

VRATNÁ SÍLA A PERIODICKÝ POHYB

Pavla MUSILOVÁ

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta MU, pavla@physics.muni.cz

Kmitání, či speciálně periodické děje, mají své místo takřka ve všech fyzikálních disciplínách. V rámci fyzikálního vzdělávání bývá problematika periodických pohybů uváděna odděleně v jednotlivých fyzikálních předmětech (mechanika, elektřina a magnetismus, kvantová mechanika, atd.). Základem všech periodických pohybů je však jednoduchý společný prvek: jsou způsobeny jistou „vratnou silou“. V tomto příspěvku předkládáme elementární didaktický výklad problematiky jednorozměrného periodického pohybu na úrovni univerzitního bakalářského studia obecné fyziky, popřípadě pokročilého studia středoškolského (specializované semináře v maturitním ročníku). „Jednorozměrným pohybem“ rozumíme pohyb popsáný jednou prostorovou proměnnou x (souřadnice, výchylka, úhlová souřadnice, vzdálenost, náboj, proud, apod.) Výklad je založen na skutečnosti, že jednorozměrný periodický pohyb je zajištěn jediným, velmi jednoduchým požadavkem, aby „působící síla“ $F(x)$ směřovala vždy proti zobecněné souřadnici (proměnné) popisující pohyb. Jinak může být průběh $F(x)$ zcela libovolný. Uvádíme příklady z různých disciplín obecné fyziky a obecný vztah pro výpočet periody příslušného typu pohybu jak v obecné verzi, tak v harmonické aproximaci. Potřebným matematickým aparátem je pouze diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné

Úvod

Oscilátory jsou s výhodou používány ve středoškolské fyzice i v úvodu univerzitního studia fyziky jako modely usnadňující pochopení dynamiky periodických i aperiodických pohybů. Učební texty se obvykle soustředí na nejjednodušší modely, k nimž patří lineární harmonický oscilátor (tělísko na pružině, matematické kyvadlo v aproximaci malých výchylek, apod.). Oscilátory jsou také oblíbené modely výzkumu v moderní literatuře z oblasti didaktiky fyziky – například v *European Journal of Physics*, nebo *American Journal of Physics*. Jde většinou o různé typy kyvadel, jejichž netriviální popis vyžaduje hlubší matematické zázemí a dovednosti studentů. Příklady takových studií za posledních 5 let čtenář snadno dohledá – je jich řada. Zmíněné studie jsou založeny na řešení pohybových rovnic konkrétních systémů od poměrně snadného standardního přístupu až po složitější matematické výpočty. Některé příspěvky obsahují i experiment (z tohoto důvodu je citujeme konkrétně – [1] až [4]). Problémy řešené v publikovaných pracích jsou sice zajímavé, ale každý z autorů pojednává o nějakém specifickém aspektu kmitavého pohybu. Matematické požadavky některých z nich jsou navíc příliš náročné pro studenty v úvodní fázi univerzitního studia fyziky, o to víc pro středoškoláky. Na druhé straně zkušenost ukazuje, že pro obě tyto skupiny studentů je často obtížné porozumět i velmi jednoduchým otázkám vztahujícím se ke kmitavému pohybu, například pochopit dynamiku matematického kyvadla, či spíše dynamiku obecného křivočarého pohybu (viz např. [5], [6]).

Zdá se tedy vhodné hledat výukové přístupy, jež by mohly studenty přiblížit k základnímu porozumění podstatě periodického pohybu včetně odvození vztahů pro jeho základní charakteristiky, např. periodu. Základ všech (jednorozměrných) periodických pohybů v mechanice lze charakterizovat velmi jednoduše. Je jím tzv. *vratná síla*, jak níže ukážeme. Jako typický příklad periodických pohybů je na střední škole i v úvodním univerzitním kursu obecné fyziky obvykle uváděn lineární harmonický oscilátor. Na střední škole je primárně

uváděna kinematika jeho pohybu pomocí promítání bodu pohybujícího se rovnoměrně po kružnici do směru jejího průměru, na základě kinematických úvah je pak získán silový zákon pro harmonickou sílu $\vec{F}(x) = -kx\vec{x}^0$, kde k je kladná konstanta a $\vec{x}^0$ jednotkový vektor ve směru osy x (viz např. [7], [8]). Na úrovni základního univerzitního kursu obecné fyziky se standardně řeší pohybová rovnice $m\ddot{x} = -kx$. Pružná síla Hookeova typu $F(x) = -kx$, lineárně závislá na výchylce systému (částice) z rovnovážné polohy, se jako příčina periodického kmitavého pohybu v řadě dalších příkladů. Dalšími typickými příklady jednorozměrného kmitavého pohybu v mechanice jsou matematické a fyzické kyvadlo (popsány úhlovou výchylkou jako jedinou proměnnou). V elektřině a magnetismu se studují např. LC obvody (viz třeba [8]-[10]), proměnnou popisující „jednorozměrný pohyb“ je náboj. Všechny takové situace představují nejjednodušší periodický pohyb – je popsán harmonickými funkcemi času. (V případě kyvadel v homogenním tíhovém poli jde o aproximaci malých výchylek, tzv. *harmonickou aproximaci*, přesné řešení vyžaduje numerické postupy). Dalším příkladem periodického, ne nutně harmonického pohybu, jsou např. pohyby planet, řídicí se Keplerovými zákony – viz např. známý klasický text [11], nebo příspěvek [12], popřípadě řešení částečného problému v [13]; dále pak kmity krystalových řetězců, některé modely elektronové pásové struktury, apod.

Na druhé straně lze snadno ukázat, že zcela obecná vratná síla působící na částici konající tzv. jednorozměrný pohyb vede k periodickému pohybu. V předkládaném příspěvku tuto skutečnost dokážeme a odvodíme obecný integrální vztah pro periodu takového pohybu na základě vyjádření potenciální energie $U(x)$ odpovídající zmíněné vratné síle. Pro výpočet periody kmitavého pohybu systémů spadajících do různých oblastí fyziky pak použijeme harmonické aproximace tam, kde přesný výpočet nebude schůdný. Výpočty pro anharmonické pohyby často vyžadují numerické postupy.

Zmíněný obecný přístup k výkladu povahy periodických pohybů může být dobře pochopitelný nejen pro začínající univerzitní studenty fyziky, ale i pro středoškoláky. Kromě toho, studenti obeznámení se základy diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné mohou být schopni určit periodu pohybu vyvolaného vratnou silou buď přímo výpočtem příslušného integrálu, popřípadě numericky, či pomocí relevantních příruček (viz např. [15], [16]), nebo počítačových aplikací (např. WolframAlpha). Poznamenejme ještě, že obecně je problém kmitů v různých fyzikálních disciplínách v učebních textech pojednáván pomocí řešení pohybových rovnic, popřípadě integrací energiových rovnic s uvažováním dalších zákonů zachování, bez použití explicitního vyjádření vztahu pro periodu pohybu, vyplývajícího z podstaty věci – vratné síly. Například text [14] uvádí pěkný příklad jednorozměrného pohybu (pohyb ve specifickém poli centrálního efektivního potenciálu), avšak k jeho řešení rovněž využívá řešení Eulerových-Lagrangeových pohybových rovnic.

Vratná síla a pohybová rovnice soustavy

Nejprve definujeme *jednorozměrný pohyb*. Jedná se o pohyb fyzikální soustavy s jedním stupněm volnosti. „Zobecněná poloha“ takové soustavy je popsána jednou časově závislou proměnnou – *zobecněnou souřadnicí* $x(t)$ (například poloha hmotného bodu na ose x , úhlová poloha $\varphi(t)$ matematického či fyzického kyvadla $x \sim \varphi$, náboj $q(t)$ c jednoduchém obvodu s cívkou a kondenzátorem $x \sim q$, vzdálenost $\rho(t)$ dvou těles v Keplerově problému $x \sim \rho$, apod.

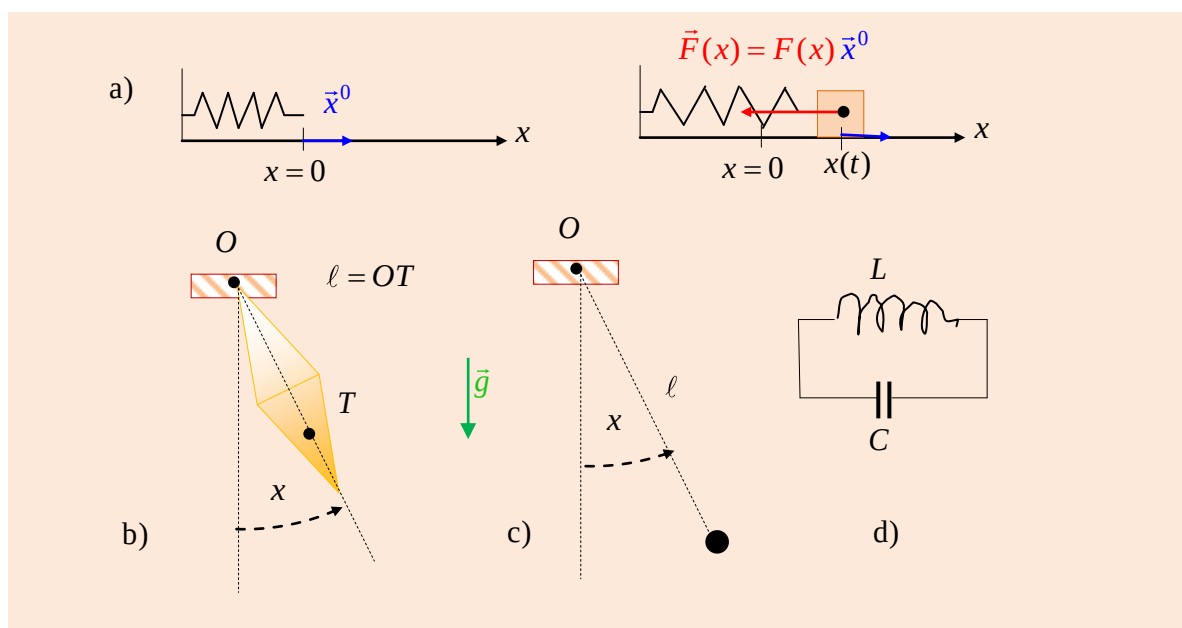
Pro objasnění pojmu vratná síla použijeme mechanický model. Uvažujme o částici o hmotnosti m , která se může pohybovat p přímce, řekněme podél osy x . Vratnou silou (přesněji vratnou výslednou silou) rozumíme takovou sílu $F(x)$, pro niž platí

$$F(x) < 0 \text{ pro } x > 0, \quad F(x) = 0 \text{ pro } x = 0, \quad F(x) > 0 \text{ pro } x < 0.$$

To znamená, že $x = 0$ je *rovnovážná poloha* částice a síla $F(x)$ míří vždy proti výchylce částice z rovnovážné polohy. (V uváděném příkladu výchylka splývá s polohou.) Potenciální energie odpovídající síle $F(x)$ je

$$U(x) = -\int_0^x F(\xi) d\xi,$$

Prisoudíme-li rovnovážné poloze nulovou potenciální energii. Pohybová rovnice má tvar $m\ddot{x} - F(x) = 0$. Situace vyhovující takové pohybové rovnici jsou znázorněny na obr. 1.



Obr. 1: Příklady soustav s vratnou silou.

Odpovídající pohybové rovnice jsou

- | | | | |
|----|---------------------------------------|--------------------|------------------------|
| a) | $m\ddot{x} + kx = 0$ | harmonický pohyb | x je souřadnice |
| b) | $J\ddot{x} + mg\ell \sin x = 0$ | anharmonický pohyb | x je úhlová výchylka |
| c) | $m\ell^2\ddot{x} + mg\ell \sin x = 0$ | anharmonický pohyb | x je úhlová výchylka |
| d) | $L\ddot{x} + C^{-1}x = 0$ | harmonický pohyb | x je náboj |

Význam veličin v pohybových rovnicích je obvyklý. Zanedbává se tření a odpor vzduchu v případech a), b) a c), a odpor vodičů v případě d).

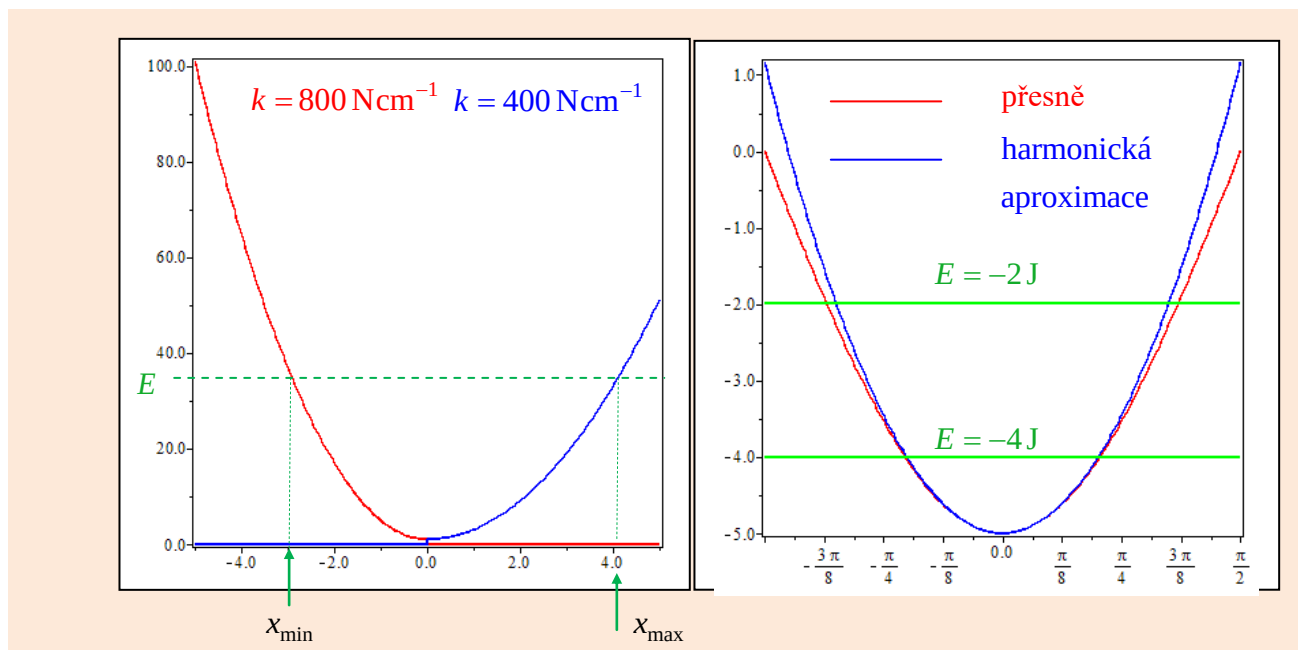
Energiová rovnice a periodičita

Energiová rovnice, reprezentující zákon zachování mechanické energie, se snadno odvodí z pohybové rovnice $m\ddot{x} - F(x) = 0$ jejím vynásobením $\dot{x}$ a integrací:

$$m\ddot{x} - F(x)\dot{x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \right) - F(x) \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \int_0^x F(\xi) d\xi = E \Rightarrow \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) = E,$$

kde E je konstanta (energie soustavy určená počátečními podmínkami). Úpravou dostaneme

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} (E - U(x)) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{E - U(x)}.$$



Obr. 2: Potenciální energie a finitní pohyb. Vodorovná osa ... x , svislá osa $U(x)$.

Protože je $\dot{x}^2 \geq 0$, jsou přípustné jen takové hodnoty x , pro něž je $U(x) \leq E$. Pohyb je tedy finitní a periodický (obr. 2). Periodicita vyplývá ze skutečnosti, že potenciální energie nezávisí na čase. Pro periodu T pak dostaneme

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} . \quad (1)$$

Možné obtíže při výpočtu periody mohou být, podle konkrétního tvaru potenciální energie, spojeny pouze s integrační procedurou.

Příklad 1: Pro ilustraci vypočteme uvedeným postupem periodu kmitů tělíska na vodorovné pružině (obr. 1a))

- v harmonickém případě, kdy se vratná síla řídí Hookeovým zákonem, $F(x) = -kx$, tj. odpovídající potenciální energie je $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (k je kladná konstanta) a
- v anharmonickém případě s vratnou silou $F(x) = -\alpha x - \beta x^3$, kde α, β jsou kladné konstanty, pak $U(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4$.

Jak víme např. z řešení pohybové rovnice, pro periodu harmonických kmitů takového systému platí $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Ověříme to výpočtem integrálu (1): Platí

$$x_{\min} = -x_0, \quad x_{\max} = x_0, \quad \frac{1}{2} k x_0^2 = E \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}},$$

$$T = \sqrt{2m} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{E - \frac{1}{2} k x^2}} dx = 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} dx = 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \frac{x}{x_0} \Big|_{-x_0}^{x_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Pro anharmonický případ s potenciální energií $U(x) = \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{1}{4} \beta x^4$ je

$$T = \sqrt{2m} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{E - \frac{1}{2} \alpha x^2 - \frac{1}{4} \beta x^4}} dx, \quad E - \frac{1}{2} \alpha x_0^2 - \frac{1}{4} \beta x_0^4 = 0.$$

Zjištění periody již samozřejmě není jednoduché. Pro konkrétní představu zvolme například hypotetické hodnoty $\alpha = \frac{1}{2} \text{ J} \cdot \text{dm}^{-2}$, $\beta = 1 \text{ J} \cdot \text{dm}^{-4}$, $E = \frac{3}{16} \text{ J}$, $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ dm}$. Pak $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ dm}$,

$$T = 2\sqrt{2m} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2}}.$$

Jedná se o eliptický integrál (viz např. [27]), který lze vyčíslit například pomocí aplikace

WolframAlpha. Hodnota integrálu, tj. $\frac{T}{2\sqrt{2m}}$, je přibližně 2,38, zatímco pro případ

harmonický se stejnou energií E , stejnou konstantou α ($\beta = 0$) a odpovídající amplitudou $x_0 = \sqrt{3}/2$ činí tato hodnota $\pi \approx 3,14$. (Anharmonický případ uvádíme jen pro ilustraci, podrobné řešení nespádá do problematiky základního univerzitního kursu obecné fyziky.)

Harmonická aproximace

V první části příkladu 1 jsme uvažovali o harmonické vratné síle a odpovídající harmonické potenciální energii (řešením pohybové rovnice jsou harmonické funkce času). Uvažujme nyní o Taylorově rozvoji obecné funkce $U(x)$ se středem v rovnovážné poloze $x = 0$ (za předpokladu, že funkce $U(x)$ je diferencovatelná do potřebného řádu včetně),

$$U(x) = U(0) + \frac{dU}{dx} \Big|_{x=0} x + \dots + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x=0} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n U}{dx^n} \Big|_{x=0} x^n + \dots$$

Nulovou hladinu potenciální energie zvolme tak, že $U(0) = 0$, dále platí $\frac{dU}{dx} \Big|_{x=0} = -F(0) = 0$.

Zanedbáme-li členy rozvoje počínaje druhým řádem včetně, dostaneme *harmonickou aproximaci*

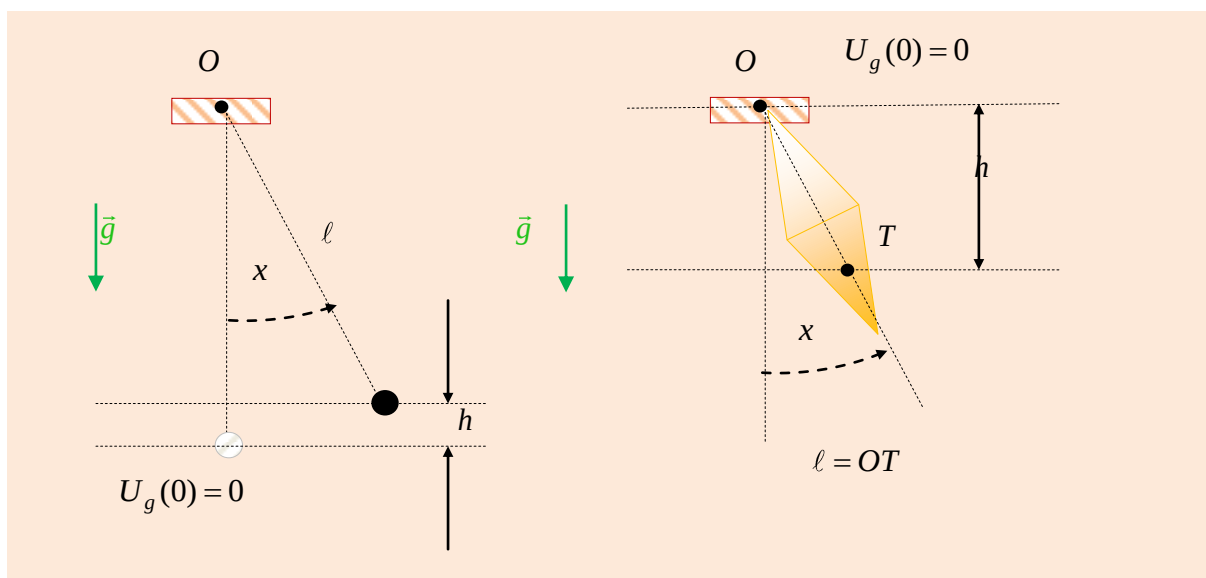
$$U(x) \approx \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x=0} x^2 = \frac{1}{2} K x^2, \quad K = \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x=0}.$$

Každý systém s harmonickou potenciální energií, tj. systém s pohybovou rovnicí $M\ddot{x} + Kx = 0$, kde význam veličin M a K je dán konkrétní úlohou, kmitá harmonicky s periodou $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$.

Jednoduché příklady

Jeden typický příklad jednorozměrného harmonického pohybu jsme řešili v předchozím odstavci.

Příklad 2. Matematické kyvadlo. Modelem *matematického kyvadla* je hmotná částice (hmotný bod – malá kulička) o hmotnosti m zavěšená na vlákně neproměnné délky ℓ s hmotností zanedbatelnou proti hmotnosti kuličky, pohybující se v homogenním gravitačním poli s intenzitou $\vec{g}$ (tíhové zrychlení). Kyvadlo kmitá ve svislé rovině (obr. 1c) a obr. 3 vlevo). Odpor vzduchu zanedbáváme.



Obr. 3: Matematické a fyzické kyvadlo.

Proměnnou x je úhlová výchylka z rovnovážné polohy. Gravitační (tíhová) potenciální energie je

$$U_g(x) = mgh = mg\ell(1 - \cos x) = 2mg\ell \sin^2 \frac{x}{2} = mg\ell \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \dots \right),$$

Harmonická aproximace $U_g(x) \approx \frac{1}{2}mg\ell x^2$, $K = mg\ell$. Energiová rovnice a vztah pro periodu mají tvar (bez aproximace)

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mg\ell(1 - \cos x) = E, \quad M = m\ell^2, \quad T = \sqrt{2m\ell^2} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - 2mg\ell \sin^2 \frac{x}{2}}}.$$

Jedná se o eliptický integrál, který je tabelován (viz např. [27], [28]). V harmonické aproximaci pak dostáváme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

tedy známý vztah pro periodu matematického kyvadla.

Příklad 3. Fyzické kyvadlo. Mechanický systém zvaný *fyzické kyvadlo* je znázorněn na obr. 3 vpravo. Je to tuhé těleso o hmotnosti m , které může rotovat kolem vodorovné osy O (je kolmá k nákresu). Vzdálenost středu hmotnosti T od osy je ℓ , moment setrvačnosti tělesa vzhledem k této ose je J . Proměnnou x je opět úhlová výchylka. Potenciální energie tělesa a energiová rovnice mají tvar

$$U(x) = -mg\ell \cos x = -mg\ell \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots\right), \quad \frac{1}{2}J\dot{x}^2 - mg\ell \cos x = E,$$

Perioda je opět vyjádřena eliptickým integrálem $T = \sqrt{2J} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E + mg\ell \cos x}}$, v harmonické

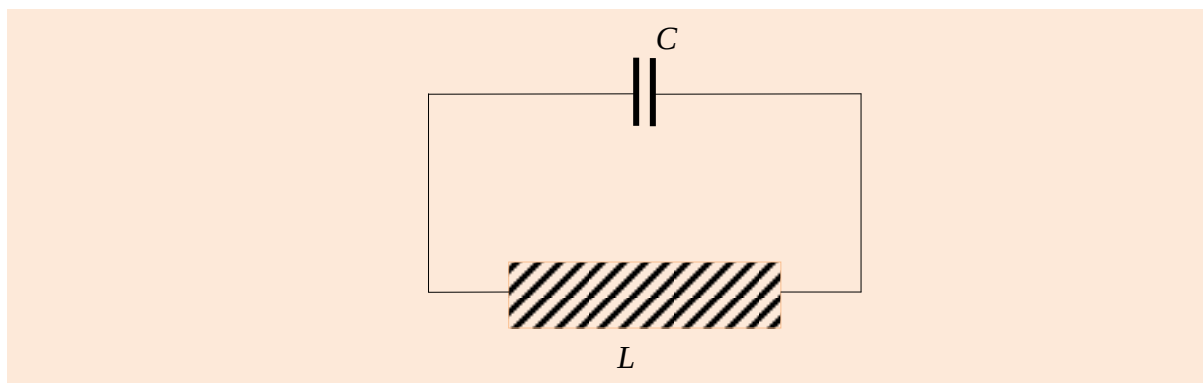
aproximaci pak $U(x) \approx mg\ell \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)$, $M = J$, $K = mg\ell$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\ell}}$.

Harmonická aproximace potenciální energie v porovnání s přesným výrazem je graficky znázorněna v pravé části obr. 2 pro hodnotu $mg\ell = 5J$.

Příklad 4. LC obvod. Další příklad je znázorněn na obr. 1d) a obr. 4 – střídavý elektrický obvod s cívkou o indukčnosti L a kondenzátorem o kapacitě C . Jako proměnnou x označíme náboj q . Odpor vedení zanedbáváme. Energiová rovnice má tvar

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu^2 = E, \quad i = \frac{dq}{dt}, \quad u = \frac{q}{C},$$

Kde $i(t)$ je okamžitý proud procházející obvodem a $u(t)$ je okamžité napětí na kondenzátoru a cívce.



Obr. 4: LC obvod.

Jedná se o harmonickou situaci. Potenciální energie je $U(x) = \frac{1}{2}C^{-1}x^2$. Pohybová rovnice je

$L\ddot{x} + C^{-1}x = 0$ a pro periodu tedy platí Thomsonův vztah $T = \frac{2\pi}{\sqrt{LC}}$.

Keplerova úloha

Jako netriviální příklad jednorozměrného pohybu s vratnou silou uvedeme Keplerův problém. Jde o pohyb částice o hmotnosti m vzhledem k částici o hmotnosti M (například pohyb planety kolem Slunce, družice kolem Země, apod.) s centrální interakcí bez působení vnějších

sil (tzv. dvoučasticová izolovaná soustava). Polohové vektory částic m a M ve zvolené inerciální vztažné soustavě označme $\vec{r}$ a $\vec{R}$, poloha m vzhledem k M je $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{R}$. Spojme vztažnou soustavu pro jednoduchost výpočtu se středem hmotnosti této dvoučasticové soustavy. (Tato volba je možná, neboť střed hmotnosti každé izolované soustavy se vzhledem k inerciálním soustavám pohybuje rovnoměrně přímočaře.) Označme dále $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ rychlosti částic a $\vec{u} = \dot{\vec{\rho}}$ rychlost m vzhledem k M . Pro soustavu platí zákon zachování hybnosti a zákon zachování momentu hybnosti,

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) + M\vec{V}(t) = \vec{0}, \quad \vec{\ell}(t) = \vec{r}(t) \times m\vec{v}(t) + \vec{R}(t) \times M\vec{V}(t) = \vec{\ell}_0 = \overline{\text{konst.}}$$

Zákon zachování momentu hybnosti (z nějž bezprostředně plyne druhý Keplerův zákon) vede k závěru, že trajektorie obou částic jsou rovinné křivky a leží v téže rovině pevné vzhledem k dané inerciální soustavě. Trajektorie m vzhledem k M je tedy rovněž rovinná křivka. Pohyb lze jednoduše popsat v polárních souřadnicích ρ a φ , $\rho = \rho(\varphi)$, kde $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Vyřešením soustavy rovnic $m\vec{v} + M\vec{V} = \vec{0}$, $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}$ dostaneme

$$\vec{v} = \frac{M\vec{u}}{m+M}, \quad \vec{V} = -\frac{m\vec{u}}{m+M}, \quad \vec{\ell} = \frac{mM}{m+M} \vec{\rho} \times \vec{u}, \quad \ell = |\vec{\ell}| = \mu \rho^2 \dot{\varphi} = \text{konst.}, \quad \mu = \frac{mM}{m+M},$$

(μ je redukovaná hmotnost soustavy). Energiová rovnice pro soustavu s gravitační interakcí má tvar

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 - \kappa \frac{mM}{\rho} = \frac{1}{2} \mu u^2 - \kappa \frac{mM}{\rho} = E = \text{konst.}$$

Konstanty ℓ a E jsou určeny počátečními podmínkami. S uvážením skutečnosti, že

$$u^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{\ell^2}{\mu^2 \rho^2} \quad \text{dostaneme}$$

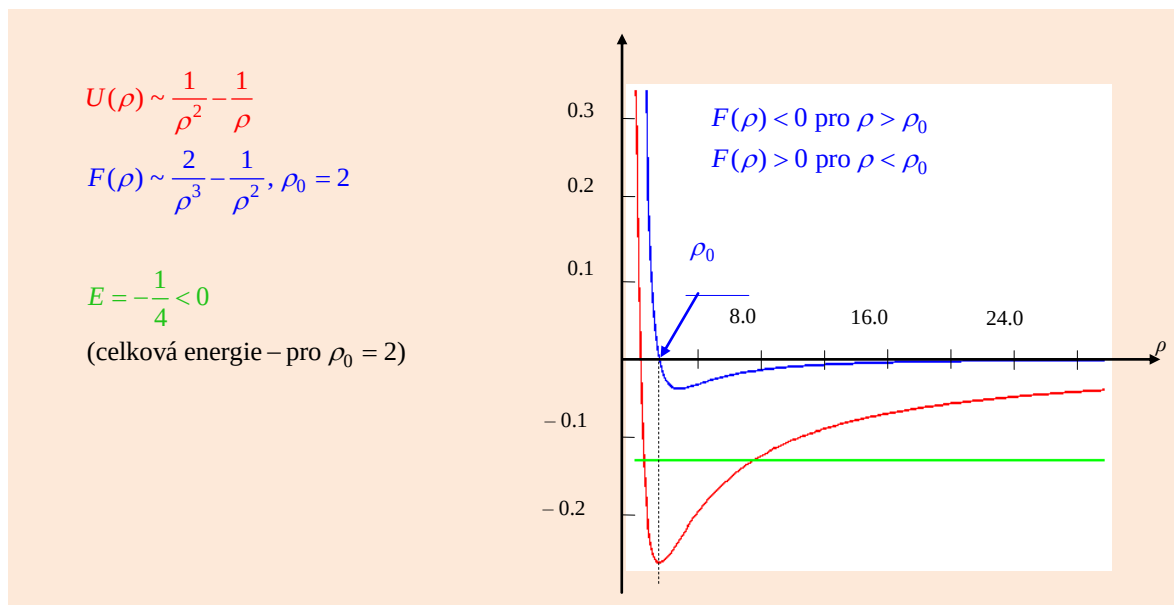
$$\frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2 + \left(\frac{\ell^2}{2\mu \rho^2} - \kappa \frac{mM}{\rho} \right) = E.$$

Získaný vztah můžeme považovat za energiovou rovnici pro případ jednorozměrného pohybu, který je popsán jedinou proměnnou – vzdáleností částic $x = \rho$. Roli potenciální energie

(*efektivní potenciální energie*) hraje veličina $U(\rho) = \frac{\ell^2}{2\mu \rho^2} - \kappa \frac{mM}{\rho}$, vratná síla má tvar

$$F(\rho) = -\frac{dU(\rho)}{d\rho} = \frac{\ell^2}{\mu \rho^3} - \kappa \frac{mM}{\rho^2}, \quad \text{rovnovážnou polohu představuje vzdálenost } \rho_0 = \frac{\ell^2}{\kappa \mu m M},$$

neboť $F(\rho_0) = 0$.



Obr. 5: Schematický graf funkcí $F(\rho)$ a $U(\rho)$.

Průběh funkcí $F(\rho)$ a $U(\rho)$ je schematicky znázorněn na obr. 5. Vypočteme nyní periodu pohybu.

$$T = \sqrt{2\mu} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\sqrt{E - U(\rho)}} = \sqrt{2\mu} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\sqrt{E - \left(\frac{\ell^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\kappa m M}{\rho} \right)}}, \text{ kde } \rho_{\min} \text{ a } \rho_{\max} \text{ získáme jako}$$

řešení rovnice $E - U(\rho) = 0$. Protože pro finitní pohyb musí být $E < 0$, je $E = -|E|$. Platí

$$\rho_{\min}, \rho_{\max} = \frac{\kappa m M}{2|E|} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2|E|\ell^2}{\kappa^2 \mu m^2 M^2}} \right], \quad \rho_{\min} + \rho_{\max} = \frac{\kappa m M}{|E|}.$$

Integrace vedoucí k výsledku je technicky poněkud náročná, ale na úrovni bakalářského studia je docela dobře zvládnutelná:

Uvažme, že pro $m \ll M$ je $\mu \approx m$ a označme

$$A = \frac{1}{2}(\rho_{\min} + \rho_{\max}), \quad B = \sqrt{\frac{\kappa^2 m^2 M^2}{4|E|^2} - \frac{\ell^2}{2m|E|}} = \frac{\kappa m M}{2|E|} \sqrt{1 - \frac{2\ell^2|E|}{\kappa m^3 M^2}}. \text{ Pak}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho - A}{B} \right)^2}} = -B \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\rho - A}{B} \right)^2} \right]_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} + A \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \left[\arcsin \frac{\rho - A}{B} \right]_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} = \\ &= \pi A \sqrt{\frac{2m}{|E|}} = \pi \frac{\kappa m M}{2|E|} \sqrt{\frac{2m}{|E|}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\kappa m^{3/2} M}{|E|^{3/2}}. \end{aligned}$$

Vypočteme-li podíl třetí mocniny veličiny $A = \frac{1}{2}(\rho_{\min} + \rho_{\max}) = a_0$ a druhé mocniny periody,

dostaneme třetí Keplerův zákon v obvyklé podobě: $\frac{a_0^3}{T^2} = \frac{1}{8} \frac{(\rho_{\min} + \rho_{\max})^3}{T^2} = \frac{\kappa M}{4\pi^2}$.

(Poměr třetí mocniny velké poloosy elipsy, po které obíhá m vzhledem k M a druhé mocniny periody je konstantní a nezávisí na m .)

Příklad 5. Harmonická aproximace v Keplerově úloze. V případě Keplerovy úlohy se obvykle uvádí kompletní řešení, z něhož vyplyne první Keplerův zákon. Zde uvádíme harmonickou aproximaci pro úplnost (i když to nijak nezjednoduší integraci) a pro porovnání s přesným výrazem pro efektivní potenciální energii

$$U(\rho) = U(\rho_0) + \left. \frac{dU(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U(\rho)}{d\rho^2} \right|_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 = U(\rho_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U(\rho)}{d\rho^2} \right|_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2,$$

kde pro $\rho = \rho_0$ nabývá potenciální energie minima. Pro periodu při dosazení

$\mu = m$ dostaneme

$$T = \sqrt{2m} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\sqrt{-|E| - \left(-\frac{b^2}{4a} + \frac{b^4}{16a^3} (\rho - \rho_0)^2 \right)}}, \text{ kde } b = \kappa m M, \quad a = \frac{\ell^2}{2m}, \quad \rho_0 = \frac{2a}{b} = \frac{\ell^2}{\kappa m^2 M}.$$

Hodnota ρ_0 je řešením rovnice $\left. \frac{dU(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho_0} = 0$ („rovnovážná vzdálenost“). Minimální a maximální vzdálenost jsou řešením rovnice

$$E - U(\rho) = 0 \Rightarrow -|E| + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^4}{16a^3} (\rho - \rho_0)^2 = 0, \quad \rho_{\max, \min} = \rho_0 \pm \frac{2a}{b^2} \sqrt{b^2 - 4a|E|}.$$

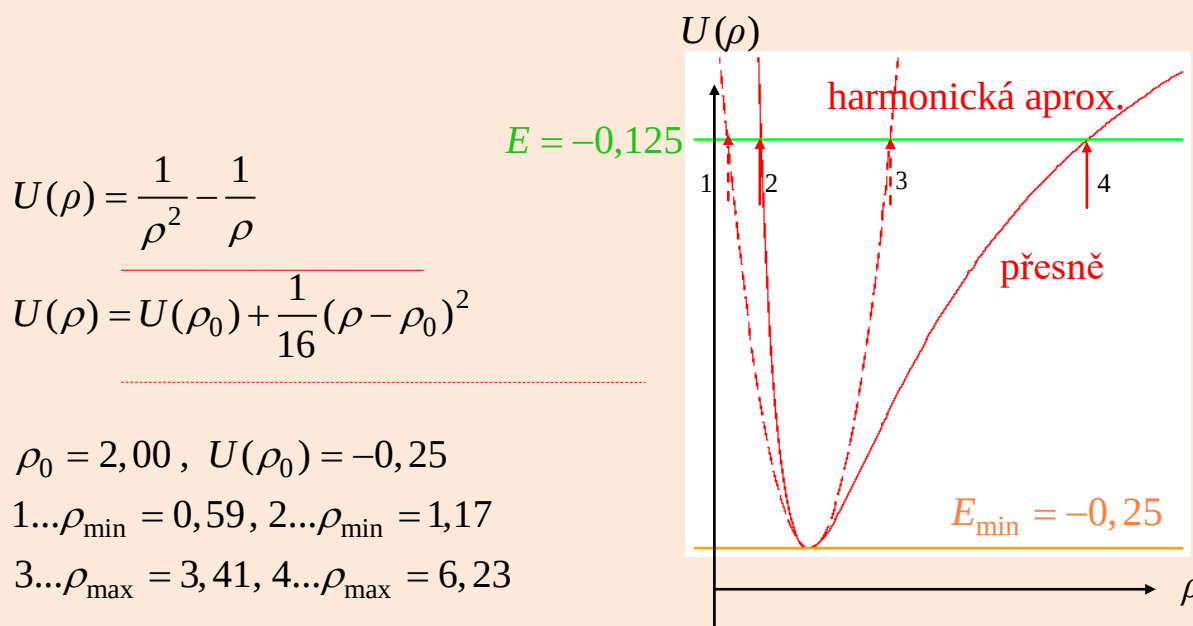
Odchylka potenciální energie v harmonické aproximaci od přesného vyjádření je schematicky znázorněna na obr. 6 a zachycena v tabulce pro hodnoty $E = -0,125$, $E_{\min} = U(\rho_0) = -0,25$ v „přízpusobených“ jednotkách. (Další použité číselné hodnoty jsou uvedeny v obrázku.)

Výpočtem integrálu a dosazením mezí $\rho_{\min}$ a $\rho_{\max}$ dostaneme

$$T = 4\sqrt{2m} \pi a^{3/2} b^{-2} \text{ a } \frac{a_0^3}{T^2} = \frac{\kappa M}{4\pi^2}.$$

Opět je splněn třetí Keplerův zákon.

	přesná hodnota	harm. aproximace
ρ_0	2,00	2,00
$\rho_{\min}$	1,17	0,59
$\rho_{\max}$	6,83	3,41
a_0	4,00	2,00
$\rho_{\max} - \rho_{\min}$	5,66	2,82



Obr. 6: Schematické grafy, porovnání přesného výrazu pro potenciální energii (plná čára) a harmonické aproximace (přerušovaná čára).

Příklad 6: Keplerova úloha – minimální přípustná energie. Pro minimální přípustnou energii platí

$$E_{\min} = U(\rho_0) = -\frac{\kappa^2 m^3 M}{2\ell^2} \Rightarrow \rho_{\min} = \rho_{\max} = \rho_0 = \frac{\kappa m M}{2 |E_{\min}|}.$$

Periodu pohybu nelze určit ze vztahu (1). Na druhé straně je řešení Keplerovy úlohy v této situaci velice jednoduché a lze je najít v každé středoškolské učebnici fyziky. Jedná se totiž o rovnoměrný pohyb částice m po kružnici se středem v částici M . Dostředivá síla

o velikosti $F_d = m\omega^2 \rho_0$ je realizována gravitační silou o velikosti $F_g = \frac{\kappa m M}{\rho_0^2}$. Platí tedy

$$\frac{\kappa m M}{\rho_0^2} = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \rho_0 \Rightarrow \frac{\rho_0^3}{T^2} = \frac{\kappa M}{4\pi^2}.$$

Závěr

V příspěvku popisujeme obecný fyzikální systém, jehož pohyb může být popsán jedinou (časově závislou) proměnnou, tzv. *jednorozměrný pohyb*. Ukazuje se (a pro studenty to může být překvapivé), že jedinou podmínkou pro to, aby tento pohyb byl periodický, je působení tzv. *vratné síly*. Na základě tohoto předpokladu lze odvodit vztah pro periodu jak obecně, tak v harmonické aproximaci. Postup je vhodný pro výpočet periody v řadě případů z oblasti mechaniky či elektřiny. Lze jej použít i pro řešení Keplerovy úlohy, kterou lze pro dvoučásticovou izolovanou soustavu vyřešit kompletně a přesně.

Využití obecných vlastností vratné síly ve výuce různých disciplín obecné fyziky představuje vhodný didaktický postup umožňující studentům získat nadhled a uvědomit si, že podobné úlohy není třeba řešit pro každý fyzikální model od začátku a odděleně.

Literatura

- [1] R. Cross 2021 Eur. J. Phys. 42 055001.
- [2] R. B. Levien, S. M. Tan: RLevien R B and Tan S M 1993 Double pendulum: an experiment in chaos Am. J. Phys. 61 (1993), 1038-44.
- [3] R. Cross 2023 Eur. J. Phys. 44 025004.
- [4] B. Kos et al 2018 Eur. J. Phys. 39 35804.
- [5] L. Czudková, J. Musilová: The pendulum: a stumbling block of secondary school mechanics. Physics Education 35 (2000), 6, 428-435
- [6] V. Žák: Síly působící na matematické kyvadlo na 7 + 1 způsob. Matematika-fyzika-informatika 25 (2016), 266-276.
- [7] O. Lepil: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. Prometheus, Praha 1993. (In Czech.) (Physics for grammar schools. Mechanical oscillations and waves.)
- [8] D. Haliday, R. Resnick, J. Walker: Fundamentals of Physics Extended (9th edition), Wiley&Sons, 2011.
- [9] R. A. Serway, J. S. Faughn: College Physics (5th edition). Saunders College Publishing, 1985.
- [10] A. Tomasino: Physique, Term S, Obligatoire. Nathan/VUEFF, 2022. (Ve francouzštině.)
- [11] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: Mechanika. Kurs teoretické fyziky I. Nauka, Moskva 1965.
(V ruštině.)
- [12] D. L. Goodstein, J. R. Goodstein J R: Feynman's Lost Lecture: The Motion of Planets Around the Sun. Norton, New York 1996.
- [13] Yuvita Oktarisa and Ricardo Karam 2020 Eur. J. Phys. 42 015706.
- [14] N. Newbury et al.: Princeton Problems in Physics with Solutions. Princeton University Press, 1991.
- [15] J. Spanier, K. B. Oldham: An atlas of functions. Hemisphere Publishing Corporation, USA, 1987.
- [16] I. Kiyosi (Ed.): Encyclopedic Dictionary of Mathematics (2. vyd.), The MIT Press, 1996.
- [17] Aplikace WolframAlpha