MASARYKOVA UNIVERZITA

Lineární a multilineární algebra

základy pro samostudium v době karantény

Téma 1: Skalární součin a jeho aplikace

Doporučení ke studiu

Tato prezentace je pouze vodítkem s vašemu samostudiu, při němž je třeba, abyste se opírali o doporučenou literaturu (IS MU). V prezentaci vás budu konkrétně odkazovat na tyto položky doporučené literatury:

- Matematika pro porozumění i praxi I, VUTIUM Brno, 2006 (M I),
- Matematika pro porozumění i praxi I, VUTIUM Brno, 2012 (MII/1).

Kap. 6 z M II/1 vám Pavla poslala, na pomoc těm, kdo knihu nemají.

Doporučení ke studiu

Tato prezentace je pouze vodítkem s vašemu samostudiu, při němž je třeba, abyste se opírali o doporučenou literaturu (IS MU). V prezentaci vás budu konkrétně odkazovat na tyto položky doporučené literatury:

- Matematika pro porozumění i praxi I, VUTIUM Brno, 2006 (M I),
- Matematika pro porozumění i praxi I, VUTIUM Brno, 2012 (MII/1).

Kap. 6 z M II/1 vám Pavla poslala, na pomoc těm, kdo knihu nemají.

Při procházení prezentace se rozhodně obracejte ke knize, kde jsou podrobnější důkazy a zdůvodnění. Propočítávejte si příklady, které jsou v knize vyřešeny, zkuste si řešit i cvičení. U zkoušky, která proběhne normálně, to oceníte.

Skalární součin – cosi už o něm víme

Nalistujte v Matematice pro porozumění i praxi II/1 (M II/1) kapitolu 6. V přednášce jsme probrali problematiku, která je v ní podrobně rozebrána na stranách 133 až 148.

Nic moc, že? Šlo to pomalu a trvalo to krátce. Tak teď si to trochu zopakujeme, abychom se mohli posunout dál. Sledujte následující prezentaci, odpovídejte na otázky, řešte příklady. Obracejte se ke knize.

Kdybyste se při studiu „zadrhli“, klidně mi napište. (janam@physics.muni.cz). Nebo i zavolejte (+420 725988079).

Definice

Připomeňte si, co už víte o skalárním součinu z přednášek ještě před zrušením výuky – napište si axiomy na papír a teprve pak pokračujte.

Definice

Připomeňte si, co už víte o skalárním součinu z přednášek ještě před zrušením výuky – napište si axiomy na papír a teprve pak pokračujte.

Zkontrolujte, zda si to pamatujete správně:

Nechť V_n je vektorový prostor nad C. Zobrazení

$$V_n \times V_n \ni [a,b] \rightarrow (a,b) \in C$$

se nazývá skalární součin ve V_n, má-li následující vlastnosti:

1) $(a,b)=(b,a)^*$, 2) $(a+b,c)=(a,c)+(b,c)$,

3) $(\alpha a,b)=\alpha(a,b)$, 4) $(a,a)\geq 0$, pro lib. $a,b,c \in V_n$, $\alpha \in C$.

Důsledky definice

A co ostatní vlastnosti? Platí třeba – nebo neplatí??

$$(a, b+c) = (a, b) + (a, c)\ ??, \quad (a, \alpha b) = \alpha (a, b)\ ??$$

- Zkuste pro výrazy na levé straně něco odvodit z axiomů.
- A zkuste přepsat axiomy, půjde-li o vektorový prostor nad R.
- Co znamená vlastnost 4)? Může být (a, a) komplexní?

Důsledky definice

A co ostatní vlastnosti? Platí třeba – nebo neplatí??

$$(a, b+c) = (a, b) + (a, c)\,??, \quad (a, \alpha b) = \alpha (a, b)\,??$$

- Zkuste pro výrazy na levé straně něco odvodit z axiomů.
- A zkuste přepsat axiomy, půjde-li o vektorový prostor nad R.
- Co znamená vlastnost 4)? Může být (a, a) komplexní?

Máte? Dobře, pokračujme.

Důsledky definice

A co ostatní vlastnosti? Platí třeba – nebo neplatí??

$$(a, b+c) = (a,b) + (a,c)\,??,\quad (a, \alpha b) = \alpha (a,b)\,??$$

- Zkuste pro výrazy na levé straně něco odvodit z axiomů.
- A zkuste přepsat axiomy, půjde-li o vektorový prostor nad R.
- Co znamená vlastnost 4)? Může být (*a*, *a*) komplexní?

Máte? Dobře, pokračujme.

Vektorový prostor nad C se skalárním součinem se nazývá unitární (značíme U_n), nad R eukleidovský(značíme E_n).

Pár příkladů

V následujících příkladech rozhodněte, jedná-li se o skalární součin. Zdůvodněte, proč ano, resp. proč ne. (Prověřte axiomy skalárního součinu.) Zjistíte-li, že nejde o skalární součin, zkuste definici opravit.

1) Vektorový prostor n-tic: a) nad R, b) nad C, je-li definováno

$$(a,b)=a_1b_1+\cdots+a_nb_n\,,\ \text{kde } a=(a_1,\ldots,a_n),\ \ b=(b_1,\ldots,b_n)$$

2) Vektorový prostor matic typu m/n nad R, je-li definováno

$$(A,B)=\sum_{i=1,\,j=1}^{m,n} a_i^j b_i^j\,,\ \text{kde } A=(a_i^j),\ \ B=(b_i^j),1\le i\le m,1\le j\le n$$

Další pár příkladů

V následujících příkladech rozhodněte, jedná-li se o skalární součin. Zdůvodněte, proč ano, resp. proč ne. (Prověřte axiomy skalárního součinu.) Zjistíte-li, že nejde o skalární součin, zkuste definici opravit.

3) V. p. polynomů stupně nejvýše n, a) nad R, b) nad C, je-li

$(P,Q) = p_0 q_0 + \cdots + p_n q_n$, kde $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n$, $Q(x) =$ zapište

4) V. p. polynomů stupně nejvýše n, a) nad R, b) nad C, je-li

$$(P, Q) = \int_0^1 P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x\,,\ P(x), Q(x) \text{ viz zápis v příkladu 3)}$$

Příklady – řešení

Příklad 1) ... nad R ano, nad C ne ... přemýšlejte, proč nad C ne

Příklady – řešení

Příklad 1) ... nad R ano, nad C ne ... přemýšlejte, proč nad C ne

Všimněte si třeba vlastnosti 4) v definici skalárního součinu. Z ní je zřejmé, že skalární součin vektoru se sebou samým musí být reálné číslo, jinak jej nemůžeme porovnávat s nulou. Výraz

$$a_1 a_1 + \cdots + a_n a_n\,,\; a = (a_1, \ldots, a_n) \in C.$$

je totiž obecně komplexní.

Příklady – řešení

Příklad 1) ... nad R ano, nad C ne ... přemýšlejte, proč nad C ne

Všimněte si třeba vlastnosti 4) v definici skalárního součinu. Z ní je zřejmé, že skalární součin vektoru se sebou samým musí být reálné číslo, jinak jej nemůžeme porovnávat s nulou. Výraz

$$a_1 a_1 + \cdots + a_n a_n \,,\; a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{C}.$$

je totiž obecně komplexní.

Příklad 2) ... ano

Příklady 3) a 4) ... nad R ano, nad C ne

Opravíme definici (a opravte ji už sami také u příkladu 1)):

$$(P,Q) = p_0 q_0^* + \cdots + p_n q_n^* \,,\ \text{resp. } (P,Q) = \int_0^1 P(x) Q^*(x)\, \mathrm{d}x$$

Reprezentace v bázích – I

Víme, že vektory i lineární zobrazení mezi nimi jsou číselně reprezentovány v bázích svými složkami. Vzpomeňte si, jak se tyto složky transformují, přejdeme-li od báze k bázi pomocí matice přechodu T.

$$V_n : (e_1, \dots, e_n) \xrightarrow{T} (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n), T = (\tau_i^j), 1 \le i,\ j \le n$$

$$a \dots (\alpha^1, \dots, \alpha^n) = (\alpha), \quad a \dots (\bar{\alpha}^1, \dots, \bar{\alpha}^n) = (\bar{\alpha})$$

$\varphi : V_n \ni a \to \varphi(a) \in W_m$ reprezentující matice A, resp. $\bar{A}$

$$W_m : (f_1, \dots, f_m) \xrightarrow{M} (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m), M = (\mu_\nu^\rho), 1 \le \nu,\ \rho \le m$$

Reprezentace v bázích – I

Víme, že vektory i lineární zobrazení mezi nimi jsou číselně reprezentovány v bázích svými složkami. Vzpomeňte si, jak se tyto složky transformují, přejdeme-li od báze k bázi pomocí matice přechodu T.

$$V_n : (e_1, \ldots, e_n) \xrightarrow{T} (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n), T = (\tau_i^j), 1 \le i, j \le n$$

$$a \ldots (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = (\alpha), \quad a \ldots (\bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^n) = (\bar{\alpha})$$

$\varphi : V_n \ni a \to \varphi(a) \in W_m$ reprezentující matice A, resp. $\bar{A}$

$$W_m : (f_1, \ldots, f_m) \xrightarrow{M} (\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m), M = (\mu_\nu^\rho), 1 \le \nu, \rho \le m$$

Pár otázek:

1) Jakého jsou typu jsou matice T a M? Mohou být jinak libovolné?
2) Jaké vztahy platí mezi (α) a $(\bar{\alpha})$ a mezi A a $\bar{A}$? Jakého typu jsou tyto matice?

Reprezentace v bázích – II

Zvládli jste předchozí otázky? Pokud se vám to nepovedlo, pak se vraťte ke kapitole 4 Matematiky pro porozumění a praxi (konkrétně str. 31, 32 a str. 55 až 60) a těch pár stránek prostudujte – je tam podrobné odvození. A zde jsou správné odpovědi:

Reprezentace v bázích – II

Zvládli jste předchozí otázky? Pokud se vám to nepovedlo, pak se vraťte ke kapitole 4 Matematiky pro porozumění a praxi (konkrétně str. 31, 32 a str. 55 až 60) a těch pár stránek prostudujte – je tam podrobné odvození. A zde jsou správné odpovědi:

1) Matice T (typ n/n) a M (typ m/m) jsou regulární.

Vektory každé báze jsou totiž lineárně nezávislé.

Reprezentace v bázích – II

Zvládli jste předchozí otázky? Pokud se vám to nepovedlo, pak se vraťte ke kapitole 4 Matematiky pro porozumění a praxi (konkrétně str. 31, 32 a str. 55 až 60) a těch pár stránek prostudujte – je tam podrobné odvození. A zde jsou správné odpovědi:

1) Matice T (typ n/n) a M (typ m/m) jsou regulární.

Vektory každé báze jsou totiž lineárně nezávislé.

2) $\bar{e}_i = \tau_i^j e_j$, $e_i = \sigma_i^j \bar{e}_j$, (Einsteinova symbolika)

$(\alpha) = (\bar{\alpha})T$, $(\bar{\alpha}) = (\alpha)T^{-1}$, $T^{-1} = (\sigma_i^j)$, $\bar{A} = TAM^{-1}$, $A = T^{-1}\bar{A}M$

pro $W_m = V_n$ je $\bar{A} = TAT^{-1}$, $A = T^{-1}\bar{A}T$

zobrazení φ se pro $W_m = V_n$ nazývá lineární operátor ve v. p. V_n

Reprezentace v bázích – III

Po stručném zopakování reprezentace vektorů a lineárních zobrazení v bázích přejdeme k reprezentaci skalárního součinu.

Otázka: jak určit hodnotu skalárního součinu dvou vektorů, známe-li jejich složky v dané bázi? Co k tomu ještě potřebujeme? Hned uvidíme.

Reprezentace v bázích – III

Po stručném zopakování reprezentace vektorů a lineárních zobrazení v bázích přejdeme k reprezentaci skalárního součinu.

Otázka: jak určit hodnotu skalárního součinu dvou vektorů, známe-li jejich složky v dané bázi? Co k tomu ještě potřebujeme? Hned uvidíme.

Budeme používat Einsteinovu sčítací symboliku. Je užitečná a zvyknete si na ni.

Reprezentace v bázích – III

Po stručném zopakování reprezentace vektorů a lineárních zobrazení v bázích přejdeme k reprezentaci skalárního součinu.

Otázka: jak určit hodnotu skalárního součinu dvou vektorů, známe-li jejich složky v dané bázi? Co k tomu ještě potřebujeme? Hned uvidíme.

Budeme používat Einsteinovu sčítací symboliku. Je užitečná a zvyknete si na ni.

Tak do toho: k dispozici máme jen definiční vlastnosti skalárního součinu. Ale žádné „jen“! Ono to není málo.

$$a, b \in U_n \text{ nebo } E_n, \ (e_1, \ldots, e_n) \ \ldots \text{báze}, a = \alpha^i e_i, b = \beta^j e_j$$

$$(a, b) = (\alpha^i e_i, \beta^j e_j) = \alpha^i \beta^{j*} (e_i, e_j) = \alpha^i \beta^{j*} g_{ij}, \ G = (g_{ij}), 1 \le i, j \le n$$

Reprezentace v bázích – IV

Víte, které vlastnosti skalárního součinu jsme použili? Jasně, 2) a 3). Ale co tam dělá ta hvězdička? Nevíte? Vraťte se k snímku 4 a uvidíte, že platí $(a, \alpha b) = \alpha^{*}(a, b)$

Reprezentace v bázích – IV

Víte, které vlastnosti skalárního součinu jsme použili? Jasně, 2) a 3). Ale co tam dělá ta hvězdička? Nevíte? Vraťte se k snímku 4 a uvidíte, že platí $(a, \alpha b) = \alpha^{*}(a, b)$

Máme vztah pro výpočet skalárního součinu pomocí složek, ale potřebujeme skalární součiny vektorů báze mezi sebou. Ty tvoří matici G. Platí $(a, b) = (\alpha)G(\beta)^{T*}$ pro U_n, $(a, b) = (\alpha)G(\beta)^{T}$ pro E_n

Reprezentace v bázích – IV

Víte, které vlastnosti skalárního součinu jsme použili? Jasně, 2) a 3). Ale co tam dělá ta hvězdička? Nevíte? Vraťte se k snímku 4 a uvidíte, že platí $(a, \alpha b) = \alpha^*(a, b)$

Máme vztah pro výpočet skalárního součinu pomocí složek, ale potřebujeme skalární součiny vektorů báze mezi sebou. Ty tvoří matici G. Platí $(a, b) = (\alpha)G(\beta)^{T*}$ pro U_n, $(a, b) = (\alpha)G(\beta)^T$ pro E_n

Uplatníme-li vlastnost 1) na vektory báze, dostaneme $G = G^{T*}$

Matice G je samoadjungovaná (nad C), resp. symetrická (nad R). Z vlastnosti 4) pak plyne, že je také pozitivně definitní (všechny její levé horní subdeterminanty jsou kladné).

Reprezentace v bázích – V

A zase příklady:

1) Určete skalární součin dvou vektorů v U_4, je-li dáno

$a\dots(\alpha) = (1, 2i, 0, -i),\ b\dots(\beta) = (0, 2, -i, -3i),$

v bázi $(e_1, \dots, e_4)$, $G = E$ (jednotková matice), tj. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

Reprezentace v bázích – V

A zase příklady:

1) Určete skalární součin dvou vektorů v U_4, je-li dáno

$$a\ldots(\alpha)=(1,2i,0,-i),\ b\ldots(\beta)=(0,2,-i,-3i),$$

v bázi $(e_1,\ldots,e_4)$, $G=E$ (jednotková matice), tj. $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$

2) a) Může mít matice G v diagonále nulu, nebo záporné číslo?

b) Jaký je vztah mezi maticemi G a $\bar{G}$ při přechodu mezi bázemi?

c) Kolik můžeme definovat v daném prostoru skalárních součinů?

Reprezentace v bázích – V

A zase příklady:

1) Určete skalární součin dvou vektorů v U_4, je-li dáno

$$a\ldots(\alpha)=(1,2i,0,-i),\ b\ldots(\beta)=(0,2,-i,-3i),$$

v bázi $(e_1,\ldots,e_4)$, $G=E$ (jednotková matice), tj. $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$

2) a) Může mít matice G v diagonále nulu, nebo záporné číslo?

b) Jaký je vztah mezi maticemi G a $\bar{G}$ při přechodu mezi bázemi?

c) Kolik můžeme definovat v daném prostoru skalárních součinů?

Řešení:

1) $(a,b)=(1\ 2i\ 0\ -i)\,E\,(0\ 2\ -i\ -3i)^{T*}=3+4i$

2a) Ne, $g_{ii}=(e_i,e_i)>0$, 2b) $\bar{G}=TGT^T$, 2c) Nekonečně mnoho.

Ortogonalita a normovanost – I

Vektory $a, b \in U_n$ resp. E_n se nazývají ortogonální (vzhledem k zadanému skalárnímu součinu), platí-li $(a, b) = 0$. Vektor $a \in U_n$ resp. E_n se nazývá normovaný (vzhledem k zadanému skalárnímu součinu), platí-li $(a, a) = 1$. Báze $(e_1, \ldots, e_n)$ se nazývá ortonormální (vzhledem ...), je-li $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Ortogonalita a normovanost – I

Vektory $a, b \in U_n$ resp. E_n se nazývají ortogonální (vzhledem k zadanému skalárnímu součinu), platí-li $(a, b) = 0$. Vektor $a \in U_n$ resp. E_n se nazývá normovaný (vzhledem k zadanému skalárnímu součinu), platí-li $(a, a) = 1$. Báze $(e_1, \ldots, e_n)$ se nazývá ortonormální (vzhledem ...), je-li $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Problém: Lze pomocí obecného souboru vektorů generujících jistý vektorový podprostor L prostoru U_n (E_n) udělat soubor ortogonálních a normovaných vektorů generujících týž podprostor?

Ortogonalita a normovanost – I

Vektory $a, b \in U_n$ resp. E_n se nazývají ortogonální (vzhledem k zadanému skalárnímu součinu), platí-li $(a, b) = 0$. Vektor $a \in U_n$ resp. E_n se nazývá normovaný (vzhledem k zadanému skalárnímu součinu), platí-li $(a, a) = 1$. Báze $(e_1, \ldots, e_n)$ se nazývá ortonormální (vzhledem ...), je-li $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Problém: Lze pomocí obecného souboru vektorů generujících jistý vektorový podprostor L prostoru U_n (E_n) udělat soubor ortogonálních a normovaných vektorů generujících týž podprostor?

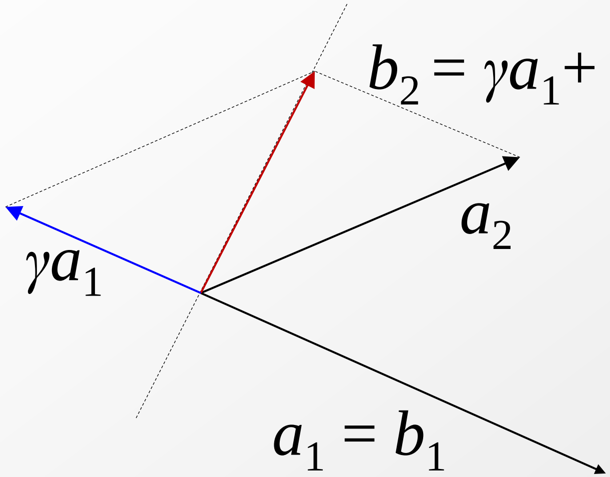
K čemu to bude dobré a jak to udělat? Třeba k tomu, abychom mohli pracovat v ortonormálních bázích. V nich je totiž matice G jednotková. Slouží k tomu třeba Grammův-Schmidtův proces.

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – I

Uvažujeme obecně o vekt. podprostoru v unitárním prostoru, $L \subset U_n$, $L = [| a_1, \ldots, a_k |]$, $1 \le k \le n$, nejprve pro nezávislé vektory $a_1, \ldots, a_k$.

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – I

Uvažujeme obecně o vekt. podprostoru v unitárním prostoru, $L \subset U_n$, $L = [| a_1, \ldots, a_k |]$, $1 \le k \le n$, nejprve pro nezávislé vektory $a_1, \ldots, a_k$.



1. krok: $b_1 = a_1$

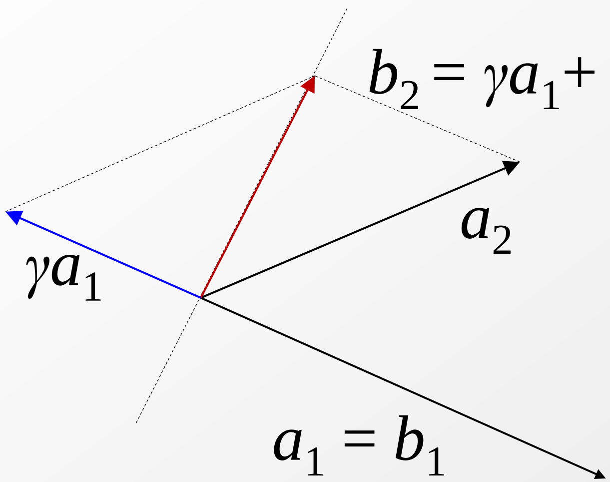
2. krok: $b_2 = \gamma b_1 + a_2 \;\ldots (b_2, b_1) = 0 \Rightarrow \gamma$

3. krok: $b_3 = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + a_3 \;\ldots (b_3, b_1) = 0 \Rightarrow \gamma_1$

$(b_3, b_2) = 0 \Rightarrow \gamma_2$

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – I

Uvažujeme obecně o vekt. podprostoru v unitárním prostoru, $L \subset U_n$, $L = [| a_1, \ldots, a_k |]$, $1 \le k \le n$, nejprve pro nezávislé vektory $a_1, \ldots, a_k$.



1\. krok: $b_1 = a_1$

2\. krok: $b_2 = \gamma b_1 + a_2 \ \ldots (b_2, b_1) = 0 \Rightarrow \gamma$

3\. krok: $b_3 = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + a_3 \ \ldots (b_3, b_1) = 0 \Rightarrow \gamma_1$

$(b_3, b_2) = 0 \Rightarrow \gamma_2$

Vidíte „logiku“ kroků? Každý další vektor nového souboru je součtem lineární kombinace těch, které jsou již ortogonalizovány v předchozích krocích, a dalšího „na řadě“ z původního souboru. Konstanty v lineární kombinaci se hledají z podmínek ortogonality.

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – II

Příklad: Sestrojíme ortonormální bázi (ONB):

$a_1 \ldots (1, 1, 0, 0)$, $a_2 \ldots (0, 1, 1, 0)$, $a_3 \ldots (0, 0, 1, 1)$, $L = [| a_1, a_2, a_3 |]$,
složky v ortonormální bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) prostoru E_4

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – II

Příklad: Sestrojíme ortonormální bázi (ONB):

$a_1 \dots (1, 1, 0, 0)$, $a_2 \dots (0, 1, 1, 0)$, $a_3 \dots (0, 0, 1, 1)$, $L = [| a_1, a_2, a_3 |]$,
složky v ortonormální bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) prostoru E_4

Jak vypadá obecný krok ortogonalizačního procesu, odvoďte pomocí návodu popsaného na předchozím snímku.

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – II

Příklad: Sestrojíme ortonormální bázi (ONB):

$a_1 \ldots (1,1,0,0),\ a_2 \ldots (0,1,1,0),\ a_3 \ldots (0,0,1,1),\ L = [|\, a_1, a_2, a_3 \,|]$,

složky v ortonormální bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) prostoru E_4

Jak vypadá obecný krok ortogonalizačního procesu, odvoďte pomocí návodu popsaného na předchozím snímku.

Nepovedlo se? Nalistujte str. 144 v Matematice II/1 – je to tam odvozeno na stránce, pořádně si to projděte. A tady je výsledek:

Obecný s-tý krok, $s \le k$

$$b_s = -\frac{(a_s, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_s, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \cdots - \frac{(a_s, b_{s-1})}{(b_{s-1}, b_{s-1})} b_{s-1} + a_s$$

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – III

Řešení příkladu:

1. krok: $b_1 = a_1 \dots (1, 1, 0, 0)$

2. krok: $(a_2, b_1) = 1,\ (b_1, b_1) = 2,\ b_2 \dots -\frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) + (0, 1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$

3. krok: $(a_3, b_1) = 0,\ (a_3, b_2) = 1,\ (b_2, b_2) = \frac{3}{2}$

$b_3 \dots 0 \cdot (1, 1, 0, 0) - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + (0, 0, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right),\ (b_3, b_3) = \frac{4}{3}$

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – III

Řešení příkladu:

1. krok: $b_1 = a_1 \dots (1, 1, 0, 0)$

2. krok: $(a_2, b_1) = 1,\ (b_1, b_1) = 2, b_2 \dots -\frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) + (0, 1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$

3. krok: $(a_3, b_1) = 0,\ (a_3, b_2) = 1,\ (b_2, b_2) = \frac{3}{2}$

$b_3 \dots 0 \cdot (1, 1, 0, 0) - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + (0, 0, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right),\ (b_3, b_3) = \frac{4}{3}$

Co myslíte – tvoří nové vektory ONB v L? Ověřte zda:

a) vůbec tvoří bázi, b) jsou ortogonální, c) jsou normované.

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – III

Řešení příkladu:

1. krok: $b_1 = a_1 \ldots (1,1,0,0)$

2. krok: $(a_2, b_1) = 1,\ (b_1, b_1) = 2,\ b_2 \ldots -\tfrac{1}{2}(1,1,0,0) + (0,1,1,0) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0\right)$

3. krok: $(a_3, b_1) = 0,\ (a_3, b_2) = 1,\ (b_2, b_2) = \tfrac{3}{2}$

$b_3 \ldots 0 \cdot (1,1,0,0) - \tfrac{2}{3}\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0\right) + (0,0,1,1) = \left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 1\right),\ (b_3, b_3) = \tfrac{4}{3}$

Co myslíte – tvoří nové vektory ONB v L? Ověřte zda:

a) vůbec tvoří bázi, b) jsou ortogonální, c) jsou normované.

Odpovědi: a) ano, b) ano, c) ne – vždyť jsme je nenormovali (str. 147)

$c_i = \dfrac{b_i}{\sqrt{(b_i, b_i)}}$ pro náš příklad už normujte sami. A udělejte př. 6.12.

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – IV

Myslíte, že jsme s problémem ortogonalizace zcela hotovi? Kdepak, zatím jsme ortogonalizovali soubor lineárně nezávislých vektorů. Co když bude vektorový podprostor L generovaný závislými vektory? Dokonce jich může být víc než n!

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – IV

Myslíte, že jsme s problémem ortogonalizace zcela hotovi? Kdepak, zatím jsme ortogonalizovali soubor lineárně nezávislých vektorů. Co když bude vektorový podprostor L generovaný závislými vektory? Dokonce jich může být víc než n!

Co tedy s tím? Tak třeba upravit matici ze složek generujících vektorů na schodovitý tvar – to je postup, který dobře ovládáte. Takto získanou bázi v L pak ortogonalizujeme.

Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces – IV

Myslíte, že jsme s problémem ortogonalizace zcela hotovi? Kdepak, zatím jsme ortogonalizovali soubor lineárně nezávislých vektorů. Co když bude vektorový podprostor *L* generovaný závislými vektory? Dokonce jich může být víc než *n*!

Co tedy s tím? Tak třeba upravit matici ze složek generujících vektorů na schodovitý tvar – to je postup, který dobře ovládáte. Takto získanou bázi v *L* pak ortogonalizujeme.

A nebo? Co se stane, když začneme ortogonalizovat rovnou? Závislé vektory se začnou „vyhazovat“ samy – dojde k anulování v některém kroku. Na to se podívejte do knihy M II/1 na str. 146.

Ortogonální projekce – I

Pokuste se vzpomenout na definici pojmu doplněk L' vektorového podprostoru L ve vektorovém prostoru V_n: $L + L' = V_n,\ L \cap L' = \{0_{V_n}\}$. Rozklad $a = a_L + a_{L'},\ a_L \in L,\ a_{L'} \in L'$ je při pevně zvoleném L' již jednoznačný. Ale kolik doplňků k danému L existuje?

Ortogonální projekce – I

Pokuste se vzpomenout na definici pojmu doplněk L' vektorového podprostoru L ve vektorovém prostoru V_n: $L + L' = V_n,\ L \cap L' = \{0_{V_n}\}$. Rozklad $a = a_L + a_{L'},\ a_L \in L,\ a_{L'} \in L'$ je při pevně zvoleném L' již jednoznačný. Ale kolik doplňků k danému L existuje?

Pokud jste odpověděli „nekonečně mnoho“, je to správně. V prostoru se skalárním součinem však je jeden z doplňků význačný. Je to tzv. ortogonální doplněk, definovaný takto:

$$L_\perp = \{b \in U_n \text{ resp. } E_n \mid (a,\ b) = 0 \text{ pro lib. } a \in L\}$$

A zase jsou zde otázky: a) je to opravdu vektorový podprostor? b) je to doplněk? c) je určen jednoznačně?

Ortogonální projekce – I

Pokuste se vzpomenout na definici pojmu doplněk L' vektorového podprostoru L ve vektorovém prostoru V_n: $L + L' = V_n, \ L \cap L' = \{0_{V_n}\}$. Rozklad $a = a_L + a_{L'}, \ a_L \in L, \ a_{L'} \in L'$ je při pevně zvoleném L' již jednoznačný. Ale kolik doplňků k danému L existuje?

Pokud jste odpověděli „nekonečně mnoho“, je to správně. V prostoru se skalárním součinem však je jeden z doplňků význačný. Je to tzv. ortogonální doplněk, definovaný takto:

$$L_{\perp} = \{b \in U_n \text{ resp. } E_n \mid (a, b) = 0 \text{ pro lib. } a \in L\}$$

A zase jsou zde otázky: a) je to opravdu vektorový podprostor? b) je to doplněk? c) je určen jednoznačně?

S odpověďmi je to jako v Prodané nevěstě: „ano, ano, ano“. A zdůvodnění najdete v M II/1 na str. 149.

Ortogonální projekce – II

Víme, že rozklad $a \in U_n$ na součet $a = a_L + a_{L_\perp}$, $(a_L, a_{L_\perp})$ je jednoznačný.

Zobrazení $\pi_L : U_n \ni a \to \pi_L(a) = a_L$, resp. $\pi_{L_\perp} : U_n \ni a \to \pi_{L_\perp}(a) = a_{L_\perp}$ se nazývají ortogonální projekce na L, resp. $L_\perp$.

Ortogonální projekce – II

Víme, že rozklad $a \in U_n$ na součet $a = a_L + a_{L_\perp}$, $(a_L, a_{L_\perp})$ je jednoznačný.

Zobrazení $\pi_L : U_n \ni a \to \pi_L(a) = a_L$, resp. $\pi_{L_\perp} : U_n \ni a \to \pi_{L_\perp}(a) = a_{L_\perp}$ se nazývají ortogonální projekce na L, resp. $L_\perp$.

Úkol: Ověřte tyto jejich vlastnosti (typické vlastnosti projekcí):

a) jsou lineární, b) $\pi_L \circ \pi_{L_\perp} = \pi_{L_\perp} \circ \pi_L = \{0_{L(U_n,U_n)}\}$ (nulové zobrazení) ,

c) $\pi_L + \pi_{L_\perp} = \pi_{L_\perp} + \pi_L = \mathrm{id}_{U_n}$ (identita) , d) $\pi_L \circ \pi_L = \pi_L$, $\pi_{L_\perp} \circ \pi_{L_\perp} = \pi_{L_\perp}$

b), c), d) stejně pro jejich matice. Je to jednoduché – přímo z definice.

Tak třeba: $\pi_L \circ \pi_{L_\perp}(a) = \pi_L(a_{L_\perp}) = 0_{U_\perp}$ pro lib. $a \in U_n$. Další už sami.

Ortogonální projekce – II

Víme, že rozklad $a \in U_n$ na součet $a = a_L + a_{L_\perp}$, $(a_L, a_{L_\perp})$ je jednoznačný.

Zobrazení $\pi_L : U_n \ni a \to \pi_L(a) = a_L$, resp. $\pi_{L_\perp} : U_n \ni a \to \pi_{L_\perp}(a) = a_{L_\perp}$ se nazývají ortogonální projekce na L, resp. $L_\perp$.

Úkol: Ověřte tyto jejich vlastnosti (typické vlastnosti projekcí):

a) jsou lineární, b) $\pi_L \circ \pi_{L_\perp} = \pi_{L_\perp} \circ \pi_L = \{0_{L(U_n,U_n)}\}$ (nulové zobrazení) ,

c) $\pi_L + \pi_{L_\perp} = \pi_{L_\perp} + \pi_L = \mathrm{id}_{U_n}$ (identita) , d) $\pi_L \circ \pi_L = \pi_L$, $\pi_{L_\perp} \circ \pi_{L_\perp} = \pi_{L_\perp}$

b), c), d) stejně pro jejich matice. Je to jednoduché – přímo z definice.

Tak třeba: $\pi_L \circ \pi_{L_\perp}(a) = \pi_L(a_{L_\perp}) = 0_{U_\perp}$ pro lib. $a \in U_n$. Další už sami.

K vlastnostem lineárních zobrazení a vektorové struktuře na jejich množinách se vracet nebudeme – máte z toho přece zkoušku z PS.

Ortogonální projekce – III

Základní problém ortogonální projekce: vektor a je zadán složkami (α) v ONB $(e_1, \dots, e_n)$ v podprostoru L dimenze k je dána ONB $(u_1, \dots, u_k)$, $u_s \; \dots C = (\gamma_s^i)$ v bázi $(e_1, \dots, e_n), 1 \le i \le n, 1 \le s \le k$. úkolem je zjistit složky (α_L) vektoru a_L v bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Ortogonální projekce – III

Základní problém ortogonální projekce: vektor a je zadán složkami (α) v ONB $(e_1, \ldots, e_n)$ v podprostoru L dimenze k je dána ONB $(u_1, \ldots, u_k)$, u_s … $C = (\gamma_s^i)$ v bázi $(e_1, \ldots, e_n), 1 \leq i \leq n, 1 \leq s \leq k$. úkolem je zjistit složky (α_L) vektoru a_L v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$.

Pokud se podaří vyjádřit matici P_L projekce π_L , budeme hotovi, protože pak $(\alpha_L) = (\alpha)\, P_L$. Vyjádření matice P_L pomocí matice C získáme docela snadno. Tak do toho, a počítejte si se mnou na papír:

Ortogonální projekce – III

Základní problém ortogonální projekce: vektor a je zadán složkami (α) v ONB $(e_1, \dots, e_n)$ v podprostoru L dimenze k je dána ONB $(u_1, \dots, u_k)$, u_s … $C = (\gamma_s^i)$ v bázi $(e_1, \dots, e_n), 1 \le i \le n, 1 \le s \le k$. úkolem je zjistit složky (α_L) vektoru a_L v bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Pokud se podaří vyjádřit matici P_L projekce π_L , budeme hotovi, protože pak $(\alpha_L) = (\alpha)\, P_L$. Vyjádření matice P_L pomocí matice C získáme docela snadno. Tak do toho, a počítejte si se mnou na papír:

Napřed jeden užitečný zápis: $a = \alpha^i e_i \Rightarrow (a, e_i) = \alpha^i \Rightarrow a = \sum_{i=1}^{n} (a, e_i) e_i$

Jak jsme jej dostali? Vynásobením vektoru a skalárně j-tým vektorem báze a použitím relací pro ONB: $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Ortogonální projekce – III

$$a_L \in L \Rightarrow \; a_L = \sum_{s=1}^{k} (a_L\,, u_s) u_s = \text{ bezva trik } = \sum_{s=1}^{k} (a\,, u_s) u_s =$$

$$\sum_{s=1}^{k} (\alpha^j e_j\,, \gamma_s^{\ell} e_{\ell}) \gamma_s^i e_i = \sum_{s=1}^{k} \alpha^j \gamma_s^{\ell *} \gamma_s^i (e_j\,, e_{\ell})\, e_i = \sum_{s=1}^{k} (\alpha^j \gamma_s^{\ell *} \gamma_s^i \,\delta_{j\ell}) e_i \Rightarrow$$

$$a_L = \left(\alpha^j \sum_{s=1}^{k} \gamma_s^{j*} \gamma_s^i \right) e_i = \left(\alpha^j (C^{T*} C)_j^i \right) e_i \Rightarrow (\alpha_L) = (\alpha)(C^{T*} C) \Rightarrow P_L = C^{T*} C$$

Ortogonální projekce – III

$$a_L \in L \Rightarrow \; a_L = \sum_{s=1}^{k} (a_L, u_s) u_s = \text{ bezva trik } = \sum_{s=1}^{k} (a, u_s) u_s =$$

$$\sum_{s=1}^{k} (\alpha^j e_j, \gamma_s^\ell e_\ell) \gamma_s^i e_i = \sum_{s=1}^{k} \alpha^j \gamma_s^{\ell *} \gamma_s^i (e_j, e_\ell) e_i = \sum_{s=1}^{k} (\alpha^j \gamma_s^{\ell *} \gamma_s^i \delta_{j\ell}) e_i \Rightarrow$$

$$a_L = \left(\alpha^j \sum_{s=1}^{k} \gamma_s^{j*} \gamma_s^i \right) e_i = \left(\alpha^j (C^{T*} C)_j^i \right) e_i \Rightarrow (\alpha_L) = (\alpha)(C^{T*} C) \Rightarrow P_L = C^{T*} C$$

Asi to bylo trochu rychle, tak postupně: „bezva trik“ spočívá v tomto:

$$(a, u_s) = (a_L + a_{L_\perp}, u_s) = (a_L, u_s) + (a_{L_\perp}, u_s) = (a_L, u_s).$$

Ortogonální projekce – III

$$a_L \in L \Rightarrow\ a_L = \sum_{s=1}^{k} (a_L, u_s) u_s = \text{ bezva trik } = \sum_{s=1}^{k} (a, u_s) u_s =$$

$$\sum_{s=1}^{k} (\alpha^j e_j, \gamma_s^{\ell} e_{\ell}) \gamma_s^i e_i = \sum_{s=1}^{k} \alpha^j \gamma_s^{\ell *} \gamma_s^i (e_j, e_{\ell})\, e_i = \sum_{s=1}^{k} (\alpha^j \gamma_s^{\ell *} \gamma_s^i \delta_{j\ell}) e_i \Rightarrow$$

$$a_L = \left(\alpha^j \sum_{s=1}^{k} \gamma_s^{j*} \gamma_s^i \right) e_i = \left(\alpha^j (C^{T*} C)_j^i \right) e_i \Rightarrow (\alpha_L) = (\alpha)(C^{T*} C) \Rightarrow P_L = C^{T*} C$$

Asi to bylo trochu rychle, tak postupně: „bezva trik“ spočívá v tomto:

$$(a, u_s) = (a_L + a_{L_\perp}, u_s) = (a_L, u_s) + (a_{L_\perp}, u_s) = (a_L, u_s).$$

Víte proč? No přece $u_s \in L,\ a_{L_\perp} \in L_\perp \Rightarrow (a_{L_\perp}, u_s) = 0.$

Ortogonální projekce – III

$$a_L \in L \Rightarrow \; a_L = \sum_{s=1}^{k} (a_L\,, u_s) u_s = \text{ bezva trik } = \sum_{s=1}^{k} (a\,, u_s) u_s =$$

$$\sum_{s=1}^{k} (\alpha^j e_j\,, \gamma_s^\ell e_\ell) \gamma_s^i e_i = \sum_{s=1}^{k} \alpha^j \gamma_s^{\ell *} \gamma_s^i (e_j\,, e_\ell)\, e_i = \sum_{s=1}^{k} (\alpha^j \gamma_s^{\ell *} \gamma_s^i \,\delta_{j\ell}) e_i \Rightarrow$$

$$a_L = \left(\alpha^j \sum_{s=1}^{k} \gamma_s^{j*} \gamma_s^i \right) e_i = \left(\alpha^j (C^{T*} C)_j^i \right) e_i \Rightarrow (\alpha_L) = (\alpha)(C^{T*} C) \Rightarrow P_L = C^{T*} C$$

Asi to bylo trochu rychle, tak postupně: „bezva trik“ spočívá v tomto:

$$(a\,, u_s) = (a_L + a_{L_\perp}\,, u_s) = (a_L\,, u_s) + (a_{L_\perp}\,, u_s) = (a_L\,, u_s).$$

Víte proč? No přece $u_s \in L,\; a_{L_\perp} \in L_\perp \Rightarrow (a_{L_\perp}\,, u_s) = 0.$

Maticové násobení jste jistě poznali – je to otázka typu „náhlá smrt“!

Ortogonální projekce – IV

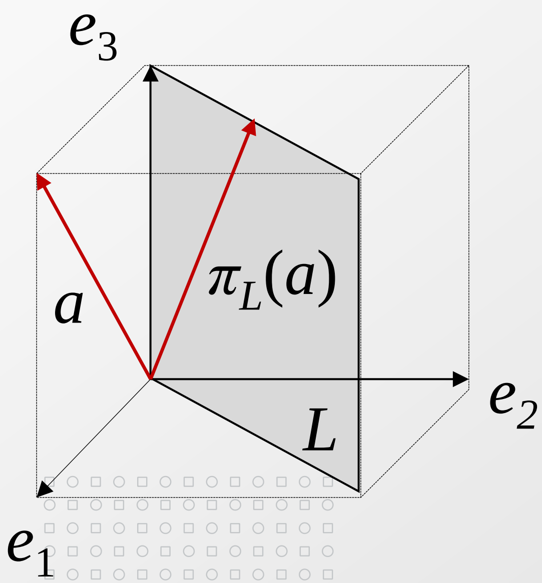
Konečně máme matici ortogonální projekce na podprostor L, takže dokážeme promítnout libovolný vektor – stačí znát jeho složky v dané bázi, matice projekce P_L funguje „univerzálně“.

Ortogonální projekce – IV

Konečně máme matici ortogonální projekce na podprostor L, takže dokážeme promítnout libovolný vektor – stačí znát jeho složky v dané bázi, matice projekce P_L funguje „univerzálně“.

Příklad: Prostor je trojrozměrný nad R, $L = [| e_1 + e_2, e_3 |]$

Názorně: $a \ldots (1, 0, 1)$, $\pi(a) \ldots \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, $L = \left[\left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, 0, 1) \right| \right]$



$$P_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ortogonální projekce – aplikace – I

Algebraické vyjádření ortogonálního promítání se uplatní nejen v geometrii. Koneckonců v „trojrozměrné“ analytické geometrii se bez něj docela dobře obejdeme, v deskriptivní geometrie ani algebraických metod nepoužívá. Výhoda algebraických postupů se uplatní především ve vícerozměrných prostorech, kde chybí názorná představivost.

Ortogonální projekce – aplikace – I

Algebraické vyjádření ortogonálního promítání se uplatní nejen v geometrii. Koneckonců v „trojrozměrné“ analytické geometrii se bez něj docela dobře obejdeme, v deskriptivní geometrie ani algebraických metod nepoužívá. Výhoda algebraických postupů se uplatní především ve vícerozměrných prostorech, kde chybí názorná představivost.

Ukážeme, že se algebraické ortogonální promítání může uplatnit také třeba v oblasti numerických metod – tam bychom to možná nečekali.

Ortogonální projekce – aplikace – I

Algebraické vyjádření ortogonálního promítání se uplatní nejen v geometrii. Koneckonců v „trojrozměrné“ analytické geometrii se bez něj docela dobře obejdeme, v deskriptivní geometrie ani algebraických metod nepoužívá. Výhoda algebraických postupů se uplatní především ve vícerozměrných prostorech, kde chybí názorná představivost.

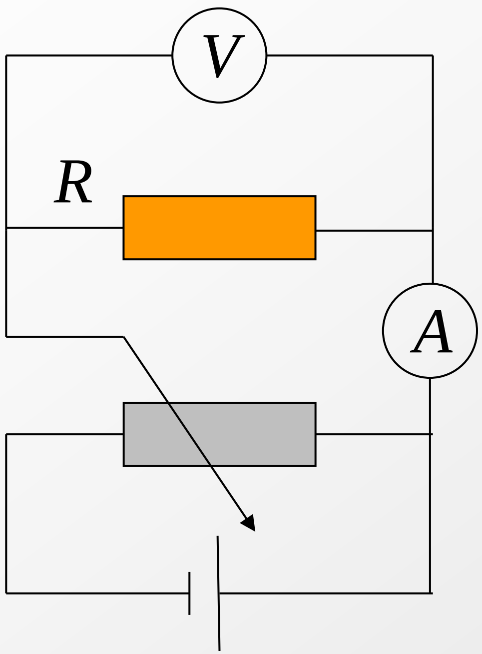
Ukážeme, že se algebraické ortogonální promítání může uplatnit také třeba v oblasti numerických metod – tam bychom to možná nečekali.

V praktiku jste snad určovali elektrický odpor lineárního vodiče pomocí Ohmova zákona – měřili jste závislost proudu na napětí. Ta by měla vyhovovat lineárnímu modelu. Grafem by měla být přímka, jejíž směrnicí je právě měřený odpor. Ale bude to opravdu tak?

Ortogonální projekce – aplikace - II

Experiment:

V praktiku jste pracovali se zapojením jistě podobným obrázku.



Voltmetr měří napětí U na rezistoru s odporem R, které kontrolovaně měníme potenciometrem. Ampérmetr sice měří proud I rezistorem s jistou nepřesností odpovídající tomu, že část proudu „odtéká“ do větve s voltmetrem. Ten však má velký odpor, a tak pro naše účely chybu zanedbáme. Pro tzv. lineární vodič platí Ohmův zákon: $U = R\,I$. Při n měřeních dostáváme n rovnic pro neznámou R:

$$U_1 = RI_1,\ \dots\ U_n = RI_n$$

Ale co s nimi, když neznámá je jen jedna?

Ortogonální projekce – aplikace - III

Máme tedy n lineárních rovnic o jedné neznámé. Vzpomenete si na podmínku nutnou a postačující k tomu, aby soustava n rovnic o m neznámých (v našem případě je $m = 1$) vůbec měla řešení? A kolik m-tic bude řešení obsahovat?

Ortogonální projekce – aplikace - III

Máme tedy *n* lineárních rovnic o jedné neznámé. Vzpomenete si na podmínku nutnou a postačující k tomu, aby soustava *n* rovnic o *m* neznámých (v našem případě je $m = 1$) vůbec měla řešení? A kolik *m*-tic bude řešení obsahovat?

Nevzpomenete? Tak pozor – teorie řešení soustav lineárních rovnic je také otázka typu „náhlá smrt".

Ortogonální projekce – aplikace - III

Máme tedy n lineárních rovnic o jedné neznámé. Vzpomenete si na podmínku nutnou a postačující k tomu, aby soustava n rovnic o m neznámých (v našem případě je $m = 1$) vůbec měla řešení? A kolik m-tic bude řešení obsahovat?

Nevzpomenete? Tak pozor – teorie řešení soustav lineárních rovnic je také otázka typu „náhlá smrt“.

Tak si to rychle připomeňme: Soustava má řešení právě tehdy, je-li hodnost h matice soustavy stejná jako hodnost rozšířené matice. A řešení tvoří vektorový prostor dimenze $d = m - h$. Pokud jste to opravdu zapomněli, nalistujte v M II/1 strany 34-39, nebo M I odstavec 1.1.2.

Ortogonální projekce – aplikace - IV

Naše „fyzikální“ soustava $U_1 = RI_1,\ \ldots\ U_n = RI_n$ nepochybně řešení nemá. To by totiž hodnoty napětí a proudu musely být změřeny úplně přesně. Z každí z rovnic můžeme sice vypočítat odpor, ale z každé rovnice vyjde mírně odlišná hodnota.

Ortogonální projekce – aplikace - IV

Naše „fyzikální" soustava $U_1 = RI_1, \dots U_n = RI_n$ nepochybně řešení nemá. To by totiž hodnoty napětí a proudu musely být změřeny úplně přesně. Z každí z rovnic můžeme sice vypočítat odpor, ale z každé rovnice vyjde mírně odlišná hodnota.

Co s těmi hodnotami R_1 , ... , R_n máme udělat? Zprůměrovat je? To by asi nebylo to nejlepší. Je zde však známá numerická metoda – metoda nejmenších čtverců, v našem případě lineární regrese.

Ortogonální projekce – aplikace - IV

Naše „fyzikální“ soustava $U_1 = RI_1, \ldots U_n = RI_n$ nepochybně řešení nemá. To by totiž hodnoty napětí a proudu musely být změřeny úplně přesně. Z každí z rovnic můžeme sice vypočítat odpor, ale z každé rovnice vyjde mírně odlišná hodnota.

Co s těmi hodnotami $R_1, \ldots, R_n$ máme udělat? Zprůměrovat je? To by asi nebylo to nejlepší. Je zde však známá numerická metoda – metoda nejmenších čtverců, v našem případě lineární regrese.

Spočívá v myšlence, že „nejlepší“ hodnota neznámé R je ta, při které je součet druhých mocnin (čtverců) odchylek měřených hodnot od lineárního závislosti $U = RI$ minimální, tj. při níž funkce

$$\sigma(R) = \sum_{j=1}^{n} (U_j - RI_j)^2 \ldots \text{minimální}$$

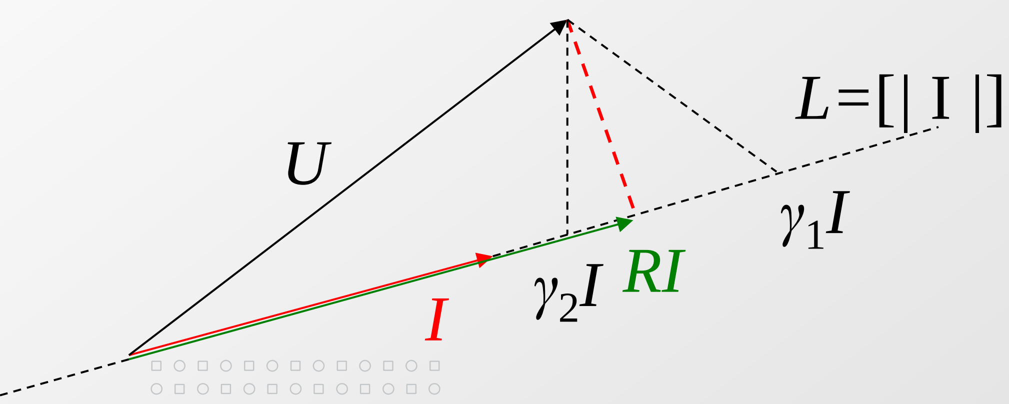
Ortogonální projekce – aplikace – V

Vaše znalosti analýzy vám jistě umožní pomocí této podmínky neznámou *R* určit. Zkusme ji však interpretovat algebraicky. Představme si, že *n*-tice $(U)=(U_1,\dots U_n),\ (I)=(I_1,\dots I_n)$ představují složky vektoru napětí a vektoru proudu v nějaké ortonormální bázi *n*-rozměrného eukleidovském prostoru.

Ortogonální projekce – aplikace – V

Vaše znalosti analýzy vám jistě umožní pomocí této podmínky neznámou R určit. Zkusme ji však interpretovat algebraicky. Představme si, že n-tice $(U)=(U_1,\dots U_n)$, $(I)=(I_1,\dots I_n)$ představují složky vektoru napětí a vektoru proudu v nějaké ortonormální bázi n-rozměrného eukleidovském prostoru.

Zkuste přijít na to, co v tomto pojetí znamená veličina $\sigma(R)$. Je to poznat z obrázku.



$$|U-\gamma I|^2=\sum_{j=1}^{n}(U_j-\gamma I_j)^2>|U-RI|^2$$

$$\sigma(R)=|U-RI|^2=\sum_{j=1}^{n}(U_j-RI_j)^2$$

Ortogonální projekce – aplikace – VI

Všimli jste si, jaká je geometrická interpretace, veličiny $\sigma(R)$? Je to kvadrát vzdálenosti mezi koncovými body vektorů U a γI, pro různé hodnoty γ – v předchozím obrázku jsou vyznačeny čárkovaně.

Tato vzdálenost je nejmenší, je-li vektor γI ortogonálním průmětem vektoru U na podprostor $L = [| I |]$, tj. $\gamma I = U_L \rightarrow \gamma = R$.

Ortogonální projekce – aplikace – VI

Všimli jste si, jaká je geometrická interpretace, veličiny $\sigma(R)$? Je to kvadrát vzdálenosti mezi koncovými body vektorů U a γI, pro různé hodnoty γ – v předchozím obrázku jsou vyznačeny čárkovaně.

Tato vzdálenost je nejmenší, je-li vektor γI ortogonálním průmětem vektoru U na podprostor $L = [| I |]$, tj. $\gamma I = U_L \rightarrow \gamma = R$.

Teď chvíle počítání – zase počítejte společně se mnou na papír a sami se pak dopracujte až k vyjádření hodnoty R.

$$L = [| u_1 |],\ u_1 = \frac{I}{\sqrt{(I, I)}} \ldots \text{normovaná báze v } L,\ \dim L = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{(I, I)}} (I_1 \;\; I_2 \;\; \cdots \;\; I_n),\ P_L = (p_i^j),\ p_i^j = \frac{I_i I_j}{\sum_{\ell=1}^{n} I_\ell^2},\ (U_L) = (U) P_L$$

Ortogonální projekce – aplikace – VII

Poradíme si i se situací, kdy lineární závislost mezi měřenými veličinami závisí na více neznámých parametrech? Zkuste zapsat, jak taková závislost vypadá pro případ, kdy veličina Y závisí lineárně na veličinách $X_1, \ldots, X_k$, $k < n$, a jak vypadá odpovídající soustava rovnic pro neznámé parametry, provádíme-li n měření.

Ortogonální projekce – aplikace – VII

Poradíme si i se situací, kdy lineární závislost mezi měřenými veličinami závisí na více neznámých parametrech? Zkuste zapsat, jak taková závislost vypadá pro případ, kdy veličina Y závisí lineárně na veličinách $X_1, \dots, X_k$, $k < n$, a jak vypadá odpovídající soustava rovnic pro neznámé parametry, provádíme-li n měření.

Povedlo se?

Ortogonální projekce – aplikace – VII

Poradíme si i se situací, kdy lineární závislost mezi měřenými veličinami závisí na více neznámých parametrech? Zkuste zapsat, jak taková závislost vypadá pro případ, kdy veličina Y závisí lineárně na veličinách $X_1, \dots, X_k$, $k < n$, a jak vypadá odpovídající soustava rovnic pro neznámé parametry, provádíme-li n měření.

Povedlo se?
Ať tak či tak, zde je odpověď, resp. kontrola:

$$Y = A_1 X_1 + \cdots + A_k X_k\,,\ (X_s) = (X_s^1, \dots, X_s^n),\ (Y) = (Y^1, \dots, Y^n)$$

$$Y^1 = A_1 X_1^1 + \cdots + A_k X_k^1,\ \dots,\ Y^n = A_1 X_1^n + \cdots + A_k X_k^n$$

je to soustava n lineárních rovnic pro neznámé $A_1, \dots, A_k$, je přeurčená (více rovnic než neznámých) a nebude mít řešení

Ortogonální projekce – aplikace – VIII

Myšlenka, jak určit nejlepší hodnoty neznámých parametrů, je stejná: docílit co nejmenší hodnoty veličiny

$$\sigma(A_1,\dots A_k)=\sum_{j=1}^{n}(Y^j-A_1X_1^j-\cdots-A_kX_k^j)^2.$$

Znamená to ortogonálně promítnout vektor Y na podprostor generovaný vektory X_1 , ... , X_k . Pak $Y_L = A_1X_1$, ... , $A_k X_k$.

Ortogonální projekce – aplikace – VIII

Myšlenka, jak určit nejlepší hodnoty neznámých parametrů, je stejná: docílit co nejmenší hodnoty veličiny

$$\sigma(A_1, \dots A_k) = \sum_{j=1}^{n} (Y^j - A_1 X_1^j - \dots - A_k X_k^j)^2.$$

Znamená to ortogonálně promítnout vektor Y na podprostor generovaný vektory $X_1, \dots, X_k$. Pak $Y_L = A_1 X_1, \dots, A_k X_k$.

Zdá se ale, že tu bude problém: v L potřebujeme ortonormální bázi, tak že musíme soubor generujících vektorů ortogonalizovat a normovat.

Ortogonální projekce – aplikace – VIII

Myšlenka, jak určit nejlepší hodnoty neznámých parametrů, je stejná: docílit co nejmenší hodnoty veličiny

$$\sigma(A_1, \dots A_k) = \sum_{j=1}^{n} (Y^j - A_1 X_1^j - \cdots - A_k X_k^j)^2.$$

Znamená to ortogonálně promítnout vektor Y na podprostor generovaný vektory $X_1, \dots, X_k$. Pak $Y_L = A_1 X_1, \dots, A_k X_k$.

Zdá se ale, že tu bude problém: v L potřebujeme ortonormální bázi, tak že musíme soubor generujících vektorů ortogonalizovat a normovat.

A co když ne? Třeba se můžeme té nepříjemné a jistě zdlouhavé práci náchylné k chybám vyhnout. Pojďme dál.

Ortogonální projekce – aplikace – IX

Předpokládejme, že složky všech zadaných vektorů jsou vyjádřeny v nějaké ortonormální bázi – pak se bude skalární součin dobře počítat, neboť $G = E$.

Ortogonální projekce – aplikace – IX

Předpokládejme, že složky všech zadaných vektorů jsou vyjádřeny v nějaké ortonormální bázi – pak se bude skalární součin dobře počítat, neboť $G = E$.

A teď použijeme „fintu“, kterou už známe (posloužila nám při odvozování tvaru matice ortogonální projekce): $(Y_L, X_s) = (Y, X_s)$. Vynásobíme rovnici pro Y postupně vektory X_1 , ... , X_k .

$$
\begin{aligned}
(Y, X_1) &= A_1(X_1, X_1) + \cdots + A_k(X_k, X_1) \\
\cdots &= \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
(Y, X_k) &= A_1(X_1, X_k) + \cdots + A_k(X_k, X_k)
\end{aligned}
$$

Dostali jsme soustavu normálních rovnic pro neznámé A_1 , ... , A_k .

Ortogonální projekce – aplikace – IX

Příklad nakonec:

$$Y = A_1 X_1 + A_2 X_2 ,$$

$$(X_1) = (1, 2, 3, 4), \; (X_2) = (2, 3, 4, 5), \; (Y) = (2, 3, 5, 8).$$

Určete konstanty A_1 , A_2.

Ortogonální projekce – aplikace – IX

Příklad nakonec:

$$Y = A_1 X_1 + A_2 X_2 ,$$

$$(X_1) = (1, 2, 3, 4),\ (X_2) = (2, 3, 4, 5),\ (Y) = (2, 3, 5, 8).$$

Určete konstanty A_1 , A_2.

Soustava normálních rovnic a výsledky:

$$30 A_1 + 40 A_2 = 55$$

$$40 A_1 + 54 A_2 = 73$$

$$A_1 = 2,5\ ,\ A_2 = -0,5.$$

Ortogonální projekce – aplikace – IX

Příklad nakonec:

$$Y = A_1 X_1 + A_2 X_2 ,$$

$$(X_1) = (1, 2, 3, 4),\ (X_2) = (2, 3, 4, 5),\ (Y) = (2, 3, 5, 8).$$

Určete konstanty A_1 , A_2.

Soustava normálních rovnic a výsledky:

$$30A_1 + 40A_2 = 55$$

$$40A_1 + 54A_2 = 73$$

$$A_1 = 2,5\ ,\ A_2 = -0,5.$$

Vyšlo? Gratuluji.

Příští téma: Vlastní vektory a vlastní hodnoty lineárních operátorů.