

Astrometrie

Druhým základním úkolem astronoma zabývajícího se zpracováním CCD snímků je proměřit polohy objektů na snímku a udat je v astronomických souřadnicích: rektascenzi a deklinaci. V případě, že astronom objeví novou hvězdu je ve stejné situaci jako kapitán zámořské lodi která objevila nový ostrov. Musí udat její přesnou polohu.

Jak získat polohu hvězdy?

Přirozenou metodou jak najít střed hvězdy je nalézt pixel s největší intenzitou a jeho poloha tak udává střed hvězdy. Je to jednoduchý způsob, ale poněkud nepřesný. Můžeme totiž určit střed hvězdy s subpixelovou přesností (na desetinu pixelu).

Princip spočívá v tom, že se neomezíme jen na jeden pixel a vezmeme i pixely v rozumném velkém okolí. Z poloh těchto pixelů uděláme vážený průměr přičemž váhou bude intenzita hvězdy nad okolím. Tento postup je znám jako tzv. metoda centroidů. Slovní popis je vyjádřen vztahem:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{\sum w_{ij} \cdot i}{\sum w_{ij}} \\y_c &= \frac{\sum w_{ij} \cdot j}{\sum w_{ij}}\end{aligned}$$

kde sum sumy bereme například v okolí 5x5 pixelů, i, j jsou indexy pixelů (celočíslné hodnoty souřadnic podél obou os obrázku) a váhy jako:

$$w_{ij} = I_{ij} - B$$

přičemž I_{ij} je měřená intenzita a B udává hodnotu pozadí v okolí hvězdy.

Na zjištění polohy hvězdy může být použito i fitování profilů s tím, že se uvolní parametry pro střed hvězdy. To vede na komplikovanější řešení (jde už o nelineární soustavu rovnic), kterému se pro jednoduchost vyhýbáme.

Kalibrace souřadnic snímku

Polohy hvězd na snímku už známe. Můžeme též zjistit polohy hvězd z nějakého katalogu. To co neznáme je vztah mezi našimi souřadnicemi na snímku a katalogovými souřadnicemi. Otázkou je jak vztah mezi souřadnicemi popsat a jak se zobrazí sférické souřadnice na souřadnice v ploše snímku.

Gnomonická projekce

Gnomonická projekce je průmět ze středu koule na rovinu příplácnutou k ploše. Pokud je střed promítání (místo příplácnutí) na souřadnicích α_0, δ_0 pak se sférické souřadnice α, δ zobrazí na snímku do pravoúhlých souřadnic:

$$\begin{aligned}x_g &= \frac{\sin(\alpha - \alpha_0) / \tan \delta}{\sin \delta_0 + \cos(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 / \tan \delta} \\y_g &= \frac{\cos \delta_0 - \sin \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) / \tan \delta}{\sin \delta_0 + \cos(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 / \tan \delta}\end{aligned}$$

Tato transformace slouží především na převod sférických souřadnic na pravoúhlé.

Dá se ukázat, že v případě, že máme malé zorné pole (tj. rozdíl mezi polohami je jen pár stupňů) pak se dají tyto vzorce napsat jako:

$$\begin{aligned}x_g &\approx (\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 \\y_g &\approx \delta - \delta_0\end{aligned}$$

Při redukování CCD snímků prakticky vždycky tato přesnost vyhovuje. Z tohoto tvaru můžeme ovšem na první pohled usuzovat na některé vlastnosti. Především střed snímku má souřadnice 0,0 který neodpovídá běžnému konvenčnímu středu souřadnic na snímku, kde je 0,0 v levém dolním rohu. Souřadnice nabývají kladných i záporných hodnot. Měřítka jsou také jiná. Rozměr CCD matice je obvykle od několika stovek do několika tisíc. Naproti tomu, po této transformaci budou jeden stupeň vzdálené objekty na souřadnici jen 0.6.

Tip. Zkuste si odvození transformace provést. Jaké se dopustíte chyby při použití zjednodušené transformace v případě že objekt je stupeň od středu?

Lineární transformace

Z vlastností gnomonické transformace můžeme usoudit, že obecně budou mít souřadnice hvězd na CCD snímcích jiné měřítko, budou posunuté a nebo dokonce pootočené (otočení je vesměs malé a vzniká nedokonalostmi uchycení CCD kamery na dalekohledu) oproti souřadnicím vypočteným pro katalogové hvězdy. Proto pro dobré přiblížení budeme muset použít ještě dvourozměrnou lineární transformaci. Ta udává vztah mezi vypočtenými souřadnicemi z gnomonické transformace x_g, y_g a měřenými x_c, y_c .

$$\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

neboli ve vektorové formě

$$\mathbf{r}_g = c(\mathbf{r} + \mathbf{M}\mathbf{r}_c)$$

c je měřítko. X_0, Y_0 je relativní posuv mezi snímky. A, B jsou parametry rotace, A reprezentuje $\cos \varphi$ a B reprezentuje $\sin \varphi$, kde φ je úhel mezi osami obrázku (platí goniometrická identita $A^2 + B^2 = 1$).

Tato transformace nepopisuje zrcadlové převrácení snímku, které je třeba odhalit jinak.

Měřítko je sice možné odhadnout během minimalizace, ale je zajímavé si jej odhadnout předem. Ke zjištění měřítka se používá poměr mezi vzdálenostmi stejných objektů jednou na snímku jednou z vypočtených souřadnic. Pro vzdálenost dvou hvězd na snímcích platí vztah

$$(\Delta x_g)^2 + (\Delta y_g)^2 = c^2[(\Delta x_c)^2 + (\Delta y_c)^2]$$

ze kterého snadno odhadneme měřítko. Z několika známých vzdáleností pak aritmetickým průměrem dostaneme odhad měřítka v jednotkách pixel na úhlovou vteřinu (případně naopak).

Minimalizace

Na odhad parametrů transformace použijeme metodu nejmenších čtverců. Ke zjištění transformace mezi obrázky pak pro N hvězd napíšeme součet nejmenších čtverců ve tvaru:

$$S = \sum_{i=1}^N c^2 ((\mathbf{M}\mathbf{r}_{c_i} + \mathbf{r}) - \mathbf{r}_{g_i})^T ((\mathbf{M}\mathbf{r}_{c_i} + \mathbf{r}) - \mathbf{r}_{g_i})$$

Řešením této podmínky pro neznámé X_0, Y_0, A, B dostáváme soustavu lineárních rovnic (spodní znaménko pro zrcadlové převrácení):

$$c^2 \begin{pmatrix} N & 0 & \sum x_{c_i} & \sum y_{c_i} \\ 0 & N & \pm \sum y_{c_i} & \mp \sum x_{c_i} \\ \sum x_{c_i} & \pm \sum y_{c_i} & \sum (x_{c_i}^2 + y_{c_i}^2) & 0 \\ \sum y_{c_i} & \mp \sum x_{c_i} & 0 & \sum (x_{c_i}^2 + y_{c_i}^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ A \\ B \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \sum x_{g_i} \\ \sum y_{g_i} \\ \sum (x_{g_i} x_{c_i} \pm x_{g_i} y_{c_i}) \\ \sum (x_{g_i} y_{c_i} \mp y_{g_i} x_{c_i}) \end{pmatrix}$$

pro obecnou transformaci mezi snímky. Tato transformace popisuje měřítko, posuv, rotaci a zrcadlení mezi obrázky, ale měřítko je stejné podél osy x i y obrázku.

Úkoly:

- ztotožněte známý CCD snímek s hvězdným atlasem
- vypočtete hodnoty souřadnic hvězd x_c, y_c pro vhodně zvolené hvězdy
- pro tytéž hvězdy vypočtete gnomonickou transformaci souřadnic x_g, y_g
- minimalizací zjistíte hodnoty parametrů lineární transformace

V případě nepříznivého počasí lze snímky získat na adrese <http://physics.muni.cz/~hroch/cviceni/astrometry.html>.