  $t_{\text{UT}} - t_{\text{GMST}} = 0$ ) vybrán 1. leden 2000 v 12 h UT. Použijeme-li Juliánské datování času popsané v odstavci 2.4, pak počet dní (včetně hodin přepočítaných na části dne), které uplynuly od tohoto okamžiku do času, jež nás zajímá  $t_{\text{JD}}$ , bude

$$\Delta t = t_{\text{JD}} - 2\,451\,545.0. \quad (2.12)$$

Greenwickský hvězdný čas v hodinách pak vypočteme dosazením do formulky

$$t_{\text{GMST}} = 18.697\,374\,558 + 24.065\,709\,824\,419\,08 \Delta t. \quad (2.13)$$

První konstanta odpovídá hvězdnému času počátku a druhá je pak 24 h vynásobených poměrem obou period. Překročí-li výsledek délku jednoho dne, odečteme nebo přičteme celistvý násobek 24 h a obdržíme tak výsledek ve správném intervalu.

Přesnost, s jakou určíme hvězdný čas ze vztahu (2.13), je přibližně jedna sekunda. Protože je hvězdný čas odvozen od polohy jarního bodu a jeho poloha (vázaná na směr rotační osy Země) se pozvolna mění v důsledku precese a nutace, musíme při přesných výpočtech rozlišovat mezi středním hvězdným časem (mean sidereal time) daným (2.13) a pravým hvězdným časem (apparent sidereal time). Pro pravý hvězdný čas, s lepší než sekundovou přesností, totiž musíme uvažovat i periodický posun jarního bodu. Tato a další zpřesnění jsou podrobněji uvedena například na stránce <http://aa.usno.navy.mil/faq/docs/GAST.php> nebo v knihách citovaných dále v této kapitole. Hvězdný čas má oproti slunečnímu podstatnou výhodu v tom, že plyne rovnoměrně, neboť se v něm nepromítá eliptický oběh Země kolem Slunce. Rovnoměrně plynoucí UT čas tak svůj počátek odvozuje právě z přesného určení hvězdného času (časová jednotka – sekunda – je ovšem daná z definice).

<sup>2</sup>V astronomii je obvyklá konvence, že úhly se měří ve stupních a čas ve stupních nebo hodinách. Lze se setkat s různými tvary vztahu (2.10):  $\alpha = t_{\text{GMST}}/15$  nebo dokonce rovnou  $\alpha = t_{\text{GMST}}$ . Jejich použití implicitně předpokládá převod na odpovídající jednotky.



Hodnotu hvězdného času lze snadno odhadnout. Stačí si pamatovat, že v okamžiku podzimní rovnodennosti prochází jarní bod greenwichským poledníkem (zhruba) o půlnoci. Jinými slovy, oba časy se periodicky setkávají vždy kolem podzimní rovnodennosti (důsledek definice hvězdného času). Den nato bude o půlnoci přibližně o čtyři minuty hvězdného času víc. Za měsíc už to bude  $30 \times 4 \text{ min} = 2 \text{ h}$ . Za čtvrt roku tak rozdíl naroste o šest hodin. Za celý rok se nastřádá jeden den tak, aby bylo zase kolem půlnoci. Například 11. října v 18 h UT budeme mít přibližně  $t_{\text{GMST}} \approx 20 \times 4 \text{ min} + 18 \text{ h} = 19 \text{ h } 20 \text{ min}$ . Chyba je v řádu několika minut a rok od roku se pochopitelně mění. S uvážením zeměpisné délky tak zároveň odhadneme i rektascenzi právě kulminujících hvězd.

## 2.4 Juliánské datum

Juliánské datování bylo zavedeno v astronomii proto, abychom mohli snadno počítat rozdíly mezi dvěma časovými okamžiky a vyhnuli se tak složitému přepočítávání počtu dnů v měsíci a přestupným rokům. Polední 1. ledna roku 4713 před naším letopočtem byla přiřazena nula a od tohoto počátku se pak počítají průběžně dny bez dalších period, jako jsou měsíce a roky.

Juliánské datování je velmi šikovná pomůcka, a proto nám přijde vhod algoritmus jeho výpočtu. Lze jej použít pro převod časového okamžiku ve tvaru

$$\text{RRRR} - \text{MM} - \text{DD.DDDD} \dots, \quad (2.14)$$

(rok, měsíc, den a jeho desetinná část, kterou dostaneme převodem z hodin, minut, sekund a jejich částí), kupříkladu 2006 – 10 – 24.625 69 je pro 24. října 2006 v 15 h 01 min UT. Obvykle se Juliánské datování používá pro časy udávané v UT.

Definujeme proměnné  $y, m, d$  odpovídající rokům, měsícům a dnům

$$\begin{aligned} y &= \text{RRRR}, \\ m &= \text{MM}, \\ d &= \text{DD.DDDD} \dots, \end{aligned} \quad (2.15)$$

a upravíme je tak, abychom eliminovali astronomický a kalendářní rozdíl v počítání roků<sup>3</sup>

$$y \leftarrow y + 1, \quad \text{pro } y < 0 \quad (2.16)$$

a vezmeme v úvahu přestupné roky

$$\begin{aligned} y &\leftarrow y - 1, m \leftarrow m + 13, & \text{pro } \text{MM} \leq 2, \\ m &\leftarrow m + 1, & \text{pro } \text{MM} > 2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

<sup>3</sup>Operace  $\leftarrow$  znamená: Vem hodnotu na levé straně, použij ve výrazu napravo a znovu přiřaď do proměnné nalevo. Tento symbol odpovídá přiřazení v programovacích jazycích.

S takto upravenými hodnotami vypočteme Juliánské datum bez započtení vypuštěných dnů v říjnu roku 1582<sup>4</sup>

$$t'_{JD} = [365.25y] + [30.6m] + d + 1\,720\,994.5. \quad (2.18)$$

Pokud počítáme Juliánské datum z občanského data před 15. říjnem 1582 přímo platí  $t_{JD} = t'_{JD}$ . Pro data po tomto dnu (tj. pro data, se kterými se běžně setkáváme) ještě musíme doplnit několik dalších dnů. Zavedeme-li ještě pravidlo, aby každé vhodné století končilo přestupným rokem

$$t'' = \left[ \frac{y}{100} \right], \quad (2.19)$$

tak Juliánské datum spočteme podle vztahu

$$\begin{aligned} t_{JD} &= t'_{JD} && \text{do 1582–10–15} \\ t_{JD} &= t'_{JD} + 2 - t'' + [t''/4] && \text{po 1582–10–15.} \end{aligned} \quad (2.20)$$

## 2.5 Refrakční formule

Na základě znalosti měřené zenitové vzdálenosti  $z'$  (případně výšky nad obzorem  $h' = 90^\circ - z'$ ) a teoretické  $z$  jsme schopni přímo vypočíst hodnotu refrakčního úhlu (2.3). Pro názornější zobrazení je vhodné vynést grafy závislosti měřené a spočtené zenitové vzdálenosti na azimutu a závislost refrakčního úhlu na zenitové vzdálenosti.

Do těchto naměřených grafů můžeme vykreslit aproximativní vztahy pro refrakci a srovnat je navzájem. Klasická refrakční formule (Smart [5]) se dostane z (2.7) dosazením empirického koeficientu

$$R = 58.2'' \tan z'. \quad (2.21)$$

Právě z tohoto vzorce přímo plyne praktická poučka o refrakci mající hodnotu přibližně jedné minuty ve  $45^\circ$  nad obzorem. Přesnější obdoba (Taff [6])

$$R = 58.294'' \tan z' - 0.0668'' \tan^3 z' \quad (2.22)$$

klasické formule (2.21) platí v případě, že zenitová vzdálenosti není větší než  $75^\circ$ .

Obecně je platnost vztahů (2.21) nebo (2.22) omezena na zenitové vzdálenosti menší než asi  $45^\circ$  za okolní teploty  $10^\circ\text{C}$  a normálního tlaku jedné atmosféry 1013.25 hPa. Smart [5] uvádí následující vzorec pro redukci refrakčního úhlu  $R'$  za odlišné teploty ve stupních Celsia a tlaku v hektopaskalech:

$$\frac{R'}{R} = \frac{0.279 p}{273 + t}. \quad (2.23)$$

<sup>4</sup>Symbol  $[x]$  označuje funkci vracející celou část ze svého argumentu bez zaokrouhlování (máme tak  $[1.2] = 1$ ,  $[-3.7] = -3$ ).

Wolf [7] uvádí pro refrakční úhel poněkud odlišný vztah

$$R = \alpha\beta\gamma \tan z, \quad (2.24)$$

kde užíváme substituce

$$\begin{aligned} \alpha &= 60.236'' - 0.070'' \tan^2 z, \\ \beta &= p/1013.25, \\ \gamma &= (1 - 0.000\,152f - 0.000\,005\,50f^2)/(1 + 0.003\,68t). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ve vzorci (2.25) značí  $f$  tlak vodních par v hektopascalech. Pro známou relativní vlhkost  $H$  v procentech ji můžeme aproximovat polynomem

$$f = 10^{-4}H(605 + 44.94t + 1.0279t^2 + 0.0279t^3 + 0.000\,34t^4). \quad (2.26)$$

Formule (2.24) platí pro vlnovou délku 590 nm s přesností větší jak  $0.01''$  do zenitové vzdálenosti  $70^\circ$ .

Dokonalejší verze refrakčních vzorců byly odvozeny G. G. Benettem (Meus [4]). Přestože jejich analytický tvar vůbec neodpovídá našim úvahám, dosahují podstatně větší numerické přesnosti:

$$R = \frac{1}{\tan \left( h' + \frac{7.31}{h' + 4.4} \right)}. \quad (2.27)$$

Zde je místo pozorované  $z'$  použita výška nad obzorem  $h' = 90^\circ - z'$ . Formule platí v celém intervalu  $0 \dots 90^\circ$ , přičemž největších chyby  $4''$  dosahuje ve výšce  $12^\circ$  a bohužel není zcela korektní, neboť dává nenulovou hodnotu refrakce i přímo v zenitu. Přesnost se dá zvýšit přičtením členu

$$-0.06 \sin(14.7R + 13), \quad (2.28)$$

čímž se chyba sníží na  $0.9''$  pro celý možný rozsah úhlových výšek. Do vztahů (2.27) a (2.28) dosazujeme výšku nad obzorem  $h'$  ve stupních a  $R$  v obloukových minutách.

Pro tzv. inverzní problém, kdy chceme určit refrakci pro vypočtenou výšku  $h$ , Sæmundsson navrhuje (opět dle Meus [4]) formuli

$$R = \frac{1.02}{\tan \left( h + \frac{10.3}{h + 5.11} \right)}. \quad (2.29)$$

Tato formule je konzistentní s Bennettovou s přesností větší jak  $4''$ .

Oba vzorce jsou odvozeny pro viditelné světlo a pro teplotu  $10^\circ\text{C}$  a tlak 1010 hPa. Přepočít na jiné pozorovací podmínky opět znamená použití korekčních vzorců

$$\frac{R'}{R} = \frac{p}{1010} \cdot \frac{283}{273 + t}. \quad (2.30)$$

Přestože vztahy typu (2.22) se dají precizně odvodit, neodpovídají dokonale pozorováním. Refrakce je závislá na mnoha těžko popsatelných faktorech, a proto se koeficienty v takovýchto vztazích odvozují empiricky nebo se rovnou navrhuje zcela odlišný tvar funkce (2.27).

## 2.6 Optický index lomu vzduchu

Index lomu vzduchu v optickém oboru (dle libovolných středoškolských tabulek) má hodnotu

$$n = 1.000\,292, \quad (2.31)$$

ze které dostaneme číselnou hodnotu koeficientu v (2.7), použitou v (2.21).

Samotný index lomu (refractive index) udává poměr rychlosti světla v daném prostředí ku rychlosti světla ve vakuu. Předpokládáme-li, že elektrony jsou k atomu vázány tak, že rezonanční frekvence této vazby bude  $\omega_0$  a na dané prostředí dopadá rovinná elektromagnetická vlna tak, že na všechny elektrony dopadá se stejnou fází, pak výsledná vlna je dána součtem dopadající vlny s vlnami vyzářenými urychlenými elektrony. Výsledné vlnoplochy ve vzduchu budou jakoby zpomalené v poměru právě optického indexu

$$n \simeq 1 + \frac{N_e e^2}{2\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (2.32)$$

kde  $N_e$  je počet elektronů v objemové jednotce,  $e, m$  náboj a hmota elektronu,  $\epsilon_0$  permitivita vakua,  $\omega_0$  je rezonanční frekvence částic vzduchu a  $\omega$  je kruhová frekvence záření. Naznačený způsob, jak pomocí základních pravidel skládání vln odhadnout  $n$ , je brilantně rozebrán ve Feynmanových přednáškách z fyziky.

Odhadnout hodnotu rezonanční frekvence  $\omega_0$  je nelehká úloha pro teoretickou fyziku. Proto se její určení provádí experimentálně. Zjistilo se, že u vzduchu v optickém oboru nemáme jen jednu rezonanční frekvenci  $\omega_0$  a pro jejich konkrétní hodnoty používáme různé empirické vztahy. Oblíbená je například Edlénova formule (Edlén [2]) do níž dosazujeme vlnovou délku v  $\mu\text{m}$  ( $\omega \sim 1/\lambda$ ):

$$n(\lambda) = 1 + 8\,342.13 \cdot 10^{-8} + \frac{2\,406\,030 \cdot 10^{-8}}{130 - 1/\lambda^2} + \frac{15\,997 \cdot 10^{-8}}{38.9 - 1/\lambda^2}. \quad (2.33)$$

Omezíme-li ve se vztahu (2.32) jen na jednu vlnovou délku, pak si můžeme všimnout, že refrakce je přímo úměrná koncentraci interagujících elektronů  $R = n - 1 \propto N_e$  a předpokládáme-li navíc, že se při změnách tlaku  $p$  a teploty  $T$  nemění chemické složení vzduchu, obdržíme vztah mezi refrakčním úhlem a hustotou vzduchu  $R = n - 1 \propto \rho(p, T)$ . Výsledky refrakčních měření obvykle přepočítáváme na jisté normální hodnoty tlaku  $p_0$  a teploty  $T_0$ . Mezi

indexem lomu za měřených  $n$  a normálních  $n_0$  podmínek platí

$$\frac{R'}{R} = \frac{n-1}{n_0-1} = \frac{\varrho}{\varrho_0}. \quad (2.34)$$

Uvážení stavové rovnice ideálního plynu  $p \sim \varrho T$  nakonec dostáváme

$$\frac{R'}{R} = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}. \quad (2.35)$$

Odtud snadno odhadneme význam číselných konstant v redukčních vztazích typu (2.23) a (2.30).

## 2.7 Refrakční optické jevy

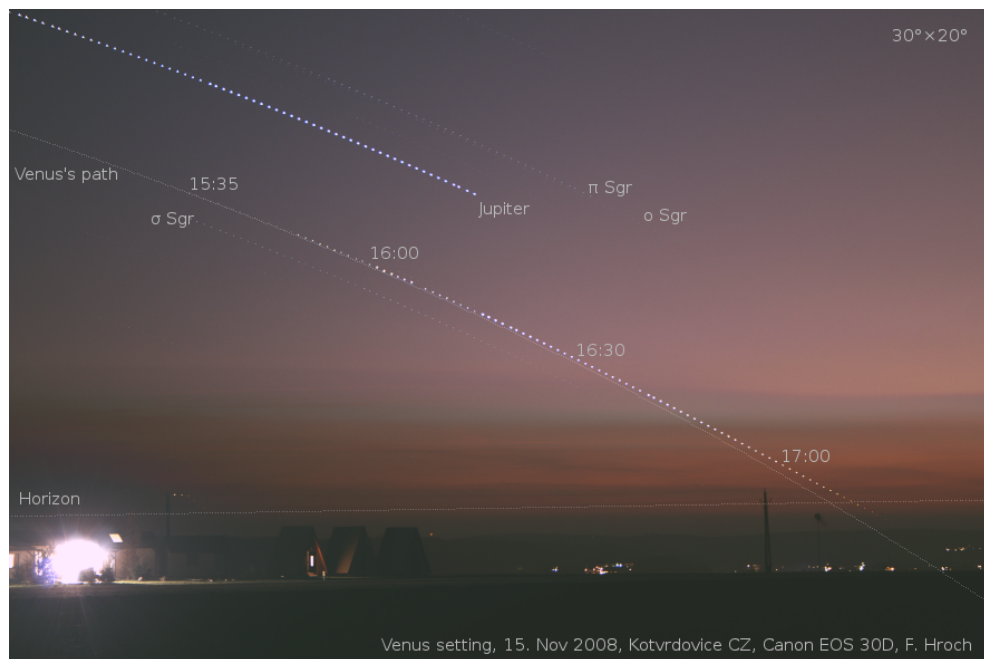
Studiem refrakce se zabývá aplikovaná atmosférická optika (popsaná například v Bednář [1]), zkoumající šíření světla v prostředí s proměnným indexem lomu (daným hustotou) v závislosti na stavu atmosféry. Jde o jeden ze základních efektů, se kterými se můžeme při astronomickém pozorování setkat. Proto bylo jejímu pochopení a interpretaci věnováno mnoho úsilí. Pozorování o refrakci opravoval již J. Kepler. G. D. Cassini přišel s dokonalejším modelem refrakce, kdy rozdělil atmosféru na několik vrstev s různým indexem lomu a dospěl ke stejnému tvaru (2.7) bez předpokladu homogenní atmosféry.

Díky refrakci můžeme pozorovat zploštělé Slunce a Měsíc při obzoru. Západ nebo východ nebeského tělesa se díky refrakci zpomaluje nebo urychluje. Například Slunce je v okamžiku, kdy se dotkne obzoru, už geometricky pod ním. Příklad vlivu refrakce na pozorovaný západ Venuše<sup>5</sup> je na obrázku 2.1.

Dráhy paprsků obrazů stejného tělesa v atmosféře se mohou lišit díky závislosti indexu lomu (refrakce) na vlnové délce. Tento jev můžeme pozorovat u objektů nízko nad obzorem, které z těchto důvodů mají jeden okraj namodralý a druhý načervenalý. V extrémním případě se mohou obrazy oddělit a můžeme být svědkem tzv. zeleného záblesku pozorovaného u zapadajícího Slunce.<sup>6</sup>

<sup>5</sup><http://monteboo.blogspot.com/2009/01/evening-with-venus.html>

<sup>6</sup>[http://mintaka.sdsu.edu/GF/explain/atmos\\_refr/astr\\_refr.html](http://mintaka.sdsu.edu/GF/explain/atmos_refr/astr_refr.html)



Obrázek 2.1: Západ Venuše 15.11.2008. Tento složený obrázek zachycuje stopu Venuše nad jihozápadním obzorem Kotvrdovického letiště. Řetízek perel vznikl díky krátkým expozicím pořizovaným v minutových intervalech. Můžeme si všimnout, že stopa Venuše je zvednutá od očekávané dráhy, což je projev atmosférické refrakce. Zároveň je vidět zčervenání a slábnutí světla Venuše v atmosféře.

## Kapitola 3

# Výšky měsíčních útvarů

---

Zadání: Z délky stínů určete výšky vybraných útvarů na Měsíci.

### 3.1 Měsíční souřadnice

Abychom mohli udávat polohy objektů na Měsíci, musíme zavést vhodné souřadnice. Nejen na Měsíci se používá obdoba zeměpisných souřadnic. Zavádí se selenografická délka a selenografická šířka jako délková a šířková souřadnice na povrchu Měsíce.

Selenografická délka  $\lambda$  nabývá hodnot 0 až 180 stupňů východní a západní délky, přičemž počítat se začíná ve středu měsíčního kotouče. Pochopitelně ze Země je vidět jen poloviční rozsah selenografických délek.

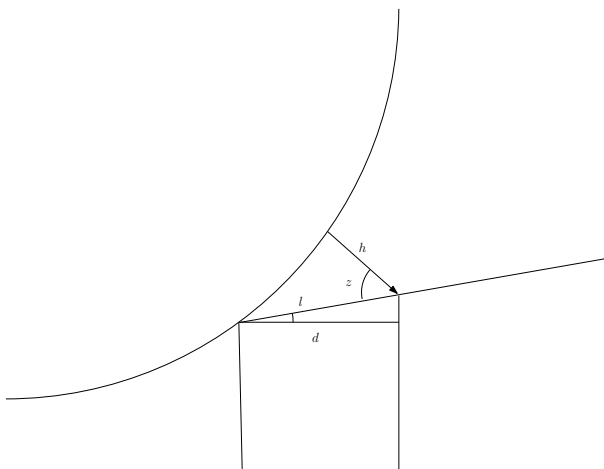
Selenografická šířka  $\phi$  nabývá hodnot 0 až 90 severní a jižní šířky.

Počátek selenografických souřadnic je spojen s určitým místem na povrchu (doslova kamenem — patníkem). Toto místo ale není vždy přesně ve středu pozorovaného kotouče v důsledku librací.

Při studiu Měsíce je běžně používá selenografická délka Slunce  $\lambda_{\odot}$ , což je délka bodu na Měsíci, jehož meridiánem (poledníkem) právě prochází Slunce. Dále pak délka terminátoru  $\lambda_T$  jež udává délku pro nějž vychází nebo zapadá Slunce. A nakonec ještě kolongitudo  $C = 90^{\circ} - \lambda_{\odot}$ .

### 3.2 Měsíční stíny

Délka stínu vybraného útvaru na Měsíční povrchu je, stejně jako na Zemi, určena výškou tohoto útvaru a polohou Slunce. Objekty mající Slunce v zenitu mají délku stínu minimální. Objekty pro něž Slunce vychází nebo zapadá pak vrhají dlouhé stíny.



Obrázek 3.1: Délka měsíčního stínu je daná výškou Slunce nad měsíčním obzorem a projekcí stínu do pohledu pozorovatele.

Z jednoduché geometrické úvahy, ilustrované na obrázku 3.1, snadno nahlédneme, že mezi délkou stínu  $l$ , měřenou od vrcholku k povrchu (tedy ne délkou stínu na povrchu) a výškou hory  $h$  je vztah

$$\frac{h}{l} = \cos(\lambda - \lambda_{\odot}). \quad (3.1)$$

Při pohledu ze Země ovšem máme možnost pozorovat jen průmět stínu  $l$  kolmý k našemu pohledu. Jeho měřenou délku označíme  $d$ . Naštěstí pro tento průmět platí:

$$\frac{d}{l} = \sin \lambda_{\odot}. \quad (3.2)$$

Kombinací obou vztahů tak dostáváme pro výpočet výšky útvarů na Měsíci vztah

$$h = d \frac{\cos(\lambda - \lambda_{\odot})}{\sin \lambda_{\odot}}. \quad (3.3)$$

Často se místo délky Slunce  $\lambda_{\odot}$  používá měřitelná veličina délka terminátoru  $\lambda_T$ . V takovém případě vztah (3.4) přechází na tvar

$$h = d \frac{\sin(\lambda - \lambda_T)}{\cos \lambda_T}. \quad (3.4)$$



## Kapitola 4

# Astrometrie na CCD snímku

---

Zadání: **Měření polohy objektu na CCD snímku**

Úkolem je změřit polohu neznámého objektu na CCD snímku:

- Určete rovníkové souřadnice zadaného objektu.
- Určete ohniskovou vzdálenost dalekohledu.

### 4.1 Úvodní úvahy

Jedním ze základních úkolů astronoma, zabývajícího se zpracováním CCD snímků, je proměřit polohy objektů na snímku a udat je ve sférických astronomických souřadnicích kterými jsou rektascenze a deklinace. V případě, že astronom objeví nový objekt je ve stejné situaci jako kapitán zámořské lodi která objevila nový ostrov. Musí udat jeho přesnou polohu.

Jednoduchý a názorný postup, jak určit na snímku polohu, je přičtení rozdílu souřadnic neznámého objektu k referenční hvězdě. Nejde ovšem o příliš přesnou metodu, která je navíc citlivá na instrumentální vlivy jako je zkreslení projekcí a také není statisticky optimální. Z tohoto důvodu už z dob klasické astronomie používáme metodu nejmenších čtverců.

### 4.2 Definice souřadnic

Při zpracování této úlohy se budeme setkávat s několika typy souřadnic mezi kterými budeme hledat transformace. Hned na začátku si proto uvedeme jejich definice i když možná nebude na první pohled jasné odkud se vzaly.

**Rovníkové souřadnice**  $\alpha, \delta$  jsou běžné sférické souřadnice rektascenze a deklinace objektů na nebeské sféře.

**Gnomonické souřadnice**  $u, v$  jsou souřadnice promítající Rovníkové souřadnice ze sféry na rovinu. Jsou závislé na třech parameterch.

**Souřadnice na CCD snímku**  $x, y$  jsou kartézské souřadnice udávající polohu objektů na CCD snímku. Měřeno v pixelech s počátkem v levém dolním rohu snímku.

**Centrované souřadnice na CCD snímku**  $x', y'$  jsou souřadnice na CCD snímku s počátkem posunutým do středu snímku.

**Naškálované gnomonické souřadnice**  $u', v'$  jsou gnomonické souřadnice vynásobené měřítkem.

Všechny tyto souřadnice obvykle indexujeme, neboť platí pro konkrétní hvězdu v různých reprezentacích.

### 4.3 Postup

- Ztotožněte známý CCD snímek s hvězdným atlasem.
- Vypočtete souřadnice středů hvězd  $x_i, y_i$  pro vhodně zvolené objekty.
- Pro tytéž hvězdy vypočtete gnomonickou transformaci souřadnic  $u_i, v_i$ .
- Vypočtete měřítko obrázku.
- Přepočtete souřadnice  $x_i, y_i$  na střed obrázku a  $u_i, v_i$  na stejné měřítko jako  $x_i, y_i$ .
- Minimalizací zjistíte hodnoty parametrů lineární transformace.
- Proveďte inverzi souřadnic a zjistíte souřadnice neznámého objektu.
- Vypočtete ohniskovou vzdálenost dalekohledu.

### 4.4 Výpočet přesné polohy hvězdy

Přirozenou metodou jak najít střed hvězdy je nalézt pixel s největší intenzitou a jeho poloha tak udává střed hvězdy. Je to jednoduchý způsob, ale poněkud nepřesný. Můžeme totiž určit střed hvězdy s větší přesností (na desetinu pixelu).

Princip spočívá v tom, že se neomezíme jen na jeden pixel a vezmeme i pixely v rozumně velkém okolí ze kterého vypočteme fotometrické těžiště hvězdy. To vypočteme z poloh těchto pixelů váženým aritmetickým průměrem

přičemž váhou bude intenzita hvězdy nad okolím. Takto určené středy hvězd jsou známé jako centroidy. Slovní popis je vyjádřen vztahem

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sum w_{kl} \cdot k}{\sum w_{kl}}, \\ y &= \frac{\sum w_{kl} \cdot l}{\sum w_{kl}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Součty provádíme například v okolí  $5 \times 5$  pixelů kolem největší intenzity (záleží na měřítku obrázku),  $k, l$  jsou indexy pixelů (celočíslné hodnoty souřadnic podél obou os obrázku) a váhy vyjádříme jako

$$w_{kl} = \begin{cases} \text{pro } I_{kl} - B \geq 0, \\ 0 & \text{pro } I_{kl} - B < 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

přičemž  $I_{kl}$  je měřená intenzita a  $B$  udává hodnotu pozadí v okolí hvězdy.

Na zjištění polohy hvězdy může být použito profilů objektů s tím, že se uvolní parametry pro střed hvězdy. To vede na komplikovanější řešení (jde již o nelineární soustavu rovnic), kterému se pro jednoduchost vyhýbáme.

## 4.5 Průmět sférických souřadnic do roviny

Polohy hvězd na snímku už známe. Můžeme též zjistit polohy hvězd z nějakého katalogu. To co neznáme je vztah mezi našimi souřadnicemi na snímku a katalogovými souřadnicemi. Otázkou je jak vztah mezi souřadnicemi popsat a jak se zobrazí sférické souřadnice na souřadnice v ploše snímku.

### Gnomonická projekce

Gnomonická projekce je průmět ze středu koule na tečnou rovinu. Pokud má střed promítání (tečný bod) souřadnice  $\alpha_0, \delta_0$  pak se sférické souřadnice  $\alpha, \delta$  libovolného objektu na polokouli přivrácené ke středu promítání zobrazí na rovinu do pravoúhlých souřadnic:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-\cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0)}{\sin \delta_0 \sin \delta + \cos \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0)}, \\ v &= \frac{\cos \delta_0 \sin \delta - \sin \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0)}{\sin \delta_0 \sin \delta + \cos \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tato transformace slouží na převod sférických souřadnic na pravoúhlé. Odvození transformace vychází ze sférické trigonometrie a používá především sférickou kosinovou větu. Odvození lze vyhledat v Smart.

Vztahy (4.3) přesně popisují transformaci avšak jsou poměrně složité na výpočet a výpočet inverzní transformace není zcela triviální. Proto se při praktickém výpočtu postupuje poněkud jiným způsobem.

Při odečítání pravoúhlých souřadnic z mapky nebo z CCD snímků nemáme totožný střed promítání s počátkem souřadnic na snímku a taktéž měřítko obvykle neodpovídá. Proto zavádíme normované souřadnice  $u, v$  z pravoúhlých prostřednictvím vztahů

$$\begin{aligned} u &= \frac{x - x_0}{c}, \\ v &= \frac{y - y_0}{c}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

pomocné veličiny

$$\begin{aligned} p &= \sin \delta, \\ q &= \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0), \\ r &= \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0), \\ z &= \sin \delta_0, \\ w &= \cos \delta_0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

a

$$s = zp + wr. \quad (4.6)$$

Veličina  $s$  (v podstatě jmenovatel v (4.3)) může sloužit jako kritérium jestli lze daný objekt zobrazit na ohraničenou plochu.

**Výpočet gnomonických souřadnic** ze sférických je snadný. Souřadnice vyhovují vztahům

$$\begin{aligned} u &= -\frac{q}{s}, \\ v &= \frac{wp - zr}{s}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

jež jsou, podle očekávání, totožné s (4.3).

**Výpočet sférických souřadnic** z gnomonických je vlastně inverzní transformací k (4.3). Vzdálenost objektu od středu nechť je

$$t = \sqrt{1 + u^2 + v^2}. \quad (4.8)$$

Potom pro pomocné veličiny platí

$$\begin{aligned} p &= \frac{z + wu}{t}, \\ q &= -\frac{u}{t}, \\ r &= \frac{w - zv}{t}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Souřadnice  $\alpha, \delta$  pak dostaneme jako

$$\begin{aligned} \delta &= \sin^{-1} p, \\ \alpha - \alpha_0 &= \tan^{-1} \frac{q}{r}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

při jejímž výpočtu můžeme opět s úspěchem použít funkce `atan2`.

**Aproximace pro malé zorné pole** Dá se ukázat, že v případě, že máme malé zorné pole (tj. rozdíl mezi polohami je jen pár stupňů) pak se dají tyto vzorce napsat jako:

$$\begin{aligned} u &\approx -(\alpha - \alpha_0) \cos \delta, \\ v &\approx \delta - \delta_0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Při redukování CCD snímků prakticky vždycky tato přesnost vyhovuje. Z tohoto tvaru můžeme ovšem na první pohled usuzovat na některé vlastnosti. Především střed snímku má souřadnice 0,0 který neodpovídá běžnému konvenčnímu středu souřadnic na snímku, kde je 0,0 v levém dolním rohu. Souřadnice nabývají kladných i záporných hodnot. Měřítko jsou také jiná. Rozměr CCD matice je obvykle od několika stovek do několika tisíc. Naproti tomu, po této transformaci budou jeden stupeň vzdálené objekty na souřadnici jen 0.6.

Výpočet sférických souřadnic z gnomonických je pak celkem triviální:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 - \frac{u}{\cos \delta_0}, \\ \delta &= \delta_0 + v \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tip. Zkuste si odvození této aproximace provést. Jaké se dopustíte chyby v případě že objekt je stupeň od středu?

## 4.6 Transformace mezi měřenými a gnomonickými polohami

Z vlastností gnomonické transformace můžeme usoudit, že obecně budou mít souřadnice hvězd na CCD snímcích jiné měřítko, budou posunuté a nebo dokonce pootočené (otočení je vesměs malé a vzniká nedokonalostmi uchycení CCD kamery na dalekohledu) oproti souřadnicím vypočteným pro katalogové hvězdy. Proto pro dobré přiblížení budeme muset použít ještě dvourozměrnou lineární transformaci. Ta udává vztah mezi vypočtenými souřadnicemi z gnomonické transformace  $u_i, v_i$  a měřenými  $x_i, y_i$  pro každou hvězdu očíslovanou pořadovým číslem  $i$ .

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_i \\ v'_i \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

neboli ve vektorové formě

$$\mathbf{r}_g = c(\mathbf{r}_0 + \mathbf{M}\mathbf{r}) \quad (4.14)$$

$c$  je měřítko.  $C, D$  je relativní posuv mezi snímky.  $A, B$  jsou parametry rotace,  $A = \cos \varphi$  a  $B = \sin \varphi$ , kde  $\varphi$  je úhel udávající vzájemné pootočení mezi obrázkem a gnomonickou projekcí (platí goniometrická identita  $A^2 + B^2 = 1$ ).

Tato transformace nepopisuje zrcadlové převrácení snímku, které je třeba odhalit jinak.

Měřítka je sice možné odhadnout během minimalizace, což ale vede na nelineární soustavu rovnic, které se snažíme vyhnout. Použijeme proto nezávislý postup, jehož výsledky jsou, pokud jde o přesnost výsledku, uspokojující avšak principiálně nekonzistentní. Ke zjištění měřítka se používá poměr mezi vzdáleností stejných objektů jednou na snímku jednou z vypočtených souřadnic. Pro vzdálenost dvou hvězd na snímcích platí Pythagorova věta jež dává

$$c^2 = \frac{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (4.15)$$

pro  $i, j = 1 \dots N, i > j$ , ze kterého snadno odhadneme měřítko. Z několika známých vzdáleností pak aritmetickým průměrem dostaneme odhad měřítka v jednotkách pixel na úhlovou vteřinu (případně naopak).

**Úkol:** Vypočítejte ohniskovou vzdálenost dalekohledu pokud víte, že CCD kamera má velikost pixelu .

Při výpočtu nezapomeňte uvážit „binning“. Při pořizování CCD snímků se často nepoužívá maximální rozlišení, ale sousední pixely se sdružují do skupin po 2x2 nebo 3x3 pixelech. Toto sdružování se označuje jako binning a vede například k větší účinnosti nebo redukci velikosti obrázku. Pro naše účely je důležité vědět, že binning zvětší velikost pixelů na  $18\mu\text{m}$  při rozlišení  $765 \times 510$  a  $27\mu\text{m}$  při rozlišení  $510 \times 340$ .

### Hledání parametrů transformace

Princip hledání parametrů transformace si můžeme snadno představit nebo i graficky vyjádřit. Na CCD obrázek na němž měříme souřadnice  $x, y$  stačí vykreslit souřadnice  $u, v$ . Přitom zjistíme, že souřadnice hvězd  $x_i, y_i$  jsou po obrázku rozloženy tak jak očekáváme a odpovídají středům hvězd. Souřadnice  $u_i, v_i$  se ale budou kupit kolem počátku souřadnic snímku, tedy v levém dolním rohu na několika málo pixelech. Důvodem této nepříjemnosti je špatné měřítko gnomonických souřadnic. Naštěstí je snadné ho odhadnout. Stačí si najít dvojici hvězd (nebo pro jistotu použít všechny dvojice) a pomocí poměrů vzdáleností hvězd v obou souřadnicích odhadnout měřítko. Gnomonické souřadnice vynásobené měřítkem označíme  $u', v'$  a vyneseme-li je do obrázku zjistíme, že zobrazují tytéž objekty avšak posunté o půl zorného pole čipu tak, že měřené souřadnice jsou jen v prvním kvadrantu ale naškálované gnomonické souřadnice se kupí kolem počátku. Proto zavádíme centrováné souřadnice na CCD snímku  $x', y'$  s počátkem posunutým ze středu snímku do počátku. S takto upravenými souřadnicemi už můžeme být docela spokojeni. V ideálním případě, pokud si odpovídají identifikace hvězd by se měly všechny objekty navzájem skoro překrývat nebo alespoň ležet ve své

blízkosti. Malé drobné odchylky považujeme za statistické chyby a proto se snažíme navrhnout transformaci tak aby jsme minimalizovali vzdálenosti mezi souřadnicemi  $u', v'$  a  $x', y'$ . Pravděpodobně nejlepší způsob jak to udělat je metoda nejmenších čtverců.

Na odhad parametrů transformace použijeme metodu nejmenších čtverců. Ke zjištění transformace mezi obrázky pak pro  $N$  hvězd napíšeme součet nejmenších čtverců ve tvaru:

$$S = \sum_{i=1}^N [ (C + Au_i + Bv_i - x'_i)^2 + (D - Bu_i + Av_i - y'_i)^2 ]. \quad (4.16)$$

Minimalizace znamená hledání minima funkce  $S(A, B, C, D)$  v závislosti na proměnných  $A, B, C, D$ . Minimum se nachází v bodě pro něž platí podmínky

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0, \frac{\partial S}{\partial B} = 0, \frac{\partial S}{\partial C} = 0, \frac{\partial S}{\partial D} = 0. \quad (4.17)$$

V našem případě vedou tyto podmínky k soustavě lineárních rovnic (spodní znaménko pro zrcadlové převrácení):

$$\begin{pmatrix} N, & 0, & S_x, & S_y \\ 0, & N, & \pm S_y, & \mp S_x \\ S_x, & \pm S_y, & S_{xy}, & 0 \\ S_y, & \mp S_x, & 0, & S_{xy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \\ D \\ A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_u \\ S_v \\ S_{ux} \\ S_{uy} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

ve kterých jsme použili substituce

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^N u'_i, \\ S_y &= \sum_{i=1}^N v'_i, \\ S_u &= \sum_{i=1}^N x'_i, \\ S_v &= \sum_{i=1}^N y'_i, \\ S_{xy} &= \sum_{i=1}^N (u_i'^2 + v_i'^2), \\ S_{ux} &= \sum_{i=1}^N (u'_i x'_i \pm v'_i y'_i), \\ S_{uy} &= \sum_{i=1}^N (u'_i y'_i \mp v'_i x'_i) \end{aligned} \quad (4.19)$$

pro obecnou transformaci mezi snímky. Tato transformace popisuje posuv, rotaci a zrcadlení mezi obrázky, ale měřítko je stejné podél osy  $x$  i  $y$  obrázku.

Předpokladem použití gnomonické transformace je totožnost středů tedy  $C, D \rightarrow 0$ . Pokud tedy řešením (4.16) dostaneme tyto dva parametry jako

hodně odlišné od nuly (ve smyslu statistické přesnosti), znamená to, že máme posunutý střed promítání  $\alpha_0, \delta_0$  (za předpokladu, že známe střed snímku v pixelech). V takovém případě nejprve zjistíme posuvy v kartézské soustavě paralelní se sférickými souřadnicemi

$$\begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, & -B \\ B, & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

a provedeme korekce středu podle vztahů z inverzní projekce

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_0 + \frac{C'}{c \cos \delta_0}, \\ \delta_0 &= \delta_0 - \frac{D'}{c}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

a provedeme celý výpočet znovu. Tento postup musíme opakovat tak dlouho, dokud jsou oba parametry  $|C|, |D| > 0$  (nebo alespoň  $|C|, |D|$  není dostatečně malé oproti chybám poloh hvězd).

## 4.7 Výpočet polohy objektu na snímku

Až do této chvíle jsme se snažili o zjištění pravoúhlých souřadnic  $x, y$  objektu u něhož známe sférické (například rovníkové) souřadnice. V praxi nám ale obvykle jde o opačný případ, kdy z napozorovaného snímku známe souřadnice  $x, y$  a potřebujeme určit  $\alpha, \delta$ . Potřebujeme tedy provést opačný postup, než jsme doposud dělali, tedy potřebujeme získat inverzní transformaci.

### Program pro výpočet transformace

Instruktivní příklad výpočtu transformace v programovacím jazyku. Následující program vypočte transformaci mezi  $\alpha, \delta$  a  $x, y$  na snímku. K určení polohy objektu je nutné použít navíc i zpětnou transformaci.

Listing 4.1: astrometrie.py

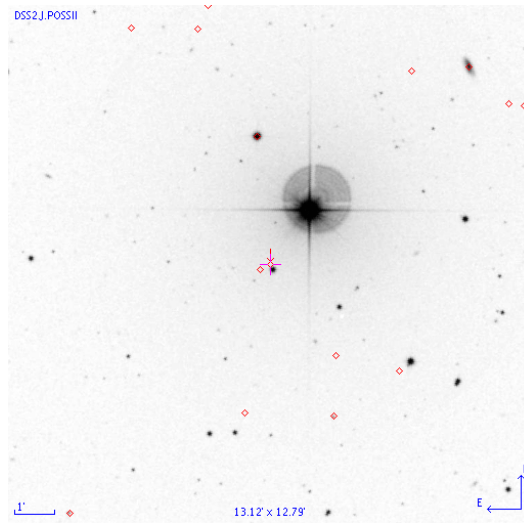
```

1  #!/usr/bin/env python
2
3  from numpy import *
4
5  # data jsou čteny ze souboru se strukturou:
6  # a d x y
7  # ..
8  # a, d je rektascence a deklinace ve stupních
9  # x, y jsou kartézské souřadnice hvězd
10
11 file = loadtxt("astrometrie.dat")
12
13 a = file[:, 0]
14 d = file[:, 1]
```



```
15 xx = file[:,2]
16 yy = file[:,3]
17
18 # pocet hvezd
19 n = size(a)
20
21 # definice stredy snimku
22 a0 = mean(a)
23 d0 = mean(d)
24
25 # stred CCD snimku, upravit dle skutecneho
26 # rozmeru snimku
27 x0 = 765/2
28 y0 = 510/2
29
30 # radian
31 rad = 180/pi
32
33 print("#_X0_Y0_A=cos_B=sin_")
34
35 for j in range(1,10):
36     # range (prvni cislo, kolikrat)
37
38     # prepocet na gnomonicke souradnice
39     u = - (a - a0)*cos(d0/rad)
40     v = d - d0
41
42     # prepocet na stred snimku
43     x = xx - x0
44     y = yy - y0
45
46     # meritko
47     cc = empty(n-2)
48     for i in range(1,n-2):
49         # i = 1 ... n-2
50
51         # vzdalenosti hvezd
52         d1 = sqrt((x[i+1] - x[i])**2 + (y[i+1] - y[i])**2)
53         d2 = sqrt((u[i+1] - u[i])**2 + (v[i+1] - v[i])**2)
54         cc[i] = d1/d2
55
56         # v pripade hledani spatne identifikace odkomentovat:
57         # print(i,cc[i])
58
59         # meritko [pixely na stupen]
60         c = mean(cc[1:n-2])
61         # stat. chyba meritka
62         dc = std(cc[1:n-2])/sqrt(n-3)
63
64         # prepocet u,v na stejne meritko
65         u = c*u
66         v = c*v
67
68         # vypocty sum v matici nejmensich ctvercu
```





Obrázek 4.1: Hvězdné pole okolí hvězdy Groombridge 1830 (nejjasnější objekt na snímku).

$\alpha = 178.23256802^\circ$ ,  $\delta = 37.73280827^\circ$  (J1991.25) (všechna platná místa jsou relevantní!). Na obrázku 4.1 je zachycena její poloha z padesátých let minulého století, kdy vznikl Palomarský atlas.



## Kapitola 5

# Fotometrie na CCD snímku

Měření záření je velmi specifická fyzikální oblast, už jen tím, že se světlo samo o sobě nedá zastavit či vzít do ruky. Z naší každodenní zkušenosti víme, že okolní zdroje světla svítí rozdílně a naším cílem je uchopit tuto zkušenost kvantitativně. Naštěstí nám výdobytky moderní civilizace dávají do rukou zařízení, které umožňují snadné a rychlé měření světla. Na vyhodnocení takovýchto měření se zaměříme.

---

**Zadání: Měření toku záření na CCD snímku**

Úkolem je změřit tok záření a fotonový tok objektu na CCD snímku:

- Proveďte fotometrickou kalibraci CCD snímku.
- Určete tok záření a fotonový tok neznámého objektu.

### 5.1 Fyzikální veličiny popisující záření

Naši předchůdci zjistili, že světlo se přenáší v prostoru elektromagnetickým vlněním a že energie jednotlivých vln je kvantovaná. Ctíme-li zákon zachování energie, můžeme proces vyzáření, přenosu a detekce světla popsat takto: ve zdroji světla probíhá nějaký proces při kterém jsou látkou vyzařovány fotony. Jde o vlny s přesně danou energií jež se samostatně šíří prostorem. Tyto vlny, posléze, opět po přesně daném množství energie absorbujeme naším detektorem.

Pokud se zaměříme jen na přenos a detekci světla tak, víme [3], že energie nesená elektromagnetickou vlnou jež projde za časovou jednotku jednotkovou plochou, označovaná jako intenzita  $I$ , je časový průměr elektrické intenzity  $E$  přes několik period ( $c$  je rychlost světla,  $\epsilon_0$  permitivita vakua) měřená v jednotkách  $[\text{W} \cdot \text{m}^{-2}]$

$$I = \epsilon_0 c \langle E \cdot E \rangle. \quad (5.1)$$

### Světelná intenzita a tok

Vlnoplochy bodového zdroje mají tvar soustředných koulí. V jejich středu se nachází zdroj záření. Pokud platí zákon zachování energie, pak energie vyzařovaná ze středu za jednotku času, musí odpovídat energii jež projde povrchem koule za stejný časový interval. Definujeme-li zářivý výkon  $L$  jako

$$L = \frac{dE}{dt} \quad (5.2)$$

pak energie procházející povrchem koule o poloměru  $d$  bude opět  $L$ . Vztáhneme-li ji na jednotku plochy

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (5.3)$$

definujeme tím konvenčně používanou veličinu – světelný tok  $F$ . Pokud jsme velmi daleko od zdroje (vidíme hvězdy jako body), pak je zakřivení vlnoploch neměřitelné a kulové vlny přechází do rovinných vln, neboli tok se asymptoticky blíží intenzitě  $F \asymp I$ , tedy měřená intenzita odpovídá toku.<sup>1</sup> Tuto aproximaci budeme používat v celé této kapitole.

Popsané myšlenky si pro lepší přiblížení ukážeme na konkrétním příkladě. V něm bude hlavním hrdinou hvězda Vega ( $\alpha$  Lyr). Volba není nikterak náhodná, neboť v minulosti byla vybírána jako základní etalon pro hvězdnou kalibraci. Vega má zářivý výkon

$$L = 40L_{\odot} \approx 10^{27} \text{ W}.$$

Ve vzdálenosti jeden metr od takto zářivého zdroje dostaneme tok  $F = L/4\pi \approx 10^{26} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  (Vega je určitě větší, ale užíváme aproximaci pro bodový zdroj) a ve vzdálenosti  $d = 8 \text{ pc} \approx 10^{17} \text{ m}$ , ve které se nachází Země, bude tok dle (5.3)

$$F \approx 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

### Tok záření ve filtru

Málokterý detektor je schopen absorbovat všechnu energii jež na něj dopadá. Obvykle je citlivost použitých přístrojů omezena na úzkou oblast spektra, jak můžeme vidět, doslova, na vlastní oči. V obecném případě je dána samotným detektorem, filtrem, propustností atmosféry, kvalitou optické soustavy a ostatními faktory. Abychom se povznesli nad technické detaily, shrneme vliv všech těchto efektů pod jeden logický celek, jež budeme označovat symbolickým názvem filtr. Jde o optický prvek, který je charakterisován svou

<sup>1</sup>Tato podmínka platí pouze pro bodové zdroje. V případě plošného zdroje dostaneme tok energie přes plochu jako integrál z celého prostorového úhlu osvětlujícího danou plochu  $F = \int I d\Omega$ . Fotometrie plošných objektů je náplní kapitoly 12.

propusností  $t(\lambda)$  závislou na vlnové délce a definovanou poměrem prošlého  $F_{\text{out}}$  a dopadajícího  $F_{\text{in}}$  záření

$$t(\lambda) = \frac{I_{\text{out}}(\lambda)}{I_{\text{in}}(\lambda)}, \quad 0 \leq t(\lambda) \leq 1. \quad (5.4)$$

Jako typický filtr si vybereme  $t_V(\lambda)$  filtr patřící do tzv. Johnsonova fotometrického systému a má označení  $V$ . Spektrální citlivost  $V$  zhruba odpovídá citlivosti lidského oka (visual).

Filtry jsou obecně charakterizovány dvěma parametry: efektivní vlnovou délkou (představující těžiště)

$$\lambda_0 = \frac{1}{T_V} \int_0^\infty t_V(\lambda) \lambda \, d\lambda \quad (5.5)$$

a efektivní šířkou filtru (zastupující průměrnou vzdálenost od centra)

$$(\Delta\lambda)^2 = \frac{1}{T_V} \int_0^\infty t_V(\lambda) (\lambda - \lambda_0)^2 \, d\lambda, \quad (5.6)$$

kde užíváme normovací podmínku

$$\int_0^\infty t_V(\lambda) \, d\lambda = T_V. \quad (5.7)$$

Zavádíme je proto, abychom nemuseli pracovat s celým průběhem funkce  $t_V(\lambda)$  (funkci nahradíme dvěma čísly). Jejich pravý význam bude patrný níže. Pro Johnsonův  $V$  filtr mají tyto dva parametry hodnoty přibližně  $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$  a  $\Delta\lambda = 70 \text{ nm}$ .

Kvůli možnosti integrace přes nekonečné intervaly, což je ekvivalentní omezenému množství energie, které máme k dispozici, musí být plocha pod filtrem  $T_V$  konečná

$$\int_0^\infty t_V(\lambda) \, d\lambda < \infty.$$

V praxi je tato podmínka vždycky splněná, ale při matematických hrátkách s filtry musíme tuto podmínku neustále ověřovat. Totéž platí i pro intenzitu.

Záření jež projde filtrem  $t_V(\lambda)$  od určitého zdroje se spektrem normovaným na jednotku vlnové délky (proto ten index  $\lambda$ )  $F_\lambda(\lambda)$  je dán

$$F_V = \int_0^\infty F_\lambda(\lambda) t_V(\lambda) \, d\lambda, \quad (5.8)$$

a funkce  $t_V(\lambda)$  má význam pravděpodobnosti s jakou záření o vlnové délce  $\lambda$  projde přes daný filtr. Podobně také platí, že tok od daného zdroje v intervalu od  $\lambda_0$  do  $\lambda_0 + 1 \text{ nm}$  bude

$$F_\lambda(\lambda_0) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + 1 \text{ nm}} F_\lambda(\lambda) \, d\lambda.$$

Pro lepší představu se zahleďme se na obrázek 5.1 se spektrem Vegy. Černou barvou je zde vykreslena hustota<sup>2</sup> světelného toku  $F_\lambda(\lambda)$ . Pro ještě lepší představu použijeme obrázek 5.2 na kterém je vykreslena funkce  $F_\lambda \cdot t_V(\lambda)$  ukazující totéž spektrum po průchodu naší filtrem. Integrál (5.8) vlastně počítá plochu pod touto křivkou.

### Fotonový tok

Spektrum může být vyjádřeno jako hustota světelného toku (s fyzikálním významem energie). Další typ reprezentace spektra nám nabízí fotony. Energie zdroje se nevyzařuje spojitě, nýbrž po násobcích odpovídajících energii jednoho fotonu. Stejně tak se energie detektuje (absorbuje) opět po fotonech. Energie jednoho fotonu je

$$\epsilon = \frac{hc}{\lambda} \quad (5.9)$$

a závisí tedy na jeho vlnové délce  $\lambda$ . Fotony s kratší vlnovou délkou mají větší energii. Znamená to, že naše přístroje, detekující fotony, budou místo hustoty toku  $F_\lambda$  ve skutečnosti měřit počet fotonů  $\Phi_\lambda$  v daném intervalu vlnových délek za jednotku času a dopadající na jednotkovou plochu. Jejich vzájemný vztah je definovaný pomocí skutečnosti, že energie nesená fotony a obecný tok energie musí dát v daném intervalu vlnových délek  $\delta\lambda$  stejnou intensitu (energii)

$$F_\lambda(\lambda_0) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\delta\lambda} F_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\delta\lambda} \Phi_\lambda(\lambda) \frac{hc}{\lambda} d\lambda,$$

což se obvykle, poněkud nepřesně, díky konečné délce intervalu, zkracuje na prosté

$$F_\lambda = \Phi_\lambda \frac{hc}{\lambda}. \quad (5.10)$$

Vztah (5.10) nám umožňuje definovat fotoný tok jako podíl energie  $F_\lambda$  v daném intervalu vlnových délek k energii jednoho kvanta  $hc/\lambda$

$$\Phi_\lambda = \frac{F_\lambda}{hc/\lambda} = F_\lambda \cdot \frac{\lambda}{hc}. \quad (5.11)$$

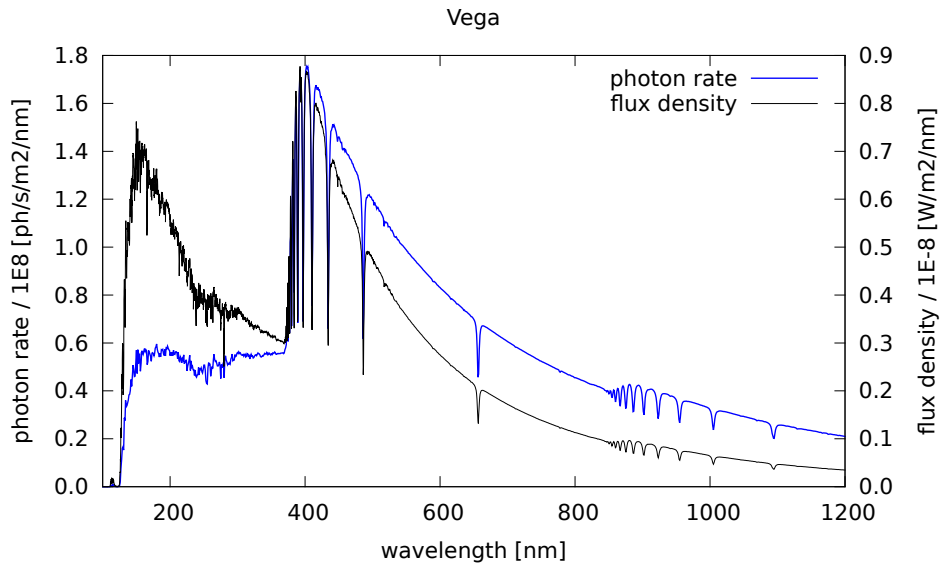
Měříme-li přes filtr, musí rovnost toků, jakožto důsledek zákona zachování energie, také platit. Integrace v tomto případě dává

$$F_V = \int_0^\infty F_\lambda t_V(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \Phi_\lambda \frac{hc}{\lambda} t_V(\lambda) d\lambda. \quad (5.12)$$

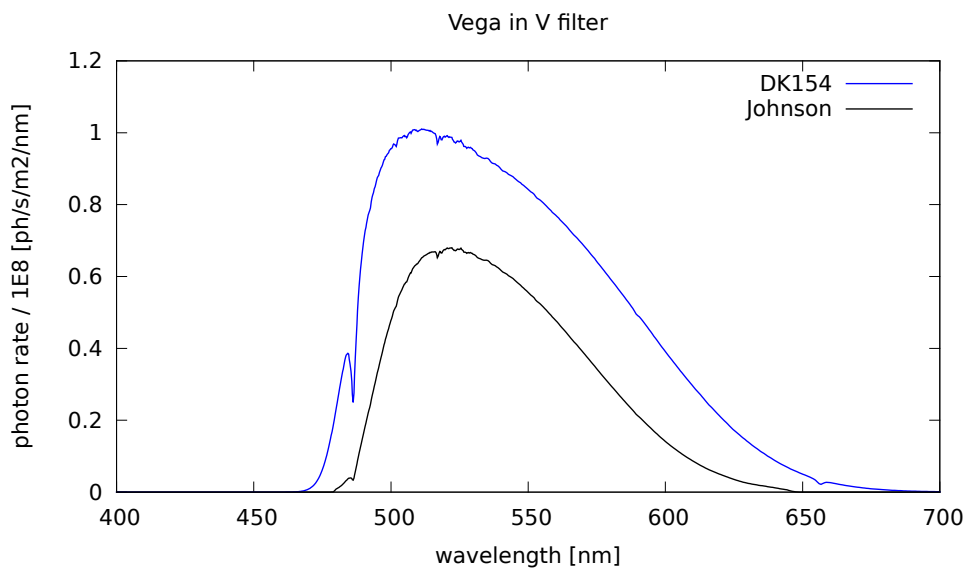
Takto se nám dostávají do rukou nástroje pro popis a měření světla. Naše oči v podstatě fungují jako detektory fotonů prostřednictvím fotochemické

<sup>2</sup>Zde přebíráme obvyklý žargon, kdy veličinu normovanou na určitou jednotku nazýváme hustotou a její integral pak veličinou bez přívlastku hustota. Toto názvosloví je odvozeno stejně jako v případě hustoty hmoty  $\rho$  a hmoty samotné:  $m = \int \rho dV$ .

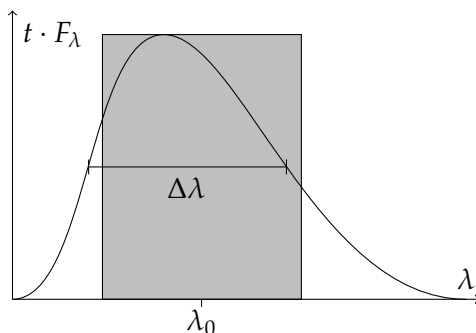




Obrázek 5.1: Spektrum Vega v tocích energie i fotonů



Obrázek 5.2: Spektrum Vega přes V-filtr Johnsonova systému



Obrázek 5.3: Approximace plochy filtru obdelníkem

reakce na naší sítnici, které pak mozek vyhodnocuje a my vnímáme jasné nebo slabé světelné zdroje.

Analogické úvahy bychom mohli vést pro další detektory jako CCD, fotonásobič či fotografii. Tyto, fotonové detektory, tedy neměří přímo intensitu, avšak známe-li vlnovou délku měřeného záření, lze ji aspoň v principu odhadnout. Obecně se výsledky měření v astronomii udávají v tocích (energie) či intenzitách neboť jde o obecnější veličinu.

Klíčový problém fotometrie užívající fotonových detektorů spočívá v tom, že měříme počet fotonů ve filtru  $\Phi_V$ , ale jako veličinu vůči níž kalibrujeme je tok  $F_V$ . A přitom se snažíme určit neznámé  $t_V$ . Vztah mezi těmito veličinami je daný integrálem (5.12) a není vůbec přímočarý. Naštěstí existuje relativně jednoduchá aproximace, umožňující vzájemné převody. Na obrázku 5.2 je vykreslen součin  $t_V(\lambda) \cdot F_\lambda$  ukazující spektrum záření procházející naší filtrem. Integrál (5.8) vlastně počítá plochu pod touto křivkou. Předpokládáme-li, že filtr není moc široký a má tvar „kopečku“, pak se můžeme pokusit aproximovat plochu pod křivkou pomocí obdelníku se středem v efektivní vlnové délce  $\lambda_0$  jak je naznačeno na obrázku 5.3. Šířka obdelníku je přímo  $\Delta\lambda$  a jeho výška pak součin v efektivním centru  $t_V(\lambda_0) \cdot F_\lambda(\lambda_0)$ . Tok filtrem  $V$  tak můžeme přibližně aproximovat jako

$$F_V \approx F_\lambda \Delta\lambda(\lambda_0) \cdot t_V(\lambda_0) \approx t_V(\lambda_0) \Phi_\lambda(\lambda_0) \frac{hc}{\lambda_0} \Delta\lambda. \quad (5.13)$$

S pomocí této – obdelníkové aproximace – můžeme snadno odhadnout tok filtrem  $V$  od Vegy pro ideální případ  $t_V(\lambda) = 1$ . Ze spektra na obrázku 5.1 odhadneme pro  $F_\lambda(550) = 5 \cdot 10^{-9} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1}$ . Tok filtrem tedy bude  $F_V \leq F_\lambda(\lambda_0) \Delta\lambda \approx 3.5 \cdot 10^{-7} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Energie jednoho fotonu je  $\epsilon_V = hc/\lambda_0 = 3.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  a tedy by mělo od Vegy dopadat  $\Phi = F_V/\epsilon_V \approx 10^{12} \text{ ph} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ . V tabulce 5.1 najdeme vypočtené toky a počty fotonů pro různé světelné zdroje.

magnituda V-filtr	světelný tok [W/m <sup>2</sup> ]	fotonový tok [ph/s/m <sup>2</sup> ]	příklad
0	10 <sup>-9</sup>	10 <sup>10</sup>	Vega
5	10 <sup>-11</sup>	10 <sup>8</sup>	eye faint
10	10 <sup>-13</sup>	10 <sup>6</sup>	Perkuv 2m
15	10 <sup>-15</sup>	10 <sup>4</sup>	CCD na dalekohledu
20	10 <sup>-17</sup>	100	limit na snímku
25	10 <sup>-19</sup>	0.9	celonoční expozice
30	10 <sup>-21</sup>	10 <sup>-2</sup>	nespatřitelný limit

Tabulka 5.1: Toky, fotony a magnitudy

### Praktické užití

Shrneme-li a zobecníme-li naše úvahy, pak energie, která na náš detektor dopadne v daném filtru od hvězdy s magnitudou  $m$  bude, známe-li referenční tok  $F_\lambda^0$  (odvozený původně z Vegy),

$$F_V = F_\lambda^0(\lambda_0)\Delta\lambda \cdot 10^{-m/2.5}. \quad (5.14)$$

Očekávaný počet fotonů, které dopadnou na náš detektor s plochou  $A$  za časový interval  $T$  bude  $N = AT\Phi$ ,  $\Phi = F_V/(hc/\lambda)$ :

$$N_V = A \cdot T \cdot F_\lambda^0(\lambda_0)\Delta\lambda \cdot \frac{\lambda_0}{hc} \cdot 10^{-m/2.5}. \quad (5.15)$$

ovšem pozorujeme-li přes „filtr“ (v reálných podmínkách), pak bude počet skutečně detekovaných fotonů  $C$  menší

$$C_V = t(\lambda_0)N_V. \quad (5.16)$$

Fotometrická kalibrace spočívá v tom, že určujeme koeficient  $t(\lambda_0)$  složený z různých příspěvků. V dalších částech se seznámíme s metodami určení  $C$  z CCD snímků.

## 5.2 CCD snímky

Obrazový detektor CCD (charge-coupled device) je zařízení schopné zachycovat dopadající záření po delší časový interval a převést jej na elektrický a posléze digitální signál. Pro běžného uživatele CCD kamery je důležité znát ovládání kamery prostřednictvím řídicího software (obvykle dodávaného výrobcem) a způsob uložení výsledných snímků. Práce s CCD kamerou je analogická práci s běžným digitálním fotoaparátem. CCD kamery ovšem nemají ovládací prvky umístěny na těle, ale vždy se ovládají vzdáleně z

počítače (lepší digitální fotoaparáty ovšem taky) a svá data neukládají na paměťovou kartu, ale přímo na disk počítače. Obrázky fotoaparáty ukládají v RAW formátu (nebo volitelně v JPEG, TIFF, atd) kdežto CCD kamery ve FITS formátu (Dodatek B).

CCD kamera je sestavena takovým způsobem, že je schopna přeměnit jistou část dopadajících fotonů na elektrony a počet těchto elektronů změřit. Jde o tak extrémě citlivé zařízení, že je schopné detekovat prakticky jednotlivé fotony.

### 5.3 Korekce CCD snímků

Surový CCD snímek je vizuálně neatraktivní a především ovlivněný elektronikou kamery, tepelným šumem a rozdílnou citlivostí na světlo. Tyto faktory mají rozhodující vliv i na fotometrickou kvalitu snímku: Oba tyto rušivé vlivy můžeme odstranit pomocí korekčních snímků, které pořizujeme v průběhu pozorování.

#### Bias, Dark frame

Temný snímek (dark frame) se snaží podchytit vliv tepelného šumu na jednotlivé pixely. Kromě dopadajícího záření totiž signál v detektoru vzniká i tepelným šumem. Běžné kamery se sice chladí tak aby se tento vliv omezil, nicméně odstranit jej nijak nelze. S tepelným šumem také souvisí posun nulového bodu intenzit snímku. Většina kamer totiž při dopadu jednoho, dvou nebo tří částic nenaměří hodnoty řádu jednotek nýbž například sto plus tyto jednotky. Výrobci se tak snaží omezit vliv náhodných fluktuací, které by mohli vést k záporným hodnotám signálu.

Z těchto důvodů pořizujeme temný snímek D bez světla (se závěrkou nebo se zakrytým dalekohledem) o stejné expoziční době jako snímky, jež chceme korigovat.

Dále můžeme pořídit bias B což je temný snímek s nekonečně krátkou expoziční dobou (tedy nejkratší expozicí kterou technicky zvládne naše kamera). Bias neukazuje jen jednu hodnotu, ale jakési přednastavení citlivosti jednotlivých pixelů. Proto, pokud chladíme kameru nebo používáme krátké expozice stačí korigovat jen pomocí biasu.

Samotná korekce na bias a dark frame je prosté odečtení těchto snímků od vědecké expozice S a pak odečtení navzájem

$$S_B = S - B, \quad (5.17)$$

$$D_B = D - B, \quad (5.18)$$

$$S_{DB} = S_B - D_B. \quad (5.19)$$

Pokud máme k dispozici stejně dlouhý dark frame jako vědecký snímek, můžeme celou operaci zjednodušit na formu

$$S_{DB} = S - D. \quad (5.20)$$

jelikož bias snímky se takto odečtou navzájem. Podmínkou je ovšem stejná expoziční doba, jak již bylo řečeno.

Ve všech těchto vzorcích znamená operace označená znaménkem mínus odčítání prvek po prvku. Tedy v případě poslední rovnice jde o operaci

$$(S_{ij})_{DB} = S_{ij} - D_{ij} \quad \text{pro } i, j = 1, \dots, N, M. \quad (5.21)$$

V praxi se používají dva základní způsoby korekcí. Pokud máme možnost dělat v průběhu noci průběžně dark framy, je nejlepší jich udělat minimálně deset a nakonec z nich udělat aritmetický průměr. Statistický šum výsledného průměrného dark framu klesá s druhou odmocninou z počtu snímků a například pro devět snímků je asi třetinový.

Alternativně je možné udělat větší množství biasů a jeden velmi dlouhý temný snímek. Od něj pak odečteme bias a následně jej vydělíme takovým číslem abychom dostali expoziční dobu totožnou s vědeckým snímkem. Tento druhý způsob je vhodný pokud máme snímky s rozdílnou expoziční dobou nebo jeden extrémně dlouhý a pořízení dark frame by trvalo příliš dlouho (u spekter).

### Flat field

Flat field snímek se snaží podchytit vliv různé citlivosti pixelů CCD detektoru a vinětae v zorém poli. Jak název napovídá jde o obraz rovnoměrně světlé plochy. Ta se jeví našemu přístroji jako nějaký komplikovaný obraz o kterého jsou tmavší části ve stejných místech jako na vědeckém snímkem. Z toho důvodu se pořízený flat field  $F$  opraví o darkframe a bias a zjistí se jeho průměrná hodnota

$$\langle F \rangle = \begin{cases} \text{med}(F), \\ \text{nebo} \\ \text{mean}(F), \end{cases} \quad (5.22)$$

kterou se snímek normuje na hodnoty kolem jedné. Funkce med je medián a funkce mean aritmetický průměr z hodnot pixelů.

$$F_{DB} = F - D_B. \quad (5.23)$$

Označme normovaný snímek jako

$$F_{NDB} = F_{DB} / \langle F_{DB} \rangle \quad (5.24)$$

pak korekce vědeckého snímku je

$$S_{FDB} = S_{DB} / F_{NDB} \quad (5.25)$$

(aritmetická operace dělení snímků je opět definovaná jako dělení prvek po prvku). Normování nemá vliv na kvalitu snímku, ale posune úroveň snímku tak, že výsledný snímek má průměrnou úroveň stejnou jako měl snímek před opravou o flat field a nezmění se tak jeho fotometrický význam.

Získat rovnoměrnou plochu nemusí být snadné. V praxi se používá vhodně nasvícený bílý papír, který je ale nepoužitelný u velkých dalekohledů. V takovém případě se dělá snímek za soumraku nebo za úsvitu kdy je ještě obloha dostatečně tmavá a není modrá a kdy už není vidět mnoho hvězd. Udělat dobrý flat field ale i tak vyžaduje zkušenosti, umění a štěstí.

## 5.4 Aperturní fotometrie

Aperturní fotometrie je založena na sečtení veškerého signálu od hvězdy ve zvolené clonce — apertuře. Malou komplikací je především vymezení velikosti apertury a odečtení všech rušivých dodatečných zdrojů světla jakou je především úroveň oblohy.

Vybereme si tedy vhodný objekt, který má maximum na souřadnicích  $i_0, j_0$  s hodnotou  $S_{\max}$ . Dále se rozhodneme, že nás zajímá tok od hvězdy z clonky o poloměru  $A$ .

### Určení signálu ve clonce

Ve zvolené clonce spočteme veškerý dostupný signál.

$$S_A = \sum_{i,j} S_{ij} \quad (5.26)$$

kde sumaci provádíme v kolech bodu  $i_0, j_0$  tak, že platí podmínka

$$\sqrt{(i - i_0)^2 + (j - j_0)^2} < A, \quad (5.27)$$

pro  $i = i_0 - A \dots i_0 + A, j = j_0 - A \dots j_0 + A$ . Počet pixelů patřících do daného kruhového okolí označíme  $M_A$ .

### Odhad úrovně pozadí

V rozumné vzdálenosti od měřeného objektu si zvolíme větší množství pixelů, které viditelně nepatří k žádné hvězdě a na základě jejich průměru určíme pozadí jež označíme jako  $B_A$ .

$$B_A = \frac{1}{M} \sum_{i,j} I_{ij}, \quad (5.28)$$

kde  $M$  je počet pixelů ze kterých se určovalo pozadí.

### Tok záření aperturou

Tok záření zachycený naším detektorem nakonec dostaneme jako

$$F_A = S_A - M_A B_A \quad (5.29)$$

## 5.5 Profilová fotometrie

Profilová fotometrie se snaží vystihnout tvar obrazu bodového zdroje na snímku (PSF – point spread function) a na základě jeho znalosti odhadnout celkový tok energie záření. Konstrukce PSF je obecně velmi obtížná úloha, proto pro začátek použijeme nejjednodušší variantu, kterou je aproximace profilů hvězd Gaussovou funkcí

$$G(i, j | G_0, B_P) = G_0 e^{-\frac{(i-x_0)^2 + (j-y_0)^2}{2\sigma^2}} + B_P. \quad (5.30)$$

V takto označené funkci znamenají  $i, j$  obvyklé souřadnice na snímku,  $G_0, B_P$  parametry, které hledáme a  $x_0, y_0, \sigma$  konstantní parametry, které musíme znát předem. Na určení  $x_0, y_0$  udávající těžiště hvězdy použijeme metody z astrometrie (4.1) a na odhad  $\sigma$  pak druhé momenty rozložení signálu na CCD, tedy

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{\sum w_{ij}(i-x_0)^2}{\sum w_{ij}}, \\ \sigma_y^2 &= \frac{\sum w_{ij}(j-y_0)^2}{\sum w_{ij}}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

(kde  $w_{ij}$  bylo definováno (4.2) a ze kterých počítáme průměr

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (5.32)$$

Se znalostí těchto parametrů můžeme odhadnout pro nás důležité  $G_0, B_P$ . Použijme metodu nejmenších čtverců

$$S = \sum_{i,j} \{S_{ij} - G(i, j | G_0, B_P)\}^2 \rightarrow \min. \quad (5.33)$$

Meze sum a okolí kolem centra objektu určujeme obdobně jako v případě aperturní fotometrie. Definujme substituci

$$g_{ij} = e^{-\frac{(i-x_0)^2 + (j-y_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.34)$$

a hledejme minimum funkce  $S$ . Podmínkou minima jest soustava rovnic

$$\begin{aligned} B_P \cdot N_P + G_0 \sum g_{ij} &= \sum S_{ij} \\ B_P \sum g_{ij} + G_0 \sum g_{ij}^2 &= \sum S_{ij} g_{ij} \end{aligned} \quad (5.35)$$

jejímž řešením dostaneme hodnoty obou parametrů.

Celkový tok pak dostáváme jako

$$F_P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_0 e^{-\frac{(i-x_0)^2 + (j-y_0)^2}{2\sigma^2}} dx dy, \quad (5.36)$$

jež lze vyřešit například přechodem k polárním souřadnicím. Dostáváme tak vztah pro celkový tok energie pod Gaussovým profilem

$$F_P = 2\pi G_0 \sigma^2. \quad (5.37)$$

## 5.6 Měření objektů na CCD snímku

Ať již použijeme aperturní nebo profilovou metodu, dostaneme počet fotonů závislý na konkrétních pozorovacích podmínkách, přístroji či filtru. Proto se takto získané hodnoty označují jako instrumentální. K tomu, abychom mohli výsledky našich měření převést na veličiny vhodné ke srovnání s pozorováními na ostatních observatořích, musíme naše instrumentální hodnoty nějakým způsobem zkalibrovat.

Základem kalibrace je srovnání počtu detekovaných a očekávaných fotonů. Jde tedy o určení  $t(\lambda_0)$  z (5.16). Z numerických důvodů budeme určovat reciprokovou veličinu  $r_V = 1/t(\lambda_0)$  jež může být nejsnáze odhadnuta jako průměrná hodnota poměru mezi kalibračními hvězdami u nichž můžeme spočítat počty fotonů  $N$  dle formule (5.15) a změřenými  $C$  ve stejném filtru. Pro kalibrační hvězdy pak je

$$r = \sum_i \frac{N_i}{C_i}. \quad (5.38)$$

Se známým  $r$  už můžeme převést libovolné neznámé  $C$  na  $N$

$$N = rC \quad (5.39)$$

z čehož můžeme vypočítat tok (intenzitu) pro dosud neznámý objekt ve filtru (zde například  $V$ )

$$F_V = \frac{N_V}{AT} \frac{hc}{\lambda_0} \quad (5.40)$$

svítivost objektu bude v daném filtru

$$L_V = 4\pi d^2 F_V. \quad (5.41)$$

Tento postup předpokládá totožné spektrální citlivosti (parametry  $\lambda_0, \Delta\lambda$ ) našeho přístroje (společně s atmosférou atd.) a přístroje na kterém se prováděla kalibrace srovnávacích hvězd. Jen vyjíměčně budou obě citlivosti stejné a tak toky  $F$  mají obvykle systematický posun oproti skutečným hodnotám. Do statistické odchylky se tento posun nepromítne, avšak obvykle se projevuje při srovnávání měření z různých přístrojů nebo za různých podmínek.



filtr	$\lambda_0$ [nm]	$\Delta\lambda$ [nm]	$F_\lambda^0(\lambda_0)$ [ $10^{-11} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{nm}^{-1}$ ]
<i>U</i>	357	47	3.36
<i>B</i>	437	66	7.36
<i>V</i>	536	67	3.95
<i>R</i>	662	142	1.90
<i>I</i>	849	161	0.90

Tabulka 5.2: Charakteristiky Johnsonova systému filtrů



## Kapitola 6

# Spektroskopie s CD

První smrtelník, jenž se začal zabývat systematickým rozkladem světla na jednotlivé vlnové délky, byl Sir Isaac Newton. Zkoumal duhu vytvořenou na hranách broušeného skla. Jinou rozšířenou metodou rozkladu světla nám v moderní době nabízejí kompaktní disky (CD) jež obvykle slouží k záznamu digitální informace. Pracují na principu optické mřížky ovšem místo rozkladu při průchodu mřížkou se světlo rozkládá při odrazu. K sestrojení jednoduchého spektrografu umožňujícímu pořízení pěkného spektra tak stačí mít obyčejné CD nebo DVD a šikvné ruce.

---

### Zadání: Spektroskopie s kompaktním diskem

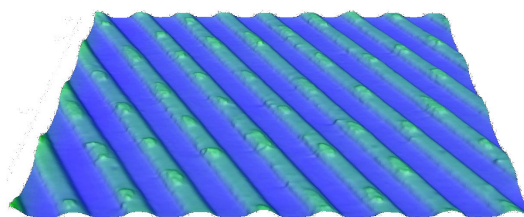
Úkolem je sestrojit jednoduchý spektrometr a určit jeho základní parametry pozorováním spektra známého objektu.

- Poříd'te vhodné CD a změřte jeho mřížkovou konstantu.
- Spočtete polohu prvního řádu a tu použijte při konstrukci spektroskopu.
- Tímto spektroskopem pořídte snímek spektra vhodného objektu, okalibrujte vlnové délky a zjistěte jeho rozlišení.
- Porovnejte spektra různých světelných zdrojů.

### 6.1 Difrakce na CD

Pohráváme-li si jen tak letmo s kompaktním diskem, všimneme si, že na straně s daty se světlo rozkládá na barevné spektrum. Pokusíme se objasnit jak je to možné.

Obyčejné, komerčně vyráběné CD, má drážky podobné, jaké by jsme dostali, kdyby jsme k rotujícímu kotouči CD přiložili za tepla hřeben. Drážky



Obrázek 6.1: Povrch kompaktního disku zobrazený elektronovým mikroskopem

mají mezi sebou přibližně stejně široké mezery. Čtení se provádí laserovým paprskem o vlnové délce menší než je šířka mezery. Povrch CD je zobrazen na obrázku 6.1.

Znalost tvaru povrchu CD nás vede přímo k popisu způsobu, jakým se na něm rozkládá světlo na spektrum. Předpokládejme, že na něj dopadá pod určitým úhlem rovinná světelná vlna, jež se na něm odráží. Řekněme, že k odrazům dochází jen na povrchu vrcholů a v drážkách je světlo pohlceno.

Sledujeme-li, co se stane s rovinnou vlnou po odrazu od pravidelně členitého povrchu CD, zjistíme, že se světlo odráží tak jako by vrcholky drážek byly samy čarovým zdrojem světla. To je zajištěno jejich velikostí srovnatelnou s vlnovou délkou světla. Tyto, jakoby nové, zdroje světla ale neodráží úplně totéž.

V dnešní době se ve fyzice považuje za velmi dobrý model popisující šíření světla prostřednictvím vln. Řekněme, že světelnou vlnu můžeme popsat prostřednictvím vztahu

$$E = E_0 \cos \varphi. \quad (6.1)$$

V této rovnici značí  $E$  výchylku vlny v daném místě,  $E_0$  amplitudu (maximální výchylku) a  $\varphi$  pak fázi vlny. Intezitu, charakterizující kolik energie daná vlna nese (uměrnou tomu, jak daný zdroj svítí), dostaneme jako druhou mocninu amplitudy vlny

$$I = kE_0^2. \quad (6.2)$$

Konstanta  $k$  v tomto vztahu charakterizuje typ vlny a prostředí v němž se vlna šíří. Například pro šíření světla ve vakuu je  $k = c\epsilon_0/2$ . Je zajímavé, že tato intezita  $I$  vůbec nezáleží na  $\varphi$ . Přesto lze projevy změny fáze u světla pozorovat a to využijeme právě v našem případě odrazu světla na CD.

Světelné vlny, odražené od drážek CD totiž fungují jako nové zdroje světla ovšem každý tento zdroj má posunutou fázi. V původní světelné vlně směrem od zdroje fáze rovnoměrně narůstá, tak, že by jsme ji v podstatě mohli použít jakožto měřítko vzdálenosti. Ve vzdálenosti vlnové délky záření od zdroje by měla hodnotu  $2\pi/\lambda$  ve vzdálenosti dvou vlnových délek pak  $4\pi/\lambda$  atd. V obecné vzdálenosti  $l$  (měřené v jednotkách vlnových délek) od zdroje pak

bude mít fáze velikost

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}l. \quad (6.3)$$

Pokud necháme záření na CD dopadat kolmo bude fáze dopadajících vln stejná pro všechny dopadající vlny. Avšak pokud pozorujeme odražené světlo pod úhlem  $\alpha$  pak fáze po odrazu bude jiná pro každé dvě sousední body drážky. Pokud je vzdálenost mezi drážkami  $d$ , budou mít sousední vlny dráhový rozdíl  $l = d \sin \alpha$  a rozdíl fází bude

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}d \sin \alpha. \quad (6.4)$$

Geometricky je situace naznačena na obrázku xxx.

Lidské oko nebo například fotoaparát nejsou schopny od sebe rozlišit jednotlivé odražené světelné vlny, avšak detekujeme pouze součet všech vln a ještě navíc jen jejich intenzitu. Výsledná vlna od všech drážek na CD pak bude dána součtem všech jednotlivých odražených vln s fázemi posunutými o konstantní hodnoty.

$$E = E_1 \cos \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_2 + \dots E_n \cos \varphi_n. \quad (6.5)$$

Můžeme předpokládat, že se u každé vlny odražené vlny nezmění amplituda a navíc si vybereme vlnu u které v okamžiku dopadu bude první fáze nulová. Pak tedy máme pro fázi první vlny po odrazu  $\varphi_1 = 2\pi/\lambda = \delta$  a pro každou další pak

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2\pi}{\lambda}d \sin \alpha = \delta \\ \varphi_2 &= \frac{2\pi}{\lambda}2d \sin \alpha = 2\delta \\ &\dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

Dohromady pak pro výslednou vlnu máme

$$E = E_0(1 + \cos \delta + \cos 2\delta + \dots \cos n\delta). \quad (6.7)$$

Součet vln s takto posunutou fází se pak pro výslednou světelnou vlnu zapisuje<sup>1</sup> v tradičním tvaru

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}n\delta}{\sin^2 \frac{1}{2}\delta}, \quad (6.9)$$

<sup>1</sup>Lze si jej odvodit buď za použití pravidel pro mnohonásobný součet argumentů trigonometrických funkcí, avšak jednodušší je provést výpočet prostřednictvím komplexních čísel. V tom případě uvážíme, že kosinus je reálná část komplexního čísla v goniometrickém tvaru  $\cos x = \Re \exp(-ix) = \Re(\cos x - i \sin x)$ . Pokud víme, že součet reálných částí je ekvivalentní reálné části součtu, můžeme nahradit  $\cos x \rightarrow \exp(-ix)$ , řadu sečíst a ze součtu vzít reálnou část. Dostáváme tak součet geometrické řady

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikx} = \frac{1 - e^{-inx}}{1 - e^{-ix}}.$$

s poměrem po sobě jdoucích členů  $q = \exp(-ix)$ . Snadno jsme jej vypočetli užitím známého

kde  $I_0 = k^2 E_0^2$ . Interpretace výsledku je zajímavá. Výsledný výraz v podstatě říká, že rozložení odraženého světla nebude už rovnoměrné jak to bylo u světla dopadajícího, ale bude mít periodická maxima daná funkcí sinus a navíc nebudou všechna stejně vysoká, což je dáno tím, že funkce ve jmenovateli a čitateli mají jiné periody. Oboje je důsledkem toho, že se správným způsobem v maximech poskládají vlny s daným fázovým posuvem a v minimech pak poodečítají.

Jak přesné rozložení uvidíme bude záležet na fázovém rozdílu dopadajícího světla a na úhlu pod kterým pozorujeme odražené záření. Natočíme-li CD disk po úhlem  $\beta$  k dopadajícímu světlu rovnoměrně osvětlujícímu disk a pozorujeme-li jej pod úhlem  $\alpha$  měřenému opět kolmo na disk, bud fázový rozdíl mezi dopadajícím a odraženým zářením

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d(\sin \alpha - \sin \beta). \quad (6.10)$$

Situaci znázorňuje obrázek xxx.

Význam vztahů pro intenzitu (6.9) i pro fázový rozdíl (6.10) si nejnázne demonstrujeme na situaci znázorněné na obrázku xxx. V něm máme přímo pod zdrojem záření pozorovatele, jež se může libovolně pohybovat ve vodorovném směru. Úhel dopadu ze vztahu (6.10)  $\alpha$  je nulový a úhel  $\beta$  je přímo odvoditelný z polohy pozorovatele. Pozorovatel pak uvidí nebo si nechá promítnout obrazec znázorněný vzorcem (6.9). Pokud bude zdroj monochromatický (bude vyzařovat jen na jedné vlnové délce) uvidí pozorovatel jen jednotlivá maxima, avšak pokud bude světlo zdroje složené z mnoha vlnových délek, pak pro jednotlivé vlnové délky dostaneme mírně posunutá maxima

vzorci pro součet takové řady

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = q^0 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Ke získání intenzity hledáme druhou mocninu tohoto součtu. Druhou mocninu neboli velikost vypočteme násobíme-li tento výraz výrazem komplexně sdruženým, což vede na

$$AA^* = \left( \frac{1 - e^{-inx}}{1 - e^{-ix}} \right) \left( \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right) = \frac{2 - (e^{inx} + e^{-inx})}{2 - (e^{ix} + e^{-ix})}. \quad (6.8)$$

Tento výraz můžeme dále upravit za použití vztahu

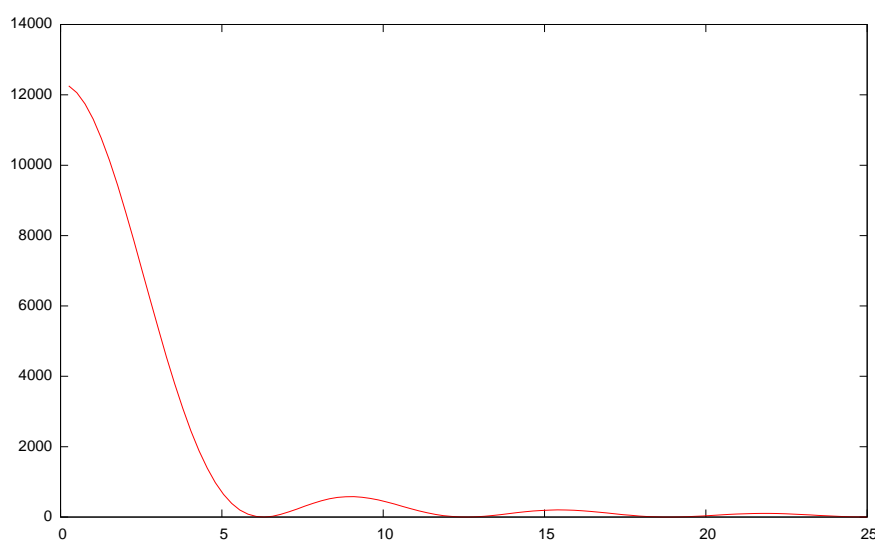
$$\cos x = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}.$$

Pak pro (6.8) máme

$$AA^* = \frac{2 - (e^{inx} + e^{-inx})}{2 - (e^{ix} + e^{-ix})} = \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x}.$$

Jeho převedení na (6.9) je již jen otázkou dosazení známé trigonometrické identity

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$



Obrázek 6.2: Průběh intenzity světla po difrakci na CD.

tak jak je znázorněno na obrázku 6.3 pro tři různé vlnové délky. Toto je hlavní princip rozkladu světla na povrchu CD.

Naznačené schéma lze využít i na zjištění vzdálenosti  $d$  mezi drážkami CD. Pozorujeme okem maximum intenzity některé barvy v prvním nebo druhém řádu. Z naší polohy a přibližné vlnové délky barvy, ve které pozorujeme pak snadno z (6.10) odhadneme  $d$ . Technické specifikace pro CD udávají hodnotu  $d$  poněkud jinou než pro DVD.

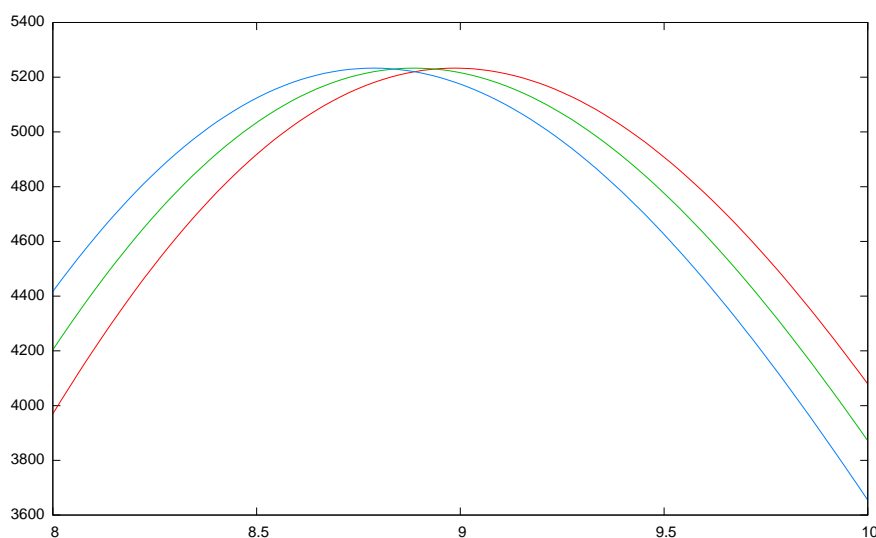
Obligátním modelovým příkladem na rozložení spekter je tzv. mřížka. Jedná se v podstatě o kus speciálního skla ve kterém je vytvořen obrazec ve tvaru vodorovných čar. Světlo přitom prochází přes sklo a je na vhodných místech zacloněno právě mřížkou. Úlohu odrážejících vrcholů přebírají mezery mezi zacloněnými částmi. Princip rozkladu světla je ale stejný.

Rozsáhlejší a hlubší diskuze zasazená do širšího fyzikálního kontextu je uvedena ve Feynmanových přednáškách z fyziky. Podrobný detailní popis pak v Born, Wolf: Principles of Optics.

## 6.2 Konstrukce spektroskopu z CD

Příklad konstrukce jednoduchého, přesto funkčního, spektroskopu je na obrázku 6.2. Jsou zde vyznačeny tři nejpodstatnější části spektroskopu v pořadí s nimiž se dopadající světlo postupně střetává:

**Štěrbina** Štěrbina vybere ze vstupního světelného svazku pouze úzký proužek tak aby byl rovnoběžný s drážkami na CD. Tloušťka štěrby ovlivňuje výsledné spektrum. Čím užší je štěrbina, tím ostřejší jsou pozorované



Obrázek 6.3: Rozklad světla v prvním řádu. Detail obrázku 6.2 pro okolí prvního maxima ve kterém jsou vyneseny různé vlnové délky pro modré, zelené a červené světlo.

spektrální čáry a dostáváme spektrum s větším rozlišením. Na druhé straně, užší štěrba propouští méně světla a omezuje tak sledování slabší světelných zdrojů.

**Mřížka** V našem případě povrch CD. Někdy se též můžeme setkat s hracím spektroskopem. Srdce každého spektroskopu.

**Detektor** V našem případě oko nebo digitální fotoaparát.

S velmi podobnou konstrukcí se setkáváme u všech běžných spektroskopů.

### 6.3 Jednoduchá analýza spektra

S právě popsaným spektroskopem můžeme za použití digitálního fotoaparátu provádět jednoduchou analýzu spektra běžných světelných zdrojů. Využijeme přitom znalosti zpracování obrazu z digitálních fotoaparátů popsaných v kapitole ??.

Velmi názorné příklady spektra poskytují například kompaktní zářivky (fluorescentní) se kterými se lze setkat u malých úsporných lampiček a osvětlení větších vnitřních prostorů v podobě trubic. Jejich spektrum se skládá z několika výrazných emisních čar. Neobsahuje ale měřitelné kontinuum a absorpční čáry.

Obrázek spektra takového zdroje můžeme najít na obrázku 6.3. Spektrum se skládá z výrazné červené, zelené a modré tlusté čáry, které dohromady





Obrázek 6.4: Jednoduchý spektroskop z CD.

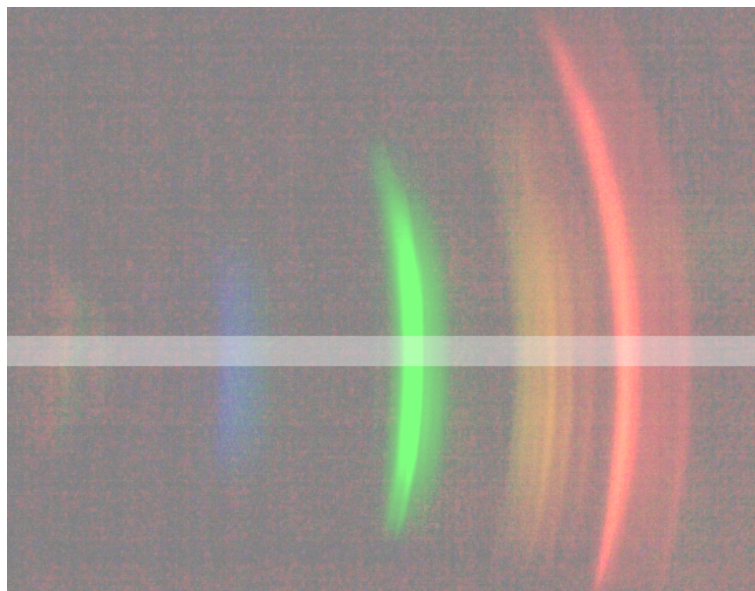


Obrázek 6.5: Detail štěrbiny.

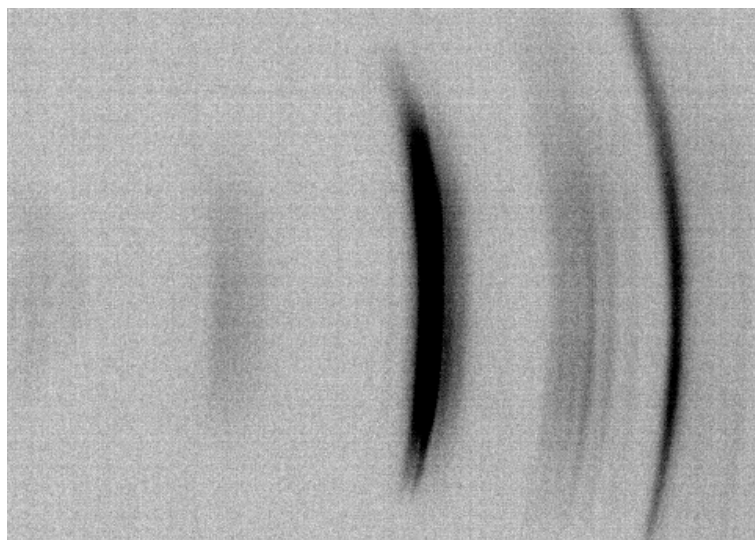
dávají pro oko přibližně bílé světlo. Na obrázku se zdá, že červená a zelená čára jsou mnohem jasnější než modrá. Navíc se zelená čára zdá mírně rozdvojená. Proto, aby jsme tyto vlastnosti prozkoumali podrobněji, transformujeme barevný obrázek do černobílé škály. Při této transformaci se sice ztratí informace o barvě, avšak zachová se fotometrická informace. Výsledek můžeme nalézt na obrázku 6.3. Na obrázku znamená čím černější barva, tím více světla na čip dopadlo. Na něm je na první pohled patrné, že spektru dominuje výrazná zelená čára.

Ještě lepší zobrazení tvaru spektra nám poskytne řez (profil) podél vodorovné osy vedené přibližně středem spektra. Pokud do grafu vyneseme na osu  $x$  pořadové číslo pixelu na čipu fotoaparátu a na osu  $y$  pak veličinu úměrnou tomu, kolik světla na čip dopadlo, dostaneme spodní (červenou) křivku z grafu 6.3. Vidíme, že křivka vykazuje tvary, jež očekáváme. Máme jednu výraznou čáru v uprostřed a menší červenou. Celkově ale spodní křivka obsahuje dost šumu. Proto bylo ke konstrukci horního grafu použito průměru několika pixelů odpovídajících jedné vlnové délce světla. K průměru pak byla přičtena umělá konstanta, která celý graf posunula vzhůru (grafy by se jinak překrývaly). Vidíme, že se nám objevila spousta jemných rysů, které jsou podstatně detailnější než ty, které můžeme postřehnout okem na snímcích.

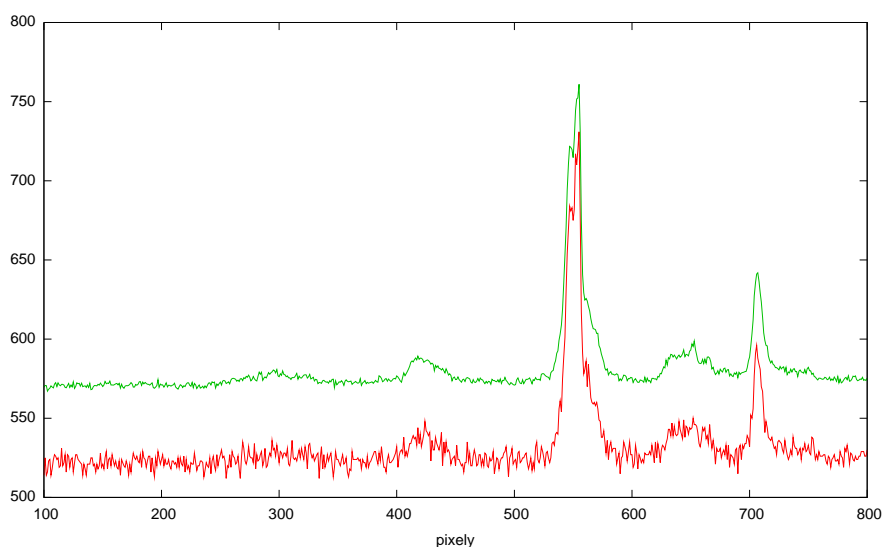
Vodorovná osa v grafu 6.3 je udávána v relativních jednotkách. Z geometrie situace plyne, že vztah mezi vlnovými délkami a polohou příslušných čar na čipu bude záležet na parametrech mřížky, na řádu spektra ve kterém pozorujeme a na vzdálenosti detektoru od CD. Některé parametry jsme schopni



Obrázek 6.6: Spektrum kompaktní zářivky.



Obrázek 6.7: Spektrum kompaktní zářivky.



Obrázek 6.8: Průběh spektra kompaktní zářivky. Horní křivka je průměrem mnoha spodních a je posunutá a konstantu.

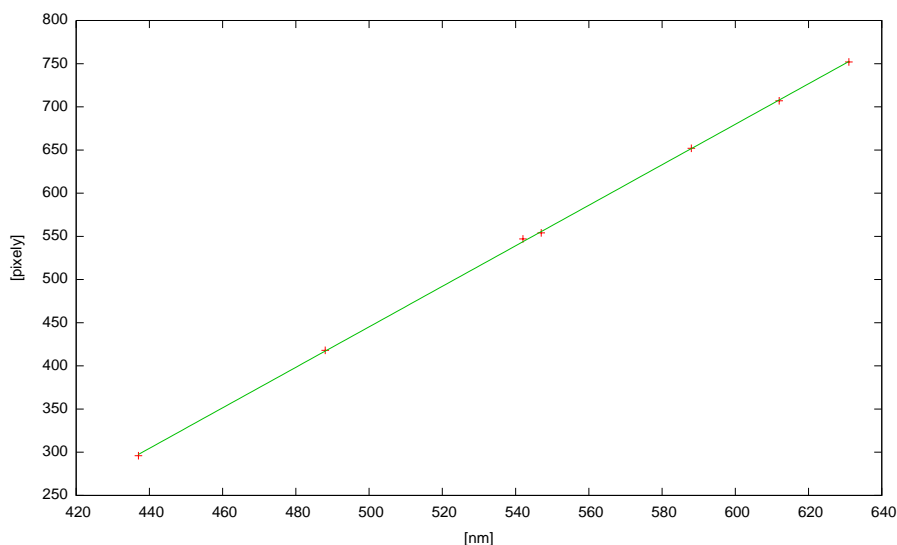
$\lambda[\text{nm}]$	původ	poloha [pix]
437	Rtuť	296
488	Terbium $\text{Tb}^{3+}$	418
542	Terbium $\text{Tb}^{3+}$	547
547	Rtuť	554
588	Europium $\text{Eu}^{3+}:\text{Y}_2\text{O}_3$	652
612	Europium $\text{Eu}^{3+}:\text{Y}_2\text{O}_3$	707
631	Europium $\text{Eu}^{3+}:\text{Y}_2\text{O}_3$	752

Tabulka 6.1: Identifikace a polohy čar ve spektru.

ovlivnit jiné méně a proto je často nutné provést základní kalibraci spektroskopu. K tomu využijeme známé vlnové délky čar ve spektru dle Wikipedie<sup>2</sup> a obrázku s identifikovanými čarami. Vlnové délky pro několik vybraných čar spolu s identifikacemi a polohou v pixelech jsou uvedeny v tabulce 6.1. Polohy čar na grafu byly vesměs zjištěny odhadem z polohy nejjasnějšího pixelu. Z tabulky můžeme ihned odhadnout přibližné rozlišení našeho spektrometru na asi 5 nm.

Vztah mezi polohou na čipu  $x$  měřenou v pixelech je pro malé úhly dán jako  $x \propto \Delta\varphi$  a pro spektrální čáry, ne příliš vzdálené od centra spektra máme

<sup>2</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Fluorescent\\_lighting\\_spectrum\\_peaks\\_labelled.gif](http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Fluorescent_lighting_spectrum_peaks_labelled.gif)



Obrázek 6.9: Vztah mezi nanometry a pixely v našem případě.

z (6.10)

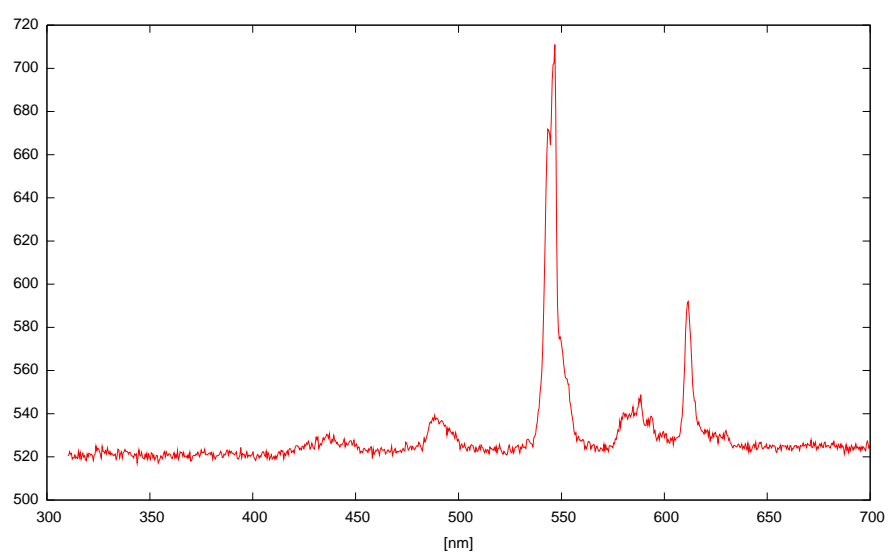
$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 \propto \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \sim \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \quad (6.11)$$

lineární vztah. Na obrázku ?? jsou vynesena data z tabulky 6.1. Vidíme, že je měřenými vlnovými délkami v pixelech a tabulkovými v nanometrech skutečně těsný vztah daný číselně:

$$x[\text{pix}] = (2.346 \pm 0.011)\lambda[\text{nm}] - 727.5 \pm 6.0 \quad (6.12)$$

Standardní deviace ((průměrná odchylka od přímky ve vertikálním směru) byla 1.84 pixelu. S tímto vztahem mezi pixelem a vlnovou délkou již můžeme snadno nakreslit výsledný průběh spektra, tak jak je zachycen na obrázku ??.

Ovšem ani po těchto kalibracích ještě nemáme korekci na citlivost detektoru v digitálním fotoaparátatu na různé vlnové délky. Většinou si lze přímo při pozorování spektra všimnout toho, že modrá část spektra je na snímku silně potlačena. Kdybychom měli dobrý zdroj světla, který by svítil stejně na všech vlnových délkách, mohli by jsme snímkem jeho spojitého spektra zjistit i citlivost našeho detektoru. V praxi není samozřejmě takový zdroj světla k dispozici, ale lze jej často nahradit žárovkou nebo Sluncem. Oba tyto zdroje vydávají spojitě záření jehož průběh se dá teoreticky popsat a porovnat s naměřenými. Další možností je zjistit citlivost konkrétního zařízení podle jeho technické dokumentace.



Obrázek 6.10: Spektrum kalibrované ve vlnových délkách.



## Kapitola 7

# Spektroskopie Vegy

---

**Zadání: Určení fyzikálních parametrů hvězd**

Úkolem je na základě měřeného spektra odhadnout jaké panují podmínky na povrchu Vegy .

- Na základě porovnání průběhu kontinuálního spektra a Planckova vyzařovacího zákona odhadněte teplotu hvězdy.
- Na základě znalosti teploty, vzdálenosti a magnitudy určete poloměr hvězdy.
- Ve spektru identifikujte čáry vodíku a určete jejich přesné polohy.
- Na základě profilů spektrálních čar určete hustotu částic v povrchových vrstvách hvězdy.
- Odhadněte poměr ionizovaných atomů vodíku a těžších prvků.

### 7.1 Spektrum

Obecně se slovem spektrum označuje rozložení nějaké veličiny v závislosti na její konkrétní charakteristice. V případě elektromagnetického záření se spektrem označuje závislost hustoty energie na vlnové délce, frekvenci nebo přímo na samotné energii.

Elektromagnetickým zářením se přenáší energie. Pro snadnější srovnání různých fyzikálních situací, experimentů nebo metod se zavádí “normovaná” energie záření připadající na jednotkovou plochu, jednotkový čas, jednotkový prostorový úhel a jednotkovou vlnovou délku nebo frekvenci, označujeme ji

jako intenzita záření

$$I(\nu) = \frac{\Delta E}{\Delta A \Delta t \Delta \Omega \Delta \nu} \quad (7.1)$$

a

$$I(\lambda) = \frac{\Delta E}{\Delta A \Delta t \Delta \Omega \Delta \lambda}. \quad (7.2)$$

Veličina  $I(\nu)$  je právě zmiňované spektrum neboli celková energie záření rozložená na jednotlivé frekvence a podobně  $I(\lambda)$  je energie rozložená na jednotlivé vlnové délky. Spektrum  $I$  obvykle získáváme měřením nebo výpočtem. Celková množství studované energie záření přitom je  $\Delta E$ , plocha jíž záření prochází  $\Delta A$ , za čas  $\Delta t$ , z prostorového úhlu  $\Delta \Omega$  na jednotku frekvence  $\Delta \nu$  nebo vlnové délky  $\Delta \lambda$ . V případě měření pak můžeme pro jeho výpočet použít (7.1) nebo (7.2), avšak v případě výpočtu se obvykle difference  $\Delta E, \dots$  nahrazují diferenciály.

V případě vzdálené hvězdy, jíž vidíme jen jako bod, bude záření z dopadat na objektiv dalekohledu o ploše  $\Delta A = \pi R^2$  ( $R$  je poloměr objektivu), z prostorového úhlu  $\Delta \Omega = 4\pi d^2$  ( $d$  je vzdálenost ke hvězdě). Pokud světlo rozkládáme mřížkou a snímáme prostřednictvím CCD kamery, pak na jeden pixel (obvykle je to celý proužek) dopadá právě  $\Delta \lambda$  z celého spektra během expoziční doby  $\Delta t$ , kdy dané spektrum exponujeme. CCD kamera nám pak poskytne právě záznam intenzity  $I(\lambda)$ .

Energie elektromagnetického pole nesená jednotlivými vlnami o frekvencích  $\nu$ , kterou detekujeme našimi přístroji, je dána součtem energií od všech těchto vln (fotonů)

$$E = \sum_i n_i h \nu_i, \quad (7.3)$$

přičemž fotonů s frekvencí  $\nu_i$  je celkem  $n_i$  ( $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$  je Planckova konstanta). Normování energie podle frekvenčních intervalů  $\nu_{i+1} - \nu_i$  dává pro intenzitu

$$\frac{\Delta E}{\Delta \nu} = \frac{n_{i+1} h \nu_{i+1} - n_i h \nu_i}{\nu_{i+1} - \nu_i} = n_i h. \quad (7.4)$$

Tento výraz ukazuje, že měřená intenzita je až na konstantu (jak číselnou, tak v jednotkách) totožná s počtem fotonů příslušejících jednotlivým energiím neseným elektromagnetickou vlnou. Můžeme proto volně přecházet mezi těmito vyjádřeními. Protože je však počet fotonů v běžně přijímaném záření gigantický, dává se v praxi přednost terminologii s intenzitami a v teorii pak počtu fotonů.

## 7.2 Spektrum absolutně černého tělesa

Pokud je látka se zářením v rovnováze, pak hustota záření je dána Planckovým vyzařovacím zákonem. Absolutně černé těleso je natolik významné, že se v



jeho případě označuje intenzita speciálním symbolem  $I(\nu) \equiv B(\nu)$  ( $B$  jako blackbody)

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (7.5)$$

a

$$B(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k_B \lambda T} - 1}. \quad (7.6)$$

Kde jsme použili  $k_B = 1.3806 \cdot 10^{-23} \text{J.K}^{-1}$  pro Boltzmanovu konstatu a  $c = 3 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}$  pro rychlost světla.

Pokud je látka v rovnováze se zářením, tak to znamená, že stejný počet fotonů látka pohltí i vyžáří do okolí. Na Zemi se absolutně černé těleso realizuje dutinou zahřátou na nějakou teplotu. A právě teplota je jediný a rozhodující parametr pro to, jaký bude tvar vyzařovaného záření z nějakého tělesa.

Za předpokladu, že Vega vyzařuje jako absolutně černé těleso, můžeme naměřeným spektrem proložit teoretickou závislost a zjistit tak teplotu hvězdy.

### 7.3 Určení poloměru Vegy

Pokud známe teplotu  $T$  kulového tělesa ve vzdálenosti  $d$ , které má nultou magnitudu ve filtru  $V$ , můžeme odhadnout jeho poloměr  $R_*$ .

Využijeme k tomu  $B(\nu)$  nebo  $B(\lambda)$ , kterou zintegrujeme přes všechny vlnové délky. Uvážíme-li navíc rozměry hvězdy, pak dostaneme celkovou vyzařenou energii hvězdy (zářivý výkon  $L = E$ ) jako

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_*^4 \quad (7.7)$$

kde  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{J.K}^{-4} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  je Stefan-Boltzmannova konstanta. Spočítáme-li zářivý tok jako energii dopadající ve vzdálenosti Vega – Země na jednotkovou plochu

$$F_* = \frac{L_*}{d_*^2} \quad (7.8)$$

pak můžeme snadno spočítat její magnitudu ve  $V$  filtru

$$m_v - m_0 = -2.5 \log_{10} F_* / F_0 \quad (7.9)$$

kde bylo změřeno, že pro  $m_0 = 0$  je  $F_0 = 3.75 \cdot 10^{-11} \text{W.nm}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ . Paralaxa Vegy, podle měření z Hipparca je  $0.129''$ .

Lze očekávat, že výsledek nebude zcela přesný, neboť srovnáváme celkovou energii s energií jen ve  $V$  filtru. Pokud bychom tedy měli být přesnější, musíme zjistit kolik příslušného záření může projít přes  $V$  filtr. To uděláme tak, že zintegrujeme propustnost filtru a intenzitu (buď danou výpočtem podle  $B(\nu)$  nebo měřením) a ty použijeme jako hodnotu pro  $F_*$ . Řádový odhad by mohl vzejít z představy, že  $V$  filtr aproximujeme obdelníkem o výšce odpovídající maximální propustnosti toho filtru a šířce odpovídající pološířce

filtru. Pro  $V$  je definováno:  $T_{\max} \approx 1$ ,  $\Delta\lambda_V = 90$  nm. S takovouto aproximací můžeme odhadnout tok na:

$$F_V = \int_0^\infty B(\lambda)V(\lambda) d\lambda \approx B(\lambda_0)\Delta\lambda_V \quad (7.10)$$

...

## 7.4 Identifikace vodíkových čar

Identifikace čar vodíku je snadná, neboť víme, že frekvence (vlnové délky) čar Balmerovy série vodíku (ve viditelném světle) jsou, pokud je atom vůči pozorovateli v klidu, dány vztahem:

$$\nu_{H_i} = cR_A \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad \text{pro } i = \alpha, \beta, \gamma, \dots \quad (7.11)$$

Rydbergova konstanta pro vodík vyplývající z řešení příslušných rovnic, má hodnotu

$$R_A = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{ch^3} \quad (7.12)$$

a její přesná hodnota je  $R_A = 10967760 \text{ m}^{-1}$ . Rozdíl oproti teoretické hodnotě je v započítání rozdílu mezi hmotou elektronu a protonu. Je zajímavé srovnat obě hodnoty a ty srovnat s kalibrovaným spektrem. Odhalí se tak s jakou přesností musíme uvažovat ve spektroskopii.

Přesné určení vlnových délek z pozorovaného spektra je založeno na výpočtu těžiště spektrální čáry podobně, jak to bylo v případě hvězd na snímcích. Je to jednodušší o to, že zde je jen jednorozměrný případ. Výpočte střed čáry tak je

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_i w_i \lambda_i}{\sum_i w_i} \quad (7.13)$$

kde  $w_i$  jsou váhy jednotlivých vlnových délek  $\lambda_i$ . Váhy pak dostaneme odečtením předpokládaného kontinua samotné čáry:

$$w_i = B(\nu_i) - I_i. \quad (7.14)$$

takto vypočtené  $\bar{\lambda}$  můžeme porovnat s vlnovou délkou vypočtenou podle (7.11) a ověřit které čáry přísluší vodíku a s jakou přesností dané čáry určujeme.

## 7.5 Analýza profilu čáry

Přestože jsou v atomu vodíku dány přesné hodnoty energií, nepozorujeme spektrální čáry ostré, ale viditelně rozšířené. Studím těchto procesů, které způsobují rozšíření může vést k pochopení některých fyzikálních procesů v systému, kde čáry vznikají a proto se na ně soustředí velká část klasické

spektrální analýzy. My se budeme zajímat o dva základní procesy způsobující podstatné rozšíření. Navíc jde o mechanismy s nimiž se lze v astronomii setkat opravdu hojně a podstatnou měrou přispívají k pochopení studovaných objektů. Jde o rozšíření spektrální čáry v důsledku tepelného neuspořádaného pochybu atomů absorbujících nebo emitujících záření a o rozšíření způsobené vzájemnými srážkami těchto částic. V dalším se zaměříme pouze na absorpci záření ve hvězdné atmosféře, avšak všechny úvahy platí také v případě emise.

Ze statistické fyziky<sup>1</sup> víme, že při teplotě  $T$  plynu mají jeho částice s hmotou  $m_H$  průměrnou rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_H}}. \quad (7.15)$$

Vlnové délky podle vztahu (7.11) platí jen pro atomy v klidu. Pokud se atom pohybuje rychlostí  $v$  vůči pozorovateli (jde o složku rychlosti rovnoběžnou s pohledem pozorovatele), je frekvence, jíž pohltní, posunuta jako důsledek Dopplerova jevu dle vztahu

$$\nu - \nu_0 = \frac{v}{c} \nu_0, \quad v \ll c. \quad (7.16)$$

Dosazením tohoto vztahu do Maxwellova rozdělení rychlostí částic ideálního plynu

$$f(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{m_H}{k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_H v^2 / 2k_B T} dv \quad (7.17)$$

v němž opět dosazujeme konkrétní hmotu vodíkového atomu  $m_H$ . Vhodnými úpravami lze pak tento poslední vztah přepsat do konvenčního vztahu udávající profil spektrální čáry rozšířený tepelným pohybem atomů

$$\Phi_G(\nu) = \Phi_0 e^{-(\nu - \nu_0)^2 / \Delta \nu_D^2}, \quad \text{kde } \Delta \nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m_H}}. \quad (7.18)$$

Zajímáme-li se o rozšíření spektrální čáry v závislosti na vlnové délce a ne frekvenci, je snadné přepočíst (7.18) na

$$\Phi_G(\lambda) = \Phi_0 e^{-(\lambda - \lambda_0)^2 / \Delta \lambda_D^2}, \quad \text{kde } \Delta \lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m_H}}. \quad (7.19)$$

Konstanty  $\Phi_0$  v (7.18) a (7.19) nemají nic společného, přestože jsou označeny stejným symbolem zastupující obecnou úměru. V obou těchto vztazích jsme předpokládali, že šířka čáry je mnohem menší než její souřadnice, tedy  $\Delta \lambda_D \ll \lambda_0$ ,  $\Delta \nu_D \ll \nu_0$ .

<sup>1</sup>Feynman, R., Leighton, R., Sands, M.: Feynmanove přednášky z fyziky, 2. díl. Bratislava: Alfa 1986

Vzájemné srážky vedou k jinému charakteru rozšíření. Klasický náhled (tj. neodpovídající skutečnosti, ale vedoucí ke správným matematickým vztahům) si absorbující částici představuje jako harmonický oscilátor v němž “kmitá” elektron kolem vodíkového jádra (protonu  $s$ , bez nebo s více neutrony) a pokud dojde k absorpci, vede to k tomu, že elektron se uvolní a “kmitání” se převede na kmity elektromagnetického pole (znovu zdůrazňujeme, že jde jen o zjednodušenou ilustraci skutečnosti). Vzájemné srážky částic se modelují jako proces, který náhodně posune fázy harmonického oscilátoru. Způsobují tak, že elektromagnetické záření se sinusovým průběhem nemá celistvé periodické průběhy, ale jen náhodně dlouhé menší části. Jednotlivé fotony, jež pozorujeme z hvězdy, tak mají nahodně posunutou fázi. Při pozorování se časový rozptyl v okamžiku dopadu projeví, v důsledku principu neurčitosti, jako rozptyl ve frekvenci, kterou můžeme pozorovat jako rozšíření spektrální čáry s profilem

$$\Phi_L(\nu) = \frac{\Phi_0}{1 + (\nu - \nu_0)^2 / (\Delta\nu_L / 4\pi)^2}. \quad (7.20)$$

Z teoretického odvození pro konstantu  $\Delta\nu_L$  platí vztah

$$\Delta\nu_L = 2\nu_{\text{col}} \quad (7.21)$$

v němž  $\nu_{\text{col}}$  je frekvence vzájemných srážek částic. Ta určitým způsobem souvisí s hustotou  $n_H$  absorbujících částic.

Ve vakuu, kde nejsou žádné částice, je pravděpodobnost, že foton je absorbován, nulová, ale s přibývajícím hustotou nebo účinným průřezem částic roste pravděpodobnost absorpce fotonu. Krátce po absorpci je sice foton opět s největší pravděpodobností vyzářen, ale do zcela libovolného směru, takže celkový tok fotonů v původním směru může být výrazně menší. Vyzářený foton ale může být znovu absorbován a vyzářen opět do libovolného směru a děj se opakuje.

Střední volná dráha  $l$  mezi dvěma absorpcemi (vypočtená jako aritmetický průměr z mnoha absorbcí a emisí) udává pravděpodobnost absorpce fotonu při uražení dráhy  $dl$

$$dl / l \quad (7.22)$$

z pohledu vzdáleného pozorovatele. Na druhé straně, pozorovatel spojený s fotonem vidí před sebou jednotkovou plochu pokrytou absorbujícími částicemi, každou s plochou  $\sigma$  a počtem  $n_H$  (úměrným hustotě  $\rho_H$ ). Pravděpodobnost srážky je

$$\sigma n_H dl \quad (7.23)$$

pokud jsou částice rozloženy v prostoru homogenně. Porovnáním těchto dvou vztahů dostaneme závislost střední volné dráhy na účinném průřezu a hustotě, tj. na charakteristikách materiálu

$$l = \frac{1}{\sigma n_H} \quad (7.24)$$

Střední volná dráha tedy silně klesá, když mají částice větší koncentraci nebo účinný průřez.<sup>2</sup>

Pohybuje-li se částice rychlostí  $v$ , pak střední volnou dráhu urazí přibližně za čas  $\tau$

$$l \sim v\tau, \quad (7.26)$$

pro nějž platí

$$\tau = \frac{1}{v\sigma n_H}. \quad (7.27)$$

Měřená srážková frekvence  $\nu_{\text{col}}$  je přímo vázána na  $\tau$ :

$$\nu_{\text{col}} = \frac{1}{\tau}. \quad (7.28)$$

Můžeme tak snadno odhadnout koncentraci částic

$$n_H = \frac{\Delta\nu_L}{v\sigma}. \quad (7.29)$$

Analogické vztahy dostaneme i v případě závislosti na vlnové délce. Srážkový profil pak má tvar

$$\Phi_L(\lambda) = \frac{\Phi_0}{1 + (\lambda - \lambda_0)^2 / (\Delta\lambda_L / 4\pi)^2} \quad (7.30)$$

a vlnová délka odpovídající srážkové frekvenci je

$$\frac{\Delta\nu_L}{\nu_0} = \frac{\Delta\lambda_L}{\lambda_0}. \quad (7.31)$$

Rychlost částic je úměrná teplotě podle (7.15), a účinný průřez v případě iontu vodíku můžeme odhadnout na řádově  $\pi r_B^2$ , kde  $r_B = h^2 n^2 / 4\pi^2 m e^2 \approx 5.3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$  je Bohrov poloměr orbity vodíku s hlavním kvantovým číslem  $n$ . Složením všech vztahů dohromady dostáváme pro průměrný počet absorbujících atomů vztah

$$n_H = \frac{c\Delta\lambda_L}{\pi r_B^2 \lambda_0^2} \sqrt{\frac{m_H}{2k_B T}}. \quad (7.32)$$

Číslo, které takto dostaneme, je odhad počtu absorbujících částic z jednotkové absorbující plochy. Pokud by tato absorbující plocha byla jako skořepina

<sup>2</sup>V praktických úlohách se místo součinu  $\sigma n_H$  používá součin  $\kappa \rho_H$ , protože hustotu  $\rho_H$  lze obvykle přímo měřit. V tomto případě se pak účinný průřez vztahuje na "účinný průřez jednotkového množství hmoty", nazývaný opacita  $\kappa$ . V dalších úvahách proto budeme používat výraz pro střední volnou dráhu ve tvaru:

$$l = \frac{1}{\sigma n_H} \equiv \frac{1}{\kappa \rho_H} \quad (7.25)$$

Účinný průřez  $\sigma$  se měří v  $\text{cm}^2$ , koncentrace  $n$  v  $\text{cm}^{-3}$ , opacita  $\kappa$  v  $\text{cm}^2/\text{g}$  a hustota  $\rho$  v  $\text{g}/\text{cm}^3$ .

kolem hvězdy o jednotkové tloušťce, dostali by jsme přímo hustotu částic v atmosféře. Normální hvězdy mají ovšem atmosféru nesrovnatelně tlustší. Určení jejich rozměrů (tloušťky) vede k řešení složitých rovnic šíření záření v takové atmosféře a také z něj můžeme odhadnout lokální hustotu či její průběh v daných místech atmosféry hvězdy. Z tohoto důvodu se takto určené hustotě říká hustota ve sloupci (column density) a jde tedy o přímo měřitou veličinu.

## 7.6 Proč jsou ve spektru jen čáry vodíku?

Určení hustoty absorbujících částic prostřednictvím rozšíření spektrálních čar může být dosti nepřesné a může nám tak podat zkreslený údaj o skutečné hustotě. Důvodů proto to je několik. Mechanismy rozšiřující spektrální čáry se převážně kombinují a může být velmi těžké je od sebe odlišit, ale především nikdy nemůžeme z analýzy profilu spektrální čáry spolehlivě určit, které fyzikální procesy skutečně rošíření způsobují. Spolehlivější cesta ke zjištění (sloupcové) hustoty je založena na přímém měření absorbované energie.

Označme energii emitovanou ze hvězdy  $E$ , energii pohlcenou v atmosféře hvězdy právě ve spektrální čáře  $E_L$  a část energie, která se vyzáří do okolního Vesmíru jako  $E_{\text{obs}}$ . Pak je jasné, že ze zákona zachování energie platí podmínka

$$E = E_L + E_{\text{obs}} \quad (7.33)$$

Sahova rovnice:

$$\frac{n_i n_e}{N} = 2 \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} (kT)^{3/2} e^{-e_i/k_B T} \quad (7.34)$$

## Kapitola 8

# Měření sluneční konstanty

---

**Zadání: Měření sluneční konstanty**

Změřte sluneční konstantu pomocí jednoduchého bolometru.

- Vystavte bolometr slunečnímu záření a změřte časovou závislost teploty.
- Změřte plochu bolometru.
- Určete tepelnou kapacitu bolometru.

### 8.1 Sluneční konstanta

Měření energie dopadajícího záření pomocí citlivého detektoru je ideální pro slabé objekty, jako jsou vzdálené hvězdy. Avšak Slunce nám nabízí jinou možnost, jak měřit tok záření, a to přímým měřením dopadené energie, kterým zahřívá předměty na Zemi. S tím, jak Slunce ohřívá svými paprsky, máme všichni bezprostřední zkušenost a naším úkolem bude tyto zkušenosti fyzikálně uchopit, popsat a pochopit.

Princip měření sluneční konstanty je vskutu jednoduchý. Mějme destičku z dobře tepelně vodivého materiálu o měrné tepelné kapacitě  $c$  a hmotnosti  $m$ . Pokud ji vystavíme slunečním paprskům pak se teplota materiálu destičky za nějaký čas zvětší řekněme o  $\Delta T$  stupňů. Vnitřní energie destičky se tak zvětší o

$$\Delta E = mc\Delta T. \quad (8.1)$$

Pokud zaznamenaníme časový interval  $\Delta t$ , v němž provádíme měření, a plocha destičky je  $\Delta S$ , můžeme snadno určit tok záření dopadající na jednotkovou plochu za jednotku času

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = mc \frac{\Delta T}{\Delta S \Delta t}. \quad (8.2)$$

Tato veličina měřená mimo atmosféru se označuje jako sluneční konstanta a má význam energie dopadající ze Slunce na jeden metr čtvereční za sekundu. V soustavě jednotek SI je její hodnota přibližně  $1.4 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$ . Pro tuto veličinu (konstantu) neexistuje žádný všeobecně přijímaný symbol.

Princip měření je tedy skutečně prostý, musíme se ovšem vypořádat s celou řadou nežádoucích faktorů ovlivňujících samotné měření. Jde především o tepelné ztráty, nedokonalost detektoru a neznámou tepelnou kapacitu bolometru.

## 8.2 Bolometr

Zařízení, jímž se měří tok záření bez ohledu na jeho vlnovou délku se nazývá bolometr. Jako jednoduchý bolometr může sloužit kus dobře tepelně vodivého materiálu, který je ze strany, na kterou má dopadat záření, vhodným způsobem začerněný. Dobrým příkladem bolometru je malá měděná destička, na níž je z jedné strany nanесena matná černá barva. Měď nebo slitina mědi zajistí rychlé vyrovnání teplot v různých částech plíšku. Matná černá barva pak absorbuje prakticky všechno dopadené záření. V praxi se schopnost absorpce měří prostřednictvím emisivity materiálu pyrometrem. Pro běžně dostupnou černou matnou barvu je experimentálně otestováno, že absorpce je blízka dokonalé (v rámci měřících chyb na úrovni několika procent).

Samotná konstrukce bolometru pak spočívá ve vhodné izolaci čidla od okolí, šikovém připevnutí teploměru a dobrém uchycení tak, aby absorbující plocha byla přesně kolmá ke slunečním paprskům.

## 8.3 Teplota bolometru

Vystavíme-li bolometr slunečním paprskům, začne jeho teplota růst. V ideálním případě by teplota rostla přinejmenším do doby než by překročila teplotu tavení kovu z něhož je složena. Avšak s tímto případem se v reálném světě nesetkáme, neboť horní hranice pro teplotu je dána tepelnými ztrátami bolometru, tedy únikem tepla do okolí konvekci a vyzařováním.

Pro další úvahy označíme teplotu čidla v závislosti na čase  $T(t)$  a jeho celkovou tepelnou kapacitu  $C = mc$ . A to proto, že čidlo může být ze slitiny s nejistým  $c$  a pro naše účely postačí pouze znalost součinu  $mc$ , budeme v dalším uvažovat jen o celkové tepelné kapacitě  $C$ .

Začneme s analýzou jednoduchého případu, kdy uvažujeme systém beze ztrát. Energie dopadající za jednotku času na čidlo (v inženýrské terminologii označovaná jako příkon) nechť je  $E_0$  měřená ve watech (SI). V čase  $t_0$  má čidlo teplotu  $T_0$ . Teplota čidla bude v důsledku dopadajícího záření růst s časem podle následující diferenciální rovnice, jež pochází z limitního přechodu



vztahu (8.2), ve kterém je zavedeno označení  $C_s \equiv mc / \Delta S$ :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{E_0}{C_s}. \quad (8.3)$$

Řešením této rovnice se započítáním počáteční podmínky

$$T(t = 0) = T_0 \quad (8.4)$$

je lineární funkce

$$T = \frac{E_0}{C_s}(t - t_0) + T_0. \quad (8.5)$$

Sklon přímky reprezentující řešení je úměrný množství dopadající energie a ploše čidla (čím větší čidlo a čím víc energie, tím je teplejší) a nepřímo úměrná tepelné kapacitě čidla. Výsledek nám předpovídá rozumné a ze zkušenosti očekávané řešení, avšak je zřejmé, že teplota nemůže růst do nekonečna.

### Ztráty vedením

Jakmile se teplota čidla začne lišit od teploty okolí, část absorbované energie uniká různými fyzikálními mechanismy do okolí jako důsledek druhého termodynamického zákona. Máme tak dva toky energie. První nám dodává energii ze Slunce a tím zvyšuje teplotu čidla. Druhý naopak teplotu čidla snižuje díky tepelným ztrátám. Zkusíme uvážit jak se projeví oba mechanismy na výsledné teplotě.

Proč vlastně tyto ztráty vnikají a jak je matematicky popíšeme? V principu, jde o jednu z aplikací empirického elementárního zákona tepelné vodivosti, který říká, že přenesené teplo přes izolující vrstvu závisí na materiálu prostřednictvím součinitele tepelné vodivosti  $\lambda$ , je úměrné rozdílu teplot, dotykové ploše  $S'$  a nepřímo úměrné její tloušťce  $d$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\lambda S'}{d}(T - T'). \quad (8.6)$$

Tepelnou vodivost materiálu a komplikovaný geometrický tvar tepelné izolace kolem bolometru zahrnujeme do konstanty  $a$  ( $a > 0$ ), přičemž předpokládáme, že se tvar ani materiálové charakteristiky izolace v průběhu měření nemění. Ztráty tak bereme úměrné rozdílu teploty ohřívaného materiálu a teploty okolí  $T'$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = a(T - T'), \quad (8.7)$$

jak nám teorie vedení tepla doporučuje.

S uvážením tepelných ztrát se tak dostáváme k rovnici

$$\frac{dT}{dt} = \frac{E_0}{C_s} - \frac{a}{C_s}(T - T'), \quad (8.8)$$

při počáteční podmínce (8.4). Jde o nehomogenní lineární diferenciální rovnici, jak snadno nahlédneme po úpravě na tvar

$$\frac{dT}{dt} + \frac{a}{C_s} T = \frac{E_0}{C_s} + \frac{a}{C_s} T'. \quad (8.9)$$

Při jejím řešení postupujeme standardním způsobem. Nejprve najdeme řešení homogenní rovnice:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{a}{C_s} T = 0, \quad (8.10)$$

jež je tvaru

$$T = Ae^{-at/C_s}, \quad (8.11)$$

kde jsme zavedli integrační konstantu  $A$ . Řešení nehomogenní rovnice získáme jako součet řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení. Partikulární řešení můžeme hledat například pomocí metody variace (integrační) konstanty. Do nehomogenní rovnice tak dosadíme partikulární řešení, v němž považujeme integrační konstantu za parametr:

$$T = A(t)e^{-at/C_s}. \quad (8.12)$$

Přímé dosazení (8.12) do (8.9) a několik úprav dává

$$\frac{dA}{dt} = \left( \frac{E_0}{C_s} + \frac{a}{C_s} T' \right) e^{at/C_s}, \quad (8.13)$$

a integrace toho výrazu

$$A = \left( \frac{E_0}{C_s} + \frac{a}{C_s} T' \right) \int_0^t e^{a\tau/C_s} d\tau \quad (8.14)$$

pak dává

$$A = \left( \frac{E_0}{a} + T' \right) \left( e^{at/C_s} - 1 \right). \quad (8.15)$$

Dosazení  $A$  do (8.12) dává partikulární řešení

$$T_p = \left( \frac{E_0}{a} + T' \right) \left( 1 - e^{-at/C_s} \right). \quad (8.16)$$

Součet obecného (8.11) a partikulárního řešení s uvažováním počáteční podmínky (8.4) vede k řešení rovnice (8.8):

$$T = T_0 e^{-at/C_s} + \left( \frac{E_0}{a} + T' \right) \left( 1 - e^{-at/C_s} \right). \quad (8.17)$$

Ke stejnému řešení se dá dojít i jiným matematickým postupem metodou separace proměnných.

Je až s podivem, jak se taková banální věc dokáže zkomplikovat. Zkusme se tedy zamyslet nad tímto řešením.

V častém případě, kdy začínáme měřit z „klidu“, kdy teplota čidla je na teplotě okolí, platí podmínka  $T_0 = T'$ . V tom případě se řešení zjednoduší na

$$T = T_0 + \frac{E_0}{a} \left(1 - e^{-at/C_s}\right). \quad (8.18)$$

Řešení beze ztrát můžeme aproximovat tečnou v počátku. Derivace v počátku (pro  $t = 0$ ) je

$$\frac{dT}{dt} = \frac{E_0}{C_s} + \frac{a}{C_s} (T' - T_0), \quad (8.19)$$

případně pro  $T_0 = T_x$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{E_0}{C_s}. \quad (8.20)$$

Rovnice tečny v počátku tak je

$$T = T_0 + \left[ \frac{E_0}{C_s} + \frac{a}{C_s} (T' - T_0) \right] (t - t_0) \quad (8.21)$$

jež je pro  $T_0 = T_x$  totožná s (8.5).

Řešení (8.17) je obecné řešení udávající chování teploty bolometru na který dopadá záření a jež má ztráty. Při jakémkoli praktickém experimentu v uspořádání ekvivalentní s naším, bude mít řešení právě tento tvar. Uplatnění tak nalézá v řadě praktických technických oborů.

Tvar řešení se zdá být mnohem lépe vystihující reálnou situaci. Především v případě, kdy měříme velmi dlouho (tedy provedeme limitní přechod  $t \rightarrow \infty$ ) bude teplota konstantní a bude se udržovat na hodnotě (k tomuto výrazu se můžeme dostat buď limitním přechodem v (8.17) nebo přímo z (8.8))

$$T \rightarrow \frac{E_0}{a} + T'. \quad (8.22)$$

To znamená, že bolometr bude v termodynamické rovnováze s okolím, a dopadající energie bude přesně krýt tepelné ztráty. Její hodnota ovšem záleží na zákonu ochlazování a bude se lišit pro náš případ a pro případ, kdy budeme uvažovat i ztráty zářením.

## 8.4 Tepelná kapacita bolometru

Při výpočtu sluneční konstanty hraje důležitou roli tepelná kapacita bolometru. Její měření nám ovšem může přinést horké chvílky. Především klasická kalorimetrická metoda, kdy se vhodně smíchávají různě zahřáté kapaliny, je neuvěřitelně necitlivá a tak v rámci chyb může tepelná kapacita vyjít i záporně.

Další z méně vhodných metod je vážení materiálu bolometru a odhadování měrné tepelné kapacity ze směsy materiálů z nichž je bolometr sestaven.

Proto se budeme snažit použít opět metodu založenou na vztahu (8.1). Experiment musíme uspořádat tak, že bolometru umístěném v kalorimetru (nebo jinak dobře izolovaném systému) budeme dodávat definované množství energie a budeme sledovat, jak se přitom mění teplota. Nejjednodušší způsob dodání definovaného množství tepla je ohřívání bolometru odporovým drátem nebo například žárovíčkou. V takovém případě je energie dodaná za čas  $\Delta t$  do dobře izolovaného systému úměrná proudu  $I$  a napětí  $U$ .

$$\Delta E = UI\Delta t. \quad (8.23)$$

Určení tepelné kapacity je pak triviální:

$$C = \frac{UI\Delta t}{\Delta T}. \quad (8.24)$$

Nesmíme ovšem přitom zapomenout, že jak čidlo tak i kalorimetr, ve kterém provádíme měření má jistou tepelnou kapacitu a tak musíme nechat zahřívát jak kalorimetr s bolometrem tak i bez. Rozdíl mezi těmito kapacitami pak udává skutečnou kapacitu bolometru.

Měření je opět výhodné provádět jako měření časové závislosti teploty. Takto můžeme eliminovat přechodové jevy při počátku měření.

## 8.5 Atmosferická extinkce

Ze zkušenosti víme, že Slunce nízko nad obzorem zahřívá mnohem méně než Slunce vysoko na obloze. Jde o důsledek rozptylu a absorpce světla (souhrně nazývané extinkce) v atmosféře Země. Právě měření sluneční konstanty může sloužit na kvantitativní popsání extinkce. Budeme-li měřit tok energie ze Slunce přes různě tlustou vrstvu atmosféry, můžeme ji popsat.

## Kapitola 9

# Barevný diagram hvězdokupy

---

Zadání: **Barevný diagram hvězdokupy**

Sestrojte barevný diagram hvězdokupy z pozorování.

Podle modelů vykreslete teoretické isochrony.

Odhadněte stáří hvězdokupy.

Odhadněte vzdálenost hvězdokupy.

Odhadněte chemické složení hvězdokupy.

### 9.1 HR diagram

Hertzsprung–Russellův (HR) diagram zobrazuje závislost mezi spektrálním typem a svítivostí hvězdy pro různé typy hvězd. Pomocí něj můžeme snadno a názorně roztřídit velké množství dnes známých typů hvězd. Je hlavní pomůckou při studiu vývoje a rozložení hvězd. Stejně tak při studiu otevřených i kulových hvězdokup. Podrobnosti kolem interpretace jednotlivých částí HR diagramu lze nalézt v Mikulášek (2000)<sup>1</sup>.

Původní diagram byl sestaven jako závislost (vizuální) absolutní magnitudy hvězd na jejich spektrální třídě. V současné době se již tento způsob konstrukce používá zřídka. V zásadě se lze dnes setkat se dvěma základními typy diagramů:

- teoretický HR diagram,

---

<sup>1</sup>Mikulášek, Z.: Úvod do Fyziky hvězd a hvězdných soustav, MU, Brno 2000

- barevný HR diagram.

Pokud sestrojujeme teoretický HR diagram, pak vynášíme závislost celkové svítivosti na efektivní teplotě hvězdy. Obě osy jsou přitom logaritmické. Důvodem je této volby je skutečnost, že obě veličiny přímo vystupují v modelech hvězd. Existuje sice těsná závislost mezi svítivostmi a absolutními magnitudami a mezi teplotou a spektrální třídou, avšak přímým použitím svítivosti a teplot, se můžeme obejít bez komplikovaných modelů hvězdých atmosfér, případně nežadoucích zkreslení způsobeného okolím nebo pozorovací aparaturou.

## 9.2 Barevný diagram

Ještě komplikovanější, pro praktickém zpracování, je určení spektrální klasifikace tisíců hvězd ve hvězdokupách, či jen pořízení jejich spekter i pro ty nejslabší hvězdy. V moderní době se tak pro praktické sestrojení místo spektrální klasifikace používají barevné indexy. Ty se pak společně s měřenými magnitudami použijí na konstrukci barevného diagramu (color – magnitude diagram, CMD). Mezi barevným indexem a teplotou totiž existuje pro hvězdy vyzařující jako absolutně černé těleso jistá relace. Barevný index je definován jako rozdíl magnitud ve dvou filtrech nebo též jako logaritmus poměru toků přes dané filtry. Řekněme, že při měření použijeme filtry  $R$  a  $V$ . Pak barevný index definujeme jako

$$V - R = -2.5 \log_{10} \frac{\int_0^\infty I(\lambda, T) T_V(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty I(\lambda, T) T_R(\lambda) d\lambda}, \quad (9.1)$$

kde jsme propustnosti obou filtrů označily funkcemi  $T$  a spektrum hvězdy jako funkci  $I$ .

Přestože výraz vypadá poměrně komplikovaně, lze jej alespoň numericky vyčíslit a dostat tak přímou souvislost mezi efektivní teplotou hvězdy a jejím barevným indexem.

Na základě těchto úvah pak můžeme porovnat teoretický HR diagram vypočtený z obecných vlastností hvězd a naměřený barevný diagram. Jejich porovnáním pak můžeme dokonce zjistit důležité vlastnosti pozorovaného objektu.

## 9.3 Vyhodnocení měřených snímků

Vyhodnocení se opírá o kapitulu o Munipacku ???. Přirozeně je ovšem možné použít jakýkoli jiný software s analogickou funkcí.

Nechť máme snímky uloženy v adresářích a souborech `/obs/20070313/m37-*[V,R].fits`, `/obs/20070313/dark/d30-*[V,R].fits`, `/obs/20070313/flat/flat-*[R,V].fits`, `/obs/20070313/flat/d7-*[V,R].fits`. Pak základní redukce jako vytvoření

průměrného temného snímku, průměrného flat-fieldu a oprava originálních obrázků, je uskutečněna prostřednictvím příkazů:

```
> cd pracovni_adresar
> ls /obs/20070313/dark/d30_*.fits | mdark @ robust=y mask=d30.fits
> ls /obs/20070313/flat/d7_*.fits | mdark @ robust=y mask=d7.fits
> ls /obs/20070313/flat/flat_*[R,V].fits | darkbat @ dark=d7.fits mask=$
> ls flat_*V.fits | aflat @ mask=flatV.fits
> ls flat_*R.fits | aflat @ mask=flatR.fits
> ls /obs/20070313/m37_*[V,R].fits | darkbat @ dark=d30.fits mask=$
> ls m37_*V.fits | flatbat @ flat=flatV.fits mask=.
> ls m37_*R.fits | flatbat @ flat=flatR.fits mask=.
```

Tyto snímky je třeba předběžně změřit k tomu, aby jsme z nich mohli sestrojit výsledný kombinovaný snímek:

```
> qmphot.pl -i *.fits
> ls m37_*.fits | muniphot @ com=com
> edit match.opt # zmenit: Maximum read stars          = 20
                        #          Max. identification stars = 5
> ls m37_*.SRT | munimatch -t @ ref=m37_01R.SRT
```

Po úspěšném vykonání tohoto zpracování už můžeme přistoupit k vytvoření složeného snímku a jeho fotometrii:

```
> ls m37_*V.fits | kombine @ norm=mean mask=m37_V.fits
> ls m37_*R.fits | kombine @ norm=mean mask=m37_R.fits
> ls m37_[V,R].fits | muniphot @ com=com
> ls m37_[V,R].SRT | munimatch @ ref=m37_V.SRT
```

Výsledky můžeme nalézt v souborech m37\_V.MAT a m37\_R.MAT. Jde o dvě velké tabulky s fotometrií obou snímků. První dva řádky v této tabulce jsou hlavička s údaji jako je, rozměr obrázku, velikost první clonky atd. Pak následují řádky se samotnou fotometrií. Každá hvězda je na dvou řádcích. Na prvním řádku najdeme pořadové číslo hvězdy, polohu jejího středu v pixelech a instrumentální magnitudy ve 12ti clonkách. Na druhém řádku je odhad oblohy v prstenci kolem hvězdy, jeho chyba a odhad třetího momentu gaussova rozdělení oblohy, za nimi následují chyby magnitud v příslušných clonkách. Soubor tak může například vypadat takto:

NL	NX	NY	LOWBAD	HIGHBAD	THRESH	AP1	PH/ADU	RNOISE
2	765	510	56.6	65000.0	92.91	2.00	2.30	15.00
626	174.737	382.215	11.626	11.492	11.423	11.392	...	
	168.985	12.37	0.00	0.002	0.001	0.001	0.001	...

Dozvíme se tak, že první hvězda je na souřadnicích  $x = 174.737$ ,  $y = 382.215$  a její instrumentální magnituda v první clonce je  $11.626 \pm 0.002$ . Pozadí kolem této hvězdy bylo  $168.985 \pm 12.37$  ADU.

Oba soubory mají ztotožněné hvězdy tak, že na stejných řádcích mají stejné hvězdy, jen v jiných filtrech. Souřadnice si ale odpovídat nemusí. Občas se může stát, že záznam pro určitou hvězdu chybí, to je známka toho, že hvězda nalezená v jednom filtru nebyla nalezena v druhém.

Šikovný prográmeček dokáže ze souborů `.MAT` vytáhnout jen magnitudy v libovolné clonce které jsou potřebné na sestavení barevného diagramu.

Kalibrace takto získaných instrumentálních magnitud je popsána v odstavci 5.6. Jako katalog použijeme nějaký typu GSC nebo USNO. Bude pak vhodné použít několik hvězd, z důvodů větší přesnosti, avšak nelze čekat, že se takto dostaneme na přesnost větší než několik desetin magnitudy.

## 9.4 Teoretický barevný diagram

Na konstrukci teoretického barevného diagramu můžeme použít dva postupy. První je výpočet modelů hvězd pro různé počáteční hmoty. Druhý způsob je použít již existující modely. Jedny takové modely byly publikované v článku Bertelli et al.(1994).<sup>2</sup> Data k těmto modelům jsou dostupná na adrese:

`ftp://cdsarc.u-strasbg.fr/pub/cats/J/A+AS/106/275`

v podobně rozsáhlých tabulek s popisem. Jejich vynesením do stejného grafu jsme pak schopni Odpovědet na základní otázky uvedené v zadání.

CVS tag: \$Id\$

---

<sup>2</sup>Theoretical isochrones from models with new radiative opacities Bertelli G., Bressan A., Chiosi C., Fagotto F., Nasi E, Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 106, 275 (1994)



## Kapitola 10

# Atmosférická extinkce

Světlo vzdálených nebeských objektů je při průchodu atmosférou pozměněno. Dochází k jeho zeslabení a ke změně jeho spektrálního složení. To ovlivňuje měřené hodnoty různých fyzikálních veličin. Pro pozorovatele na zemském povrchu je proto důležité pochopit a popsat tyto mechanismy tak, aby bylo možné tyto nežádoucí faktory odstranit.

---

**Zadání: Určení extinkční přímky**

Zjistěte hodnotu extinkce z pozorování jednoho objektu při změně jeho zenitové vzdálenosti.

### 10.1 Extinkce

Pojmem atmosférická extinkce se obecně označuje rozptyl a pohlcování světla v zemské atmosféře. Extinkce způsobuje to, že se nám objekty pozorované přes atmosféru jeví slabší, než jsou ve skutečnosti a často mají jiné barvené složení světla. To je důsledek právě extinkce. Jak barevná změna světla, tak zeslabení, jsou jevy jež jsou nám důvěrně známé z každodenního života. Zeslabení můžeme cítit doslova na vlastní kůži, kdy nám ji při průchodu meridiánem Slunce rozpálí, kdežto při východu nebo západu můžeme jeho paprsky sotva cítit. Extrémním případem pak samozřejmě je zcela zatažená obloha. Barevné změny pak známe jako zčervenání nebeských objektů poblíž horizontu. V minulém století, kdy bylo ještě kouření běžným jevem, se s ním mohli setkat také návštěvníci restaurací, které byly vyplněny modrým kouřem. Rozptyl světla ve vzduchu je zodpovědný za to, že hrany stínů nejsou ostré jak by to bylo ve vzduchoprázdnu.

Pochopení jednoduchého mechanismu extinkce nás může vést k metodě vhodné na měření extinkce a naopak pokud bude tato metoda funkční, tak k ověření naší představy o extinkci. Představme si, že vzduch je složen s

částic o poloměru  $r$ , které mají účinný průřez  $\sigma = \pi r^2$ . Pokud si nad námi vyčleníme ve vzduchu pomyslný sloupec o ploše čtverečního metru a výšce  $x$ , pak foton přicházející z vnějšku před sebou uvidí zastíněnou plochu  $\sigma n x$ . Symbolem  $n$  jsme označili počet částic v tomto sloupci na jednotkovou délku (jenž můžeme získat z hustoty) přičemž předpokládáme, že  $n$  se s výškou nemění. Pravděpodobnost, že foton projde atmosférou o tloušťce  $dx$  a nezmění svůj směr, je daná poměrem zastíněné plochy ke krychlovému metru

$$\frac{\sigma n dx}{1 \text{ m}^3}. \quad (10.1)$$

Na druhé straně, poměr počtu pro nás ztracených fotonů  $dN$  k celkovému počtu  $N$  je úměrný právě této zastíněné ploše

$$-\frac{dN}{N} = \sigma n dx \quad (10.2)$$

Dostali jsme se k jednoduché diferenciální rovnici jejímž řešením dostaneme závislost počtu fotonů, které pronikly atmosférou o tloušťce  $x$ . Je-li jich před vstupem  $N_0$  pak na povrch dopadne celkem

$$N = N_0 e^{-\sigma n x} \quad (10.3)$$

fotonů. Vzdálenost  $x$  udává dráhu, kterou prošlo světlo v absorbujícím prostředí. Množství světla, které měříme našimi přístroji je přímo úměrné počtu fotonů, které dopadnou na náš detektor. Můžeme tedy užít přímo  $N$  k odhadu změny magnitudy měřeného objektu:

$$m - m_0 = -2.5 \log \frac{N}{N_0} \quad (10.4)$$

Drobné úpravy a substituce

$$c \equiv \frac{2.5}{\ln 10} \sigma n. \quad (10.5)$$

vedou k jednoduché úměře

$$m = m_0 + cx. \quad (10.6)$$

## 10.2 Vzdušná hmota

Pokud by jsme shrnuly všechny částice podél paprsku nějaké hvězdy, která je právě v zenitu, a tyto částice rozptýlily s hustotou jakou má vzduch při zemském povrchu, dostaneme sloupec s konstantní hustotou a jistou výškou. Jak bude tato hvězda klesat k obzoru, bude paprsek procházet stále delší dráhou. Když opět srovnáme hustoty pak pomyslný sloupec bude obsahovat

víc částic a pokud by měl mít stejnou hustotu jaká je u povrchu, musí být sloupec delší. Pokud by jsme nebrali v úvahu zakřivení zemského povrchu, pak poměr mezi délkou těchto pomyslných sloupců při zenitové vzdálenosti  $z$  a v zenitu  $z_0$  bude

$$\frac{x}{x_0} = \frac{\cos z_0}{\cos z}. \quad (10.7)$$

Měříme-li délku jednotlivých sloupců relativně k délce sloupce v zenitu kde  $z_0 = 0$ , pak pokládáme  $x_0 \equiv 1$  a definujeme

$$X \equiv \frac{1}{\cos z}. \quad (10.8)$$

$X$  se tradičně nazývá vzdušná hmota. Její název svádí k tomu, že jde o hmotu vzduchu. V podstatě by jsme ji mohli snadno vypočíst za předpokladu, že by jsme ve zmíněném sloupci hmotu jedné částice položili rovnou například hmotě dusíku, ze kterého je převážně vzduch složen. Protože ale měříme délky a to navíc relativně k zenitu, je  $X$  bezrozměrná relativní veličina se zajímavým historickým názvem. Závislost mezi instrumentální magnitudou  $m$  a vzdušnou hmotou  $X$  se označuje jako extinkční přímka

$$m = m_0 + kX. \quad (10.9)$$

Jde přitom jen o vztah (10.6) pro transformovanou nezávislou proměnnou. Význam parametrů této přímky lze snadno uhodnout.  $m_0$  označuje mimoatmosférickou magnitudu měřeného objektu (tedy magnitudu neztlumenou o při průchodu atmosférou neboli před tím než vstoupí do atmosféry). Sklon přímky  $k$  je tradiční označení pro extinkční koeficient. Extinkční koeficient udává kolik světla se ztratí při průchodu atmosférou. Pokud by byl například  $k = 0.3$  pak je světlo v zenitu ztlumeno asi o 30%.

Vztah (10.8) funguje přibližně pro  $z < 60^\circ$  (objekt musí být víc jak třicet stupňů nad obzorem, tedy platí pro méně jak dvě vzdušné hmoty). Pokud pozorujeme níže, musíme vzít v úvahu i zakřivení zemského povrchu a použít přesnější aproximaci. Všeobecně se pro  $z < 85^\circ$  používá vztah (Young, Irvine: AJ,72,945,(1967)):

$$X = \frac{1}{\cos z} \left[ 1 - 0.0012 \left( \frac{1}{\cos^2 z} - 1 \right) \right] \quad (10.10)$$

### 10.3 Určení extinkce z pozorování

V principu lze extinkci určit dvěma způsoby. První způsob vychází z pozorování jednoho objektu v různých výškách nad obzorem (metoda Bouguerových přímek). Druhý způsob pak spoléhá na to, že známe mimoatmosférickou magnitudu alespoň dvou objektů v různých výškách nad obzorem a na základě měřené instrumentální magnitudy můžeme vypočíst

extinkční koeficient. Zkusíme prakticky vyhodnotit pozorování časové řady při východu nebo západu hvězdy.

Snímky můžeme vyhodnotit například prostřednictvím Munipacku (kap. ??).

Nechť máme snímky uloženy v adresářích a souborech `/obs/20080226/denebola_*.fits` (vlastní pozorování jasné hvězdy), `/obs/20080226/d[1,7]_*.fits` (temné snímky pro flat-field v trvání 7 s a 1 s pro Denebolu) a `/obs/20080226/f_*.fits` (flat-fieldy pro příslušný filtr). Základní redukce (odečtení temného snímku a korekce na flat-field provedeme následujícími příkazy:

```
> cd pracovni_adresar
> ls /obs/20080226/d1_*.fits | mdark @ robust=y mask=d1.fits
> ls /obs/20080226/d7_*.fits | mdark @ robust=y mask=d7.fits
> ls /obs/20080226/f_*.fits | darkbat @ dark=d7.fits mask=$
> ls flat_*.fits | aflat @ mask=flatV.fits
> ls /obs/20080226/denebola_*.fits | darkbat @ dark=d1.fits mask=$
> ls denebola_*.fits | flatbat @ flat=flatV.fits mask=.
```

Vlastní fotometrie je už jen dílem dvou příkazů

```
> qmphot.pl -i *.fits
> ls denebola_*.fits | muniphot @ com=com
```

Předpokládáme, že na snímcích je jen jedna jasná hvězda. Pečlivým prohlédnutím některého ze snímků zjistíme její poloměr, prohlédnutím souboru `mphoto.opt` zjistíme pořadové číslo clonky a pak jej použijeme v `col=` (blíže viz kapitola 9).

```
ls denebola_*.fits | munilist @ suf=SRT -of col=11 4 > denebola.dat
```

V souboru `denebola.dat` pak najdeme na čas počátku expozice (prvních šest čísel), expoziční dobu, použitý filtr, Juliánské datum středu expozice a instrumentální magnitudu společně s chybou (poslední dva sloupce). Z těchto údajů, znalosti zeměpisných souřadnic a souřadnic hvězdy už můžeme snadno spočítat vzdušnou hmotu a určit extinkční přímku.

Mimořádně důležité je v tomto určení obou parametrů včetně jejich nejistot. Důvodem je velmi obvykle malý sklon přímky, který může silně ovlivnit odhad nejistoty obou parametrů.

## Kapitola 11

# Barevná kalibrace fotometrického systému

Chceme-li porovnávat naše měření, s daty získanými na jiných observatořích, musíme naši aparaturu zkalibrovat. Pod fotometrickou kalibrací se obvykle myslí nalezení transformačních vztahů pro instrumentální a katalogové magnitudy.

---

Zadání: **Barevná kalibrace fotometrického systému**

- Poříd' te kvalitní snímky vhodného pole s kalibračními hvězdami v několika filtrech.
- Snímky zpracujte a získejte instrumentální magnitudy pro několik hvězd o různých barevných indexech.
- Vyneste do grafu závislosti  $m_v - M_V$  na  $M_B - M_V$ .
- Vyneste do grafu závislosti  $m_b - m_v$  na  $M_B - M_V$ .
- Určete kalibrační transformace mezi instrumentálními a standardními magnitudami podle vztahů (11.10) a (11.9).

Tato úloha navazuje na metody z kapitoly ??.

### 11.1 Fotometrie ve více barvách

Lidské oko vnímá barevně jen nejjasnější hvězdy. Je to proto, že je vnímáme čípky, kombinující světlo z červené, zelené a modré části spektra jako danou barvu. U slabších objektů už vnímáme jen jestli jsou jasnější nebo slabší a to

navíc jen relativně. Běžná CCD kamera, dříve používaný fotografický materiál nebo fotonásobič, poskytují také jen černobílý obraz. Na snímcích tak můžeme přesně změřit jasnost různých objektů, ale nezjistíme nic o průběhu jejich spektra, o tom jestli více svítí v červené nebo modré barvě. K tomu, aby jsme dostali přibližný průběh spektra, tak musíme získat černobílé snímky z několika filtrů a z nich pak vytvořit barevný obrázek skutečnosti. Protože přitom postupujeme analogicky tomu, jak oko zpracovává děj, často se naznačený postup označuje jako barevná fotometrie a hvězdám různě jasným v různých filtrech se pak říká barevné.

Použití barevné fotometrie v dnešní době snadno dostupných spektroskopů se může zdát krokem zpět. Nicméně existuje několik důvodů, proč se dosud často barevná fotometrie používá. Především je ke získání kvalitního spektra potřeba nesrovnatelně víc záření a tedy mnohem větší přístroj, delší expozice apod. S tím též souvisí změny spektra, které může být podstatně, z téhož důvodu, snazší pozorovat fotometricky než spektroskopicky.

V případě hvězd souvisí teplota přímo s barvou. Žhavé hvězdy s teplotami přes deset tisíc stupňů jsou namodralé, hvězdy kolem pěti tisíc stupňů jsou nazelenalé a chladnější hvězdy pak načervenalé.

## 11.2 Filtry

K tomu, abychom vymezili část spektra, kterou chceme sledovat, tedy obrazně řečeno definovali si příslušnou barvu, potřebujeme filtr, což je optický člen propouštějící jen určitý rozsah vlnových délek. Lidově řečeno, jde o barevné sklíčko, přes které když se podíváme, pak předměty o stejné barvě se nám jeví bílé a jasné, kdežto ostatní barvy jsou velmi tmavé. Takovýto obraz je důsledek vlastností našeho oka porovnávajícího jasné a tmavé věci a to co se nám jeví jasné je jen minimálně ztlumeno filtrem, kdežto jiné barvy jsou ztlumené víc a tedy od nich přichází méně záření a jeví se tak jako tmavé.

## 11.3 Fotometrické systémy

V polovině minulého století zavedli H. L. Johnson a W. W. Morgan fotometrický systém *UBV* na základě pozorování několika vybraných hvězd přes přesně definované filtry s pomocí fotonásobiče. Tento systém se uchytil a byl později rozšířen o další filtry mimo viditelnou oblast spektra do současné podoby *UBVRI* systému.<sup>1</sup> Filtry systému *UBV* byly navrženy tak, aby pokryly základní charakteristiky běžných hvězd a citlivosti užívaných zařízení (*U* má polohu Balmerova skoku, *B* odpovídá maximu citlivosti fotografické emulze a *V* pak lidskému oku, *R* citlivosti CCD kamery. Pro barevné indexy hvězdy

<sup>1</sup>První rozšíření pochází od Johnsona z konce šedesátých let ještě před vznikem CCD. Neodpovídá tak dokonale citlivosti těchto prvků a tak se lze často setkat s Kron-Causinovým rozšířením s mírně jinak definovanými filtry s označením *UBVR<sub>C</sub>I<sub>C</sub>*.

spektrální třídy A0 platí  $U - B = 0, B - V = 0$ ). Kromě Johnson-Morganova barevného systému se používá řada systémů, které mohou být vhodnějších ke konkrétním účelům (Například pro hvězdy je vhodný ženevský *ubvy*, systém vhodný na pozorování komet atd.). Sami Johnson s Morganem definovali několik jasných hvězd přibližně nulté magnitudy nacházejících se asi po rektascenzi hodině kolem nebeského rovníku. Tyto hvězdy se označují jako primární standardy. Vzhledem ke své jasnosti jsou pro současné citlivé aparatury a velké dalekohledy nepoužitelné. Místo nich jsou dnes *de facto* primárními standardy hvězdy proměřované od počátku 70-tých let Landoltem. Ty lze nalézt na Vybraných polích (SA, selected area, pole používané na počítání hvězd při výzkumu tvaru vesmíru). Hvězdy na těchto polích jsou v rozmezí asi 6 až 16 magnitudy.

V běžné fotometrické praxi pak sáhne buď po Landoltových standardech nebo po dobře proměřeném fotometrickém poli a pak stojíme před problémem jak námi naměřené hodnoty transformovat na hodnotami standardních hvězd. V podstatě to znamená, že v dnešním světě, posedlém standardizací, se snažíme používat stejné míry jako ostatní. Naše výsledky tak můžeme porovnávat s ostatními pozorovateli nebo převést na konvenční fyzikální veličiny.

Otázkou ovšem zůstává, proč by se měl náš systém lišit od standardního? Je to proto, že nemáme přesně stejnou aparaturu, jako měl Landolt nebo Johnson s Morganem. Máme jiný dalekohled, nepatrně jiný průběh filtrů, máme jiný detektor a data vyhodnocujeme jiným způsobem.

## 11.4 Barevné transformace světelných toků

Náš fotometrický systém (CCD kamera, filtry, dalekohled, software) produkuje instrumentální magnitudy v jednotlivých filtrech  $m_u, m_b, m_v, m_r, m_i$ . Pro každou měřenou hvězdu pak dále známe standardní magnitudy  $M_U, M_B, M_V, M_R, M_I$  obvykle z hvězd proměřených Landoltem. Naším cílem je nalezení transformací mezi těmito dvěma sadami čísel tak, aby jsme byly schopni pro neznámý objekt vypočítat z instrumentálních magnitud magnitudy standardní.

Měřený světelný tok  $f(\lambda)$ , který prochází přes náš filtr  $v(\lambda)$  získáme tak, že z celého spektra  $I(\lambda)$  vybereme jen část prostřednictvím tohoto filtru

$$f_v = \int_0^{\infty} I(\lambda)v(\lambda) d\lambda, \quad (11.1)$$

výsledkem je číselná hodnota úměrná počtu dopadnuvších fotonů (energie). Namíříme-li náš dalekohled na standardní hvězdu (proměřenou Landoltem nebo Johnsonem) pak spektrum  $I(\lambda)$  této hvězdy bude stejné. Pokud by jsme měli přesně stejný filtr (přesněji celou aparaturu včetně atmosferických podmínek) pak by naše hodnota přesně odpovídala standardnímu světelnému

toku

$$F_v = \int_0^{\infty} I(\lambda) V(\lambda) d\lambda. \quad (11.2)$$

Obecně ovšem budou průběhy různé  $V(\lambda) \neq v(\lambda)$  a dostaneme tak poněkud jinou hodnotu. Toky  $f_v, F_V$  se budou tím víc lišit, čím odlišnější budou průběhy filtrů. Pokud by byl náš filtr víc centrovaný do modré pak by nám sice  $v(\lambda)$  dal menší číslo, ale naopak sousední  $b(\lambda)$  o něco větší. Je tedy vidět, že kdybychom trochu ubraly z toku  $f_b$  a přidali do  $f_v$ , mohly by jsme se více přiblížit tokům, které odpovídají standardním hodnotám. A právě tyto hodnoty můžeme získat měřením. Nejobecnější kombinace měření toků ve dvou našich a dvou standardních filtrech dostaneme jako jejich lineární kombinaci

$$\begin{aligned} f_b &= E_{bB} F_B + E_{bV} F_V \\ f_v &= E_{vB} F_B + E_{vV} F_V \end{aligned} \quad (11.3)$$

V našem jednoduchém příkladu jsme použili jen dva filtry. V praxi je běžné použití všech dostupných filtrů. Dosáhneme tak přesnější a spolehlivější transformace než v případě dvou filtrů. Úvahy jsou naprosto analogické uvedenému postupu, jen se příslušným způsobem zvětší transformační matice.

Známe-li hodnoty toků v obou filtrech, je snadné získat transformační vztahy mezi našimi a standardními toky řešením jednoduché soustavy rovnic (11.3). Předtím však musíme uvážit, jak se tato soustava změní v případě, že nepracujeme v tocích, ale v konvenčně užívaných magnitudách.

## 11.5 Barevné transformace magnitud

Postupujeme tak, že nejprve upravíme rovnici pro  $V, v$  filtry do tvaru

$$\frac{f_v}{F_V} = E_{vV} + E_{vB} \frac{F_B}{F_V}, \quad (11.4)$$

a zlogaritmuje

$$\log_{10} \frac{f_v}{F_V} = \log_{10} \left[ E_{vV} + E_{vB} \frac{F_B}{F_V} \right]. \quad (11.5)$$

Dále se soustředíme na řešení v případě, že platí podmínky  $E_{vV} \approx 1$  a  $E_{vB} \ll 1$ . Obě jsou v praxi splněny tím, že výrobci se snaží co nejvíce přiblížit standardním filtrům. Pro běžné objekty (tedy nejen hvězdy) je navíc poměr  $F_B/F_V$  řádově jednotkový. Pak tedy dostáváme

$$\log_{10} \frac{F_V}{f_v} = \log_{10} E_{vV} + \log_{10} \left[ 1 + \frac{E_{vB}}{E_{vV}} \frac{F_B}{F_V} \right] \quad (11.6)$$



a můžeme zde použít, s dostatečnou přesností, aproximací desítkového logaritmu v okolí jedničky  $\log_{10}(1 + \epsilon) \approx \epsilon / \ln 10$ :

$$\log_{10} \frac{f_v}{F_V} = \log_{10} E_{vV} + \frac{1}{\ln 10} \frac{E_{vB}}{E_{vV}} \frac{F_B}{F_V}. \quad (11.7)$$

a připravíme pro Pogsonovu rovnici

$$-2.5 \log_{10} \frac{f_v}{F_V} = -2.5 \log_{10} E_{vV} - \frac{2.5}{\ln 10} \frac{E_{vB}}{E_{vV}} \frac{F_B}{F_V}. \quad (11.8)$$

Člen na levé straně (11.8) identifikujeme jako  $m_v - M_V$ , první člen na pravou označíme  $m_{vV} \equiv -2.5 \log_{10} E_{vV}$  a ve druhém pak konstantou násobený přibližný výraz pro barevný index<sup>2</sup>

$$-\frac{2.5}{\ln 10} \frac{E_{vB}}{E_{vV}} \frac{F_B}{F_V} \equiv e_{vB}(M_B - M_V).$$

Tyto substituce vedou k jednoduchému aproximativnímu vztahu mezi standardními a instrumentálními magnitudami

$$m_v - M_V = m_{vV} + e_{vB}(M_B - M_V). \quad (11.9)$$

Hodnoty magnitud  $m_v$  změříme,  $M_V, M_B$  jsou pak známé kalibrační magnitudy. Koeficienty  $m_{vV}, e_{vB}$  jsou hledané transformační konstanty. Tento vztah dává i návod, jak je určit. Stačí si vybrat vhodné pole s různě barevnými hvězdami, jak se metaforicky označují hvězdy s různým barevným indexem. Pak vyneseme závislost rozdílu mezi standardní a měřenou magnitudou na barevném indexu hvězdy. Hledaná závislost je přímka a její dva parametry udávají právě  $m_{vV}, e_{vB}$ . Parametr  $m_{vV}$  udává relativní posun magnitudového měřítka (v jazyku světlených toků to udává poměr mezi naším a standardním tokem  $f_v/F_V$ ) a běžně se označuje jako korekce na nulu. Sklon přímky  $e_{vB}$  je úměrný odchylce srovnávaných filtrů. Obvykle dosahuje v absolutní hodnotě pouze několika desetín (což značí, že filtry jsou vyrobené dobře).

Podobné úvahy, které nás dovedli ke vztahu (11.9) pro rozdíl magnitud můžeme dostat i pro barevné indexy. Je snadné odvodit, že pro instrumentální barevný index  $m_b - m_v$  a standardní  $M_B - M_V$  platí relace

$$m_b - m_v = m_{bv} + e_{bv}(M_B - M_V). \quad (11.10)$$

Grafem této závislosti je přímka procházející počátkem (parametr  $m_{bv}$  udávající odchylku od nuly je obvykle poměrně malý) a se sklonem jedna:  $\tan \langle . \rangle = e_{bv} \approx 1$ .

Užití více filtrů vede opět k větší soustavě rovnic. Přesnost transformace v magnitudách v praxi dosahuje několika setin. Pak si můžeme udělat představu o velikosti členu  $e_{vB}$ . Pokud jej zanedbáme, což odpovídá prostému posuvu magnitud, přesnost navázání obvykle klesne na desetiny.

<sup>2</sup>Tato manipulace není zcela exaktní a omezuje rozsah použitelných barevných indexů. Používáme ji proto, aby nás přivedla ke konvenčnímu tvaru transformace.

## 11.6 Falešné barvy

Při úvahách nad vztahem (11.1) jasně vyplývá, že jsme předpokládali, že původní záření je filtrováno jen naším filtrem. To je ovšem jen ideální případ, v praxi je barva světla ovlivněna už při průchodu mezihvězdným prostředím (to nám při kalibraci ovšem nevadí), při průchodu atmosférou a nakonec dalekohledem. Dalekohled přidává jakoby další filtr, který je ovšem konstantní a nerozeznatelný od filtru skutečného.

Ovšem deformace spektra v atmosféře je proměnná a nezanedbatelná. Pokud atmosferické zabarvení, které odráží aktuální meteorologickou situaci a výšku objektu nad obzorem, ignorujeme, zkalibrujeme náš snímek jen pro konkrétní pozorování. I to už ovšem může být užitečné a pomůže nám vyřešit daný úkol.

V případě, že nemůžeme ignorovat stav atmosféry, musíme ve vzorcích typu (11.9) použít mimoatmosferické instrumentální magnitudy. Ty dostaneme z instrumentálních magnitud s uvážením atmosferické extinkce.

Vztah (11.3) lze psát v ekvivalentním tvaru

$$\begin{aligned} F_B &= E_{Bb}f_b + E_{Bv}f_v, \\ F_V &= E_{Vb}f_b + E_{Vv}f_v, \end{aligned} \quad (11.11)$$

který vede stejnými úvahami k

$$M_V - m_v = m_{Vv} + e_{VB}(m_b - m_v). \quad (11.12)$$

Změnila se tedy nezávislá proměnná. Z matematického hlediska jde o ekvivalentní přístup a měl by vést ke stejným hodnotám. Avšak právě díky atmosferické extinkci obvykle vede k poněkud jiným výsledkům.

## 11.7 M 67

Jak víme, ideální pro konstrukci kalibrační přímky, je pořídít snímek s několika hvězdami s různými barevnými indexy. Přesně k tomuto účelu se hodí otevřené hvězdokupy, které obsahují množství různě barevných hvězd na malé ploše. Jednou z nejlépe studovaných hvězdokup je M 67 (NGC 2682), která navíc obsahuje známou kalibrační sekvenci.<sup>3</sup>

Zpracování snímků probíhá stejně jako v úloze 9. Po základní kalibraci provedeme fotometrii a snímky z kombinujeme. Kalibraci pochopitelně můžeme provést i na jednom snímku, avšak jejich složením získáváme přesnější hodnoty instrumentálních magnitud. Ty si vypíšeme z fotometrických souborů v dostatečně velké clonce a můžeme použít ve vztazích (11.9) a (11.10).

<sup>3</sup><http://adsabs.harvard.edu/abs/1993AJ....106..181M>

## Kapitola 12

# Plošná fotometrie

Hlavní odlišnost plošné fotometrie od fotometrie bodových zdrojů spočívá v tom, že neměříme celkový tok záření z daného objektu, nýbrž se omezujeme pouze na jeho část. V případě galaxií nás zajímá plošná hustota hvězd na jednotku prostorového úhlu. V případě hvězd jde o tok přes celkový prostorový úhel  $4\pi$ .

$$F(t, A, \nu) = \int_{\Omega'} I(t, A, \nu, \Omega') d\Omega' \quad (12.1)$$

### 12.1 Plošná magnituda

V astronomii se tradičně místo poměrů intenzit (nebo jejich logaritmů) používá na měření relativního toku magnituda definovaná jako

$$m - m_0 = -2.5 \log_{10} \frac{F}{F_0}. \quad (12.2)$$

Tato veličina byla definovaná z historických důvodů pro hvězdy a chceme-li porovnávat i plošné objekty. Musíme zavést analogickou veličinu, kterou definujeme přes poměr toků v jednotkovém prostorovém úhlu jako

$$\mu - m_0 = -2.5 \log_{10} \frac{f}{F_0}. \quad (12.3)$$

kde  $f(\alpha, \delta)$  je obvykle bráno jako tok z prostorového úhlu se stranou jedné úhlové vteřiny ( $1''$  arcsec):

$$f(\alpha, \delta) = \int_{\alpha', \delta'} I(t, A, \nu, \alpha', \delta') d\alpha' d\delta'. \quad (12.4)$$

Plošná magnituda se obvykle udává, poněkud nepřesně, jako magnituda (vztažená) na čtvereční vteřinu.

## 12.2 Radiální profily galaxií

Galaxie jsou plošné objekty složené z mnoha hvězd, které nejsme sto vzájemně od sebe odlišit. Metody měření množství světla jsou proto odlišné od metod vhodných na fotometrii hvězd.

Při studiu plošných jasností eliptických galaxií došel G. de Vacouleur k pozoruhodnému zjištění, že většina galaxií tohoto typu má radiální profil poměrně jednoduchý a lze jej analyticky popsat vztahem, který dnes nese jeho jméno de Vacoulerův profil:

$$\mu(q) = \mu_0 + 8.3268 \left[ \left( \frac{q}{q_0} \right)^{1/4} - 1 \right]. \quad (12.5)$$

Veličiny  $\mu_0, q_0$  jsou efektivní hodnoty parametrů vlastní pro každý objekt. Označíme-li úhlovou vzdálenost od centra  $q$  a vynesme-li si závislost měřené  $\mu$  na vzdálenosti od centra z níž uděláme čtvrtou odmocninu, dostaneme přibližně přímkovou závislost jejíž sklon a poloha mohou sloužit pro určení obou parametrů. Vztah (12.6) je jeden z mnoha empirických zákonů. Obvyklá modifikace spočívá v rozdílné mocnině (Sérsic). Jádra galaxií se často modelují pomocí Hubbleova profilu:

$$f(q) = \frac{f_0}{1 + (q/q_0)^2}. \quad (12.6)$$

V případě galaxií můžeme z měřeného  $\mu$  a známé vzdálenosti odvodit tok ze všech hvězd (objektů) promítnutých v daném směru a studovat tak strukturu galaxií. Studium profilů se například zjistilo, že de Vacoulerův profil dobře popisuje klasické eliptické galaxie (NGC 3379, M87), kdežto trpasličí galaxie (Leo I) se tomuto popisu poněkud vymykají. Další velký problém moderní astrofyziky leží ve středech galaxií, kde tento model selhává úplně a jejichž tvar není doposud ani teoreticky objasněn.

## 12.3 Radiální profily komet

Stejně metody jako v případě galaxií, se dají použít i na profily komet. Komety mají sice zcela jinou fyzikální podstatu, avšak metody určení profilů jsou analogické. Interpretace je ovšem jiná. Světlo z komet je dáno součtem záření od jednotlivých hvězd (případně jiných objektů v galaxii), v případě komet vidíme světlo Slunce odražené na prachu komet (prachová složka) a záření ionizovaného prachu kolem komety (plynná složka).

Přesto se ukazuje, že v řadě případů se dá i koma dobře popsat de Vacoulerovým profilem. Je to pozoruhodné neboť v případě komet profil vzniká jinak. Přitom se předpokládá, že profil u komet vzniká díky neustálé produkci částic s koncentrací  $n$  v centru a ty pak izotropně odlétají do prostoru. Jejich

počet se tak ředí směrem dál od centra podle rovnice kontinuity (ve sférickém případě)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 n v)}{\partial r} = 0. \quad (12.7)$$

Je-li rychlost částic zhruba konstantní a nemění se s časem, pak hustota klesá se druhou mocninou vzdálenosti. Pokud se částice v řídkém prostředí komy nijak nezaclonují (opticky tenké prostředí) a profil se nemění s časem, dostáváme

$$n(\varrho) = \frac{n_0}{\varrho} \quad (12.8)$$

a výsledný průmět počtu částic (z hustoty) do našeho směru dává přímkou v  $\log(\text{mag}) - r$  grafu.

## 12.4 Určení radiálního profilu

### Metoda řezů

Metoda řezů je velmi jednoduchá a spočívá v tom, že pouze vypíšeme hodnoty pixelů ve vhodně zvoleném směru od jádra galaxie. Musíme přitom dávat pozor na případné jasné hvězdy promítající se na obraz galaxie. Daleko od středu je obvykle profil značně ovlivněn šumem. Nesmíme zapomenout odečíst pozadí.

### Metoda prstenců

Je-li obraz galaxie takřka kruhový, je vhodné použít metodu prstenců, která spočívá v tom, že fotometrický střed galaxie obklopíme soustavou prstenců a v každém z nich vypočteme určíme střední hodnotu z hodnot v jednotlivých pixelech. Protože se jen těžko vyhneme kontaminaci jednotlivých prstenců hvězdami, je vhodné střední hodnotu určovat mediánem (nebo ještě lépe robustním průměrem) nebo jednotlivé hvězdy ignorovat.

---

#### Zadání: Profil eliptické galaxie

Úkolem je změřit radiální profil galaxie:

- Získejte snímek vhodné galaxie (ideálně dva — z pozemní i družicové observatoře).
- Zjistěte měřítko snímku a fotometricky jej zkalibrujte.
- Vypočtěte střed galaxie jako fotometrické těžiště.
- Určete radiální profil jako radiální řez nebo pomocí prstenců.



## **Část II**

# **Teoretické úlohy**





## Kapitola 13

# Určení polohy planety

---

Zadání: **Určení polohy planety**

Úkolem je určit polohu planety na obloze následujícími postupy:

- Za pomoci jednoduchého úhloměru změřit úhlovou vzdálenost planety k nejbližším hvězdám.
- Totéž za použití sextantu.
- Na základě těchto měření vhodnou metodou určit aktuální polohu planety včetně odhadu nejistoty jejího určení.
- Výpočítat polohu Saturnu pro okamžik měření na základě dráhových elementů planety a porovnat s naměřenou hodnotou.

### 13.1 Úvodní úvahy

Základem výpočtu polohy planety na obloze je znalost zákonů, které popisují jejich chování, číselné hodnoty elementů dráhy a časový okamžik, pro který polohu počítáme. Všechny tyto údaje můžeme snadno zjistit, neboť jsou výsledkem úsilí našich předchůdců.

Pohyby planet ve sluneční soustavě jsou popsány s dostatečnou přesností pomocí Keplerových zákonů. Elementy dráhy popisují tvar dráhy planetky a její orientaci v prostoru. My pak jen musíme zjistit jaká je poloha planety v prostoru v čase, když ji pozorujeme z povrchu Země.

### 13.2 Postup výpočtu

Postup výpočtu je následující (jednotlivé kroky budeme dále zjemňovat):

Velká poloosa dráhy	$a$	1.52360 AU
Střední anomálie	$M_0$	184.168°
Excentricita	$e$	0.09349
Délka perihélia	$\omega$	336.118°
Sklon dráhy	$i$	1.8493°
Délka výstupního uzlu	$\Omega$	49.538°
Střední denní pohyb	$n$	0.524082°

Tabulka 13.1: Elementy dráhy Marsu podle Hvězdářské ročenky 2006 uvedené pro časový okamžik  $t = 2\,453\,920.5$  UT.

1. Zjištění elementů a dalších údajů z ročenky.
2. Výpočet polohy planety ve dráze, řešení Keplerovy rovnice.
3. Výpočet heliocentrických ekliptikálních souřadnic tělesa.
4. Výpočet polohy Země a přepočet heliocentrických souřadnic na geocentrické.
5. Výpočet rovníkových souřadnic tělesa.

### 13.3 Dráhové elementy Marsu

K teoretickému výpočtu polohy planety je třeba znát šest elementů dráhy planety. Velká poloosa  $a$  společně s excentricitou  $e$  popisují tvar elipsy po které planeta obíhá. Střední anomálie  $M_0$  je fázový úhel určitého význačného okamžiku. Úhly  $\omega$  (délka perihélia),  $i$  (sklon dráhy vůči ekliptice) a  $\Omega$  (délka výstupního uzlu) pak určují orientaci elipsy v prostoru. Číselné hodnoty elementů dráhy Marsu podle Hvězdářské ročenky na rok 2006 jsou uvedeny v tabulce 13.3.

### 13.4 Definice soustavy souřadnic

V astronomii se z historických důvodů používá soustava souřadnic v jejímž počátku je Slunce, rovina  $x - y$  je totožná s ekliptikou (rovina sluneční soustavy prakticky shodná s rovinou oběhu Země kolem Slunce) a osa  $z$  je na ni kolmá. Kladný směr osy  $x$  udává orientaci této soustavy souřadnic, vzhledem ke statickému hvězdnému pozadí. Míří do souhvězdí Ryb k takzvanému Jarnímu bodu, do kterého se promítá střed slunečního kotouče v okamžiku Jarní rovnodenosti při pohledu ze Země. Rovníkové souřadnice tohoto bodu jsou  $\alpha = 0^\circ, \delta = 0^\circ$ . Planety obíhají ve směru matematického kladu a stejně tak narůstá i fázový úhel.

## 13.5 Výpočet polohy tělesa ve své dráze

### Střední anomálie

Střední anomálie je úhel mezi průvodičem planety obíhající po virtuální kružnici a přímkou apsid. Pro libovolný okamžik v rámci daného roku lze její aktuální hodnotu spočítat jako

$$M(t) = M_0 + n(t - t_0) \quad (13.1)$$

kde  $M_0$  je hodnota pro čas  $t_0$ . K výpočtům rozdílů časů se používá Juliánské datum, které má tu výhodu, že nezávisí na počtu dní v roce nebo měsíci na rozdíl od běžně zaužívané časomíry.

Veličina (siderický) střední denní pohyb má význam úhlové rychlosti obíhající planety vyjádřené ve stupních za den ( $^\circ/\text{den}$ ). Platí tedy  $\omega = 2\pi/P = 2\pi a^{-3/2}$  (kde  $a$  udáváme v astronomických jednotkách AU, perioda  $P$  je v rocích a  $\omega$  v radiánech za rok.), ze kterého máme  $n = 360^\circ / (365.25 P_{\text{dny}})$  (kde  $P$  je ve dnech a  $n$  ve stupních za den. Střední anomálie  $M$  je tedy astronomické označení pro běžný fázový úhel. Udává polohu v polárních souřadnicích tělesa rovnoměrně obíhajícího po kružnici.

### Keplerova rovnice

Přesnou polohu planety, obíhající po elipse, dostaneme řešením Keplerovy rovnice

$$E - e \sin E = M \quad (13.2)$$

kde  $E$  označuje tzv. excentrickou anomálii, což je úhel mezi průvodičem ze středu elipsy planety (ne ohniskem) a přímkou apsid.

Z této rovnice nelze vyjádřit neznámou  $E$ . Zajímá-li nás, jako v tomto případě, pouze numerická hodnota řešení (nějaké byt i iracionální číslo) nemusíme si s tím dělat starosti, jelikož existují důmyslné postupy jak získat dostatečně přesné řešení. Se dvěma z nich se seznámíme.

Do mnohem obtížnější situace se dostaneme pokud nás nezajímá jen jedna numerická hodnota, ale chceme znát průběh řešení pro různé parametry, vlastnosti řešení v rozličných situacích a podobně. Pak se musíme uchýlit k rafinovaným metodám matematické fyziky.

### Iterační metoda

Řešení Keplerovy rovnice prostřednictvím iterační metody je prosté. Z rovnice na jedné straně vyjádříme neznámou, která ovšem bude i na druhé straně, avšak jako argument nějaké funkce. Do takto upravené rovnice dosadíme odhad řešení, a výpočtem dostaneme přesnější řešení. Postup opakujeme tak dlouho, dokud nejsme spokojeni s přesností výsledku.

Klíčovou otázkou zůstává odhad počátečního řešení. Bohužel obecně nelze dát návod, kde toto první číslo vzít a musí se vždy vycházet z konkrétní situace. V případě, který řešíme, víme, že se sice planety pohybují po elipsách, ale ty jsou velmi blízké kružnicím a za odhad řešení tak můžeme považovat přímo pravou anomálii.

Celý postup při iteracích lze shrnout do následujícího postupu:

1. Odhadneme přibližnou hodnotu řešení ze střední anomálie

$$E_0 = M. \quad (13.3)$$

2. Provedeme zpřesnění dosazením do Keplerovy rovnice

$$E_{i+1} = M + e \sin E_i. \quad (13.4)$$

3. V iteracích pokračujeme tak dlouho, dokud rozdíl mezi posledními dvěma neklesne pod nějakou předem danou hodnotu

$$|E_i - E_{i+1}| < \epsilon. \quad (13.5)$$

Při výpočtech poloh planet většinou vystačíme s pěti platnými místy. Všechny výpočty při iteracích Keplerovy rovnice provádíme v *radiánech*.

### Newtonova metoda

Alternativní metoda k výpočtu Keplerovy rovnice je Newtonova metoda (metoda tečen) na řešení rovnice typu

$$f(x) = 0, \quad (13.6)$$

kde  $f(x)$  formálně označuje funkci jejíž kořen hledáme. Tato funkce musí mít, v okolí kořene, kde provádíme výpočty, nenulovou derivaci. Pak vyjdeme z nějakého počátečního odhadu řešení které označíme jako  $x_0$  (nula v indexu označuje iteraci, označuje tedy pořadí). Úkolem jakékoli numerické metody je sestavení posloupnosti stále přesnějších odhadů  $x_i$  kořene, co nejrychleji se blížících k přesnému řešení.

Newtonova metoda předpokládá, že v okolí kořene existuje bod  $x_i$  ve kterém můžeme k funkci sestavit tečnu, jejíž směrnice je daná derivací funkce  $f'(x_i)$  v tomto bodě a jejíž průsečík s osou  $x$  udává lepší aproximaci polohy kořene. Obecnou rovnici tečny k funkci  $y = f(x)$  v bodě  $a$  můžeme vyjádřit jako

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (13.7)$$

Známe-li  $f(a)$ ,  $f'(a)$  a  $a$ , přesnější polohu kořene získáme za podmínky  $y = 0$ . Zkonstruujeme tedy posloupnost odhadů kořene podle vzorce

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad (13.8)$$

ve kterém, jsme přeznačili  $x_i \equiv a, f(x_i) \equiv f(a), f'(x_i) \equiv f'(a)$  a polohu kořene pro konkrétní řešení  $x_{i+1}$ .

Tato metoda se vyznačuje velkou rychlostí konvergence blízko kořene, kdy se při každé iteraci počet platných míst přibližně zdvojnásobuje. Na druhé straně vyžaduje metoda výpočet derivace funkce, což může být napřekážku.

Ke vzorci pro Newtonovu metodu lze dojít čistě mechanicky, bez geometrické představy, použitím Taylorova rozvoje funkce. Taylorův rozvoj funkce  $f(x)$  kolem bodu  $a$  je

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots \quad (13.9)$$

Zanedbáním členů vyšších řádů než prvního, položením  $f(x) = 0$  (funkce prochází osou  $x$ ) a přeznačením ( $a \rightarrow x_k, x \rightarrow x_{k+1}$ ) dostáváme podmínku

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k), \quad (13.10)$$

jejíž řešení pro  $x_{k+1}$  vede k metodě (13.8). Tento způsob nazírání může být výhodný v případě, kdy metodu používáme v situaci bez jednoduchého geometrického významu.

### Poloha planety

Na základě znalosti  $E$  můžeme vypočítat všechny ostatní veličiny potřebné ke znalosti polohy tělesa sluneční soustavy.

Délka průvodiče (vzdálenost od Slunce):

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}. \quad (13.11)$$

Pravá anomálie (úhel mezi průvodičem z ohniska elipsy planety a přímkou apsid — obdoba fázového úhlu)

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (13.12)$$

## 13.6 Výpočet heliocentrických souřadnic

Heliocentrické pravouhlé ekliptikální souřadnice  $X, Y, Z$  získáme za použití substituce

$$L \equiv \omega + \nu - \Omega, \quad (13.13)$$

ze vztahů

$$\begin{aligned} X &= r(\cos \Omega \cos L - \sin \Omega \sin L \cos i), \\ Y &= r(\sin \Omega \cos L + \cos \Omega \sin L \cos i), \\ Z &= r \sin L \sin i. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Obrázek 13.1: Rovinný model sluneční soustavy. Obrázek je momentkou 2006-03-01 v 19:00 UT pro Mars.

a heliocentrické ekliptikální souřadnice  $R, \Lambda, B$  tedy:

$$\begin{aligned} X &= r \cos B \cos \Lambda, \\ Y &= r \cos B \sin \Lambda, \\ Z &= r \sin B. \end{aligned} \quad (13.15)$$

### Rovinný model sluneční soustavy

Protože všechny planety obíhají přibližně ve stejné rovině (v ekliptice), je možné v prvním přiblížení omezit naše výpočty na dvou dimensionální model.

V rovnicích (13.14) v takovém případě pokládáme  $i = 0$ , což vede k

$$\begin{aligned} X &= r(\cos \Omega \cos L - \sin \Omega \sin L), \\ Y &= r(\sin \Omega \cos L + \cos \Omega \sin L), \end{aligned} \quad (13.16)$$

které lze za použití (13.13) a trigonometrických identit pro součet úhlů upravit na

$$\begin{aligned} X &= r \cos(\varpi + \nu), \\ Y &= r \sin(\varpi + \nu). \end{aligned} \quad (13.17)$$

Heliocentrické ekliptikální souřadnice takového objektu pak přímo jsou  $\Lambda = \varpi + \nu, B = 0$ .

V tomto rovinném modelu si můžeme snadno na papír zobrazit situaci ve sluneční soustavě. Výsledek je na obrázku 13.1.

## 13.7 Poloha Země

### Geocentrické souřadnice

Planety nepozorujeme ze Slunce, ale ze Země. Proto musíme přepočítat souřadnice planety k jinému počátku souřadnic. K tomu potřebujeme pravoúhlé heliocentrické souřadnice Země. Postup je analogický jako pro Mars. Ovšem pro jiné hodnoty parametrů. Vzhledem k minimálnímu sklonu dráhy je možné i pro přesné výpočty použít rovinné přiblížení. Číselné hodnoty elementů dráhy Země podle Hvězdářské ročenky na rok 2006 jsou uvedeny v tabulce 13.7.

Velká poloosa dráhy	$a$	1.00000 AU
Střední anomálie	$M_0$	178.750°
Excentricita	$e$	0.01671
Délka perihélia	$\omega$	103.028°
Sklon dráhy	$i$	0.0009°
Délka výstupního uzlu	$\Omega$	175.002°
Střední denní pohyb	$n$	0.985614°

Tabulka 13.2: Elementy dráhy Země podle Hvězdářské ročenky 2006 uvedené pro časový okamžik  $t = 2\,453\,920.5$  UT.

### Výpočet geocentrických souřadnic

Řešením Keplerovy rovnice pro Mars dostáváme heliocentrické pravouhlé souřadnice  $X_m, Y_m, Z_m$  a jejím řešením pro Zemi pak  $X_z, Y_z, Z_z$ . Geocentrické souřadnice vzhledem k našemu pozorovacímu místu pak dostaneme posuvem počátku:

$$\begin{aligned}x &= X_m - X_z, \\y &= Y_m - Y_z, \\z &= Z_m - Z_z.\end{aligned}\tag{13.18}$$

Geocentrické ekliptikální souřadnice  $\lambda, \beta$  pak z pravouhlých vypočteme na základě vzorců:

$$\begin{aligned}x &= \Delta \cos \beta \cos \lambda, \\y &= \Delta \cos \beta \sin \lambda, \\z &= \Delta \sin \beta,\end{aligned}\tag{13.19}$$

v nichž  $\Delta$  označuje vzdálenost Marsu od Země  $\Delta^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

### Převod ekliptikálních souřadnic na rovníkové

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \delta &= \cos \beta \cos \epsilon \sin \lambda - \sin \beta \sin \epsilon + \\ \cos \alpha \cos \delta &= \cos \beta \cos \lambda \\ \sin \delta &= \cos \beta \sin \epsilon \sin \lambda + \sin \beta \cos \epsilon\end{aligned}\tag{13.20}$$

$\epsilon = 23.438511^\circ$  je sklon ekliptiky k rovníku pro 1. ledna 2006.

Pro praktický způsob výpočtu podle těchto vzorců je užitečný tvar pro  $\alpha$

$$\tan \alpha = \frac{-\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \cos \epsilon \sin \lambda}{\cos \beta \cos \lambda}.\tag{13.21}$$

Ten je výhodný při výpočtech na ručním počítacím stroji nebo počítači, neboť je na nich obvykle definována funkce  $\text{atan2}(y, x)$  tak, aby vracela hodnotu funkce v intervalu  $-\pi \dots \pi$  za použití dvou složek souřadnic  $x, y$ .

	Mars	Země
$t$	2453810.29 UT	2453810.29 UT
$M$	$126.410^\circ$	$70.127^\circ$
$E$	$130.484^\circ$	$71.033^\circ$
$\nu$	$134.445^\circ$	$71.941^\circ$
$L$	$421.025^\circ$	—
$r$	1.5236 AU	0.9946 AU
$X$	$-0.5671$ AU	$-0.9907$ AU
$Y$	1.5126 AU	0.0872 AU
$Z$	0.0456 AU	—

Tabulka 13.3: Poloha Marsu a Země ve sluneční soustavě 15. března 2006 kolem 20h SEČ.

	Mars – Země
$x$	0.4237 AU
$y$	1.4254 AU
$z$	0.0456 AU
$\Delta$	1.4877 AU
$\beta$	$1.757^\circ$
$\lambda$	$73.447^\circ$
$\delta$	$24.157^\circ$
$\alpha$	$71.814^\circ$

Tabulka 13.4: Geocentrické souřadnice Marsu.

### Numerický příklad

V tabulkách 13.3 a 13.4 jsou shrnuty výpočty jednotlivých veličin při výpočtu polohy Marsu na obloze Země.

Pro srovnání. Přesná poloha podle XEphemu je  $\alpha = 71.8083^\circ$  a  $\delta = 24.1561^\circ$ . Počet platných míst je větší, než by odpovídalo přesnosti počátečních hodnot z důvodů snazšího srovnání postupu výpočtu.



## Příloha A

# Zpracování naměřených dat

Potřebujeme-li si ověřit nějakou teorii nebo nás prostě zajímá hodnota odpovídající jisté fyzikální veličině, provedeme nějaká měření na jejichž základě si myslíme, že dostaneme vše potřebné. Zpracováním těchto naměřených dat pak rozumíme proces, metodu nebo algoritmus, jak z řady získaných hodnot

$$0.642, 0.157, -0.179, 0.125, 0.263, \dots \quad (\text{A.1})$$

která je projevem zmiňované fyzikální veličiny a rušivých vlivů, dostaneme s jistou pravděpodobností hodnotu skutečné veličiny. Nejjednodušší je vypočítat aritmetický průměr společně s jeho nejistotou udávající pravděpodobnost, že získaná střední hodnota je správná. V tomto případě pak aritmetický průměr odpovídá skutečné veličině a jeho směrodatná odchylka charakterizuje měřící proces (přístroje a okolní vlivy) a nemusí mít přímý vztah k měřené veličině.

### A.1 Aritmetický průměr

Označme si obecněji měřené veličiny nějakým vektorem proměnných

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N. \quad (\text{A.2})$$

Tento vektor měření představuje například tabulku čísel, pracujeme-li na papíře, nebo proměnou typu pole, zpracováváme-li data v počítači. Aritmetický průměr pak počítá střední hodnotu jako

$$\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (\text{A.3})$$

pro  $N \geq 1$ . Průměrnou odchylku od průměru neboli střední kvadratickou odchylku (standardní deviaci) definujeme pro  $N \geq 2$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (\text{A.4})$$

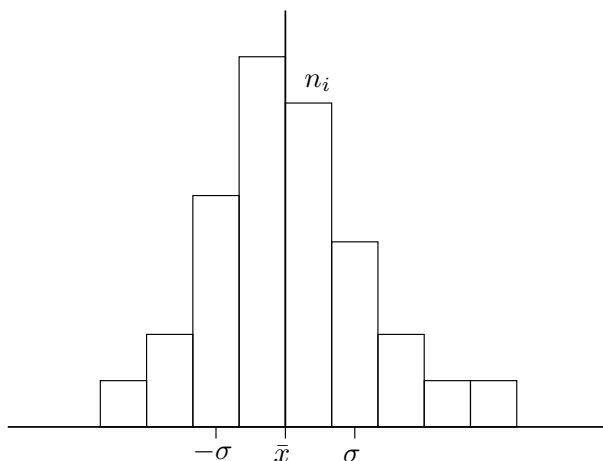
Nejistota s jakou známe polohu aritmetického průměru pak je

$$s^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad (\text{A.5})$$

a je zní odvozena pravděpodobnost, že  $\bar{x}$  udává správnou hodnotu v intervalu  $\bar{x} - s \dots \bar{x} + s$  je 68.2% a  $\bar{x} - 3s \dots \bar{x} + 3s$  je 99.7% pokud máme víc jak pět měření. Pro menší hodnoty se interval rozšiřuje pomocí tzv. Studentova koeficientu.

## A.2 Histogram

Alternativní pohled na výpočet střední hodnoty a střední odchylky a zároveň velmi užitečná pomůcka pro další práci s daty nám poskytuje graf četností odchylek od průměru neboli histogram.



Obrázek A.1: Příklad histogramu pro běžné data s vyznačenými statistickými parametry.

Histogram obdobný tomu, který můžeme spatřit na obrázku A.1 sestojíme následujícím způsobem:

1. Zvolíme délku dělení intervalu  $\Delta$  tak abychom měli v jednotlivých intervalech dostatek hodnot a zároveň vhodné rozlišení grafu.
2. Rozdělíme okolí bodu  $\bar{x}$  do několika intervalů o délce  $\Delta$ :  $\bar{x} - i\Delta \dots \bar{x} - (i-1)\Delta, \dots$
3. Spočteme kolik hodnot padlo do daných intervalů. Tyto počty označíme  $n_i$ . Histogram je pak závislost  $n_i$  na středech intervalů  $x_i$ .

Na základě znalosti počtu hodnot v jednotlivých intervalech můžeme provést výpočet parametrů  $\bar{x}$  a  $\sigma^2$  způsobem, který matematicky odpovídá výpočtu těžiště a momentu setrvačnosti útvaru popsaného histogramem. Aritmetický průměr pak přibližně vypočteme jako

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i x_i \quad (\text{A.6})$$

a standardní deviaci

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N n_i (x_i - \bar{x})^2. \quad (\text{A.7})$$

V těchto vzorcích přitom platí podmínka

$$\sum_{i=1}^N n_i = N. \quad (\text{A.8})$$

Pokud provedeme substituci

$$w_i \equiv \frac{n_i}{N}, \quad (\text{A.9})$$

má veličina  $w_i$  význam váhy jednotlivých hodnot  $x_i$ . Jejich součet dává jedničku, proto se jí v analogii s mechanikou příkla význam hustoty pravděpodobnosti.

Pomocí histogramu si lze snadno graficky znázornit zákon šíření chyb. Jako příklad si můžeme uvést vztah mezi měřenými hodnotami intenzity a magnitudy. Jak víme vztah mezi nimi je dán Pogsonovou rovnicí

$$m - m_0 = -2.5 \log_{10} \frac{I}{I_0}. \quad (\text{A.10})$$

Naším měřením jsme dospěli ke střední intenzitě a její statistické nejistotě ve tvaru

$$I \pm \Delta I$$

a zajímá nás magnituda a její chyba. Pro jednoduchost položíme hodnoty pro zvolenou nulovou hladinu magnitudy a jí odpovídající intenzitu jako  $m_0 = 0, I_0 = 1$  a na obr... vyneseme graf funkce.



## Příloha B

# FITS formát

Data z CCD kamery se ukládají, podobně jako jiné obrázky, v obrazovém formátu FITS, která kromě samotných dat může obsahovat i další údaje o obrázku (čas pořízení, expoziční doba, atd).

FITS formát může mít řadu podob, avšak v základní a nejpoužívanější verzi obsahuje dvě nezbytné složky: hlavičku a data.

Hlavička FITS formátu obsahuje několik nezbytných hodnot a větší množství informativních údajů. Jejich význam je uveden v tabulce **B.1**. Důležité jsou především údaje o rozměrech snímku: `NAXIS`, `NAXIS1`, `NAXIS2`, Okamžik začátku expozice `DATE-OBS`, její trvání `EXPTIME` a filtr ve kterém byl snímek pořízen `FILTER`.

Vlastní obrázek (pořízená data) následují po hlavičce a pro běžnou práci je důležité vědět, že data jsou v obrázku uložena jako tabulka (matice, dvoudimenzionální pole). Jednotlivé čísla v tabulce (prvky v matici, poli) se označují jako pixely a jejich hodnoty jsou úměrné dopadnutému záření. Z tohoto důvodu při následné práci jednotlivé pixely označujeme jejich polohou pomocí celočíselných souřadnic  $i$  (horizontální) a  $j$  (vertikální) a samotnou hodnotu jako matici například  $S_{ij}$ . Dimenze obrázku budeme označovat jako  $N, M$  takže  $i, j$  nabývají celočíselných hodnot  $i = 1 \dots N, j = 1 \dots M$ . V případě, že se nebudeme zajímat o jednotlivé pixely (prvky matice) budeme používat pro celý snímek označení  $S$ .

Bližší popis formátu FITS, jeho vlastnosti, software na prohlížení a zpracování lze nalézt na adrese <http://fits.gsfc.nasa.gov/>.

BITPIX	rozsah dat $0 \dots 2^{\text{BITPIX}}$ .
NAXIS	počet dimenzí v obrázku
NAXISn	počty pixelů jednotlivých os
EXPTIME	expoziční čas v sekundách
DATE-OBS	datum a čas počátku expozice
FILTER	filtr
OBJECT	pozorovaný objekt
[X, Y]XFACTOR	binning

Tabulka B.1: Přehled základních údajů v hlavičce FITSu.

## Příloha C

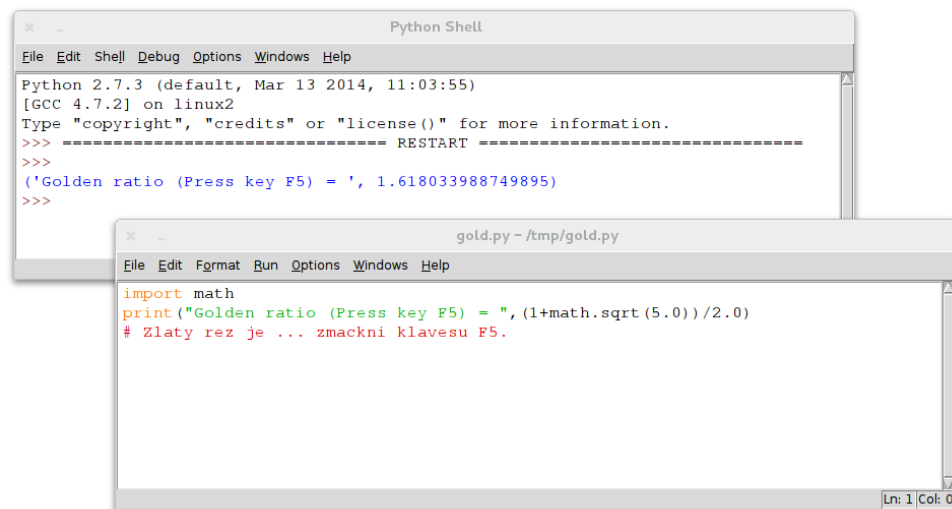
# Python

Tato kapitola nastiňuje práci s Pythonem při řešení astronomických problémů. Seznamuje se základy práce a s aplikací základních statistických metod na astronomické snímky.

Původně byl Python navržen jako jednoduchý programovací jazyk na výuku programování pro neprogramátory. Díky svému čistému a jasnému návrhu se rychle rozšířil a dnes se používá v mnoha oborech vědeckého bádání. Jedna z jeho největších výhod je odstínění technických detailů spojených s počítačem, což nám dává možnost se plně soustředit na řešení našeho problému.

Máme-li v úmyslu použít počítač k řešení problémů, je nutné mít neustále na paměti následující:

- Hlavní síla současných počítačů spočívá v rychlosti, preciznosti a reprodukovatelnosti výpočtů. Nejsou ale obdařeny ani špetkou rozumu, a nedomyslí vůbec nic za nás.
- Chceme-li řešit úlohu pomocí počítače musíme do nejmenších detailů promyslet řešení, které pak popíšeme způsobem vhodným pro počítač – například v Pythonu.
- Program dělá naprosto přesně to co mu napíšeme, nic víc či míň. Za všechny chyby jsme zodpovědní my, jako autoři.
- Postup výpočtu vyjadřujeme prostřednictvím textu s klíčovými slovy. Pomocí nich jsme schopni vyjádřit, podobně jako v mluveném jazyce, nekonečnou plejádu možností a tvořit kombinace prvků ve složitých a komplikovaných strukturách.
- Nepropadejte panice. V každém programu jsou chyby a nepracuje dle požadavků. Na druhé straně, neprogramujete-li zrovna sondu Mariner-1, nemůžete prakticky nic pokazit.



Obrázek C.1: Nástroj Idle. Vidíme okno editoru a shellu v akci.

## C.1 První kontakt

Python můžeme začít používat snadno pomocí nástroje Idle, který je součástí Pythonu. Příklad jeho použití je na obrázku C.1. Idle se skládá z okna editoru ve kterém píšeme Pythonovský program a klávesou F5 jej spouštíme v druhém okně tzv. shellu, kde obdržíme výsledky či získáme hlášení o případných chybách. Běžná práce se tak sestává z psaní programů, jeho spouštění a sledování výpisu.

Obvykle je tento proces doprovázen mnoha nepředvídatelnými problémy. Poněvadž, Python používá řada lidí, je velmi pravděpodobné, že nejsme první, kdo se s daným problémem setkal. Nejjednodušší způsob, jak se dozvědět řešení tak je prohledat síť pomocí vhodného vyhledávače (nemůžeme napovídat konkrétní komerční vyhledávač, na [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_search\\_engines](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_search_engines) si snad vybere každý), kde se řešení obvykle dozvíme během několika sekund a nemusíme zdlouhavě čekat na odpověď od svého zkušební kolegy.

Jako příklad hledání chyby můžeme uvést fragment kódu na výpočet odmocniny pomocí funkce `sqrt`, který selže:

```
>>> print('sqrt(2) =', sqrt(2))
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
NameError: name 'sqrt' is not defined
```

Vyhledáme-li frázi `NameError: name 'sqrt' is not defined`, snadno nalezneme řešení spočívající v importu modulu s matematickými funkcemi:

```
>>> import math
```



```
>>> print('sqrt(2) _=_', math.sqrt(2))  
( 'sqrt(2) _=_', 1.4142135623730951)
```

Uvedený příklad pro nás možná není úplně srozumitelný. Doufejme, že se tak stane po přečtení dalších řádků.

Dalším zdrojem informací je velmi rozsáhlá dokumentace Pythonu, kde lze najít jak návody pro začátečníky tak detailní informace pro experty:

<https://www.python.org/>

## C.2 Přehled možností Pythonu

V Pythonu lze provádět řadu věcí: od běžných operací na počítači až po složité zpracování dat nebo výpočty.

### Aritmetické operace

Nejprve se seznámíme s aritmetickými operacemi. Ty čtyři základní se zapisují dle očekávání:

```
>>> 2+3  
5  
>>> 2-3  
-1  
>>> 2*3  
6  
>>> 2/3  
0  
>>> 2.0/3.0  
0.6666666666666666
```

Jak vidíme, objevuje se nám malá záludnost při dělení. Zde musíme pečlivě rozlišovat mezi celočíselným dělením v množině celých čísel  $2, 3 \in \mathbb{Z}$  a dělením v množině reálných čísel  $2.0, 3.0 \in \mathbb{R}$ . V Pythonu se příslušnost k dané číselné množině rozlišuje uvedením nebo neuvedením desetinné tečky (Důrazně doporučujeme používat anglo-saské konvence pro desetinou tečku, nikoli čárku.)

Aritmetické operace nemusíme provádět přímo s čísly. Je možné definovat si proměnné a počítat místo toho s nimi, čímž se výpočty zobecňují:

```
>>> x = 1  
>>> y = 2  
>>> x+y  
3
```

Tento příklad znamená toto: proměnnou  $x$  nastavíme na jedna, proměnnou  $y$  nastavíme na dvě a po sečtení obdržíme výsledek. Tento výsledek je také možné uložit do proměnné:

```
>>> x = 1
>>> y = 2
>>> z = x + y
>>> print(z)
3
```

Jak ale vidíme, výsledek nám zůstane skryt a pomocí `print()` si jej musíme vypsat.

Použití proměnných může být ale daleko důmyslnější. Zřejmě nejčastější je přiřazení do stejné proměnné:

```
>>> x = 1
>>> y = 2
>>> x = x + y
>>> print(x)
3
```

To se provede tak, že nejprve nastavíme obě proměnné, pak s nimi provedeme operaci sčítání a její výsledek opět uložíme do  $x$ . Pochopitelně, původní obsah je ztracen. Tohoto triku využijeme později.

S využitím modulu `numpy` lze rozšířit tyto základní operace i na složitější matematické struktury, jako jsou vektory a matice. Použití `numpy` se provede příkazem `import <modul>` čímž se zpřístupní nové funkce. První z řady těchto funkcí definují vektory a matice pomocí funkce `numpy.array` a hranatých závorek:

```
>>> import numpy
>>> x = numpy.array([1,2])
>>> y = numpy.array([3,4])
>>> print(x)
[1 2]
>>> print(y)
[3 4]
>>> z = x + y
>>> print(z)
[4 6]
```

V tomto příkladě jsme definovali dva vektory  $x = (1, 2)$ ,  $y = (3, 4)$  a spočetli jejich součet  $z = (4, 6)$ . Pro třídimensionální vektory jsou definovány i další obvykle operace pomocí pod-modulu `numpy.linalg`: velikost vektoru (norma), skalární (vnitřní) a vektorový (cross) součin:

```
>>> import numpy
>>> x = numpy.array([1,2,0])
>>> y = numpy.array([3,4,0])
>>> print(numpy.linalg.norm(z))
7.21110255093
>>> print(numpy.inner(x,y))
11
>>> print(numpy.cross(x,y))
[ 0  0 -2]
```

Práce s maticemi je podobná. Jejich definice vyžaduje o jedny závorky víc, ale opět můžeme zkusit vypočítat například determinant

$$|A|$$

```
>>> import numpy
>>> m = numpy.array([[1,2],[3,4]])
>>> print(numpy.linalg.det(m))
-2.0
```

nebo nám může pomoci vyřešit soustavu lineárních rovnic

$$Ax = b$$

```
>>> import numpy
>>> a = numpy.array([[1,2],[0,4]])
>>> b = numpy.array([10,20])
>>> x = numpy.linalg.solve(a,b)
>>> print(x)
[ 0.  5.]
```

či vypočítat inverzní matici (funkce `numpy.inv`)

$$A \cdot A^{-1} = 1$$

a výsledek si ověřit pomocí maticového násobení (poněkud nešťastně nazvaného `numpy.dot`):

```
>>> import numpy
>>> a = numpy.array([[1,2],[0,4]])
>>> a1 = numpy.linalg.inv(a)
>>> print(a1)
[[ 1.  -0.5 ]
 [ 0.   0.25]]
>>> u = numpy.dot(a,a1)
>>> print(u)
[[ 1.  0.]
 [ 0.  1.]]
```

či dokonce zjistit vlastní čísla (eigenvalues) a vektory matice:

$$A\lambda_i = \lambda_i v_i, \quad \text{pro } i = 1, 2$$

```
>>> import numpy
>>> a = numpy.array([[1,2],[0,4]])
>>> l,v = numpy.linalg.eig(a)
>>> print(l)
[ 1.  4.]
>>> print(v)
[[ 1.          0.5547002 ]
 [ 0.          0.83205029]]
```

Vlastní čísla jsou  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$  a k nim příslušející vlastní vektory jsou uspořádané po sloupcích  $v_1 = (1, 0), v_2 = (0.555, 0.832)$ .

### C.3 Načtení astronomického snímku

Astronomické snímky jsou uloženy ve FITS formátu. V Pythonu je čtení, zápis a manipulace s FITS snímky zpřístupněna pomocí modulu `pyfits`

[http://www.stsci.edu/institute/software\\_hardware/pyfits/](http://www.stsci.edu/institute/software_hardware/pyfits/),

Jeho základní funkce zahrnují:

- otevření snímku pomocí jeho názvu: `open("filename")`
- informace o snímku: `.info()`
- výpis hlavičky: `.header`
- data z obrázku: `.data`
- uložení modifikovaného obrázku: `.writeto("new")`

Použití těchto funkcí v podstatě sleduje obvyklý systém práce: otevřeme snímek, prozkoumáme co je zač, provedeme požadovanou operaci a výsledek si uložíme.

Následující fragment otevře snímek nějaké hvězdy, vypíše informace o FITS souboru, vypíše hlavičku a data první extenze a opět snímek zavře:

```
# zprístupnení knihovny
import pyfits

# načtení obrázku 'barnard.fits' v aktuálním
# adresáři, je možné uvést celou cestu
barnardka = pyfits.open('barnard.fits')
# nebo: barnardka = pyfits.open(r'C:\Ucha\barnard.fits')

# výpis informací o obrázku, přehled extenzi
print("\n===_Informace_o_obrazku_===")
barnardka.info()

# výpis hlavičky první extenze z indexem [0]
print("\n===_Hlavicka_obrazku_===")
print(barnardka[0].header)

# výpis dat první extenze
print("\n===_Data_(hodnoty)_obrazku_===")
print(barnardka[0].data)

# uzavření snímku
barnardka.close()
```

Tento kód stačí okopírovat do editoru okna v Idle, zmáčknout klávesu F5 a měli by jsme obdržet zajímavý výpis.

## C.4 Aritmetické operace se snímky

Základní aritmetické operace s čísly se v Pythonu používají dle očekávání, ovšem vyjma dělení:

```
>>> 1 + 1
2
>>> -1 - 1
-2
>>> 5*6
30
>>> 10/3
3
>>> 10.0/3.0
3.333333333333333
```

Python je navržen tak, že naprosto stejným způsobem můžeme provádět aritmetické operace i se snímky. Následující fragment ilustruje odečtení temného snímku a podělení flat-fieldem.

```
>>> import pyfits
>>> star = pyfits.open('astar.fits')
>>> dark = pyfits.open('dark.fits')
>>> flat = pyfits.open('flat.fits')
>>> star.data = star.data - dark.data
>>> star.data = star.data / flat.data
>>> star.writeto('star.fits')
```

Tady využíváme skutečnosti, že data jsou uloženy v sekci `.data`. Výsledek našich operací si uložíme do nového souboru `star.fits`.

Za pozornost stojí řádek

```
...
>>> star.data = star.data - dark.data
...
```

znamenající toto: vezmeme `star.data`, odečteme od nich `dark.data` a výsledek této operace opět uložíme do `star.data`. V korektním matematickém zápisu by jsme měli psát ( $\equiv$  značí ekvivalenci):

$$\begin{aligned}x &\equiv \text{star.data}, \\y &\equiv \text{dark.data}, \\x' &= x - y, \\ \text{star.data} &\equiv x'.\end{aligned}$$

Jak vidíme, symbol rovná se ( $=$ ) má v Pythonu nepatrně jiný význam. Jeho použití je ale velmi přirozené a snadno si na něj rychle zvykneme.

Význam funkce `.writeto('')` je asi zřejmý — modifikovaný snímek uloží do souboru s daným názvem. Jen pro doplnění připomínáme, že hlavička snímku je nemodifikovaná, ale data jsme nahradili daty s korigovaným

temným snímkem a flat-fieldem (z dokumentačních důvodů je to vhodné poznamenat do hlavičky).

## C.5 Statistika na snímcích

Jedna z nejdůležitějších aplikací programování při zpracování astronomických snímků je odhad aritmetického průměru a rozptylu dat.

Ve statistice je aritmetický průměr  $\bar{x}$  z  $N$  hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_N$  definován všeobecně známým vztahem

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (\text{C.1})$$

Tedy jako součet všech hodnot vydělený počtem. V Pythonu tuto sumu zapíšeme následujícím způsobem:

```
x = [ 1, 2, 3, 4, 5 ]
n = len(x)
s = 0
for i in range(0,n):
    s = s + x[i]
prumer = s/n
print('Mean_of_',x,'_is_',prumer)
```

Význam prvního řádku je definování hodnot  $x_i$ . Zde zapisujeme hodnoty, ze kterých chceme počítat průměr. Na rozdíl od standardního matematického zápisu užíváme hranaté závorky a takovýto objekt složený z čísel označujeme jako pole (array).

Počet prvků v poli zjistíme prostřednictvím funkce `len()` (z anglického *length*) a pro přehlednější používání uložíme do proměnné `n`.

Srdcem výpočtu je cyklus `for`. Jeho úkolem je sečíst všechny hodnoty což realizuje `s = s + x[i]`. Zde využíváme toho, že jednotlivé prvky jsou k dosažení pomocí indexu v hranatých závorkách.

Na to, aby jsme získali všechny možné hodnoty  $i$  používáme funkci `range(0, n)`. Jejím zavoláním získáme pole indexů:

```
>>> print(range(0,4))
[0, 1, 2, 3]
```

ze které postupně vybíráme pomocí operace `i in range(0, n)` (tedy operátoru příslušnosti do množiny  $\in$ ).

Postupné sčítání zajišťuje příkaz `for`. Ten se skládá z tzv. řídicí části, následující za `for`, jež se v našem případě stará o zvětšování indexu. Dále pak z tzv. těla cyklu což jsou příkazy, které se mají vykonat, v našem případě samotného součtu. Na vymezení řídicí části se používá dvojtečka `:` ukončující řídicí část. Tělo cyklu musí být odsazeno o několik mezer. Obecně by jsme mohli psát cyklus jako:

```
for ... ridici cast ...:
    telo
```

O výpis výsledků se stará poslední část, příkaz `print()`, do kterého napíšeme co chceme odhalit okolnímu světu. Tento příkaz nám umožňuje lepe nahlédnout do činnosti programu, když na zajímavé části umístíme výpisy:

```
x = [ 1, 2, 3, 4, 5 ]
n = len(x)
print('Pocet_prvku_pole:', n)
s = 0
print('Indexy:', range(0, n))
print('Index, prvek, soucet:')
for i in range(0, n):
    print(i, x[i], s)
    s = s + x[i]
prumer = s/n
print('Mean_of_', x, '_is_', prumer)
```

Kdykoli chceme nahlédnout do činnosti programu (pro zajímavost, na ověření, při hledání problémů), je funkce `print()` naprosto neocenitelnou pomůckou. V našem případě dostaneme výpis podobný tomuto:

```
('Pocet_prvku_pole:', 5)
('Indexy:', [0, 1, 2, 3, 4])
Index, prvek, soucet
(0, 1, 0)
(1, 2, 1)
(2, 3, 3)
(3, 4, 6)
(4, 5, 10)
('Mean_of_', [1, 2, 3, 4, 5], '_is_', 3)
```

Výpočet průměrné hodnoty obrázku je dosti podobný jako u známého aritmetického průměru. Rozdíl je jen v tom, že obrázek je dvojrozměrný (to ale nemá vliv na hodnotu průměru). Pro obrázek s hodnotami  $I_{ij}$  a rozměry  $N \times M$  by jsme tedy průměr vypočetli dle vztahu

$$\bar{I} = \frac{1}{N \cdot M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M I_{ij}. \quad (\text{C.2})$$

V Pythonu je dvojdimensionální obrázek poskládaný po řádcích a proto také budeme muset použít dva vnořené cykly. Jeden bude probírat prvky v jednotlivých řádcích a druhý pak bude brát jeden řádek po druhém. (Načtení obrázku je popsáno v oddíle [C.3](#).)

```
# nacteni snimku
import pyfits
filename = 'astar.fits'
snimek = pyfits.open(filename)
obr = snimek[0].data
```

```

snimek.close()

m,n = obr.shape

s = 0
for i in range(0,m):
    for j in range(0,n):
        s = s + obr[i,j]

prumer = s/(n*m)
print('Mean_of_',filename,'_is_',prumer)

```

Funkce `.shape` vrací dimenze obrázku. Jsou bohužel uspořádané v opačném pořadí, než očekáváme. Obvykle se v matematice dodržuje konvence, že první index je řádkový a druhý sloupcový a podobně je to i s dimensemi. V Pythonu, přesněji knihovně [NumPy](#), kterou nevědomky používáme, autoři bohužel používají přesně opačnou konvenci a tak převracíme pořadí proměnných `n` a `m`.

Zcela analogickým způsobem můžeme spočítat i varianci  $\text{Var}[I]$ , nebo střední kvadratickou odchylku  $\sigma_I = \sqrt{\text{Var}[I]}$ , definovanou jako

$$\text{Var}[I] = \frac{1}{N \cdot M - 1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (I_{ij} - \bar{I})^2. \quad (\text{C.3})$$

```

# nacteni snimku
import pyfits,math
filename = 'barnard.fits'
snimek = pyfits.open(filename)
obr = snimek[0].data

m,n = obr.shape

s = 0
for i in range(0,m):
    for j in range(0,n):
        s = s + obr[i,j]

prumer = s/(n*m)

s2 = 0
for i in range(0,m):
    for j in range(0,n):
        s2 = s2 + (obr[i,j] - prumer)**2

var = s2/ (n*m - 1)
print('Variance_and_std._deviation_of_',filename,'_is_',
      var,math.sqrt(var))

```

Na výstupu obdržíme výpis podobný tomuto:

```

('Mean_of_', 'barnard.fits', '_is_', 672.85901121649113)
('Variance_and_std._deviation_of_', 'barnard.fits', '_is_',
 1372.376584844249, 37.04560142370817)

```



Přestože je výpočet průměru poměrně jednoduchý, je zbytečné ho opisovat stále dokola. Proto je v při praktických výpočtech jednodušší použít jeho výpočet, který pro nás již někdo připravil. Knihovna [NumPy](#) má pro výpočet aritmetického průměru funkci `.mean()`, pro varianci pak `.var()` a pro střední kvadratickou odchylku pak `.std()`. Použití je snadné:

```
# nacteni snimku
import pyfits, math
filename = 'barnard.fits'
snimek = pyfits.open(filename)
obr = snimek[0].data

print('Mean, variance and std. dev. of', filename, 'is',
      obr.mean(), obr.var(), obr.std())
```

## C.6 Jak zpracovat velké množství souborů

Jen vyjíměčně pořídíme a chceme následně vyhodnotit jen jediný snímek. Pokud jich je víc, museli by jsme pro každý snímek změnit jeho název ve funkci `.open` v předchozím odstavci, což je přinejmenším velmi pomalé. Proto by nás zajímala možnost, jak v Pythonu zpracovat velké množství s minimální námahou.

Tato úloha jde rozdělit na dvě části. V první části jde o to, jak definovat část kódu, kterou můžeme provádět opakovaně a která dělá jednu elementární věc (rozdělit úlohu na jednotlivé logické celky). V druhé pak kde vzít všechny názvy souborů.

### Definice funkce

Rozklad problémů na logické kusy je jeden z hlavních principů programování. V Pythonu pro to máme způsob, jak definovat elementární akci podobně jako funkce v matematice. Vzor je úmyslně velmi prostý:

```
def nazev(parametry):
    telo funkce
    return vysledek
```

Tedy jen slovem `def`, za kterým následuje název funkce jako libovolné slovo. V závorkách pak najdeme parametry funkce. Parametr je, stejně jako v matematice, zástupný symbol, kterému teprve při skutečném použití přiřadí Python nějakou hodnotu.

Podobně jako u cyklu, tělo funkce je odsazeno a může obsahovat libovolný počet řádků, volání funkcí, cykly, atd. Ve funkci může být příkaz `return` pomocí kterého zpřístupňujeme výsledek okolnímu světu.

Takto definovanou funkci pak použijeme opět velmi snadno, jak je vidět v následujícím kódu, který počítá aproximaci do druhého řádu funkce sinus:

```
import math

def sin_approx(x):
    y = x - x**3/6
    return y

for i in range(0,10):
    x = i / 100.0
    y1 = sin_approx(x)
    y0 = math.sin(x)
    print('sin(x)_is_',y0,',_approximation_is_',y1,',_dif._',y1-y0)
```

## Přehledné výpisy

V ukázce jsme sice dostali přesný výpis výsledků, ale o jeho přehlednosti můžeme být jen těžko přesvědčeni. Naštěstí jde výpisy podstatně zpřehlednit pomocí tzv. formátování.

Formátování se předepisuje ke každému řetězci, tj. textu uzavřenému v apostrofech (') nebo uvozovkách (") jako funkce `.format`, která funguje tak, že interpretuje číslo a můžeme předepsat počet platných míst, formát s pevnou čárkou (f) nebo v exponenciálním tvaru (e). Detailní rozsáhlý popis je <https://docs.python.org/2/library/string.html>.

```
print('{0}'.format(0.1))
print('{0:.02f}'.format(0.1))
print('{0:.02e}'.format(0.1))

y0 = 0.333
y1 = 0.666
print('sin(x)_is_{0:.04f}_approximation_is_{1:.04f}_dif._{2:.02e}'
      .format(y0,y1,y1-y0))
```

## Statistika série obrázků

Majíc adresář plný FITS obrázků, stojíme před rozhodnutím, jak s nimi jednoduše naložit tak, aby jsme získali vše potřebné a zároveň to udělali co nejsnáze a nejrychleji. Následující řádky lze brát jako vodítko při počítačovém zpracování dat.

Představme si, že jsme pořídili množství obrázků pojmenovaných například `obrazek_000.fits`, `obrazek_001.fits`, ... `obrazek_666.fits`. Naším úkolem je každý snímek prohlédnout a zjistit jakou má průměrnou hodnotu. Z předchozích odstavců víme, jak vygenerovat řetězec, který chceme — to využijeme na generování jmen obrázků. Dále pak víme, jak volat nějakou funkci opakovaně — tak zjistíme průměrnou hodnotu.

Nejprve tedy vygenerujeme názvy všech snímků. Měl by to provést následující cyklus:

```
for i in range(0,666):
```

```
filename = 'obrazek_{0:3}.fits'.format(i)
print(filename)
```

Nyní definujme funkci na výpočet průměru obrázku a spočtěme průběhy. V podstatě jen složíme vše co již známe.

```
import pyfits

def frame_mean(filename):
    frame = pyfits.open(filename)
    fmean = frame[0].data.mean()
    frame.close()
    return fmean

for i in range(0, 666):
    filename = 'obrazek_{0:04}.fits'.format(i)
    fmean = frame_mean(filename)
    print("Mean_of_{0}_is_{1:.1f}".format(filename, fmean))
```

Výpočet probíhá tak, že nejprve pomocí funkce `range` vygenerujeme všechna čísla která potřebujeme, pomocí nich si naformátujeme název snímku, a poté zavoláme funkci na výpočet průměru. Ta vezme každý vygenerovaný název snímku, otevře jej, vypočte co potřebujeme, snímek opět zavře a volajícímu kódu předá výsledek, který pak vytiskneme.

Náš program je možné jakkoli modifikovat, například:

- Měnit tvar výpisu ve funkci `print` či názvy snímků.
- Omezit se na pouze vybrané snímky `range(666, 667)`.
- Při výpočtu průměru si pomocí indexů vybrat jen jistou část snímku `frame[0].data[100:200, 566:666].mean()`.
- Místo průměru `.mean()` použít střední kvadratickou odchylku `.std()`.



# Příloha D

# GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008  
Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

<http://fsf.org/>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

## Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document “free” in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

## 1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The “**Document**”, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “**you**”. You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A “**Modified Version**” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “**Secondary Section**” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “**Invariant Sections**” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The “**Cover Texts**” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification.

Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

The “**publisher**” means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “Acknowledgements”, “Dedications”, “Endorsements”, or “History”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

## 2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

## 3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

## 4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- D. Preserve all the copyright notices of the Document.
- E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document’s license notice.
- H. Include an unaltered copy of this License.

- I. Preserve the section Entitled “History”, Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled “History” in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the “History” section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- K. For any section Entitled “Acknowledgements” or “Dedications”, Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- M. Delete any section Entitled “Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version.
- N. Do not retitle any existing section to be Entitled “Endorsements” or to conflict in title with any Invariant Section.
- O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version’s license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

## 5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled “History” in the various original documents, forming one section Entitled “History”; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete all sections Entitled “Endorsements”.

## 6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## 7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## 8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

## 9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

## 10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy’s public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

## 11. RELICENSING

“Massive Multiauthor Collaboration Site” (or “MMC Site”) means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A “Massive Multiauthor Collaboration” (or “MMC”) contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

“CC-BY-SA” means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

“Incorporate” means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is “eligible for relicensing” if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.



# Literatura

- [1] J. Bednář. *Pozoruhodné jevy v atmosféře*. Praha : Academia, 1989. vyd. 1., 1989.
- [2] Bengt Edlen. The refractive index of air. *Metrologia*, 2(2):71–80, 1966.
- [3] Richard Feynman, Robert Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 1. Addison-Wesley, Boston, second edition, 1963.
- [4] J. Meeus. *Astronomical algorithms*. Astronomical algorithms (2nd ed.) by J. Meeus. Richmond, VA: Willmann-Bell, 1998., 1998.
- [5] W. M. Smart and R. M. Green. *Textbook on Spherical Astronomy*. Textbook on Spherical Astronomy, by William Marshall Smart and Edited by Robin Michael Green, pp. 446. ISBN 0521291801. Cambridge, UK: Cambridge University Press, July 1977., July 1977.
- [6] L. G. Taff. *Computational spherical astronomy*. New York, Wiley-Interscience, 1981. 239 p., 1981.
- [7] M. Wolf. *Astronomická příručka*. Praha : Academia, 1992. vyd. 1., 1992.



# Rejstřík

Hvězdný čas, 15

Index lomu  
vzduch, 20

Juliánské datum, 17

Refrakční formule, 18

Refrakce, 13