Lineární a multilineární algebra

Téma 4: Samoadjungované a symetrické lineární operátory

Obsah tématu

1. Speciální operátory pro fyziku.
2. Samoadjungovaný (symetrický) lineární operátor v U_n (E_n).
3. Diagonální reprezentace samoadjungovaných operátorů.
4. Spektrální reprezentace.
5. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi II/1, VUTIUM, Brno 2012 (kapitola 6).

Speciální operátory pro fyziku

V úvodu kapitoly o unitárních a ortogonálních operátorech jsme se zmínili o významu některých speciálních lineárních operátorů v prostorech se skalárním součinem pro fyziku. V případě unitárních a ortogonálních operátorů to byly zejména souřadnicové transformace (unitární a ortogonální operátory jsou regulární). Nyní půjde o další operátory se zásadním fyzikálním významem – samoadjungované operátory v unitárních rostorech U_n a symetrické operátory v euklidovských prostorech E_n. Nejprve si všimněme dvou fyzikálních problémů.

Dielektrická permitivita: Na střední škole jste si uváděli lineární vztah mezi intenzitou $\vec{E}$ a indukcí $\vec{D}$ elektrostatického pole, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, kde ϵ byla tzv. dielektrická permitivita prostředí. Tento vztah platí v případě, že prostředí je izotropní. Fyzikálně to znamená, že při vložení do elektrického pole $\vec{E}$ se prostředí polarizuje ve směru pole. (Je-li $\vec{P}$ vektor polarizace, je $\vec{D} = \vec{E} + \vec{P}$.) Jestliže je prostředí anizotropní, může i tak mezi vektory intenzity a indukce platit lineární vztah, nebudou však obecně rovnoběžné, ale každá složka indukce (v ONB) bude lineární kombinací všech složek intenzity,

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j, \quad \text{maticově} \quad (D_1 \ \ D_2 \ \ D_3) = (E_1 \ \ E_2 \ \ E_3)(\epsilon).$$

Použili jsme Einsteinovu symboliku, i když jsou všechny indexy dole. Z fyzikálních důvodů je matice (ϵ), která fakticky reprezentuje lineární operátor, tj. $\epsilon : \vec{E} \to \epsilon(\vec{E}) = \vec{D}$, symetrická.

Stavy a veličiny v kvantové fyzice: V přednášce z kvantové mechaniky se seznámíte s jejím matematickým aparátem. Stavy kvantově-mechanické soustavy budou reprezentovány prvky jistého unitárního prostoru, např. tzv. vlnovými funkcemi, fyzikální veličiny pak lineárními operátory v tomto prostoru, vykazujícími jistý prvek symetrie (podobně jako v případě dielektrické permitivity). Uvidíte, že hodnoty fyzikálních veličin, které můžeme získat měřením na soustavě, jsou vlastními hodnotami takových operátorů a mohou být kvantovány, významnou roli hrají také vlastní stavy soustavy, které jsou reprezentovány vlastními vektory operátorů fyzikálních veličin.

Samoadjungovaný (symetrický) operátor v U_n (E_n)

Algebraická definice samoadjungovaného operátoru v U_n (nad $\mathbb{C}$), resp. symetrického operátoru v E_n (nad $\mathbb{R}$) je zde:

DEFINICE: Samoadjungovaný a symetrický operátor

Lineární operátor φ v U_n (resp. v E_n) se nazývá samoadjungovaný, (resp. symetrický), jestliže pro každé dva vektory $a, b \in U_n$ (resp. $a, b \in E_n$) platí

$$(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b)).$$

Tato definice je speciálním případem definice operátoru φ^+ sdruženého, neboli adjungovaného k operátoru φ, $(\varphi(a), b) = (a, \varphi^+ b)$, kdy je $\varphi^+ = \varphi$.

Reprezentace samoadjungovaného (symetrického) operátoru v bázích

Zjistíme, jaký vliv má samoadjungovanost, resp. symetrie operátoru na jeho reprezentující matici v ortonormálních bázích. Zvolme ONB $(e_1, \ldots, e_n)$ v U_n. Počítejte na papír:

$$a,\, b \in U_n, \quad a \ldots (\alpha), \;\; b \ldots (\beta) \quad \text{v ONB} \quad (e_1, \ldots, e_n),$$

$$\varphi(a) \ldots (\tilde{\alpha}), \;\; \varphi(\beta) \ldots (\tilde{\beta}) \;\; \text{v téže ONB}, \;\; \tilde{\alpha} = (\alpha)A, \quad \tilde{\beta} = (\beta)A,$$

kde A je matice operátoru φ ve zvolené ONB. Platí

$$(\varphi(a), (b)) = (a, \varphi(b)) \implies (\tilde{\alpha})(\beta)^{T*} = (\alpha)(\tilde{\beta})^{T*},$$

$$(\alpha)A(\beta)^{T*} = (\alpha)((\beta)A)^{T*} \implies$$

$$\implies (\alpha)(A - A^{T*})(\beta)^{T*} = 0 \;\; \text{pro lib. } a,\, b \in U_n.$$

Stejnou úvahou jako v případě unitárního operátoru dostaneme $A = A^{T*}$ (samoadjungovaná matice), resp. $A = A^T$ v prostorech nad $\mathbb{R}$ (symetrická matice).

VĚTA: Reprezentace samoadjungovaného, resp. symetrického operátoru

Samoadjungovaný operátor v U_n (resp. symetrický operátor v E_n) je v každé ortonormální bázi reprezentován samoadjungovanou (resp. symetrickou) maticí. (Platí i naopak.)

POZNÁMKA: Samoadjungovaný lineární operátor se také nazývá hermiteovský. Tyto dva pojmy v prostorech konečné dimenze splývají, v prostorech nekonečné dimenze je pojem samoadjungovaného operátoru poněkud obecnější.

PŘÍKLAD: Uvedeme tři geometricky názorné příklady samoadjungovaného a symetrického operátoru.

- Identita v U_n (v E_n) je jak samoadjungovaným (symetrickým), tak unitárním (ortogonálním) operátorem.
- Středová inverze v E_n, tj. $\varphi(a) = -a$ pro libovolné $a \in E_n$ je symetrický operátor.
- Operátor ortogonální projekce na podprostor $L \subset U_n$ (resp. E_n) $\dim L = k$, $1 \leq k \leq n$, je samoadjungovaný (symetrický). V libovolné ONB $(e_1, \ldots, e_n)$ v U_n je totiž reprezentován maticí $P = C^{T*}C$, kde $C = (\gamma_s^i)$, $1 \leq s \leq k$, $1 \leq i \leq n$, je matice složek vektorů ortonormální báze v L, vyjádřených v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ – viz téma 1. Platí

$$P^{T*} = (C^{T*}C)^{T*} = C^{T*}(C^{T*})^{T*} = C^{T*}C = P, \quad (\text{nad } \mathbb{R} \;\; P^T = P).$$

  Matice P je samoadjungovaná (resp. symetrická) při libovolné ONB v U_n (resp. E_n) i v L.

Diagonální reprezentace samoadjungovaných operátorů

V tomto odstavci uvidíme, že také samoadjungované operátory (v U_n nad $\mathbb{C}$), a dokonce i symetrické operátory (v E_n nad $\mathbb{R}$ – na rozdíl od ortogonálních) mají vždy diagonální reprezentaci.

Vlastní hodnoty samoadjungovaného operátoru

Uvažujme nyní o samoadjungovaném lineárním operátoru $\varphi: U_n \to U_n$ a libovolném z jeho vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ, $a \in U_n$, $\varphi(a) = \lambda a$. Z definice samoadjungovaného operátoru plyne, že

$$(\varphi(a), a) - (a, \varphi(a)) = 0 \implies (\lambda a, a) - (a, \lambda a) = (\lambda - \lambda^*)(a, a) = 0.$$

Vlastní vektor nesmí být (z definice) nulový, proto $(a, a) \neq 0$, a odtud $\lambda - \lambda^* = 0$. Všechny vlastní hodnoty samoadjungovaného operátoru jsou reálné, i když operátor působí v prostoru nad $\mathbb{C}$!

OTÁZKA: Můžeme z právě získané vlastnosti vlastních hodnot samoadjungovaného operátoru zjistit něco o kořenech charakteristického polynomu?

Jistěže. Když jsme studovali problém vlastních hodnot a vektorů libovolného operátoru, zjistili jsme, že vlastní hodnotou nemůže být nic jiného než charakteristický kořen (i když v prostorech nad $\mathbb{R}$ se komplexní charakteristické kořeny jako vlastní hodnoty neuplatní). Jestliže jsme teď zjistili, že všechny vlastní hodnoty samoadjungovaného operátoru jsou reálné, znamená to, že také všechny jeho charakteristické kořeny jsou reálné. Totéž ovšem platí pro symetrický operátor (v E_n nad $\mathbb{R}$). Z hlediska vlastních hodnot jsou na tom tedy samoadjungovaný a symetrický operátor stejně – jejich charakteristický polynom má pouze reálné kořeny a ty se všechny uplatní jako vlastní hodnoty.

Vlastnosti vlastních vektorů samoadjungovaného operátoru

Že vlastní vektory operátoru φ příslušné dané vlastní hodnotě tvoří (po doplnění nulovým vektorem) vektorový prostor, platí pro každý operátor a žádné dva z těchto podprostorů nemají kromě nulového vektoru společné prvky. Podobně jako v případě unitárního operátoru vyzkoušíme, zda pro vlastní vektory samoadjungovaného (v E_n symetrického) operátoru nedostaneme ještě speciálnější vztah – totiž ortogonalitu. Zvolme libovolný z vlastních vektorů odpovídajících vlastní hodnotě λ_a, $\varphi(a) = \lambda_a a$, a podobně libovolný vektor b, $\varphi(b) = \lambda_b b$, $\lambda_a \neq \lambda_b$. Z definice samoadjungovaného operátoru plyne

$$(\varphi(a),\, b) - (a,\, \varphi(b)) = 0 \implies \lambda_a(a,\, b) - \lambda_b^*(a,\, b) = (\lambda_a - \lambda_b^*)(a,\, b) = 0.$$

protože je $\lambda_a \neq \lambda_b$, je $(a,\, b) = 0$, takže vektory $a,\, b \neq 0_{U_n}$ jsou ortogonální. Jasný závěr: podprostory L_a a L_b: jsou ortogonální.

Diagonální reprezentace samoadjungovaného operátoru

Dokázat diagonalizovatelnost samoadjungovaného operátoru teď už bude snadné – část úvah, jimiž jsme se už „prokousali" u unitárního operátoru, bude obdobná. Označme zase $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ navzájem různé vlastní hodnoty (jsou reálné), $k_1, \dots, k_r$ jejich násobnosti, $L_1, \dots, L_r$ odpovídající podprostory a $q_1, \dots, q_r$ jejich dimenze, dále pak $L_\perp$ ortogonální doplněk k $L = L_1 \dot{+} + \cdots + \dot{+} L_r$. Podstatné bude zjistit, zda operátor φ „vrací" vektory z $L_\perp$ zpět do $L_\perp$. To bude jednoduché. Zvolme libovolně $a \in L \Rightarrow \varphi(a) \in L$. Libovolně zvolme i $b \in L_\perp$. Pak $(a, b) = 0$, ale také $(\varphi(a), b) = 0$ Pište a uvažujte:

$(a, \varphi(b)) = (\varphi(a), b) = 0.$ Protože je však $\varphi(a) \in L$, je $\varphi(b) \in L_\perp$.

Další úvaha je stejná jako u unitárního operátoru. Je zde však něco navíc: je platná i pro symetrický operátor, na rozdíl od ortogonálního operátoru.

VĚTA: O diagonální reprezentaci samoadjungovaného operátoru

Nechť $\varphi : U_n \to U_n$ je samoadjungovaný operátor v U_n, resp. symetrický operátor v E_n, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jeho navzájem různé charakteristické kořeny, $k_1, \ldots, k_r$ jejich násobnosti, $L_1, \ldots, L_r$ jim příslušné podprostory vlastních vektorů (po doplnění nuly), jejich dimenze označme $q_1, \ldots, q_r$. Pak:

- Všechny charakteristické kořeny jsou reálné (a všechny tedy jsou vlastními hodnotami i v případě symetrického operátoru, tj. v prostoru E_n nad $\mathbb{R}$).
- Vektorové podprostory $L_1, \ldots, L_r$ jsou navzájem ortogonální.
- Platí $q_s = k_s$, $1 \leq s \leq r$, a $L_1 \dot{+} + \cdots \dot{+} L_r = U_n$.
- Operátor je v každé bázi svých vlastních vektorů reprezentován diagonální maticí D. V diagonále jsou vlastní hodnoty, každá tolikrát, kolik je její násobnost.

OTÁZKY: Položme si ještě pár otázek a odpovězme si na ně, podobně jako u unitárních a ortogonálních operátorů.

- Musí být báze z vlastních vektorů, v níž reprezentujeme operátor diagonální maticí, ortonormální? Nemusí. Operátor je reprezentován diagonální maticí v libovolné bázi tvořené vlastními vektory.
- Liší se diagonální matice D reprezentující operátor v různých bázích tvořených vlastními vektory operátoru? Liší se jen uspořádáním vlastních hodnot podél diagonály. (Charakteristické kořeny ani jejich násobnost nezávisí na bázi.)
- Je samoadjungovaný (symetrický) operátor reprezentován samoadjungovanou (symetrickou) maticí v každé bázi? Ne, obecně pouze v ONB (viz důkaz). Pro přechod od báze tvořené vlastními vektory k obecné bázi, v níž má operátor matici A, platí $A = TDT^{-1}$, kde T je matice přechodu. $A^{T*} = (T^{-1})^{T*} D T^{T*}$ se obecně nerovná A.

POZNÁMKY: Všimněme si zajímavých vlastností samoadjungovaných a symetrických operátorů z hlediska kvantové fyziky.

- Samoadjungované operátory reprezentují veličiny v kvantové fyzice. Naměřené hodnoty těchto veličin jsou vlastními hodnotami operátoru. To jde dobře dohromady s tím, že vlastní hodnoty samoadjungovaného operátoru jsou reálné.
- V kvantové fyzice dále platí, že měřením přejde soustava do stavu daného vlastním vektorem odpovídajícím hodnotě, kterou jsme naměřili (tzv. vlastní stavy). Veličiny, které lze měřit současně, tedy musí mít stejný soubor vlastních vektorů. Co to znamená pro operátory? Označme φ a ψ samoadjungované operátory, které mají stejný soubor vlastních vektorů a sestavme z nich bázi $(u_1, \ldots, u_n)$. Platí $\varphi(u_j) = \lambda_j u_j$, $\psi(u_j) = \mu_j u_j$. Platí:

  $$\varphi\circ\psi(u_j) = \varphi(\mu_j u_u) = \mu_j\varphi(u_j) = \mu_j\lambda_j u_j = \lambda_j\psi(u_j) = \psi(\lambda_j u_j) = \psi\circ\varphi(u_j).$$

  Co platí pro bázi, platí obecně. Operátory φ a ψ komutují. Veličiny, jejichž operátory nekomutují (třeba poloha a hybnost), současně měřit nelze, platí pro ně relace neurčitosti.

PŘÍKLAD: Operátor ortogonální projekce

Připomeňme si operátor ortogonální projekce na podprostor $L \subset U_n$, $\pi_L : U_n \ni a \to \pi_L(a) = a_L \in L$, kde $a = a_L + a_{L_\perp}$ (jednoznačný rozklad). Je opravdu samoadjungovaný? Jistě řeknete, že ano, protože je v každé ONB reprezentován samoadjungovanou maticí projekce $P = C^{T*}C$, $P^{T*} = P$ (to už jsme dokazovali, ale zkuste to kvůli procvičení znovu). Snadno se to dá dokázat i nezávisle na bázi. Počítejte spolu na papír: zvolme libovolně $a,\, b \in U_n$. Pak

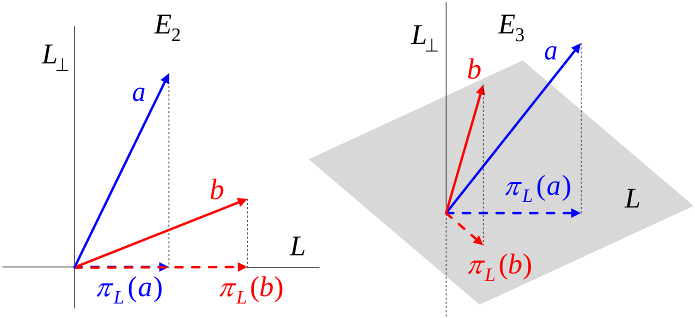
$$(\pi_L(a),\, b) = (a_L,\, b_L + b_{L_\perp}) = (a_L,\, b_L), \text{ neboť } (a_L,\, b_{L_\perp}) = 0,$$

$$(a,\, \pi_L(b)) = (a_L + a_{L_\perp},\, b_L) = (a_L,\, b_L) + (a_{L_\perp},\, b_L) = (a_L,\, b_L),$$

a odtud $(\pi_L(a),\, b) = (a,\, \pi_L(b))$, což je právě definiční vztah pro samoadjungovaný operátor.

Uvědomte si účinnost algebry – představte si, že byste to měli dokazovat pomocí elementární či analytické geometrie třeba jen v E_3.

Obrázky v E_2 a E_3 s měřením úhlů a délek



Při standardní definici skalárního součinu, $(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$, kde α je úhel mezi vektory a a b, zkuste elementárně dokázat symetrii operátoru ortogonální projekce, tj. $(\pi_L(a), b) = (a, \pi_L(b))$. Pro obrázek vlevo je to jednoduché, horší je to pro obrázek vpravo.

PŘÍKLAD: Samoadjungovaný operátor v U_4

Samoadjungovaný operátor je v ONB (e_1, e_2, e_3, e_4) reprezentován maticí A. Úkolem je určit jeho diagonální reprezentaci. Počítejte na papír a proveďte všechny mezivýpočty.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2 \implies$$

$$\implies \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \ k_1 = k_2 = 2.$$

$$(A - \lambda_1 E)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = [|(1,\ 1,\ 0,\ 0,),\ (0,\ 0,\ 1,\ \mathrm{i})|] \sim \left[\, \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) \right| \,\right].$$

$$(A-\lambda_2 E)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 = [|(1,\ -1,\ 0,\ 0,),\ (0,\ 0,\ 1,\ -\mathrm{i})|] \sim$$

$$\sim \left[| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right) | \right].$$

V ortonormální bázi vlastních vektorů, které jsou generátory podprostorů L_1 a L_2, má operátor diagonální reprezentaci

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spektrální reprezentace

Pojem spektrální reprezentace našel svůj název možná opět ve fyzice pro případ samoadjungovaných operátorů: energie elektronů v atomech (obecně látkách) je kvantována a tomu odpovídají frekvence světla, které tyto látky mohou vyzařovat – tedy spektrum ve fyzice. Soubor všech vlastních hodnot lineárního operátoru se také nazývá spektrum. Víme však, že v případě samoadjungovaného operátoru spolu obě „spektra“ souvisí. Uvidíme, že však má význam pro jakýkoli lineární operátor v U_n, který lze reprezentovat diagonální maticí, tj. jehož soubor vlastních vektorů generuje celý prostor U_n. Patří sem tedy vedle samoadjungovaných operátorů i operátory unitární a např. také operátory s jednoduchým spektrem (jednonásobné charakteristické kořeny). V prostorech E_n (nad $\mathbb{R}$) se týká např. všech symetrických operátorů a všech operátorů s reálným jednoduchým spektrem.

Pro lineární operátor $\varphi : U_n \to U_n$, resp. $\varphi : E_n \to E_n$, který má diagonální reprezentaci, tj. v U_n, resp. v E_n existuje báze tvořená jeho vlastními vektory, označme opět $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ vlastní hodnoty, $k_1, \ldots, k_r$ jejich násobnosti a $L_1, \ldots, L_r$ odpovídající podprostory (dimenze jsou rovny násobnostem). Platí $L_1 \dot{+} + \cdot + \dot{+} L_r = U_n\,(E_n)$. Libovolný vektor $a \in U_n$ (je součtem svých ortogonálních průmětů do těchto podprostorů) zobrazíme operátorem φ, tj.

$$a = a_{L_1} + \cdots + a_{L_r} = \pi_{L_1}(a) + \cdots + \pi_{L_r}(a)$$

$$\begin{aligned} \varphi(a) = \varphi(a_{L_1}) + \cdots + \varphi(a_{L_r}) &= \lambda_1 a_{L_1} + \cdots + \lambda_r a_{L_r} = \\ &= \lambda_1 \pi_{L_1}(a) + \cdots + \lambda_r \pi_{L_r}(a) = \\ &= (\lambda_1 \pi_{L_1} + \cdots + \lambda_r \pi_{L_r})(a). \end{aligned}$$

(Je vám jasná poslední rovnost? Vzpomeňte si na konstrukci struktury vektorového prostoru na množině lineárních zobrazení.)

Protože je vektor a libovolný, platí

$$\varphi = \lambda_1 \pi_{L_1} + \cdots + \lambda_r \pi_{L_r}.$$

Operátor φ jsme vyjádřili jako lineární kombinaci ortogonálních projekcí na vektorové podprostory tvořené jeho vlastními vektory. Koeficienty této lineární kombinace jsou vlastní hodnoty operátoru. Uvedený rozklad se nazývá spektrální reprezentace operátoru φ.

Otázka: Není tu náhodou problém? Spektrální reprezentaci jsme sestavili pro jakýkoli operátor, který lze reprezentovat diagonální maticí, nejen pro operátory samoadjungované. Operátory ortogonálních projekcí však samoadjungované jsou a my vytváříme pouze jejich násobky a součet. Není to nějaký rozpor?

Součet samoadjungovaných operátorů je jistě také samoadjungovaný (dokažte to). Jak je to však s násobkem skalárem?

PŘÍKLAD: Násobek samoadjungovaného operátoru

Předpokládejme, že φ je samoadjungovaný operátor v U_n a $\alpha \in \mathbb{C}$. Ověříme, zda operátor $\alpha\varphi$ může být také samoadjungovaný. Platí

$$(\alpha\varphi(a),\, b) = \alpha(\varphi(a),\, b) = \alpha(a,\, \varphi(b)) = (a,\, \alpha^*\varphi(b)).$$

Aby by operátor $\alpha\varphi$ samoadjungovaný, tj. aby platilo $(\alpha\varphi(a),\, b) = (a,\, \alpha^*\varphi(b))$, muselo by být $\alpha = \alpha^*$. Pouze reálné násobky samoadjungovaných operátorů jsou rovněž samoadjungované.

Takže třeba unitární operátor, jehož vlastní vektory také generují celý prostor U_n má sice spektrální reprezentaci (je lineární kombinací ortogonálních projekcí na podprostory vlastních vektorů s vlastními hodnotami jako koeficienty), ale není obecně samoadjungovaný (jeho vlastní hodnoty jsou komplexní jednotky).

Ale jakýkoli operátor, jehož vlastní vektory generují celý prostor a jehož vlastní hodnoty jsou reálné je samoadjungovaný. Toto zjištění umožňuje vyslovit větu.

VĚTA: O spektrální reprezentaci

Předpokládejme, že vlastní vektory lineárního operátoru φ v U_n generují celý prostor U_n. Pak platí:

- Operátor φ má tvar spektrální reprezentace

$$\varphi = \lambda_1 \pi_{L_1} + \cdots + \lambda_2 \pi_{L_r},$$

  kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jsou navzájem různé vlastní hodnoty operátoru φ a $\pi_{L_1}, \ldots, \pi_{L_r}$ operátory ortogonálních projekcí na podprostory vlastních vektorů odpovídající těmto hodnotám.
- Pokud má operátor φ reálné spektrum (tj. všechny jeho vlastní hodnoty jsou reálné), pak je samoadjungovaný.

PŘÍKLAD: Nalezení spektrální reprezentace

Najdeme spektrální reprezentaci samoadjungovaného lineárního operátoru φ v U_4, který je v ONB (e_2, e_2, e_3, e_4) reprezentován maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Jeho vlastní hodnoty a vektory již máme (snímky 19 a 20). Vše pořádně sami propočítejte, teprve výsledky zkontrolujte.

$$\lambda_1 = 1, \quad k_1 = 2, \quad L_1 = \left[\mid \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right) \mid \right]$$

$$\lambda_2 = -1, \quad k_2 = 2, \quad L_2 = \left[\mid \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right) \mid \right]$$

Vektory generující podprostory L_1, resp. L_2 v nich tvoří ortonormální báze, zapsáním jejich složek do řádků dostaneme matice C_1 a C_2. Matice ortogonálních projekcí na L_1, resp. L_2 jsou $P_1 = C_1^{T*} C_1$, $P_2 = C_2^{T*} C_2$,

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Spektrální reprezentace operátoru je $A = P_1 - P_2$. Matici P_2 jsme mohli určit také pomocí vztahu $P_1 + P_2 = E$, tj. $P_2 = E - P_1$. (Ověřte to.)

Úlohy k procvičení

Řešte následující úlohy. Výsledky číselných příkladů najdete v MII/2 na str. 663 a 664.

- Nechť φ a ψ jsou samoadjungované lineární operátory v U_n. Jsou operátory $\varphi + \psi$, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$ rovněž samoadjungované? Pokud ano, dokažte to, pokud ne, uveďte příklad.

  Výsledek: Operátor $\varphi + \psi$ je samoadjungovaný, operátory $\varphi \circ \psi$ a $\psi \circ \varphi$ jsou samoadjungované, jestliže komutují – důkaz přímo z definice, tj. výpočtem (např. pro $\varphi \circ \psi$)

$$(\varphi \circ \psi(a),\, b) = \ldots = (a,\, \psi \circ \varphi(b)).$$

- Určete spektrální reprezentaci samoadjungovaných operátorů φ, ψ a χ v U_3, které jsou v ONB (e_1, e_2, e_3) reprezentovány maticemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Operátor ortogonální projekce π_L na podprostor $L \subset U_n$ je samoadjungovaný. Řešte obecně problém jeho vlastních hodnot a vlastních vektorů.

  Návod: Uvědomte si základní vlastnosti ortogonální projekce, $\pi_L \circ \pi_L = \pi_L$, $\pi_L \circ \pi_{L_\perp} = \pi_{L_\perp} \circ \pi_L = 0_{L(U_n,U_n)}$ (nulový lineární operátor), $\pi_L + \pi_{L_\perp} = \mathrm{id}_{U_n}$. Zamyslete se také nad tím, jaké vlastní hodnoty má složený operátor, např. $\varphi \circ \psi$, mají-li operátory φ a ψ společný soubor vlastních vektorů a vlastní hodnotu λ, resp. μ.

  Výsledek: Vlastní hodnoty jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Hodnotě $\lambda_1 = 1$ přísluší podprostor vlastních vektorů (jako vždy po doplnění vektorem 0_{U_n}), který je obrazem projekce, hodnotě $\lambda_2 = 0$ ortogonální doplněk $L_\perp$, který je jádrem projekce. (Připomeňte si také operátor projekce definovaný obecně i v prostorech bez skalárního součinu.)