Lineární a multilineární algebra

Téma 2: Problém vlastních hodnot a vektorů

Obsah tématu

1. Motivace a stručné opakování – lineární zobrazení
2. Vlastní vektory a vlastní hodnoty lineárního operátoru.
3. Diagonální reprezentace lineárního operátoru.
4. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi II/1, VUTIUM, Brno 2012 (strany 74-87, pro zopakování strany 48-73).

Motivace a stručné opakování – lineární zobrazení

Jedno stručné opakování z podzimního semestru již máme za sebou – byla mu věnována první přednáška jarního semestru. To hlavní ještě jednou zopakujeme.

Sami si však zkuste vybavit nebo vyhledat základní pojmy:

- vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{C}$, nebo $\mathbb{R}$, reprezentace vektorů v bázích
- vektorové podprostory a jejich vlastnosti,
- lineární obal souboru vektorů, průnik a součet vektorových podprostorů, doplněk, ...
- lineární zobrazení $\varphi: V_n \to W_m$, jádro a obraz, reprezentace v bázích, projekce.

Dvojí motivace: Uvedeme dva důvody, proč se zabývat problémem vlastních vektorů a hodnot lineárních operátorů (zobrazení V_n do sebe) – důvod algebraický a důvod fyzikální.

- diagonální reprezentace lineárního operátoru: bylo by dobrým zjednodušením, kdyby k danému operátoru existovala ve V_n báze, v níž by byl tento operátor reprezentován diagonální maticí,
- měření fyzikálních veličin a jeho principiálně možné výsledky v kvantové fyzice – ukazuje se, že pro matematický popis fyzikálních veličin v kvantové fyzice se hodí lineární operátory ve vektorovém prostoru stavů dané fyzikální soustavy a hodnoty veličiny, které lze naměřit, jsou právě tzv. vlastními hodnotami příslušného operátoru a odpovídají jim tzv. vlastní stavy soustavy.

DEFINICE: Lineární zobrazení

Zobrazení $\varphi : V_n \ni a \to \varphi(a) \in W_m$ vektorového prostoru V_n do vektorového prostoru W_m (oba nad $\mathbb{C}$, nebo oba nad $\mathbb{R}$) se nazývá lineární, jestliže pro každé $a, b \in V_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, nebo $\mathbb{R}$ platí

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b).$$

Pro $W_m = V_n$ hovoříme o lineárním operátoru ve V_n.

Připomeňte si nejjednodušší příklady lineárních operátorů: identita, nulový operátor, projekce na vektorový podprostor při zadaném doplňku.

A vzpomenete si, co je to jádro, resp. obraz lineárního operátoru a co platí pro jejich dimenze (defekt d, resp. hodnost h)?

VĚTA: Základní věta o lineárních zobrazeních

Lineární zobrazení $\varphi: V_n \ni a \to \varphi(a) \in W_m$ je jednoznačně určeno obrazy (libovolné) báze vektorového prostoru V_n.

Dokázat tuto větu je velmi jednoduché, jak jsme viděli v přednášce. Ale zrekapitulujme si podrobněji, co znamená: Předpokládejme, že $(e_1, \ldots, e_n)$ je libovolná báze ve V_n. Zvolíme ve W_m libovolně vektory $c_1, \ldots, c_n$ a hledáme lineární zobrazení $\varphi: V_n \to W_m$ tak, aby platilo $c_i = \varphi(e_i)$, $1 \leq i \leq n$. Věta říká, že takové zobrazení existuje, a to pouze jedno.

A jak potom přiřadíme obraz libovolnému vektoru $a \in V_n$? Jednoduše:

$$a \in \alpha^i e_i, \quad \text{pak} \quad \varphi(a) = \alpha^i c_i.$$

Pozor: vektory $c_i \in W_m$ nemusí být lineárně nezávislé, dokonce by mohly být všechny nulové – jaké by v takovém případě bylo zobrazení φ?

Reprezentace vektorů v bázích

Jak víme, je každý vektor $a \in V_n$ reprezentován v dané bázi (jednozněčně) svými složami. V bázích $(e_1, \ldots, e_n)$, resp. $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$, je

$$a = \alpha^i e_i = \bar{\alpha}^i \bar{e}_i, \quad a \ldots (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = (\alpha),$$

$$\bar{e}_i = \tau_i^j e_j, \quad e_i = \sigma_i^j \bar{e}_j, \quad T = (\tau_i^j),\ S = T^{-1} = (\sigma_i^j),$$

jsou matice přechodu mezi bázemi. Pro složky vektoru v různých bázích platí transformační vztahy, které uvádíme jak v přehledném maticovém zápisu, tak v Einsteinově symbolice:

$$(\alpha) = (\bar{\alpha})T, \quad (\bar{\alpha}) = (\alpha)T^{-1}, \quad \alpha^i = \bar{\alpha}^j \tau_j^i, \quad \bar{\alpha}^i = \alpha^j \sigma_j^i.$$

Reprezentace lineárních zobrazení v bázích

K číselné reprezentaci lineárního zobrazení potřebujeme bázi v prostoru vzorů V_n i v prostoru obsahujícím obrazy W_m. Označme $(e_1, \ldots, e_n)$, resp. $(f_1, \ldots, f_m)$ bázi ve V_n, resp. ve W_m. Víme, že lineární zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$ je jednoznačně určeno vektory $c_1 = \varphi(e_1), \ldots, c_n = \varphi(e_n) \in W_m$, získanými jako obrazy vektorů báze $(e_1, \ldots, e_n)$. Ty jsou lineárními kombinacemi vektorů báze $(f_1, \ldots, f_m)$, tj.

$$c_i = \gamma_i^\beta f_\beta, \;\; 1 \le i \le n, \;\; 1 \le \beta \le m.$$

Koeficienty (γ_i^β) tvoří matici A typu n/m. Pro složky $(b^1, \ldots, b^m)$ obrazu $b = \varphi(a) \in W_m$ libovolného vektoru $a \in V_n$ dostaneme

$$\varphi(a) = \varphi(\alpha^i e_i) = \alpha^i c_i = (\alpha^i \gamma_i^\beta f_\beta), \;\; \text{tj.} \;\; b^\beta = \alpha^i \gamma_i^\beta \;\Rightarrow\; (\beta) = (\alpha)A$$

Přechod mezi bázemi

Při přechodech mezi bázemi

$$(e_1, \dots, e_n) \underrightarrow{T} (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n), \quad (f_1, \dots, f_m) \underrightarrow{M} (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$$

Označili jsme A matici, která reprezentuje zobrazení φ v první dvojici bází, jako $\bar{A}$ označme reprezentující matici vztahující se k druhé dvojici bází. Platí

$$(\beta) = (\alpha)A = (\bar{\alpha})TA, \ \ (\beta) = (\bar{\beta})M = (\bar{\alpha})\bar{A}M \implies \bar{A} = TAM^{-1}.$$

V případě lineárního operátoru $\varphi : V_n \to V_n$ vyjadřujeme samozřejmě vzory i obrazy v téže bázi. Při přechodu mezi bázemi tak platí

$$\bar{A} = TAT^{-1}.$$

Vlastní vektory a vlastní hodnoty lineárního operátoru

DEFINICE: Vektor $b \in V_n$, $b \neq 0_{V_n}$ se nazývá vlastní vektor lineárního operátoru $\varphi: V_n \to V_n$, kde V_n je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, resp. nad R, jestliže existuje číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, resp. $\mathbb{R}$, takové, že platí

$$\varphi(b) = \lambda b.$$

Číslo λ se nazývá vlastní hodnota operátoru příslušná vektoru b.

POZNÁMKY: Všimněme si definice podrobněji.

- Vlastní vektor operátoru je hodně speciální. Jeho obraz je totiž kolineární se vzorem ($\lambda \neq 0$), nebo je nulový ($\lambda = 0$).
- Definice nepřipouští nulový vektor jako vlastní. Víte proč?
- Každému vlastnímu vektoru přísluší právě jedna vlastní hodnota, jedné vlastní hodnotě může příslušet více vlastních vektorů. Později uvidíme, kolik, a jakou strukturu tvoří.

Hledání vlastních vektorů

Ukážeme postup, jak najít vlastní vektory a vlastní hodnoty lineárního operátoru ve složkách ve zvolené bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Matici operátoru v této bázi označme $A = (\gamma^i_j)$, $1 \leq i, j \leq n$, hledaný vlastní vektor b má složky $(\beta) = (\beta^1, \ldots, \beta^n)$ a splňuje definiční vztah $(\beta)A = \lambda(\beta)$. Ten představuje soustavu rovnic

$$(\beta^1 \quad \ldots \quad \beta^n) \begin{pmatrix} \gamma^1_1 & \gamma^2_1 & \ldots & \gamma^n_1 \\ \gamma^1_2 & \gamma^2_2 & \ldots & \gamma^n_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma^1_n & \gamma^2_n & \ldots & \gamma^n_n \end{pmatrix} = \lambda(\beta^1 \quad \ldots \quad \beta^n)$$

Jedná se o homogenní soustavu n lineárních rovnic o n neznámých složkách vektoru b o matici $(A - \lambda E)^T$. (Na transpozici pozor! Pokud na první pohled nevidíte, že maticí soustavy skutečně není $(A - \lambda E)$, ale matice transponovaná, přepište si maticový zápis do rovnic a převeďte vše na levou stranu.)

Neznámou veličinou je i hodnota λ, kterou určíme na základě požadavku, aby soustava měla i jiná řešení, než triviální. (Triviální řešení představuje nežádoucí nulový vektor.) Homogenní soustava n rovnic o n neznámých má, jak známo, netriviální řešení právě tehdy, má-li její matice sníženou hodnost, tj. nulový determinant,

$$\det (A - \lambda E)^T = \det (A - \lambda E) = 0.$$

Vyčíslením determinantu zjistíme, že je polynomem stupně n proměnné λ, jeho anulováním získáme všechny možné hodnoty λ. Přechodem do jiné báze dostaneme

$$\det(TAT^{-1} - \lambda E) = \det(TAT^{-1} - T\lambda ET^{-1}) =$$

$$= \det[T(A - \lambda E)T^{-1}] = \det(A - \lambda E).$$

Tento polynom má tedy v každé bázi stejný tvar. Nazývá se charakteristický polynom operátoru φ, jeho kořeny pak charakteristické kořeny.

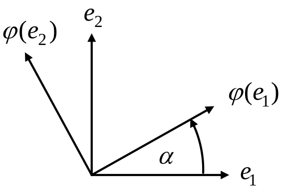
Charakteristické kořeny jsou obecně komplexní. Pokud je prostor V_n konstruován nad $\mathbb{C}$, poslouží všechny jako vlastní hodnoty operátoru. Pro V_n nad $\mathbb{R}$ má charakteristický polynom sice reálné koeficienty, ale může mít i dvojice komplexně sdružených kořenů. Ty ovšem musíme „zahodit“.

VĚTA: Vlastní hodnoty

Vlastními hodnotami lineárního operátoru ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$ jsou právě všechny jeho charakteristické kořeny. Vlastními hodnotami lineárního operátoru ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{R}$ jsou právě jeho reálné charakteristické kořeny.

PŘÍKLAD: Otočení v rovině V_2

Sledujme obrázek. Matici otočení v (euklidovské) rovině o úhel $\alpha \in [0, 2\pi)$ získáme pomocí obrazů báze (e_1, e_2).



$$\varphi(e_1) = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha$$
$$\varphi(e_2) = -e_1 \sin\alpha + e_2 \cos\alpha$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Vzhledem ke geometrické interpretaci lineárního operátoru uvažujme tak, že se jedná o vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Charakteristický polynom a jeho kořeny jsou

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha,$$

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha.$$

Obecně jde o dvojici komplexně sdružených kořenů, reálné jsou pouze v případě $\alpha = 0$ (φ) je identita, nebo $\alpha = \pi$ (φ) je středová inverze. Pro $\alpha = 0$ je vlastní hodnotou číslo $\lambda = 1$, pro $\alpha = \pi$ je $\lambda = -1$. V obou případech jsou všechny vektory prostoru V_2 jí příslušnými vlastními vektory.

Vyřešte úlohu formálně i pro případ, že V_2 je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Výsledek: Pro $\lambda_1 = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, $\alpha \neq 0, \pi$, jsou vlastními vektory všechny (komplexní, nenulové) násobky vektoru $b_1 = (1, -\mathrm{i})$, pro $\lambda_1 = \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha$ jde o násobky vektoru $b_2 = (1, \mathrm{i})$. Pro $\alpha = 0$, nebo $\alpha = \pi$ platí stejný výsledek jako pro V_2 nad $\mathbb{R}$.

Z teorie soustav lineárních rovnic (v našem případě jde o soustavu homogenní) víme, že jejich řešení tvoří vektorové prostory. Budou tedy vlastní vektory operátoru tvořit nějaké vektorové podprostory ve V_n? Okamžitá odpověď asi bude záporná, protože soubory vlastních vektorů příslušných jednotlivým vlastním hodnotám neobsahují nulový vektor (ten je vyloučen samotnou definicí.) Podívejme se však na problém trochu hlouběji:

Uvažujme o dvou libovolných vlastních vektorech b_1 a b_2 příslušných téže vlastní hodnotě λ a všimněme si z pohledu problému vlastních vektorů jejich libovolné lineární kombinace. Platí

$$\varphi(\alpha^1 b_1 + \alpha^2 b_2) = \alpha^1 \varphi(b_1) + \alpha^2 \varphi(b_2) = \lambda(\alpha^1 b_1 + \alpha^2 b_2).$$

Jakákoli lineární kombinace vlastních vektorů příslušných téže vlastní hodnotě je také vlastním vektorem příslušným téže hodnotě! Když k souboru všech takových vektorů doplníme nulový vektor, dostaneme vektorový podprostor, označme jej L.

A co můžeme zjistit o vlastních vektorech příslušných různým vlastním hodnotám? Je to jednoduché. Označme L_1 a L_2 vektorové podprostory příslušné různým vlastním hodnotám λ_1 a λ_2 a položme si otázku, co je jejich průnikem. Označme $c \in L_1 \cap \text{Ł}_2$, tj. $c \in L_1$ a $c \in L_2$. Platí

$$\varphi(c) = \lambda_1 c, \;\; \varphi(c) = \lambda_2 c \implies (\lambda_1 - \lambda_2)c = 0_{V_n} \implies c = 0_{V_n}.$$

Na základě takto snadno zjištěných vlastností můžeme vyslovit důležitou větu.

VĚTA: Podprostory vlastních vektorů

- Všechny vlastní vektory lineárního operátoru φ, po doplnění nulovým vektorem, tvoří vektorový podprostor ve V_n.
- Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $r \leq n$, jsou všechy navzájem různé vlastní hodnoty operátoru φ a $L_1, \ldots, L_r$ jim příslušné podprostory vlastních vektorů (viz výše). Nechť $b_1, \ldots, b_r$ jsou libovolně vybrané vlastní vektory operátoru φ příslušné po řadě uvedeným vlastním hodnotám. Pak vektory $b_1, \ldots, b_r$ jsou lineárně nezávislé.

Druhá vlastnost uvedená ve větě přímo vyplývá z toho, že $L_p \cap L_q = \{0_{V_n}\}$ pro libovolné $\lambda_p \neq \lambda_q$, $1 \leq p, q \leq r$.

Soubor vlastních hodnot lineárního operátoru, včetně násobnosti, se nazývá spektrum operátoru. Jsou-li charakteristické kořeny operátoru jednonásobné, jde o jednoduché spektrum.

Jak je to s dimenzemi podprostorů $L_1, \dots, L_r$? Ty zatím umíme určit jen tak, že příslušnou konkrétní úlohu vyřešíme. Obecné pravidlo zatím nemáme – to přijde později. Co však je již v tuto chvíli zřejmé, že

$$\dim L_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \dim L_r \leq n,$$

Platí také samozřejmá rovnost vyplývající ze známých vlastností polynomů: $k_1 + \cdots + k_r = n$, kde k_p jsou násobnosti jednotlivých (obecně komplexních) charakteristických kořenů.

A ještě dva úkoly: Co lze říct o dimenzích podprostorů $L_1, \dots, L_n$ prostoru V_n nad $\mathbb{C}$ v případě jednoduchého spektra? Platí $\dim L_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \dim L_r =$ doplňte.

PŘÍKLAD: Problém vlastních hodnot a vektorů prakticky

Pro lineární operátor ve V_3 v bázi $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ platí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(A-\lambda E) = -\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda = -\lambda(\lambda-3)^2.$$

Charakteristické kořeny jsou $\lambda_1 = 0$ $(k_1 = 1)$ a $\lambda_2 = 3$ $(k_2 = 2)$.

$$(A-\lambda_1)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow L_1 = [|(1,\, 1,\, 1)|],$$

$$(A-\lambda_2)^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow L_2 = [|(-2,\, 1,\, 4)|],$$

$$\dim L_1 \dot{+} \dim L_2 = 2 < 3$$ (symbol $\dot{+}$ znamená přímý součet)

Diagonální reprezentace lineárního operátoru

Víme už, že lineární operátor je v různých bázích, např. $e_1, \dots, e_n$ a $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ reprezentován čtvercovými maticemi, mezi nimiž je vztah $\bar{A} = TAT^{-1}$, kde T je matice přechodu. (Takové matice se nazývají podobné.)

Jistě vás právě napadlo, že by bylo pohodlné, kdyby existovala báze, v níž by byl operátor reprezentován diagonální maticí. A taky to, že vlastní vektory by vzhledem ke své definiční vlastnosti byly vhodnými adepty k tomu, aby takovou bázi vytvořily. Skutečně – představme si, že by báze $(e_1, \dots, e_n)$ byla tvořena vlastními vektory operátoru, tj.

$$\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, \ \ \varphi(e_2) = \lambda_2 e_2 \ \ \dots \ \ \varphi(e_n) = \lambda_n e_n.$$

Matice operátoru je v tomto případě diagonální, diagonála je tvořena vlastními hodnotami $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (zde nutně nejsou navzájem různé). Jednoduše jsme tak „odvodili“ větu, která má zásadní význam:

VĚTA: O diagonalizaci operátoru

Lineární operátor φ je v bázi $(e_1, \dots, e_n)$ je reprezentován diagonální maticí právě tehdy, je-li tato báze tvořena vlastními vektory operátoru φ.

Význam věty: Je-li soubor všech vlastních vektorů operátoru φ takový, že z něj lze sestavit bázi, pak v libovolné takové bázi je operátor reprezentován diagonální maticí a v diagonále jsou vlastní hodnoty (včetně násobnosti). Zatím však nemáme dost znalostí k tomu, abychom předem určili, zda bude možné bázi z vlastních vektorů sestavit. V předchozím příkladu jsme viděli situaci, kdy to zrovna možné není.

Úlohy k procvičení

- Lze diagonálně reprezentovat operátor s jednoduchým spektrem? Zdůvodněte. Výsledek: Nad $\mathbb{C}$ ano, nad $\mathbb{R}$ právě tehdy, jsou-li všechny charakteristické kořeny reálné.
- Lineární operátor ve vektorovém prostoru polynomů proměnné x stupně nejvýše n nad $\mathbb{R}$ je definován tak, že polynomu $P(x)$ přiřadí jeho derivaci. Zapište matici tohoto operátoru ve standardní bázi $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ a řešte problém vlastních hodnot a vektorů.
- Rozhodněte, zda následující lineární operátory ve V_3 mají diagonální reprezentaci. Vždy určete vektorové podprostory odpovídající jednotlivým vlastním hodnnotám:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

Výsledky: a) Ne, $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 3$, $L_1 = [|(-2, -1, 1)|]$, b) Ne, $\lambda_1 = 1$, $k_1 = 3$, $L_1 = [|(0, 0, 1)|]$, c) Ne, $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 3$, $L_1 = [|(1, 2, 0), (1, 0, 1)|]$.