Lineární a multilineární algebra

Téma 5: Symetrické operátory v aplikacích

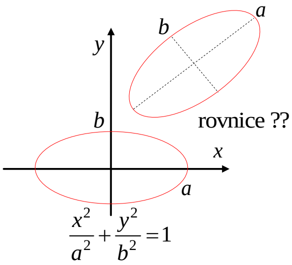
Obsah tématu

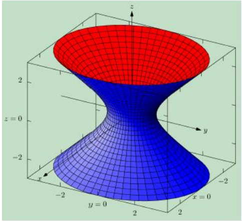
1. Bilineární a kvadratické formy.
2. Kanonický (normální) tvar kvadratické formy.
3. Kuželosečky – křivky druhého stupně v $\mathbb{R}^2$.
4. Kvadriky – plochy druhého stupně v $\mathbb{R}^3$
5. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi II/1, VUTIUM, Brno 2012 (kap. 6, str. 188-215), MII/2 (kap. 9, str. 528-538).

O co půjde v tomto tématu?

Dokážete napsat rovnici elipsy v kartézské soustavě souřadnic v rovině? Té vlevo určitě, s tou vpravo to bude horší. Přitom je to pořád táž elipsa, jen jinak umístěná. A co teprve plochy v prostoru?





Pomohou nám k tomu vlastnosti symetrických lineárních operátorů.

Bilienární a kvadratické formy

Bilineární forma je funkce dvou vektorových proměnných, která je lineární v každé z nich. Jedná se tedy o zobrazení

$$\mathcal{B}:\ V_n \times V_n \ni (x,\, y) \longrightarrow \mathcal{B}(x,\, y) \in \mathbb{R}, \quad \text{s vlastností}$$

$$\mathcal{B}(\alpha x_1 + \beta x_2,\, y) = \alpha\mathcal{B}(x_1,\, y) + \beta\mathcal{B}(x_2,\, y),$$

$$\mathcal{B}(x,\, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\mathcal{B}(x,\, y_1) + \beta\mathcal{B}(x,\, y_2),$$

pro libovolné $x,\, x_1,\, x_2,\, y,\, y_1,\, y_2 \in V_n$ a libovolné $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$, přičemž $x = (x^1,\, \dots,\, x^n)$, analogicky ostatní vektorové proměnné.

Kvadratickou formu κ přidruženou k dané bilineární formě $\mathcal{B}$ dostaneme dosazením $y = x$, tj.

$$\kappa:\ \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \kappa(x) = \mathcal{B}(x,\, x) \in \mathbb{R}.$$

Jak zapíšeme bilineární a kvadratickou formu explicitně pomocí jednotlivých složek vektorových proměnných? Pomocí Einsteinovy symboliky, resp. maticově, s koeficienty $a_{ij} \in \mathbb{R}$, takto:

$$\mathcal{B}(x, y) = a_{ij} x^i y^j = \begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}$$

$$\kappa(x) = a_{ij} x^i x^j = \begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Jak přiřadit kvadratické formě formu bilineární?

Přiřadit bilineární formě formu kvadratickou je jednoduché – stačí dosadit $x = y$. Každé bilineární formě tak přísluší právě jedna kvadratická forma. Ale co naopak? Lze ze zadání kvadratické formy usoudit, jaká byla výchozí bilineární forma? Zadaná bilineární froma obsahuje kromě členů se stejnými indexy, např. $a_{11}x^1y^1$, také „smíšené členy“, typu např. $a_{12}x^1y^2$ a $a_{21}x^2y^1$, kde koeficienty a_{12} a a_{21} jsou jednoznačně dány a obecně jsou různé. Dosadíme-li $x = y$, smíšené členy „splynou v jeden“, $(a_{12} + a_{21})x^1x^2$.

Je-li ovšem primárně zadána kvadratická forma $\kappa(x)$, pak koeficient b_{12} v členu $b_{12}x^1x^2$, připouští různé rozklady na součet $b_{12} = a_{12} + a_{21}$. Daná kvadratická forma tedy mohla vzniknout z nekonečně mnoha různých bilineárních forem. Zpětné přiřazení není jednoznačné.

Co s tím? Dohodou přiřadíme kvadratické formě jednoznačně formu bilineární tak, že koeficient b_{12} rozdělíme na součet $a_{12} + a_{21}$ symetricky – provedeme symetrizaci $a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} b_{12}$. Stejně pro ostatní smíšené členy. Maticový zápis kvadratických forem má tedy tvar

$$\kappa(x) = a_{ij} x^i x^j = \begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix},$$

kde $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, je symetrická matice nad $\mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Tím se dostáváme k vektorovým prostorům a lineárním operátorům v nich. Matici A interpretujeme tak, že reprezentuje nějaký symetrický operátor v prostoru E_n se skalárním součinem, vzhledem k němuž je báze, ve které vyjadřujeme složky vektorů $x \in E_n$ a reprezentujeme operátory, ortonormální.

Kanonický (normální) tvar kvadratické formy

S kvadratickou formou teď můžeme zacházet takto: V prostoru E_n je dán symetrický lineární operátor φ , který je v jisté ONB reprezentován (symetrickou) maticí A. Tato matice také reprezentuje kvadratickou formu κ, jejíž vyčíslení na vektoru $x \in E_n$ má tvar skalárního součinu obrazu $\varphi(x)$ vektoru x a vzoru x,

$$\kappa(x) = (\varphi(x), x) = (x)A(x)^T.$$

Vzhledem k tomu, co víme o symetrických operátorech, je nám jasné, že v E_n existuje báze z vlastních vektorů operátoru φ, v níž má reprezentující matice diagonální tvar D. V diagonále jsou vlastní hodnoty operátoru, každá tolikrát, kolik je její násobnost jakožto charakteristického kořene. (Vzpomeňme si, že všechny charakteristické kořeny symetrického operátoru jsou reálné.)

V ortonormální bázi vlastních vektorů operátoru φ má vektor $x \in E_n$ složky $x \dots (\bar{x}) = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$, kde $(x) = (\bar{x})T$, T je (ortogonální) matice přechodu od původní ONB k ONB tvořené vlastními vektory. Vztah mezi maticemi D a A je obvyklý,

$$D = TAT^{-1} = TAT^T.$$

Zápis kvadratické formy jako funkce vektorové proměnné $(\bar{x}) = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$

$$\kappa(x) = \lambda_1(\bar{x}^1)^2 + \lambda_2(\bar{x}^2)^2 + \cdots + \lambda_n(\bar{x}^n)^2,$$

kde některé vlastní hodnoty mohou být samozřejmě stejné – podle násobnosti, se nazývá kanonický, též normální tvar kvadratické formy. Je určen jednoznačně až na pořadí vlastních hodnot v diagonále matice D. Souvisí to s pořadím v označení vektorů báze (souřadnicových os).

PŘÍKLAD: Převod kvadratické formy na kanonický tvar

V E_3 je zadána kvadratická forma, kterou máme převést na kanonický tvar a určit ONB, ve které je získanou diagonální maticí reprezentována:

$$2(x^1)^2 - 4x^1x^2 + (x^2)^2 - 4x^2x^3.$$

Matice této formy je

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud jste řešili úlohy k procvičení k tématu 4 (poslední matice v druhé úloze), můžete příklad přeskočit. Vlastní hodnoty jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$. Vlastní vektory vyjdou rovnou ortogonální, jen je normujeme:

$$u_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \ \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Kanonický tvar kvadratické formy je $\kappa(\bar{x}) = (\bar{x}^1)^2 + 4(\bar{x}^2)^2 - 2(\bar{x}^3)^2$.

Signatura kvadartické formy

Víme, že charakteristické kořeny (a tedy i vlastní hodnoty) operátoru jsou invarianty, jsou nezávislé na bázi. S jejich znaménky souvisí důležitá charakteristika kvadratické formy, její signatura. Označme k počet kladných, resp. z počet záporných charakteristických kořenů, vždy včetně násobnosti. Hodností formy rozumíme počet nenulových charakteristických kořenů $h = k + z$. Signatura je dvojice (k, z). Názvosloví forem podle signatury:

signatura	název	podmínka
$(n, 0)$	pozitivně definitní	
$(0, n)$	negativně definitní	
$(h, 0)$	pozitivně semidefinitní	$0 < h < n$
$(0, h)$	negativně semidefinitní	$0 < h < n$
ostatní	indefinitní	

K čemu je signatura dobrá? Charakterizuje totiž množinu hodnot, kterých forma $\kappa(x)$ může v principu nabývat, dosazujeme-li do ní různé n-tice $(x^1, \ldots, x^n)$.

signatura	hodnoty	nulové pro
$(n, 0)$	nezáporné	jen $x = (0, \ldots, 0)$
$(0, n)$	nekladné	jen $x = (0, \ldots, 0)$
$(h, 0)$	nezáporné	$x = (0, \ldots, 0, x^{h+1}, \ldots, x^n)$
$(0, h)$	nekladné	$x = (0, \ldots, 0, x^{h+1}, \ldots, x^n)$
ostatní	všechny možné	dle konkrétní formy

Tabulka vyplývá přímo z kanonického tvaru formy, n-tice v ní uváděné představují složky odpovídajících vektorů v bázi, v níž má forma kanonický tvar. Pořadí vektorů báze, resp. číslování proměnných, se předpokládá takové, že jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ jsou označeny nenulové kořeny.

PŘÍKLADY: Kde se objevuje signatura

- Vlastnost skalárního součinu $(a, a) \geq 0$ pro libovolný vektor $a \in E_n$, s rovností právě pro $a = 0_{E_n}$, jsme nazvali pozitivní definitnost. Pro vektor $a \sim (\alpha) = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ v bázi, v níž je skalární součin reprezentován maticí G (je symetrická a pozitivně definitní), je $(\alpha)G(\alpha)^T$. Skalární součin je tedy pozitivně definitní kvadratickou formou v proměnných $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$.
- Kvadrát vzdálenosti dvou bodů $X_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ a $X_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)$ v kartézských souřadnicích v „našem“ trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$ je

$$(x_2^1 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 + (x_2^3 - x_1^3)^2 = (x_2 - x_1)E(x_2 - x_1)^T.$$

Je to pozitvně definitní kvadratická forma, její matice je jednotková. Nazývá se euklidovská metrika. Analogická je situace i v n-rozměrném případě.

- Ne každá metrika je euklidovská. V relativistickém čtyřrozměrném časoprostoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ jsou „vzdálenosti" časoprostorových událostí $U = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^0 = ct$, charakterizovány indefinitní kvadratickou formou, kvadrátem tzv. časoprostorového intervalu

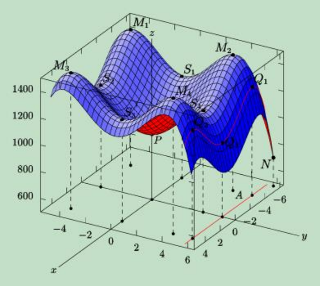
  $$\Delta s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2^1 - x_1^1)^2 - (x_2^2 - x_1^2)^2 - (x_2^3 - x_1^3)^2.$$

  Matice této kvadratické formy je diagonální a její signatura je $(1, 3)$. Představuje tzv. Lorentzovu metriku

  Euklidovská metrika v $\mathbb{R}^3$ Lorentzova metrika v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

  $$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Kvadratické formy a jejich signatura mají význam také v analýze, třeba při určování typu extrémů funkcí více proměnných. Jedna taková je na obrázku. Tzv. stacionární body, tj. lokální maxima, minima a další typy (sedlové body) jsou určeny podmínkou $f_x(x,\, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ a současně $f_y(x,\, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$.



$$f(x,y) = 1000 - (x^4 + y^4) + 32(x^2 + y^2)$$

$$f_x = -4x(x^2 - 16), \quad f_y = -4y(y^2 - 16)$$

stacionární body ($f_x = 0$, $f_y = 0$): $P = (0,0)$

$$M_{1,2,3,4} = (\pm 4, \pm 4), \quad S_{1,2,3,4} = (\pm 4, 0), (0, \pm 4)$$

$$f_{xx} = -12x^2 + 64, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad f_{yy} = -12y^2 + 64$$

$$\kappa(\xi, \eta) = f_{xx}\xi^2 + 2 f_{xy}\xi\eta + f_{yy}\eta^2$$

O typu stacionárního bodu (x_0, y_0) může (ale nemusí) rozhodnout kvadratická forma utvořená z druhých derivací

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2},\ f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y},\ f_{yy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2},$$

$$\kappa(\xi, \eta)|_{(x_0, y_0)} = f_{xx}(x_0, y_0)\,\xi^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\,\xi\eta + f_{yy}(x_0, y_0)\,\eta^2$$

VĚTA: Klasifikace stacionárních bodů

Nechť $f(x, y)$ má na otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace 1. a 2. řádu a nechť $(x_0, y_0) \in D$ je její stacionární bod ($f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$). Pak platí: Je-li v bodě (x_0, y_0) kvadratická forma $\kappa(\xi, \eta)$

- pozitivně (negativně) definitní, jedná se o lokální minimum (maximum),
- indefinitní, jedná se o sedlový bod (není to lokální extrém).
- Jedná-li se o lokální maximum (minimum), je forma κ v tomto bodě negativně (pozitivně) definitní, nebo semidefinitní, nebo je nulová.

Pomocí právě uvedené věty se pokusíme o klasifikaci stacionárních bodů funkce $f(x, y) = 1000 - (x^4 + y^4) + 32(x^2 + y^2)$, jejíž graf je na obrázku. Zapíšeme matice kvadratické formy κ ve stacionárních bodech (vyčíslete druhé derivace funkce dosazením do obecných vzorců):

$$\text{bod } P = (0, 0): \quad \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}, \quad \text{lokální minimum}$$

$$\text{body } M_{1,2,3,4} = (\pm 4, \pm 4): \quad \begin{pmatrix} -128 & 0 \\ 0 & -128 \end{pmatrix}, \quad \text{lokální maxima}$$

$$\text{body } S_{1,3} = (\pm 4, 0): \quad \begin{pmatrix} -128 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}, \quad \text{sedlové body}$$

$$\text{body } S_{2,4} = (0, \pm 4): \quad \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -128 \end{pmatrix} \quad \text{sedlové body}$$

Kuželosečky – křivky druhého stupně v $\mathbb{R}^2$

Hned v úvodu jste si mohli připomenout rovnici kuželosečky (konkrétně elipsy) se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic a polosami *a* a *b*. Jistě byste si vzpomněli i na rovnici hyperboly či paraboly. A jsou tu i další možnosti (průsečnicí roviny s kuželovou plochou může být třeba jen bod, nebo dvojice přímek – zkuste se nad tím zamyslet). V případě obecného umístění kuželosečky vzhledem k soustavě souřadnic však z její rovnice na první pohled nepoznáme, o jakou kuželosečku se jedná, a zda se vůbec jedná o kuželosečku.

A opět jsou tu symetrické lineární operátory a jejich vlastní hodnoty a vektory, aby nám proces poznávání kuželoseček usnadnily.

DEFINICE: Kuželosečka

Kuželosečka je množina právě těch bodů v rovině $\mathbb{R}^2$, jejichž kartézské souřadnice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (v soustavě souřadnic $\langle O; x, y\rangle \sim \langle O; e_1, e_2\rangle$) splňují rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0,$$

kde alespoň jedno z čísel $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq 2$, je nenulové, a b_i, $c \in \mathbb{R}$.

Kuželosečky se také nazývají křivky druhého stupně, neboť jejich rovnice obsahují kvadráty, resp. součiny souřadnic. Všimněme si, že levá strana rovnice kuželosečky je součtem kvadratické formy $\kappa(x, y)$, lineární formy $\ell(x, y)$ a absolutního členu c. (Místo předchozího označení proměnných (x^1, x^2) jako složek vektoru jsme nyní použili značení obvyklé v geometrii, $(x^1, x^2) \sim (x, y)$.)

Explicitní vyjádření kvadratické formy κ a lineární formy ℓ v rovnici kuželosečky je

$$\kappa(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad \ell(x, y) = b_1x + b_2y.$$

Matice kvadratické formy $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 2$, je symetrická, proto, jak víme, lze najít takovou kartézskou soustavu souřadnic $\langle O; \bar{x}, \bar{y}\rangle \sim \langle O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\rangle$ (stejný počátek, nové souřadnicové osy, resp. vektory ortonormální báze), v níž má kvadratická forma kanonický tvar. Matici přechodu od báze (e_1, e_2) k bázi $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ označíme T. Je to ortogonální matice, tj. $T^{-1} = T^T$. Její řádky jsou tvořeny složkami vlastních vektorů operátoru, z nichž jsme sestavili ONB. Platí $D = TAT^T$, kde D je diagonální matice. V diagonále má vlastní hodnoty (symetrického) lineárního operátoru φ, který je v bázi (e_1, e_2) reprezentován zmíněnou maticí A.

Přechodem mezi bázemi $(e_1, e_2) \to (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ došlo pochopitelně také k transformaci vyjádření lineární formy ℓ,

$$(x \ \ y)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \longrightarrow (\bar{x} \ \ \bar{y})\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix}.$$

Platí $(x \ \ y) = (\bar{x} \ \ \bar{y})T$, tj.

$$(x \ \ y)B = (\bar{x} \ \ \bar{y})TB \implies \bar{B} = TB.$$

Vyjádření rovnice kuželosečky v nové bázi má tzv. seminormální tvar

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \bar{b}_1\bar{x} + \bar{b}_2\bar{y} + c = 0.$$

Další transformace spočívá ve vhodném posunutí počátku $O \to \bar{O}$ při zachování báze $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Ale to už ukážeme na příkladu.

PŘÍKLAD: Co je to za kuželosečku?

Na základě kartézské rovnice rozhodneme, o jakou kuželosečku jde:

$$6xy + 8y^2 + 6x + 4y - 13 = 0.$$

Nejprve si uvědomíme, jak vypadá kvadratická forma a její matice A, lineární forma a její matice B, a absolutní člen:

$$\kappa(x, y) = 6xy + 8y^2, \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\ell(x, y) = 6x + 4y, \;\; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = -13.$$

Výpočet vlastních hodnot operátoru φ, jejž reprezentuje matice A:

$$\det(A - \lambda E)^T = \lambda^2 - 8\lambda - 9, \;\; \lambda_1 = 9, \;\; \lambda_2 = -1.$$

(Na pořadí číslování vlastních hodnot nezáleží.) Vidíme, že kuželosečka by mohla být hyperbola. Rozhodně to však nebude elipsa ani parabola.

Výpočet vlastních vektorů:

$$(A-\lambda_1 E)=\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \bar{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$

$$(A-\lambda_2 E)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \bar{e}_1=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right),$$

Vektory vyšly ortogonální (musely tak vyjít – víte proč?), jenom jsme je normovali. Jejich složky tvoří řádky matice přechodu T.

Výpočet matice $\bar{B}$:

$$\bar{B}=TB=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix} \frac{18}{\sqrt{10}} \\ -\frac{14}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Rovnice kuželosečky v soustavě souřadnic $\langle O;\, \bar{x},\, \bar{y}\rangle \sim \langle O;\, \bar{e}_1,\, \bar{e}_2\rangle$:

$$9\bar{x}^2-\bar{y}^2+\frac{18}{\sqrt{10}}\bar{x}-\frac{14}{\sqrt{10}}\bar{y}-13=0.$$

Určení polohy středu kuželosečky:

Ze střední školy si pamatujete rovnici elisy, nebo hyperboly se středem v bodě $S = (m, n)$,

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} \pm \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Na takový tvar převedeme naši kuželosečku tzv. doplněním na úplný čtverec – to taky umíte ze střední školy:

$$9\left(\bar{x}^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}\bar{x} + \frac{1}{10}\right) - \left(\bar{y}^2 + \frac{14}{\sqrt{10}}\bar{y} + \frac{49}{10}\right) - 13 = \frac{9}{10} - \frac{49}{10},$$

$$\left(\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{1}{9}\left(\bar{y} + \frac{7}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1, \quad a = 1, \quad b = 3, \quad S = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{7}{\sqrt{10}}\right).$$

Kuželosečka je hyperbola.

Ale pozor! Souřadnice jejího středu, které jsme určili doplněním na čverec, se vztahují k soustavě souřadnic $\langle O;\, \bar{x},\, \bar{y}\rangle \sim \langle O;\, \bar{e}_1,\, \bar{e}_2\rangle$. Do původní soustavy $\langle O;\, x,\, y\rangle \sim \langle O;\, e_1,\, e_2\rangle$ je musíme přepočítat:

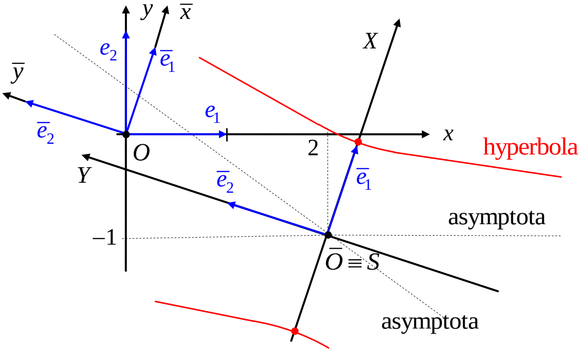
$$S = (\bar{m},\, \bar{n}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\, -\frac{7}{\sqrt{10}}\right), \quad (m \quad n) = (\bar{m} \quad \bar{n})T$$

$$(m \quad n) = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} \quad -\frac{7}{\sqrt{10}}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = (2 \quad -1).$$

Střed hyperboly má vzhledem k původní soustavě $\langle O;\, x,\, y\rangle \sim \langle O;\, e_1,\, e_2\rangle$ souřadnice $(2,\, -1)$. Umístíme-li do středu hyperboly nový počátek soustavy souřadnic $\bar{O}$, a osy označíme X, resp. Y, přičemž $X \parallel \bar{x}$, $Y \parallel \bar{y}$, bude mít hyperbola v soustavě $\langle \bar{O};\ \rangle$ rovnici

$$X^2 - \left(\frac{Y}{3}\right)^2 = 1.$$

Nakonec ještě doplníme schematický obrázek.



rovnice v $\langle O;\ x,\ y\rangle$	rovnice v $\langle \bar{O};\ X,\ Y\rangle$
$xy + 8y^2 + 6x + 4y - 13 = 0$	$X^2 - \left(\frac{Y}{3}\right)^2 = 1$

PŘÍKLAD: Taky kuželosečky

Rovnici kuželosečky vyhovují třeba i takové případy, jako jsou tyto:

- Množina bodů, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $2X^2 + 8Y^2 = 0$ (což je podle definice rovnice kuželosečky) obsahuje na první pohled jediný bod, a to počátek soustavy souřadnic $\langle \bar{O};\, X,\, Y \rangle$. V jiné soustavě souřadnic, $\langle O;\, x,\, y \rangle$ má tato kuželosečka rovnici $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 10\sqrt{2}x + 10\sqrt{2}y + 50 = 0$. Z toho není na první pohled poznat nic.
- Rovnice $x^2 + 5y^2 + 1 = 0$ také vyhovuje definici kuželosečky. Množina bodů, které ji splňují, je však prázdná.
- Z rovnice $x^2 - 9y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ také není hned nic moc poznat, doplněním na čtverec však dostaneme $(x-2)^2 - (3y-1)^2 = 0$, což představuje rovnice dvou různoběžných přímek $y = \frac{1}{3}[\pm(x-2)+1]$ s průsečíkem v bodě $\left(2,\, \frac{1}{3}\right)$.

Úplnou klasifikaci kuželoseček najdete v MII/1 na str. 204-205.

Kvadriky – plochy druhého stupně v $\mathbb{R}^3$

DEFINICE: Kvadrika

Kvadrika je množina právě těch bodů v prostoru $\mathbb{R}^3$, jejichž kartézské souřadnice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (v soustavě souřadnic $\langle O; x, y, z\rangle \sim \langle O; e_1, e_2, e_3\rangle$) splňují rovnici

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+b_1x+b_2y+b_3z+c=0,$$

kde alespoň jedno z čísel $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i, j \le 3$, je nenulové, a b_i, $c \in \mathbb{R}$.

Kvadriky se také nazývají plochy druhého stupně. Levá strana rovnice kvadriky je součtem kvadratické formy $\kappa(x, y, z)$, lineární formy $\ell(x, y, z)$ a absolutního členu c. (I zde jsme použili označení (x, y, z) místo (x^1, x^2, x^3).)

Explicitní vyjádření kvadratické formy κ a lineární formy ℓ v rovnici kvadriky je

$$\kappa(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2,$$

$$\ell(x, y, z) = b_1x + b_2y + b_3z.$$

Matice kvadratické formy $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$, je symetrická, takže i u kvadriky lze najít takovou kartézskou soustavu souřadnic $\langle O; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\rangle \sim \langle O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\rangle$ (stejný počátek, nové souřadnicové osy, resp. vektory ortonormální báze), v níž má kvadratická forma kanonický tvar. Ortogonání matici přechodu od báze (e_1, e_2, e_3) k bázi $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ označíme jako vždy T, platí $T^{-1} = T^T$. Zopakujme, že její řádky jsou tvořeny složkami vlastních vektorů operátoru, z nichž jsme sestavili ONB. Platí $D = TAT^T$, kde D je diagonální matice. V diagonále má vlastní hodnoty (symetrického) lineárního operátoru φ, který je v bázi (e_1, e_2, e_3) reprezentován maticí A.

Transformační vztah pro lineární formu ℓ při přechodu mezi bázemi $(e_1,\, e_2,\, e_3) \to (\bar{e}_1,\, \bar{e}_2,\, \bar{e}_3)$ je opět analogický jako u kuželoseček:

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \longrightarrow (\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z})\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix}.$$

Platí $(x \;\; y \;\; z) = (\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z})T$, tj.

$$(x \;\; y \;\; z)B = (\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; \bar{z})TB \implies \bar{B} = TB.$$

Kvadrika má v nové bázi seminormální tvar

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 + \lambda_3\bar{z}^2 + \bar{b}_1\bar{x} + \bar{b}_2\bar{y} + \bar{b}_3\bar{z} + c = 0.$$

Posunutím počátku soustavy souřadnic $O \to \bar{O}$ při zachování báze $(\bar{e}_1,\, \bar{e}_2,\, \bar{e}_3)$ přejdeme opět k nejjednoduššímu možnému tvaru rovnice kvadriky. Příklad následuje.

PŘÍKLAD: Poznejte kvadriku

Rozpoznáme kvadriku, která má v kartézské soustavě souřadnic $\langle O;\, x,\, y,\, z\rangle \sim \langle O;\, e_1,\, e_2,\, e_3\rangle$ rovnici

$$x^2 + 4xy - 10xz - 2y^2 + 4yz + z^2 + 2x + 4y - 10z - 1 = 0, \quad \text{tj.}$$

$$(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} - 1 = 0.$$

Počítejte podrobně na papír:

- vlastní hodnoty: $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -6,\ \lambda_3 = 0$
- vlastní vektory: $\bar{e}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\bar{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\, -\frac{1}{\sqrt{3}},\, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\bar{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\, \frac{2}{\sqrt{6}},\, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

- seminormální tvar:

$$6\bar{x}^2 - 6\bar{y}^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}x - \frac{12}{\sqrt{3}}y - 1 = 0$$

- doplnění na čtverec:

$$6\left(\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6\left(\bar{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 = 0$$

- normální tvar (po doplnění na čtverec):

$$3X^2 - 3Y^2 - 1 = 0, \qquad \text{hyperbolický válec}$$

- souřadnice nového počátku $\bar{O}$ soustavy souřadnic $\langle \bar{O};\, X,\, Y,\, Z\rangle \sim \langle \bar{O};\, \bar{e}_1,\, \bar{e}_2,\, \bar{e}_3\rangle$, v níž má kvadrika normální tvar, vzhledem k soustavě $\langle O;\, x,\, y,\, z\rangle \sim \langle O;\, e_1,\, e_2,\, e_3\rangle$:

$$\bar{O} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

Úlohy k procvičení

Určete signaturu a hodnost následujících kvadratických forem převodem na kanonický tvar.

- $\kappa(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$
- $\kappa(x, y, z) = 6x^2 - 4xy - 4xz + 7y^2 + 5z^2$
- $\kappa(x, y, z) = x^2 + 2xy + 6xz + 5y^2 + 2yz + z^2$
- $\kappa(x^1, x^2, x^3, x^4) = 2x^1x^2 + 2x^1x^3 - 2x^1x^4 - 2x^2x^3 + 2x^2x^4 + 2x^3x^4$

Výsledky:

- $(1, 0)$, $h = 1$, forma je pozitivně semidefinitní
- $(3, 0)$, $h = 3$, forma je pozitivně definitní
- $(2, 1)$, $h = 3$, forma je indefinitní
- $(3, 1)$, $h = 4$, forma je indefinitní

Převeďte následující kuželosečky a kvadriky na normální tvar a klasifikujte je podle názvosloví v MII/1, str. 200-205.

- $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$ v $\mathbb{R}^2$
- $6x^2 - 4xy - 4xz + 7y^2 + 5z^2 - 36 = 0$ v $\mathbb{R}^3$
- $x^2 + 2xy + 6xz + 5y^2 + 2yz + z^2 - 2x + 6y + 2z = 0$ v $\mathbb{R}^3$
- $4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y - 2 = 0$ v $\mathbb{R}^2$

Výsledky – rovnice v soustavě souřadnic
$\langle \bar{O};\, X,\, Y \rangle \sim \langle \bar{O};\, \bar{e}_1,\, \bar{e}_2 \rangle$ v $\mathbb{R}^2$ a $\langle \bar{O};\, X,\, Y,\, Z \rangle \sim \langle \bar{O};\, \bar{e}_1,\, \bar{e}_2,\, \bar{e}_3 \rangle$ v $\mathbb{R}^3$:

- parabola $X^2 + 2\sqrt{2}\,Y = 0$
- elipsoid $3X^2 + 2Y^2 + Z^2 - 12 = 0$
- jednodílný hyperboloid $6X^2 + 3Y^2 - 2Z^2 - 1 = 0$
- dvojice rovnoběžných přímek $20X^2 - 9 = 0$