

HODGEŮV OPERÁTOR A JEHO PRAKTICKÉ UŽITÍ

3. ČÁST: FYZIKÁLNÍ APLIKACE

Petr BULUŠEK, Pavla MUSILOVÁ, Jana MUSILOVÁ

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity,
Kotlářská 2, 611 37 Brno, 180031@mail.muni.cz, pavla@physics.muni.cz,
janam@physics.muni.cz

Abstrakt

Kalkul diferenciálních forem, zahrnující i problematiku Hodgeova operátoru, je silným nástrojem umožňujícím efektivní matematický zápis klíčových vztahů fyzikálních teorií. V první a druhé části příspěvku jsme představili algebraický i analytický základ tohoto kalkulu a ukázali jeho využití při vyjádření diferenciálních operátorů ve zcela obecných křivočarých souřadnicích. V této, třetí a poslední, části navazujeme na matematický aparát částí předchozích a věnujeme se fyzikálním aplikacím, konkrétně v elektrodynamice. Půjde o alternativní zápis Maxwellových rovnic v třírozměrné i čtyřrozměrné podobě, pro nějž je klíčová (algebraicky i geometricky přirozená) reprezentace Lorentzovy síly a tenzoru elektromagnetického pole právě pomocí diferenciálních forem. I tato část příspěvku spadá do (pokročilejší) oblasti vysokoškolské didaktiky fyziky.

7. Úvod

Aparát diferenciálních forem včetně Hodgeova operátoru při zápisu rovnic elektrodynamiky najdeme v řadě článků i v pokročilých učebnicových textech. Citovat zde nemůžeme ani všechny ty nejdůležitější, tak snad alespoň monografii [1] a články [2 – 5]. Monografie [1] je velmi obsáhlá, zabývá se obtížnými matematickými tématy s aplikačními možnostmi ve fyzice – diferenciální formy, diferenciální geometrie, algebraická a diferenciální topologie, Lieovy grupy, vektorová a tenzorová rozvrstvení, Chernovy formy – jakožto tématy dle autora [1] „nezbytnými pro hlubší porozumění klasické i moderní fyzice a inženýrství“. I když je autorem charakterizována jako „text vhodný pro absolventy (postgraduální studenty) a pokročilé studenty fyziky, inženýrství a matematiky“, a jako „kurs vhodný k samostudiu“, jde o text natolik obtížný a lze říci přetížený formalismem, že jeho avizované cíle pravděpodobně nelze běžně naplnit. Presentované fyzikální aplikace jsou touto obtížností a formalizací rovněž poznamenány. Text se na několika místech věnuje matematické formulaci fyzikálních teorií, např. mechaniky, termodynamiky a elektrodynamiky pomocí diferenciálních forem, reprezentace fyzikálních veličin formami je však zaváděna formálně, axiomaticky, někdy i „ad hoc“. Pokud jde o časopisecké práce [2 – 5], věnují se z převážné části matematickému výkladu a poté aplikaci matematického aparátu diferenciálních forem v elektrodynamice tak, že jej zavádějí rovněž formálně, a dalo by se říci i povrchně, bez bližšího zdůvodnění fyzikální či geometrické podstaty reprezentace určité veličiny odpovídající diferenciální formou.

Uvedme příklad: Jednou z hlavních myšlenek např. v práci [5] je reprezentace hustoty náboje nikoli skalární funkcí ρ času a souřadnic, nýbrž přímo integrandem vyjadřujícím

celkový náboj elementární objemové oblasti, tedy jako 3-formu $\rho (= \rho dx \wedge dy \wedge dz)$, která je (v daném bodě euklidovského prostoru $\mathbf{R}^3$) jako prvek jednorozměrného prostoru $\Lambda_3(\mathbf{R}^3)$ ¹ automaticky (triviálně) uzavřená, a tedy lokálně exaktní. To znamená, že k ní lokálně, tj. například na jednoduše souvislé oblasti, existuje 2-forma taková, že ρ je její vnější derivací. Tuto 2-formu označuje autor jako D , a píše $\rho = dD$ s odkazem na Maxwellovu rovnici $\text{div } \vec{D} = \rho$. Jakékoli fyzikální zdůvodnění či matematické/geometrické zdůvodnění toho, že indukce elektrického pole $\vec{D}$, chápána při běžné „školské“ interpretaci jako vektorové pole, se najednou stává antisymetrickým kovariantním tenzorovým polem druhého řádu, chybí. V podobném duchu pak autor pokračuje k dalším Maxwellovým rovnicím, a v podobném duchu se odvíjejí úvahy i v dalších pracích na toto téma.

Přirozená geometrická povaha fyzikálních veličin, konkrétně jejich transformační vlastnosti při přechodech mezi soustavami souřadnic, resp. bázemi, je však pro možnost jejich reprezentace diferenciálními formami důležitá. V této části příspěvku o Hodgeově operátoru se pokusíme o korektní přístup k takové reprezentaci: právě na rozboru geometrické podstaty a transformačních vlastností veličin popisujících elektromagnetické pole jejich formální reprezentaci vhodnými matematickými objekty založíme a využijeme ji, včetně využití Hodgeova operátoru, k efektivnímu zápisu rovnic klasické elektrodynamiky.

8. Lorentzova síla – trojrozměrná verze

Klíčem k matematické reprezentaci veličin elektromagnetického pole, avizované v úvodu, je *Lorentzova síla*, popisující působení elektromagnetického pole na nabitou částici. Veličiny pole se přirozeně vyskytují ve formulaci příslušného silového zákona, jehož nejobvyklejší (trojrozměrný) tvar je

$$(1) \quad \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B},$$

kde q je náboj částice, $\vec{v}$ její rychlost, a o $\vec{E}$ a $\vec{B}$ se hovoří jako o *vektorech* elektrické intenzity a magnetické indukce. O Lorentzově síle je ve výuce fyziky řeč i na střední škole, i když bez vektorového součinu jako matematické operace, spíše jen ve slovní podobě.

Abychom veličiny pole správně charakterizovali z algebraického hlediska, tj. z hlediska jejich transformačních vlastností při souřadnicových přechodech, je vhodné podívat se na vztah (1) podrobněji. Je tu totiž problém:

S intenzitou elektrického a indukcí magnetického pole, stejně jako s operací $\vec{v} \times \vec{B}$, se nakládá jako s vektory, o vektorovém součinu se v některých učebnicích hovoří jako o „pseudovektoru“, nebo „axiálním vektoru“, aby se nějak „vyřídil“ problém se znaménkem složek, závislým na tom, zvolíme-li ortonormální bázi pro jejich vyjádření jako pravotočivou, nebo levotočivou. Máme-li klíčové fyzikální veličiny klasické elektrodynamiky, především intenzitu elektrického a indukci magnetického pole, korektně reprezentovat diferenciálními formami, tj. kovariantními antisymetrickými tenzorovými poli vhodných řádů, je třeba při takové reprezentaci respektovat transformační vlastnosti těchto veličin. Přirozené je začít právě Lorenzovou silou v klasické mechanice. V takovém případě jsou časový a prostorový

¹ Viz značení v první a druhé části našeho příspěvku.

interval (každý samostatně) invarianty při transformacích souřadnic v dané vztažné soustavě², tedy přechodech mezi bázemi pro vyjádření vektorových, kovektorových, a obecně tenzorových veličin.

V klasické mechanice je síla, tedy levá strana silového zákona (1), vektorem. Vektorem tedy musí být i pravá strana. To bude nepochybně platit pro intenzitu $\vec{E}$. Rychlost $\vec{v}$ je rovněž vektorem. Jakým „algebraickým typem“ jsou veličiny $\vec{v} \times \vec{B}$, resp. $\vec{B}$, vystupující na pravé straně vztahu (1)?

Uvažujme o přechodu mezi bázemi v trojrozměrném vektorovém prostoru (a píšme teď vektory bez šipek, jak je v lineární algebře obvyklé) :

$(e_1, e_2, e_3) \xrightarrow{T} (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, $\bar{e}_i = T_i^j e_j$, $e_i = S_i^j \bar{e}_j$, kde T a S jsou navzájem inverzní regulární matice. (Jsou-li báze ortonormální, jsou matice T a S ortogonální, což dále předpokládáme.) Pro složky vektoru $b = \beta^i e_i = \bar{\beta}^i \bar{e}_i$ (Einsteinova sčítací symbolika)

v maticovém zápisu $b \sim (\beta^1 \ \beta^2 \ \beta^3) = (\beta)$, $b \sim (\bar{\beta}^1 \ \bar{\beta}^2 \ \bar{\beta}^3) = (\bar{\beta})$ platí

$(\beta) = (\bar{\beta})T$, $(\bar{\beta}) = (\beta)T^{-1}$. V případě vektorů $b \sim (\beta)$, $c \sim (\gamma)$ zadaných složkami v ortonormální *pravotočivé* bázi (e_1, e_2, e_3) trojrozměrného vektorového prostoru E_3 se skalárním součinem vycházejí složky „vektorového součinu“ ze standardní „geometrické“ definice (velikost, směr, orientace) takto:

$$(2) \quad b \times c \sim (\beta^2 \gamma^3 - \beta^3 \gamma^2, \beta^3 \gamma^1 - \beta^1 \gamma^3, \beta^1 \gamma^2 - \beta^2 \gamma^1).$$

Že se tato trojice čísel netransformuje při přechodu mezi bázemi jako vektor, je vidět na první pohled: Při operaci inverze, kdy je matice přechodu rovna záporně vzaté jednotkové matici, změní složky „skutečného“ vektoru znaménko, zatímco znaménka trojice reprezentující objekt označený $b \times c$ jsou nezměněna. Objekt $b \times c$ tedy není v pravém slova smyslu vektor. Tento fakt není nic nového, v učebnicích se běžně hovoří o *pseudovektoru*, nebo *axiálním* vektoru. Ale nazývejme věci pravými jmény: Transformační vztahy pro trojici (2), odvozenou ze složek vektorů, jsou následující: Označme $\eta^{ij} = \beta^i \gamma^j - \beta^j \gamma^i$ a dosaďme transformační vztahy pro složky vektorů. Dostaneme

$\eta^{ij} = \bar{\beta}^k \bar{\gamma}^\ell T_k^i T_\ell^j - \bar{\beta}^\ell \bar{\gamma}^k T_\ell^j T_k^i = \bar{\eta}^{k\ell} T_\ell^j T_k^i$. Složky „vektorového součinu“ vektorů se při přechodech mezi bázemi transformují jako složky *kontravariantního antisymetrického tenzoru* druhého řádu, takže ono užívané " $\vec{b} \times \vec{c}$ " je prvkem prostoru $\Lambda^2(E_3)$ ³.

Vraťme se k Lorentzově síle a zopakujme: Je-li síla vektorem, je intenzita elektrického pole rovněž vektorem a objekt f , zapisovaný obvykle jako $\vec{v} \times \vec{B}$, musí být rovněž vektorem. Už v tomto okamžiku je vidět, že transformační vlastnosti veličiny „ B “ nemohou odpovídat transformačním vlastnostem vektoru. Konkrétně: bude-li přechod mezi bázemi inverzí, tj. $T = (T_i^j) = (-\delta_i^j)$, $1 \leq i, j \leq 3$, změní při ní složky vektorů rychlosti a síly znaménko. Složky veličiny „ B “ tedy musí zůstat nezměněny. Označme nyní

² Prostorový interval je i v nerelativistickém případě ve vztažných soustavách navzájem se pohybujících invariantem obecně také jen pro současné události.

³ Horní index v zápisu $\Lambda^2(E_3)$ znamená, že se jedná o prostor (antisymetrických) kontravariantních tenzorů druhého řádu.

$B^1 = -\eta_2^3 = \eta_3^2$, $B^2 = -\eta_3^1 = \eta_1^3$, $B^3 = -\eta_1^2 = \eta_2^1$ a složky zapišme do antisymetrické matice veličiny B :

$$(3) \quad B \sim \eta = \begin{pmatrix} 0 & \eta_1^2 & \eta_1^3 \\ \eta_2^1 & 0 & \eta_2^3 \\ \eta_3^1 & \eta_3^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B^3 & B^2 \\ B^3 & 0 & -B^1 \\ -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maticový zápis složek objektu f je $(f) = (v)\eta$, kde $(v) = (v^1 \ v^2 \ v^3)$, $(f) = (f^1 \ f^2 \ f^3) = (v^2 B^3 - v^3 B^2, v^3 B^1 - v^1 B^3, v^1 B^2 - v^2 B^1)$. Musí platit $(\bar{f}) = (f)T^{-1} = (v)\eta T^{-1} = (\bar{v})T\eta T^{-1}$, tj.

$\bar{\eta} = T\eta T^{-1} = T\eta T^t$, kde $T^t (= T^{-1} = S)$ je transponovaná matice k matici T . Je tedy

$\eta_i^j = \bar{\eta}_k^\ell T_\ell^j S_i^k$, takže B se transformuje jako smíšený tenzor druhého řádu,

$B = \eta_i^j e^i \otimes e_j$, $\eta_i^j = -\eta_j^i$, kde (e^1, e^2, e^3) je duální báze k bázi (e_1, e_2, e_3) . Pak f je

kontrakce tenzoru B vektorem v a Lorentzova síla má tvar $F = qE + qi_v B$. Chceme-li

Lorentzovu sílu jako vektorové pole reprezentovat diferenciální formou, potřebujeme vektory

F a E převést na kovektory snížením indexu, $F^b = i_F g = F_i^b e^i$, $F_i^b = g_{ik} F^k$,

$E^b = i_E g = E_i^b e^i$, $E_i^b = g_{ik} E^k$, a smíšený tenzor $B = \eta_i^j e^i \otimes e_j$ na čistě kovariantní

antisymetrický tenzor $\frac{1}{2}\eta_{ij} e^i \wedge e^j$, který označíme B^b , a to snížením sloupcového indexu a antisymetrizací.

Příklad 24 Vyjádříme podrobně kontrakci smíšeného tenzoru $B = \eta_i^j e^i \otimes e_j$ vektorem rychlosti.

$$\begin{aligned} i_v B &= i_v (\eta_i^j e^i \otimes e_j) = \eta_i^j (i_v e^i) e_j = (\eta_i^j v^i) e_j = (v^2 \eta_2^1 + v^3 \eta_3^1) e_1 + (v^3 \eta_3^2 + v^1 \eta_1^2) e_2 + (v^1 \eta_1^3 + v^2 \eta_2^3) e_3 \sim \\ &\sim (v^2 B^3 - v^3 B^2, v^3 B^1 - v^1 B^3, v^1 B^2 - v^2 B^1) = (v^2 B_3 - v^3 B_2, v^3 B_1 - v^1 B_3, v^1 B_2 - v^2 B_1). \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledkem je obvyklé formální vyjádření složek „vektorového součinu“ vektoru rychlosti a „vektoru“ magnetické indukce v *pravotočivé ortonormální bázi* euklidovského vektorového prostoru. Dále vypočteme B^b a $i_v B^b$. Platí (v závěru výpočtu je pro přehlednost výpočtů provedena záměna indexů j a k)

$$\begin{aligned} B^b &= \text{Alt}(\eta_i^j e^i \otimes e_j)^b = \text{Alt} \eta_i^j e^i \otimes i_{e_j} g = \text{Alt}(\eta_i^j e^i \otimes (g_{jk} e^k)) = \text{Alt}(e^i \otimes (\eta_i^k g_{jk} e^j)) = \\ &= \frac{1}{2} \eta_{ij} e^i \wedge e^j, \quad \eta_{ij} = \eta_i^k g_{jk} \end{aligned}$$

$$\text{a dále pak } i_v B^b = i_v (\frac{1}{2} \eta_{ij} e^i \wedge e^j) = \frac{1}{2} \eta_{ij} v^i e^j - \frac{1}{2} \eta_{ij} v^j e^i = \frac{1}{2} (\eta_{ij} - \eta_{ji}) v^i e^j = (\eta_{ij} v^i) e^j.$$

Dosadíme za η_{ij} a dostaneme $i_v B^b = (v^2 B^3 - v^3 B^2) e^1 + (v^3 B^1 - v^1 B^3) e^2 + (v^1 B^2 - v^2 B^1) e^3$.

Vzhledem k tomu, že v našem případě ortonormálních bází v euklidovském prostoru je metrický tenzor (skalární součin) reprezentován jednotkovou maticí, je operace snížení indexů jen formální, neboť $F_i^b = F^i$, $E_i^b = E^i$, $B^b = \frac{1}{2} \eta_{ij} e^i \wedge e^j \sim (\eta_{ij}) = (\eta_i^j)$, $\eta_{ij} = -\eta_{ji}$. Je však plně

korektní⁴. Pro Lorentzovu sílu jako vektor (resp. vektorové pole) dostaneme následující reprezentaci kovektorem (resp. kovektorovým polem) $F^b = qE^b + qi_v B^b = (qE_j + q\eta_{ij}v^i)e^j$, kde operace $i_v B^b$ značí kontrakci kovariantního tenzoru B^b vektorem v (viz [7] a příklad 24). Pak, pomocí složek tenzoru (3),

$$(4) \quad F^b = q(E_1 e^1 + E_2 e^2 + E_3 e^3) + qi_v (B_1 e^2 \wedge e^3 + B_2 e^3 \wedge e^1 + B_3 e^1 \wedge e^2), \quad E_i = E^i, \quad B_i = B^i.$$

Magnetickou indukci jsme tedy na základě transformačních požadavků na Lorentzovu sílu reprezentovali kovariantním antisymetrickým 2-tenzorem. To bude pro další úvahy důležité.

Přejdeme ještě k vyjádření Lorentzovy síly jako vektorového pole závislého obecně na čase, totéž platí pro intenzitu elektrického a indukci magnetického pole. A abychom docílili úplné jednoty v reprezentaci formami, vyjádříme (v trojrozměrné verzi formálně) formu E^b rovněž pomocí kontrakce. Ortonormální báze v tečných prostorech $T_x(\mathbf{R}^4)$ k

$\mathbf{R}^4 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ (časová osa a trojrozměrný prostor) a v duálních prostorech budou

$$(e_{0,x}, e_{1,x}, e_{2,x}, e_{3,x}) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{c \partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)_x \text{ a } (e_x^0, e_x^1, e_x^2, e_x^3) = (c dt, dx, dy, dz)_x. \text{ Při tomto označení}^5 \text{ je}$$

$$(5) \quad F^b = q(E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) + qi_v (B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy)$$

$$(6) \quad \text{neboli } F^b = -qi_{\frac{\partial}{c \partial t}}(E^b \wedge c dt) + qi_v B^b = -q i_v (E^b \wedge dt - B^b),$$

$$\text{kde } \tilde{v} = \frac{\partial}{\partial t} + v^1 \frac{\partial}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial y} + v^3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Veličiny elektromagnetického pole lze tedy v trojrozměrné verzi (euklidovský metrický tenzor) reprezentovat diferenciální 2-formou

$$(7) \quad \Phi = c^{-1} E^b \wedge c dt - B^b = (E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) \wedge dt - (B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy).$$

(Rychlost světla v trojrozměrné verzi úvah vypadá sice formálně, avizuje však již čtyřrozměrný přístup a hlavně soulad fyzikálních jednotek.)

9. Lorentzova síla – čtyřrozměrná verze

V relativistickém přístupu, který však je v případě elektrodynamiky nezbytný, pracujeme ve čtyřrozměrném časoprostoru $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, v němž již časový a prostorový interval nejsou samostatné invarianty. Invariantem je časoprostorový interval s_{12} mezi událostmi

$$U_1 \sim (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3), \quad U_2 \sim (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3), \quad \text{kde } x^0 = ct \text{ je časová souřadnice události a}$$

x^1, x^2, x^3 jsou souřadnice prostorové, nejčastěji kartézské. Platí

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2^1 - x_1^1)^2 - (x_2^2 - x_1^2)^2 - (x_2^3 - x_1^3)^2,$$

⁴ Z veličiny B (která je, jak jsme zjistili, smíšeným tenzorem, resp. tenzorovým polem typu $(1, 1)$, a je reprezentována maticí (3)) se snížením indexu stává tenzor/tenzorové pole typu $(0, 2)$, tedy čistě kovariantní.

⁵ Cíleně se vyhýbáme didakticky nevhodnému zvyku položit rychlost světla rovnou jedné.

nebo „infinitesimálně“

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c dt = c \gamma^{-1} dt, \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Časoprostor je tak čtyřrozměrným prostorem s kovariantním Minkowského metrickým tenzorem $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ s diagonální maticí $\text{diag } G_M = (1, -1, -1, -1)$ ⁶ (viz též v první části tohoto příspěvku). Znaménka se projeví při snižování a zvyšování indexů: Uvažujme o tzv. *čtyřpotenciálu*, což je čtyřvektor užívaný zrovna v elektrodynamice⁷,

$$A \sim (c^{-1}\varphi, A^1, A^2, A^3) = (A^i) = (A^0, A^1, A^2, A^3),$$

kde φ je skalární potenciál a A^1, A^2, A^3 jsou složky vektorového potenciálu elektromagnetického pole. Pak $A^b = i_A g \sim (A_0, A_1, A_2, A_3)$, přičemž $A_0 = A^0, A_i = -A^i$ pro $i = 1, 2, 3$. Podobně pro *čtyřproud*

$$\Upsilon \sim (c\rho, j^1, j^2, j^3) = (j^i) = (j^0, j^1, j^2, j^3) \text{ je } \Upsilon^b = i_\Upsilon g \sim (j_0, j_1, j_2, j_3),$$

kde $j_0 = j^0, j_i = -j^i, i = 1, 2, 3$. Zde $j^0 = j_0 = c\rho$, kde ρ je hustota náboje (skalár) a (j^1, j^2, j^3) jsou složky (trojrozměrné) hustoty proudu (podrobněji v odstavci 12).

Podobně jako v předchozím odstavci přejdeme i zde k reprezentaci Lorentzovy síly a veličin elektromagnetického pole diferenciálními formami. Pro popis elektromagnetického pole v rámci čtyřrozměrného přístupu je ve fyzikální literatuře zaváděn *tenzor elektromagnetického pole*, jehož kovariantní, resp. kontravariantní tvar ve složkách, při volbě $\text{diag } G = (1, -1, -1, -1)$, je

$$(8) (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1}E_1 & -c^{-1}E_2 & -c^{-1}E_3 \\ c^{-1}E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ c^{-1}E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ c^{-1}E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, (F^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1}E^1 & -c^{-1}E^2 & -c^{-1}E^3 \\ c^{-1}E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ c^{-1}E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ c^{-1}E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $E_i = -E^i, B_i = B^i$. (Pozor! Složky magnetické indukce se netransformují jako složky vektoru – viz předchozí odstavec⁸.) Zavedení tohoto tenzoru přirozeně vychází z variačního přístupu k čtyřrozměrné formulaci teorie elektromagnetického pole (viz zejména [6] nebo také např. [7]) jako veličiny odvozené ze čtyřpotenciálu. Abychom definici tenzoru elektromagnetického pole nebrali jen jako fakt „spadlý shora“, je třeba, abychom pochopili její logiku. Proto se stručně zaměříme na odvození pohybových rovnic nabitě částice v elektromagnetickém poli:

⁶ Někteří autoři, například právě [1, 4, 5], používají verzi $\text{diag } G = (-1, 1, 1, 1)$. (Rozdíl od naší volby se projeví při aplikaci Hodgeova operátoru pouze na některé formy báze v prostorech k -forem.)

⁷ Název „čtyřvektor“ (čtyřpotenciál, čtyřproud, apod.) je historický a nepříliš vhodný. Opírá se o fakt, že jde o vektor ve čtyřrozměrném prostoru, tedy vektor se čtyřmi složkami. Vzhledem k jeho „zabydlení se“ v běžné terminologii se mu však nebudeme za každou cenu vyhýbat.

⁸ Všimněte si také orámovaných částí matic. Jsou stejné u kovariantní i kontravariantní verze tenzoru.

Lagrangeova funkce částice o hmotnosti m a rychlosti $\vec{v}$ pohybující se v elektromagnetickém poli s vektorovým potenciálem $\vec{A}$ a skalárním potenciálem φ , známá z trojrozměrného

přístupu (viz [6, 7]) ve tvaru $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q(\vec{A}\vec{v} - \varphi)$, přejde ve čtyřrozměrném

prostoru času s Minkowského metrickým tenzorem na tvar

$$(9) \quad \tilde{L} = -mc u_i u^i - q A_i u^i,$$

$$\text{kde } u \sim (u^i) = \left(\frac{dx^i}{ds} \right) = \gamma(1, c^{-1}v^1, c^{-1}v^2, c^{-1}v^3), \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

je čtyřrychlost a $u^b \sim (u_i) = (g_{ij}u^j)$, $0 \leq i \leq 3$ ⁹. Odtud pak dostaneme pohybové (Lagrangeovy) rovnice

$$(10) \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^i} = 0 \Rightarrow mc \frac{du_i}{ds} - q \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right) u^j = 0 \Rightarrow mc \frac{du_i}{ds} - q F_{ij} u^j = 0.$$

Veličina se složkami $F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$, $0 \leq i, j \leq 3$, je tenzorem elektromagnetického pole a ve výsledku je dána vztahy (8).

Příklad 25 Z definice složek F_{ij} , $0 \leq i, j \leq 3$, odvodíme tvar matic (8). Využijeme známý

vztah pro intenzitu $\vec{E}$ vyjádřenou jako vektor, tj. $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, a dále čtyřpotenciál

$(c^{-1}\varphi, A^1, A^2, A^3)$, $c^{-1}\varphi = A^0 = A_0$. V matici (F_{ij}) vystupuje první index jako řádkový, druhý jako sloupcový¹⁰. Počítejme prvky F_{0j} pro $1 \leq j \leq 3$ (nultý řádek matice, v němž $F_{00} = 0$).

$$F_{0j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^j} = -\frac{\partial A_j}{\partial(ct)} - \frac{\partial(c^{-1}\varphi)}{\partial x^j} = c^{-1}E^j = -c^{-1}E_j, \quad F_{j0} = -F_{0j}.$$

Nyní vyjádříme prvky F^{ij} :

$$F^{0j} = g^{0k} g^{j\ell} F_{k\ell} = -F_{0j} = c^{-1}E_j = -c^{-1}E^j,$$

$$F^{ij} = g^{ik} g^{j\ell} F_{k\ell} = F_{ij}, \quad F^{ij} = -F^{ji}, \quad F^{12} = -B^3 \text{ a cykl, } 1 \leq i, j \leq 3.$$

V následujícím příkladu se snadno přesvědčíme, že při souřadnicových přechodech se soubor veličin F_{ij} , $0 \leq i, j \leq 3$, skutečně transformuje jako kovariantní antisymetrický tenzor druhého řádu:

⁹ Lagrangeova funkce L odpovídá funkcionálu akce $S = \int_{\alpha}^{\beta} L dt$, funkce $\tilde{L}$ pak funkcionálu $\tilde{S} = \int_a^b \tilde{L} ds$,

$ds = c\gamma^{-1} dt = u_i u^i ds$, s uvažováním, že $u_i u^i = \gamma^2(1 + c^{-2}v_i v^i) = \gamma^2(1 - c^{-2}v^2) = 1$.

¹⁰ S umístěním indexů může při tomto maticovém zápisu vznikat jistý problém spočívající v tom, že standardní umístění řádkového indexu je dolní, sloupcového horní. Protože je však tenzor elektromagnetického pole se složkami F_{ij} čistě kovariantní, neměli bychom jej při důsledné korektnosti zapisovat do matice. Z hlediska praktických výpočtů je však zápis do matice v našem případě vhodný, je tedy nutné umístění indexů „hlídat“.

Příklad 26 Označme podobně jako v předchozím odstavci symbolem T matici přechodu od ortonormální báze (e_0, e_1, e_2, e_3) k ortonormální bázi $(\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ a $S = T^{-1}$ matici inverzní (v pevném bodě časoprostoru). Platí standardní transformační vztahy (horní index t značí transpozici) $(A^b)^t = S(\bar{A}^b)^t$, $(x) = (\bar{x})T$, kde $(A^b) = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ jsou složky kovektoru A^b a $(x) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ složky „polohového“ vektoru události v časoprostoru. Pak

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial(S_j^k \bar{A}_k)}{\partial \bar{x}^\ell} \frac{\partial(x^p S_p^\ell)}{\partial x^i} - \frac{\partial(S_i^\ell \bar{A}_\ell)}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial(x^p S_p^k)}{\partial x^j} = S_i^\ell S_j^k \left(\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^\ell} - \frac{\partial \bar{A}_\ell}{\partial \bar{x}^k} \right) = S_i^\ell S_j^k \bar{F}_{\ell k}.$$

Z pohybové rovnice (10) je rovněž vidět, jaký výraz bude představovat *čtyřrozměrnou Lorentzovu sílu*. Levá i pravá strana mají fyzikální rozměr $[\text{kg s}^{-1}]$ (čtyřrychlost je bezrozměrná a časoprostorový interval má rozměr $[\text{m}]$). Vynásobíme-li pohybovou rovnici rychlostí světla, dostaneme levou i pravou stranu v newtonech. Lorentzova síla je tedy čtyřvektor

$$(11) \quad F_L^b = qc F_{ij} u^j dx^i, \quad F_L = F_L^{b\#} = qc F_{ij} u^j (dx^i)^\# = qc F_{ij} u^j \left(g^{i\ell} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right) = (qc g_{j\ell} F^{i\ell} u^j) \frac{\partial}{\partial x^i}.^{11}$$

Lorentzovu sílu jako kovektor dostaneme kontrakcí čtyřvektorem rychlosti diferenciální 2-formy Φ , vyjádřené ve čtyřrozměrné verzi ve tvaru

$$(12) \quad \Phi = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = c^{-1} E^b \wedge dx^0 - (B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2),$$

$$\text{neboli } \Phi = c^{-1} E^b \wedge dx^0 - \tilde{B} = E^b \wedge dt - \tilde{B}, \text{ tedy}$$

$$(13) \quad F_L^b = -qc i_u \Phi.$$

Diferenciální forma Φ kompletně reprezentuje elektromagnetické pole. Symbolem $\tilde{B}$ od této chvíle pro jednoduchost značíme 2-formu

$$\tilde{B} = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2, \text{ kde } \tilde{B} = \frac{1}{2} F_{ij} e^i \wedge e^j \text{ pro } 1 \leq i, j \leq 3.$$

Příklad 27 Vyjádříme ještě Lorentzovu sílu pomocí „obyčejné“ rychlosti, abychom měli porovnání s trojrozměrným případem. Ze vztahu (11) dostaneme složky formy F_L^b v maticovém zápisu

$$\begin{aligned} (F_L^b) &= qc (F_{ij})(u^0 u^1 u^2 u^3)^t = (F_{L,0}^b \ F_{L,1}^b \ F_{L,2}^b \ F_{L,3}^b)^t, \text{ horní index } t \text{ značí transpozici,} \\ F_{L,0}^b &= qE_i u^i, \quad F_{L,1}^b = -qE_1 u^0 + (u^2 B_3 - u^3 B_2), \quad F_{L,2}^b = -qE_2 u^0 + (u^3 B_1 - u^1 B_3), \\ F_{L,3}^b &= -qE_3 u^0 + (u^1 B_2 - u^2 B_1) \Rightarrow F_L = q\gamma \left(-c^{-1} \vec{E} \vec{v}, \vec{E} + c^{-1} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad E^i = -E_i, 1 \leq i \leq 3. \end{aligned}$$

Víme již však, že výraz „ $\vec{v} \times \vec{B}$ “ není v pravém slova smyslu vektorový součin vektorů.

¹¹ Vyjádření Lorentzovy síly jako vektoru v rovnici (11) lze pojmout jako úkol k procvičení algebry.

10. Rovnice elektromagnetického pole – první pár

Z předchozího odstavce je zřejmé, že podstatná informace o elektromagnetickém poli¹² je obsažena v diferenciální formě Φ . Otázkou je, jak tato forma souvisí s Maxwellovými rovnicemi. Vypočteme její vnější derivaci s uvážením, že složky tenzoru elektromagnetického pole jsou funkcemi času a prostorových souřadnic¹³, tedy

$$d\Phi = dE^b \wedge dt - d\vec{B}, \text{ kde}$$

$$d\Phi = c^{-1} \left[\left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial B_1}{\partial t} \right] dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 + c^{-1} \left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} \right) - \frac{\partial B_2}{\partial t} \right] dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^0 + \\ + c^{-1} \left[\left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial B_3}{\partial t} \right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^0 - \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Vnější derivace této formy se anuluje právě tehdy, jsou-li všechny její složky nulové.

Uvážíme-li, že $E_i = -E^i$, $B_i = B^i$, $1 \leq i \leq 3$, odpovídá tomuto závěru obvyklý zápis

Maxwellových rovnic (v němž formálně vystupují intenzita elektrického i indukce

magnetického pole jako vektory) ve tvaru $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\text{div } \vec{B} = 0$. Tyto dvě rovnice tedy lze ekvivalentně zapsat efektivním způsobem jako jedinou rovnici pro formu Φ , tedy $d\Phi = 0$ ¹⁴, (nulou na pravé straně se rozumí nulová forma).

$$(14) \quad d\Phi = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ div } \vec{B} = 0.$$

Vraťme se ještě na chvíli k 2-formě $\Phi = E^b \wedge dt - \vec{B}$ ze vztahu (12). V případě, že je uzavřená, tj. je-li $d\Phi = 0$, jsou důsledkem tohoto faktu nejen rovnice (14), ale také skutečnost, že tato forma je (lokálně) exaktní. To znamená, že na jednoduše souvislých oblastech k ní existuje 1-forma $\tilde{A} = \tilde{A}_0 dx^0 + \tilde{A}_1 dx^1 + \tilde{A}_2 dx^2 + \tilde{A}_3 dx^3$ taková, že Φ je její vnější derivací, tj.

$$(15) \quad \Phi = d\tilde{A}.$$

Vyjádříme-li vnější derivaci formy $\tilde{A}$ a dosadíme do (15), dostaneme

$$\Phi = \left(\frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{A}_j}{\partial x^0} \right) dx^j \wedge dx^0 + \\ + \left(\frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2.$$

¹² Další charakteristiky vnesou do problematiky vlastnosti prostředí a zdroje pole – náboje a proudy. (Vlivem prostředí na vyjádření Maxwellových rovnic se zde zabývat nebudeme – vyžadovalo by to samostatný výklad.)

¹³ Autor textu [1] zavádí derivaci tvaru $d = d \wedge \frac{\partial}{\partial t}$, kde d má význam vnější derivace podle souřadnic, význam

$\partial / \partial t$ je obvyklý. Tento pojem je poněkud problematický: vnější derivace je operátor (zobrazení forem) a $\partial / \partial t$ je vektorové pole báze. Takže operace " $\wedge$ " zde nemá smysl. Korektní a bezproblémové je použití vnější derivace d v běžném smyslu.

¹⁴ Tento způsob zápisu uvedených dvou rovnic je plně korektní na rozdíl od standardního zápisu, který pracuje s magnetickou indukcí jako s vektorem. (Správný zápis pomocí veličin E a B by spočíval v rozeepsání podmínky (14) pomocí jejich složek, přesněji pomocí složek tenzoru elektromagnetického pole.)

(Stejný vztah splňuje také forma $\tilde{A} + df$, kde f je libovolná funkce časoprostorových souřadnic, neboť druhá vnější derivace libovolné formy je nulová, tj. $d^2 f = 0$.) Porovnáním s vyjádřením formy Φ ve vztahu (12) dostaneme

$$c^{-1}E^b = \left(\frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{A}_j}{\partial x^0} \right) dx^j, \\ -\tilde{B} = \left(\frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2.$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že veličina reprezentovaná kontravariantním tenzorem 1. řádu

$\tilde{A}^\# = \tilde{A}^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \tilde{A}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \tilde{A}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \tilde{A}^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$, $\tilde{A}^0 = \tilde{A}_0$, $\tilde{A}^i = -\tilde{A}_i$ pro $1 \leq i \leq 3$, je čtyřpotenciál, tj. $(\tilde{A}^0, \tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \tilde{A}^3) = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (-c^{-1}\varphi, A^1, A^2, A^3)$. To odpovídá rovnicím

$$E^j = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial t}, \quad 1 \leq j \leq 3, \quad x^0 = ct, \quad B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}, \quad B_2 = \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}, \quad B_3 = \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \Rightarrow \\ (16) \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

připustíme-li opět ne zcela korektní pohlížení na magnetickou indukci jako na vektor.

11. Rovnice elektromagnetického pole – druhý pár – bez zdrojů

Zaměříme se nyní na druhou dvojici Maxwellových rovnic ve vakuu, v níž jsou již ve hře zdroje pole, tedy náboje a proudy. Ty se standardně zapisují jako tzv. *čtyřproud* (viz začátek odst. 9). I v tomto případě přistoupíme k reprezentaci pomocí diferenciálních forem, a to z důvodu slučitelnosti s předchozími vyjádřeními. Zde už není taková reprezentace tak přímočará jako u rovnic (14). Zatímco reprezentace veličin elektromagnetického pole formami, vedoucí přímo k prvnímu páru Maxwellových rovnic (14), vyplynula přirozeně z úvah o Lorentzově síle a samozřejmého faktu, že tzv. „tenzor elektromagnetického pole“ (8) je kovariantní antisymetrické tenzorové pole, tj. diferenciální 2-forma, budeme nyní další úvahy vést již s cílem interpretace veličin charakterizujících zdroje pole, tedy čtyřproud, rovněž formami. V tomto odstavci o to ještě nepůjde, hodit se však konečně bude využití Hodgeova operátoru.

Nejprve přepíšme do „jazyka forem“ druhý pár Maxwellových rovnic pro případ bez zdrojů,

tj. pro nulový čtyřproud. Tyto rovnice mají obvyklý tvar $\text{div } \vec{E} = 0$, $\text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Nyní

přichází na řadu Hodgeův operátor. Přirozeným způsobem se opět uplatní forma Φ .

Připomeňme si známou věc z kalkulu forem v $\mathbf{R}^3$ (počítáme v ortonormálních bázích, viz druhá část našeho příspěvku): Pro libovolnou 2-formu

$$\omega^{(F)} = F_1 dx^2 \wedge dx^3 + F_2 dx^3 \wedge dx^1 + F_3 dx^1 \wedge dx^2 \text{ platí } d\omega^{(F)} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x^1} + \frac{\partial F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial F_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Jak vznikne divergence vektorového pole, je hned vidět, neboť složky

(F_1, F_2, F_3) formy $\omega^{(F)}$ jsou složkami kovektorového pole F^b . Forma Φ je sice 2-forma, ale tu jsme již využili k vyjádření prvního páru Maxwellových rovnic a vztah pro divergenci vektoru elektrické intenzity z ní přímo nedostaneme. Uvědomme si však, že $*\Phi$ je rovněž 2-forma, a ta už k cíli povede¹⁵. Výsledky aplikace Hodgeova operátoru na formy báze v prostorech $\Lambda_k(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)$, $0 \leq k \leq 3$, kde v tečných vektorových prostorech k $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ je zadán Minkowského metrický tenzor $\text{diag } G_M = (1, -1, -1, -1)$, shrnuje následující tabulka (čtenář si ji může sám zkontrolovat pomocí výpočtů v první části našeho příspěvku).

1 $-\omega_0$	dx^0 $-dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$	dx^1 $-dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3$	dx^2 $-dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1$	dx^3 $-dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$	
$dx^0 \wedge dx^1$ $dx^2 \wedge dx^3$	$dx^0 \wedge dx^2$ $dx^3 \wedge dx^1$	$dx^0 \wedge dx^3$ $dx^1 \wedge dx^2$	$dx^1 \wedge dx^2$ $dx^3 \wedge dx^0$	$dx^3 \wedge dx^1$ $dx^2 \wedge dx^0$	$dx^2 \wedge dx^3$ $dx^1 \wedge dx^0$
$dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ $-dx^3$	$dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1$ $-dx^2$	$dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $-dx^1$	$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $-dx^0$	ω_0 1	

Tabulka 1: Působení Hodgeova operátoru na souřadnicové formy v případě Minkowského metrického tenzoru $\text{diag } G_M = (1, -1, -1, -1)$. Druhý řádek každé tabulky obsahuje obrazy prvního řádku Hodgeovým operátorem.

Obraz $*\Phi$ formy Φ má tvar

$$\begin{aligned} *\Phi &= *(E^b \wedge dt - \tilde{B}) = c^{-1} * (E_1 dx^1 \wedge dx^0 + E_2 dx^2 \wedge dx^0 + E_3 dx^3 \wedge dx^0) - \\ &\quad - * (B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2) = \\ &= c^{-1} E_1 * (dx^1 \wedge dx^0) + c^{-1} E_2 * (dx^2 \wedge dx^0) + c^{-1} E_3 * (dx^3 \wedge dx^0) + \\ &\quad - B_1 * (dx^2 \wedge dx^3) - B_2 * (dx^3 \wedge dx^1) - B_3 * (dx^1 \wedge dx^2). \end{aligned}$$

Z tabulky 1 hned přečteme výsledek:

$$(17) \quad *\Phi = -c^{-1} (E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2) - (B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3) \wedge dx^0.$$

Vnější derivaci této 2-formy je 3-forma (výpočet je už jen prosté derivování, přenecháváme jej čtenáři – nezapomeňte, že vnějším součinem $dx^i \wedge dx^j$ pro $i = j$ je nulová 2-forma.) Platí

¹⁵ V knize [1] je rovněž využit Hodgeův operátor, avšak způsobem, který nepovažujeme za příliš korektní, byť k výsledku rovněž vede. Uplatňuje se zde dvojí pohled na tento operátor: trojrozměrný a čtyřrozměrný, jsou odlišeny i jiným značením. Tučná „trojrozměrná“ hvězdička se aplikuje na formy E a B , netučná „čtyřrozměrná“ na formu Φ , ta má v [1] označení F^2 . Konkrétně je zavedeno $*F^2 = -*B \wedge dt + *E$. Takové rozlišení je nelogické, požadované výsledky dostaneme jednotně v prostoru $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ s Minkowského tenzorem (v našem případě $\text{diag } G_M = (1, -1, -1, -1)$).

$$\begin{aligned}
d * \Phi = & -c^{-1} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^0} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_2}{\partial x^0} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial E_3}{\partial x^0} dx^1 \wedge dx^2 \right) \wedge dx^0 + \\
(18) \quad & -c^{-1} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \\
& - \left[\left(\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \right] \wedge dx^0.
\end{aligned}$$

Tato 3-forma bude nulová, právě když se anulují všechny její složky, dostaneme tedy pro ně soustavu rovnic, v níž dosadíme $E_i = -E^i$, $1 \leq i \leq 3$ a $x^0 = ct$,

$$\begin{aligned}
& -c^{-1} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0, \\
(19) \quad & \left[c^{-1} \frac{\partial E^1}{\partial(ct)} - \left(\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} \right) \right] = 0, \quad \left[c^{-1} \frac{\partial E^2}{\partial(ct)} - \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} \right) \right] = 0, \\
& \left[c^{-1} \frac{\partial E^3}{\partial(ct)} - \left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

To odpovídá druhému páru Maxwellových rovnic (ve vakuu) pro pole bez zdrojů,

$$(20) \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \operatorname{rot} \vec{B} = c^{-2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad c^{-2} = \varepsilon_0 \mu_0,$$

přičemž ε_0 a μ_0 jsou permitivita a permeabilita vakua. Můžeme tedy vyslovit

Dílčí závěr:

Pomocí jediné diferenciální formy $\Phi = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = E^b \wedge dt - \tilde{B}$, $0 \leq i, j \leq 3$, dané vztahy

(12), dokážeme kompletně vyjádřit sadu Maxwellových rovnic pro elektromagnetické pole ve vakuu při absenci zdrojů, konkrétně rovnicemi

$$(21) \quad d\Phi = 0, \quad d * \Phi = 0.$$

12. Maxwellovy rovnice – druhý pár – se zdroji

Abychom získali druhý pár Maxwellových rovnic ve vakuu se zdroji, je třeba se opřít o 3-formu $d * \Phi$, která ovšem v případě přítomnosti zdrojů nebude nulová, musí se však rovnat 3-formě, jež bude plně vyjádřena pomocí zdrojů, tedy reprezentována složkami čtyřproudu

$\Upsilon = (c\rho, j^1, j^2, j^3)$. Vzhledem k tomu, že hustota proudu $(j) \sim (j^1, j^2, j^3)$ je určena pohybujícími se náboji, je třeba se u problému na chvíli zastavit. Čtyřproud je primárně definován pomocí čtyřrychlosti a hustoty náboje v jeho klidové soustavě, podobně jako je čtyřhybnost definována pomocí čtyřrychlosti a hmotnosti, tedy

$$\Upsilon = c\rho_0 u \sim c\rho_0 (u^0, u^1, u^2, u^3) = c\rho_0 \gamma (1, c^{-1}v^1, c^{-1}v^2, c^{-1}v^3) = (c\rho, j^1, j^2, j^3).$$

Ted' budeme chvíli postupovat poněkud „účelově“ a pomocí čtyřproudu získáme 3-formu $*Y^b$ tak, abychom ve výsledku dostali z rovnice $d*\Phi = K*Y^b$, kde K je vhodná konstanta, druhý pár Maxwellových rovnic se zdroji. Pro $K*Y^b$ dostaneme

$$\begin{aligned} K*Y^b &= K*(c\rho dx^0 + j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3) = \\ &= Kc\rho *dx^0 + K(j_1 *dx^1 + j_2 *dx^2 + j_3 *dx^3). \end{aligned}$$

K vyjádření výrazů $*dx^i$, $0 \leq i \leq 3$, využijeme opět tabulku 1. Dostaneme

$$K*Y^b = -Kc\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - K(j_1 dx^2 \wedge dx^3 + j_2 dx^3 \wedge dx^1 + j_3 dx^1 \wedge dx^2) \wedge dx^0.$$

Sečtením s formou $d*\Phi$, danou vztahem (18), a anulováním dostaneme po složkách

$$\begin{aligned} -c^{-1} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) - Kc\rho &= 0 \Rightarrow \frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} = c^2 K\rho \\ -c^{-1} \frac{\partial E_1}{\partial(ct)} - \left(\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} \right) - K j_1 &= 0 \Rightarrow \frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} = K j^1 + c^{-2} \frac{\partial E^1}{\partial t} \\ -c^{-1} \frac{\partial E_2}{\partial(ct)} + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} \right) - K j_2 &= 0 \Rightarrow \frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} = K j^2 + c^{-2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \\ -c^{-1} \frac{\partial E^3}{\partial(ct)} + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} \right) - K j_3 &= 0 \Rightarrow \frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} = K j^3 + c^{-2} \frac{\partial E^3}{\partial t} \end{aligned}$$

Za znakem $\Rightarrow$ jsme už provedli záměnu složek kovektorových polí (E_i) a (j_i) , $1 \leq i \leq 3$, za složky vektorových polí (E^i) a (j^i) , konkrétně $E_i \rightarrow -E^i$, $j_i \rightarrow -j^i$, $1 \leq i \leq 3$. První z výše uvedených čtyř rovnic bude představovat tzv. „Gaussův zákon“¹⁶ pro elektrické pole, bude-li $c^2 K = \varepsilon_0^{-1} \Rightarrow K = \mu_0$. Při této volbě budou na pravé straně dalších tří rovnic výrazy

$$\mu_0 j^i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E^i}{\partial t}, \quad 1 \leq i \leq 3. \text{ Získali jsme tak druhý pár Maxwellových rovnic}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \text{ a to na základě rovnosti}$$

$$(22) \quad d*\Phi + \mu_0 *Y^b = 0, \text{ kde } \Phi = E^b \wedge dt - \vec{B}, \quad Y = c\rho u.$$

Vztah (22) představuje jednoduché „univerzální“ vyjádření rovnic elektromagnetického pole pomocí diferenciálních forem. Jsou v něm obsaženy všechny Maxwellovy rovnice v trojrozměrné i čtyřrozměrné verzi.

A to ještě není konec. Z podmínky uzavřenosti formy Φ , tj. anulováním její vnější derivace, jsme dostali důležité výsledky. Forma $*Y^b$ je však rovněž uzavřená. Pro její vnější derivaci

¹⁶ Název Gaussův zákon vznikl na základě matematického zpracování Coulombova zákona, jenž je jeho fyzikální podstatou, s využitím Gaussovy-Ostrogradského integrální věty. Do fyzikální terminologie je však neodvolatelně pevně zakořeněný.

totiž platí (viz vztah (22)) $d * \Upsilon^b = \mu_0^{-1} d(d * \phi) = 0$ (opakovaný operátor vnější derivace je identicky nulový). Vyjádříme-li formu $d * \Upsilon^b$ ve složkách, tj.

$$d * \Upsilon^b = c \frac{\partial \rho}{\partial x^0} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 - \left(\frac{\partial j_1}{\partial x^1} + \frac{\partial j_2}{\partial x^2} + \frac{\partial j_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0,$$

dostáváme

$$(23) \quad c \frac{\partial \rho}{\partial(ct)} - \left(\frac{\partial j_1}{\partial x^1} + \frac{\partial j_2}{\partial x^2} + \frac{\partial j_3}{\partial x^3} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} \right) = 0, \text{ tj. } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Jako důsledek Maxwellových rovnic jsme získali i rovnici kontinuity.

13. Závěrečné shrnutí:

Ukázali jsme, že základní rovnice klasické elektrodynamiky lze použitím diferenciálních forem a Hodgeova operátoru efektivně zapsat pomocí vztahů, jež nyní shrneme do tabulky:

veličina	reprezentující diferenciální forma	vztahy	reprezentované rovnice
Lorentzova síla v $\mathbf{R}^3$	$F^b = qi \frac{\partial}{\partial ct} (E^b \wedge c dt) + qi_v B^b$		$\vec{F}_L = q\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$
Lorentzova síla v $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$	$F_L^b = qc F_{ij} u^j dx^i = -qc i_u \Phi$		$F_L = q\gamma \left(-c^{-1} \vec{E} \vec{v}, \vec{E} + c^{-1} \vec{v} \times \vec{B} \right)$
tenzor elektromagnetického pole	$\Phi = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = E^b \wedge dt - B$	$d\Phi = 0$ $\Phi = dA$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$
čtyřproud	$\Upsilon^b = (c\rho, \vec{j}^b)$	$d * \Phi = -\mu_0 * \Upsilon^b$ $d * \Upsilon^b = 0$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$

Tabulka 2: Reprezentace rovnic klasické elektrodynamiky pomocí diferenciálních forem.

Poděkování

Autoři děkují Prof. RNDr. Petru Dubovi, CSc, profesoru Vysokého učení technického v Brně, za inspiraci k napsání tohoto příspěvku, pečlivé pročtení jeho konceptu a cenné připomínky.

Literatura

[1] T. Frankel: *The Geometry of Physics. An Introduction*. Cambridge University Press, New

York 2012 (3. vyd.)

- [2] M. Kitano: In: *Trends in Electromagnetism – from Fundamentals to applications*. 2012, pp 21-44.
- [3] K. F. Warnick, P. Russer: Differential forms and Electromagnetic Field Theory. *Progress in Electromagnetic Research* **148** (2014), 83-112.
- [4] L. Sá: An accessible four-dimensional treatment of Maxwell's equations in terms of differential forms. *Eur. J. Phys.* **38** (2017), 025207, 15 stran.
- [5] S. Fumeron, B. Berche, F. Moraes: Improving student understanding of electrodynamics: The case of differential forms. *Am. J. Phys.* **88** (2020), 1083-1093.
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifšic: *The Classical Field Theory. Course of Theoretical Physics*, Vol. 2. Butterworth-Heinemann, 2002 (4th english edition).
- [7] J. Musilová, P. Musilová, O. Rossi: *Calculus of Variations on Fibred Manifolds. A Geometrical Approach to Variational Problems in Physics*. Lecture Notes in Physics 1033. Springer Nature Switzerland 2025. 331 s.
- [8] P. Bulušek, P. Musilová, J. Musilová: Hodgeův operátor a jeho praktické užití 1. část: Algebraický základ. *Československý časopis pro fyziku* **74** (2025), 3, 196-203.
- [9] P. Bulušek, P. Musilová, J. Musilová: Hodgeův operátor a jeho praktické užití 2. část: Analytické aplikace. *Československý časopis pro fyziku* **74** (2025), x, xxx-xxx.