Lineární a multilineární algebra

Téma 6: Všechno možné o projekcích na podprostory

Motto: Stačí (pořádně) umět přechody mezi bázemi.

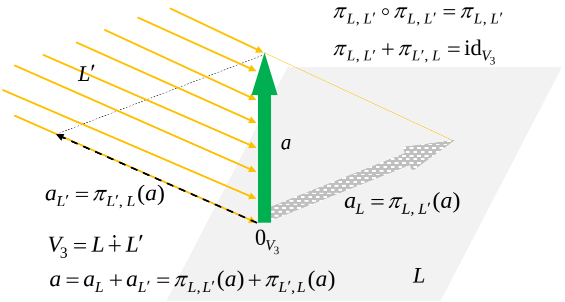
Obsah tématu

1. Něco na úvod.
2. Projekce na podprostor.
3. Matice projekce na podprostor v dané bázi.
4. Projekce na podprostor prakticky.
5. Ortogonální projekce na podprostor.
6. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi II/1, VUTIUM, Brno 2012 (kap. 4, str. 68-69, kap. 6, str. 149-159).

Něco na úvod

Budeme se zabývat projekcí obecně, ve vektorovém prostoru V_n (i bez skalárního součinu). Geometrická představa:



Na osamělý strom svítí sluneční paprsky. Na zemi je jeho stín (rovnoběžný průmět) stromu. Průmětem stínu je zase týž stín. Vícenásobné promítání nedává nic nového.

Obrázek názorně ukázal podstatu rovnoběžného promítání. Pojem projekce zobecníme na vektorové prostory libovolné konečné dimenze.

Při výkladu budou kladeny otázky. Zkuste na ně nejprve sami odpovědět a teprve potom si správnost odpovědi ověřte. Vycházíme ze základních pojmů, které nebudeme opakovat. Ujistěte se, že jim rozumíte.

- vektorový prostor (axiomy, počítání s vektory),
- lineární závislost a nezávislost vektorů, báze, dimenze,
- vektorový podprostor a generující vektory, lineární obal,
- lineární operátor ve vektorovém prostoru a jeho reprezentace maticí v dané bázi, výpočet složek obrazu vektoru ze složek vzoru,
- předchody mezi bázemi (transformační vztahy pro složky reprezentující vektory a operátory v různých bázích, maticový zápis),
- problém vlastních vektorů a vlastních hodnot operátoru.

OTÁZKA: Umíte dokázat, že složky vektoru $a \in V_n$ v dané bázi jsou určeny jednoznačně?

ODPOVĚĎ: Sporem: předpokládejme, že složky jsou dvojí, tj. pro vektor $a \in V_n$ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$ je

$$\alpha^1 e_1 + \cdots + \alpha^n e_n = \beta^1 e_1 + \cdots + \beta^n e_n,$$

$$(\alpha^1 - \beta^1)e_1 + \cdots + (\alpha^n - \beta^n)e_n = 0_{V_n}.$$

Dostali jsme nulovou lineární kombinaci lineárně nezávislých vektorů, všechny koeficienty proto musí být nulové, tj. $\alpha^i = \beta^i$, $1 \leq i \leq n$.

POZNÁMKA: Zapomněli jste Einsteinovu symboliku? Tady je – zdvojený index „křížem“ je sčítací:

$$A_i B^i \ \text{ znamená } \ \sum_{i=1}^{n} A_i B^i = A_1 B^1 + \cdots + A_n B^n$$

$$C_i^j = A_i^k B_k^j \ \text{ znamená } \ C_i^j = \sum_{k=1}^{n} A_i^k B_k^j = A_i^1 B_1^j + \cdots + A_i^n B_n^j.$$

Projekce na podprostor

OTÁZKY: Několik „opakovacích" otázek (odpovídejte, zdůvodňujte, dokazujte na papíře, teprve pak postupte na další stranu k odpovědím):

- Co je to doplněk vektorového podprostoru $L \subset V_n$ ve V_n?
- Kolik existuje doplňků k danému vektorovému podprostoru $L \subset V_n$?
- V L je zadána báze $(u_1, \ldots, u_k)$, $1 \leq k < n$. Jakými vektory generujeme různé doplňky?
- Lze libovolný vektor $a \in V_n$ rozložit na součet $a = a_L + a_{L'}$, kde L' je pevně zvolený doplněk k L ve V_n? Jak?
- Je rozklad $a = a_L + a_{L'}$ jednoznačný?
- Je $\pi_{L,L'} : \; V_n \ni a \to \pi_{L,L'}(a) = a_L \in V_n$ lin. operátor ve V_n?
- Je $\pi_{L',L} : \; V_n \ni a \to \pi_{L',L}(a) = a_{L'} \in V_n$ lin. operátor ve V_n?
- Určete: $\pi_{L,L'} \circ \pi_{L,L'}$, $\pi_{L',L} \circ \pi_{L',L}$, $\pi_{L,L'} \circ \pi_{L',L}$, $\pi_{L,L'} + \pi_{L',L}$.

ODPOVĚDI: Odpovídáme v pořadí, jak byly kladeny otázky.

- Doplněk vektorového podprostoru $L \subset V_n$ je vektorový podprostor $L' \subset V_n$ s vlastnostmi $L' + L = V_n$, $L' \cap L = \{0_{V_n}\}$, tj. $L \dot{+} L' = V_n$.
- Nekonečně mnoho.
- Zvolíme vektory $u_{k+1}, \ldots, u_n$ tak, aby $(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ byla báze ve V_n. Možností takové volby je nekonečně mnoho a každá generuje doplněk $L' = [|u_{k+1}, \ldots, u_n|]$. (Různá doplnění mohou generovat týž doplněk.)
- Zvolme bázi jako v předchozí odpovědi. Pak pro $a \in V_n$ je $a = \alpha^1 u_1 + \cdots + \alpha^k u_k + \alpha^{k+1} u_{k+1} + \cdots + \alpha^n u_n$, složky $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ jsou určeny jednoznačně (viz výše). Platí $a_L = \alpha^1 u_1 + \cdots + \alpha^k u_k$, $a_{L'} = \alpha^{k+1} u_{k+1} + \cdots + \alpha^n u_n$. Vektory a_L a $a_{L'}$ jsou jednoznačné.
- $\pi_{L,L'}$ i $\pi_{L',L}$ jsou lineární operátory. Pro $a, b \in V_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je v bázi z předchozích odpovědí, tj. $(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$,

$$\pi_{L,L'}(\alpha a + \beta b) = (\alpha\alpha^1 + \beta\beta^1)u_1 + \cdots + (\alpha\alpha^k + \beta\beta^k)u_k =$$

$$= \alpha(\alpha^1 u_1 + \cdots + \alpha^k u_k) + \beta(\beta^1 u_1 + \cdots + \beta^k u_k) = \alpha a_L + \beta b_L.$$

ODPOVĚDI: Pokračování.

- Postupně jednotlivé vztahy odvodíme. Zvolme libovolný vektor $a \in V_n$. Platí $a = a_L + a_{L'}$. Víme, že tento rozklad je jednoznačný. Dále je (z definice operátorů $\pi_{L,L'}$ a $\pi_{L',L}$)

$$\pi_{L,L'}(a) = a_L, \ \ \pi_{L,L'}(\pi_{L,L'}(a)) = \pi_{L,L'}(a_L) = a_L,$$

$$\pi_{L,L'}(a) = a_L, \ \ \pi_{L',L}(\pi_{L,L'}(a)) = \pi_{L'}(a_L) = 0_{V_n},$$

$$(\pi_{L,L'} + \pi_{L',L})(a) = \pi_{L,L'}(a) + \pi_{L',L}(a) = a_L + a_{L'}.$$

Platí tedy

$$\pi_{L,L'} \circ \pi_{L,L'} = \pi_{L,L'}, \ \text{ a podobně } \ \pi_{L',L} \circ \pi_{L',L} = \pi_{L',L},$$

$$\pi_{L',L} \circ \pi_{L,L'} = \pi_{L,L'} \circ \pi_{L',L} = 0_{L(V_n,V_n)} \ \text{ nulový operátor},$$

$$\pi_{L',L} + \pi_{L,L'} = \pi_{L,L'} + \pi_{L',L} = \mathrm{id}_{V_n} \ \text{ identita}.$$

OTÁZKA: Uvědomili jste si, že směr světelných paprsků v úvodním obrázku znamená volbu doplňku k „projekční rovině“ L?

ZÁVĚR: Zásadní vlastnost operátoru $\pi_{L,L'}$

Libovolný počet „opakování" lineárního operátoru $\pi_{L,L'}$, tj. jeho kompozic sama se sebou, je zase jenom operátor $\pi_{L,L'}$. Obdobně to platí pro operátor $\pi_{L',L}$.

DEFINICE: Projekce na podprostor

Lineární operátor $\pi_{L,L'}$ se nazývá projekce na podprostor L (při pevně zvoleném doplňku L'). Vektor $\pi_{L,L'}(a) = a_L$ je průmět vektoru $a \in V_n$ na podprostor L.

OTÁZKA: Problém vlastních hodnot vektorů projekce na podprostor

Dokážete najít vlastní hodnoty a vlastní vektory operátoru $\pi_{L,L'}$? Odpovězte a nezapomeňte zdůvodnit. Nejprve se snažte samostatně, teprve potom předjděte na další stranu, kde najdete odpověď.

ODPOVĚĎ: Na základě geometrické představy jste jistě hned usoudili, že vlastním vektorem operátoru $\pi_{L,L'}$ je každý vektor ležící v L, protože pro něj je $b = b_L$, tj. $\pi_{L,L'}(b) = b$. Odpovídající vlastní hodnota je $\lambda = 1$. Pro vektory $b' \in L'$ zase platí $b' = b'_{L'}$, proto $\pi_{L,L'}(b') = 0_{V_n}$. Takže i všechny vektory ležící v L' jsou vlastní, odpovídající vlastní hodnota je $\lambda' = 0$. Ale našli jsme všechny vlastní vektory? Nebo jsou ještě jiné?

Předpokládejme, že $b \in V_n$ je vlastní vektor operátoru $\pi_{L,L'}$ a odpovídající vlastní hodnota je λ. Pak platí

$$\pi_{L,L'}(b) = \lambda b, \text{ ale současně je } \pi_{L,L'}(b) = b_L \implies$$

$$\lambda b = b_L, \text{ tj. } \lambda(b_L + b_{L'}) = b_L \implies (\lambda - 1)b_L + \lambda b_{L'} = 0_{V_n}.$$

Trochu zvláštní rovnice, ne? Pokud by byly vektory b_L i $b_{L'}$ nenulové, byly by nezávislé, takže by muselo platit $\lambda - 1 = 0$ a zároveň $\lambda = 0$. To ale nejde. Jeden z vektorů b_L, $b_{L'}$ tedy musí být nulový. Je-li to vektor $b_{L'}$, je $\lambda = 1$ a $b = b_L \in L$, je-li nulový vektor b_L, je $\lambda = 0$ a $b = b_{L'} \in L'$. Jiné možnosti nejsou. (Uvědomujete si, že tato úvaha obsahuje i fakt, že vlastní vektor nesmí být podle definice nulový?)

ÚKOLY: Číselné úlohy na procvičení

- $L \subset V_3$, $L = [|(2, -1, 0), (1, -3, -2)|]$. Určete $\dim L$ a dimenzi libovolného doplňku. Generujte alespoň dva různé doplňky. Je vektorový podprostor $L'_1 = [|0, 5, 4|]$ doplňkem L ve V_3? Je podprostor $L'_2 = [|(3, -1, 2), (-6, 2, -4)|]$ doplňkem L ve V_3?
- Ve V_4 je v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) zadán vektorový podprostor $L = [|(1, -1, 0, 0), (1, 1, 0, 0)|]$. Zvolte libovolný doplněk L' a rozložte vektor $a = (1, 1, 1, 1)$ do L a L', tj. určete složky vektorů a_L a $a_{L'}$ v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4).
- Podprostor $L \subset V_n$ je generován k nezávislými vektory $u_1, \dots, u_k$. Jejich složky v bázi $(e_1, \dots, e_n)$ ve V_n jsou $u_s = (\gamma_s^1, \dots, \gamma_s^n)$. Formulujte podmínku, kterou musí splňovat složky vektorů $u_{k+1}, \dots, u_n$, aby $L' = [|u_{k+1}, \dots, u_n|]$ byl doplňkem L ve V_n.

VÝSLEDKY ÚKOLŮ: Příklady možné volby doplňků

- $\dim L = 2$. Dimenze každého doplňku je 1. Příklady doplňků: $L'_1 = [|(1, 0, 0)|]$, $L'_2 = [|(0, 0, 1)|]$, obecně $L = [|(\alpha, \beta, \gamma)|]$, tak, aby matice T tvořená po řádcích složkami generátorů podprostorů L a L' byla regulární ($\det T \neq 0$). Podprostor $L'_1 = [|(0, 5, 4)|]$ není doplňkem, neboť vektor $(0, 5, 4) \in L$. Podprostor L'_2 je doplňkem L (pozn.: jeho generátory jsou závislé).
- Nejjednodušší volba: $L' = [|(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)|]$. Pro ni jsou matice T přechodu od báze (e_1, e_2, e_3, e_4) k bázi tvořené generátory prostorů L a L' a inverzní matice T^{-1}

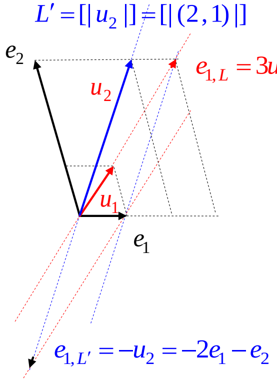
$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Složky vektorů a_L a $a_{L'} = a - a_L$ v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) jsou $a_L = (0, 1, 1, 1)$, $a_{L'} = (1, 0, 0, 0)$.
- Determinant matice T tvořené složkami vektorů $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ musí být nenulový. Jinak jsou složky vektorů $u_{k+1}, \dots, u_n$ libovolné.

Matice projekce na podprostor v dané bázi

PŘÍKLAD: Rozklad vektoru a na průměty a_L, $a_{L'}$ graficky a algebraicky

Srovnání provedeme ve V_2. Ve výchozí bázi $(e_1,\, e_2)$ je $L = [|u_1|]$, $u_1 = \left(1,\, \frac{1}{3}\right)$, $L' = [|u_2|]$, $u_2 = (2,\, 1)$. Pořádně propočítáme společně.



$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = (3 \quad -1) \text{ v bázi } (u_1, u_2)$$

$$e_1 = 3u_1 + (-1)u_2$$

$$e_{1,L} = 3u_1 = (3,1) \text{ v bázi } (e_1, e_2)$$

$$e_{1,L'} = -u_2 = (-2,-1) \text{ v bázi } (e_1, e_2)$$

Na jednoduchém příkladu, který lze řešit i graficky (horší by to bylo s výpočtem metodami elementární geometrie), jsme viděli, že rozložit vektor do podprostoru L a jeho doplňku L' ve V_2, tj. aplikovat operátor projekce $\pi_{L,L'}$, není nic jiného než provést přechod mezi bázemi. Konkrétně šlo o přechod od původní báze (e_1, e_2) k bázi (u_1, u_2), tvořené generátory podprostoru $L = [|u_1|]$ a jeho doplňku $L' = [|u_2|]$. Ve vícerozměrných prostorech je podstata rozkladu stejná. Tady už ovšem nemůžeme nic kreslit, grafická metoda je nepoužitelná. Zůstává metoda lineární algebry, ale ta bezpečně funguje pro libovolnou dimenzi.

Použijeme znalost problematiky přechodu mezi bázemi, abychom sestrojili přímo matici $P_{L,L'}$ reprezentující operátor projekce $\pi_{L,L'}$ v „základní" bázi $(e_1, \ldots, e_n)$, v níž jsme zadali generátory podprostorů L a L'. Když budeme mít matici operátoru, můžeme už snadno promítnout libovolný vektor $a \in V_n$, jehož složky v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ zapíšeme do řádkové matice $(\alpha) = (\alpha^1 \;\; \alpha^2 \;\; \ldots \;\; \alpha^n)$. Složky průmětu a_L budou dány řádkovou maticí $(\alpha_L) = (\alpha)\, P_{L,L'}$.

Dejme se do toho a postupujme v našich úvahách po krocích.

- Nechť $L \subset V_n$ je vektorový podprostor ve V_n dimenze $1 < k < n$ a $L' \subset V_n$ zvolený doplněk. Jeho dimenze je $n - k$.
- Nechť dále $(u_1, \ldots, u_k)$ je libovolná báze v L a $(u_{k+1}, \ldots, u_n)$ libovolná báze v L'.
- Kompletní soubor $(u_1, \ldots, u_n)$ je bází v prostoru V_n.
- Složky vektorů této báze vyjádřené v původní bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ a naskládané do řádků vytvoří matici přechodu $T = (\tau_i^j)$, $1 \leq i, j \leq n$, od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi $(u_1, \ldots, u_n)$.
- $S = (\sigma_i^j)$, $1 \leq i, j \leq n$, je pak matice k T inverzní a je to matice přechodu od báze $(u_1, \ldots, u_n)$ k bázi $(e_1, \ldots, e_n)$.
- Transformační vztahy mezi bázemi (vyjádření vektorů jedné báze jako lineárních kombinací druhé a naopak) jsou

$$u_i = \tau_i^j \, e_j, \quad e_i = \sigma_i^j \, u_j \quad \text{(Einsteinova symbolika).}$$

ÚKOL: Rozepište transformační rovnice třeba pro $n = 6$, u_5 a e_3.

VÝSLEDEK ÚKOLU: Rozepsali jste? Ne? Tak to udělejte.

$$u_5 = \tau_5^1\, e_1 + \tau_5^2\, e_2 + \tau_5^3\, e_3 + \tau_5^4\, e_4 + \tau_5^5\, e_5 + \tau_5^6\, e_6$$

$$e_3 = \sigma_3^1\, u_1 + \sigma_3^2\, u_2 + \sigma_3^3\, u_3 + \sigma_3^4\, u_4 + \sigma_3^5\, u_5 + \sigma_3^6\, u_6$$

Zelený index je tzv. „volný" (na pravé i levé straně je stejný), červený index je sčítací probíhá hodnoty od jedné do n.

Pokračujeme v obecných úvahách.

- Zapíšeme vektor e_i tak, aby byl přímo vidět jeho rozklad do L a L'. Použijeme značení pomocí sum (důvod uvidíme, až to uděláme).

$$e_i = \sigma_i^j\, u_j = \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j\, u_j + \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_i^j\, u_j,$$

$$e_i = (\sigma_i^1\, u_1 + \cdots + \sigma_i^k\, u_k) + (\sigma_i^{k+1}\, u_{k+1} + \cdots + \sigma_i^n\, u_n).$$

OTÁZKA: Jaký je smysl červeného a modrého odlišení ve vyjádření vektoru e_i? (Tento rozklad je také důvodem zápisu pomocí sum.)

ODPOVĚĎ: Správně. To červené je $e_{i,L}$ (průmět vektoru e_i do podprostoru L) a modré je $e_{i,L'}$ (průmět vektoru e_i do doplňku L').

Další kroky směřující k nalezení matice operátoru $\pi_{L,L'}$.

- Vzpomínáte si na důležitou větu, že lineární zobrazení (a tedy i lineární operátor) je jednoznačně určeno obrazy kterékoli báze?
- Obrazy vektorů báze $(e_1, \ldots, e_n)$ máme! Jsou to vektory $e_{i,L}$, tj. červené části jejich rozkladu do báze $(u_1, \ldots, u_n)$. Konkrétně

  $$e_{i,L} = \pi_{L,L'}(e_i) = (\sigma_i^1 u_1 + \cdots + \sigma_i^k u_k) = \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j u_j.$$

  Vidíme, že na tomto vyjádření se podílí všechny řádky matice S, ale jen jejích prvních k sloupců.
- Teď ještě musíme vektory $e_{i,L}$ vyjádřit zase v „základní" bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Znamená to zapsat vektory $(u_1, \ldots, u_k)$ jako lineární kombinace báze $(e_1, \ldots, e_n)$:

  $$u_j = \sum_{s=1}^{n} \tau_j^s e_s = \tau_j^1 e_1 + \cdots + \tau_j^n e_n, \ \ 1 \le j \le k.$$

ÚKOL: Dosaďte za u_j pro $1 \leq j \leq k$ do vyjádření vektoru $e_{i,L} = \pi_{L,L'}(e_i)$ a upravte výraz tak, abyste dostali $e_{i,L}$ jako lineární kombinaci vektorů $e_1, \ldots, e_n$. Pro jednoduchost to můžete zkusit nejprve pro konkrétní hodnoty n a k, třeba $n = 3$ a $k = 2$, a pak už obecně.

OTÁZKY: Až úkol splníte, uvidíte, jak vypadají koeficienty požadované lineární kombinace. Zamyslete se nad otázkami:

- Jaký je význam koeficientů v lineární kombinaci

$$e_{i,L} = p_i^1\, e_1 + \cdots + p_i^n\, e_n, \quad 1 \leq i \leq n,$$

  kterou jste právě získali?

- Dokázali byste zapsat získanou (čtvercovou) matici (p_i^j), $1 \leq i, j \leq n$, jako součin jistých (obdélníkových) matic získaných z matic přechodu T a $S = T^{-1}$?

Jestli jste úkol splnili a otázky zodpověděli, pak gratuluji – odvodili jste matici, která reprezentuje operátor projekce $\pi_{L,L'}$ v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$.

VÝSLEDEK ÚKOLU: Nejprve pro $n = 3$ a $k = 2$, pak obecně

- Dosadíme za $u_1 = \tau_1^1\, e_1 + \tau_1^2\, e_2 + \tau_1^3\, e_3$ a $u_2 = \tau_2^1\, e_1 + \tau_2^2\, e_2 + \tau_2^3\, e_3$:

$$e_{i,L} = \pi_{L,L'}(e_i) = \sigma_i^1\, u_1 + \sigma_i^2\, u_2 =$$

$$= \sigma_i^1(\tau_1^1\, e_1 + \tau_1^2\, e_2 + \tau_1^3\, e_3) + \sigma_i^2(\tau_2^1\, e_1 + \tau_2^2\, e_2 + \tau_2^3\, e_3) =$$
$$= (\sigma_i^1\tau_1^1 + \sigma_i^2\tau_2^1)e_1 + (\sigma_i^1\tau_1^2 + \sigma_i^2\tau_2^2)e_2 + (\sigma_i^1\tau_1^3 + \sigma_i^2\tau_2^3)e_3.$$

- A teď obecně $u_j = \tau_j^1\, e_1 + \cdots + \tau_j^n\, e_n = \sum_{s=1}^n \tau_j^s\, e_s$, $1 \leq j \leq k$,

$$e_{i,L} = \pi_{L,L'}(e_i) = \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j\, u_j = \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j \left(\sum_{s=1}^{n} \tau_j^s\, e_s\right) = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j \tau_j^s\right) e_s,$$

$$e_{i,L} = \pi_{L,L'}(e_i) = p_i^s\, e_s = p_i^1\, e_1 + \cdots + p_i^n\, e_n, \quad p_i^s = \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j \tau_j^s.$$

Červeně jsou vyznačeny indexy, které nabývají hodnot pouze od jedné do $k = \dim L$.

ODPOVĚDI: Význam získaného výsledku

- Koeficienty $p_i^1, \ldots, p_i^n$ jsou složky obrazu i-tého vektoru báze $(e_1, \ldots, e_n)$ operátorem $\pi_{L,L'}$ opět v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Tvoří i-tý řádek (čtvercové, typu n/n) matice $P_{L,L'}$ reprezentující operátor $\pi_{L,L'}$ v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$.
- Matice $P_{L,L'}$ je součinem matice Γ typu n/k a matice C typu k/n:

$$P_{L,L'} = \Gamma \cdot C = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \ldots & \sigma_1^k \\ \sigma_2^1 & \ldots & \sigma_2^k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_n^1 & \ldots & \sigma_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \tau_1^2 & \ldots & \tau_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_k^1 & \tau_k^2 & \ldots & \tau_k^n \end{pmatrix}$$

Matice reprezentující operátor projekce na podprostor L při doplňku L' v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$, nezávislé na L a L' je vytvořena pouze z částí matic přechodu mezi bázemi $(e_1, \ldots, e_n)$ a $(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$, kde $(u_1, \ldots, u_k)$ je libovolná báze v L a $(u_{k+1}, \ldots, u_n)$ je libovolná báze v L'.

ÚKOLY: Matice reprezentující operátory $\pi_{L,L'}$ a $\pi_{L',L}$

- Sestavte matici $P_{L',L}$, která reprezentuje operátor $\pi_{L',L}$ ve výchozí bázi $(e_1, \ldots, e_n)$.
- V příkladu, který jsme řešili v úvodu tohoto odstavce, tj. ve V_2, báze (e_1, e_2), $L = \left[\left|\left(1, \frac{1}{3}\right)\right|\right]$, $L' = [|(2, 1)|]$, sestavte matice $P_{L,L'}$ a $P_{L',L}$ a porovnejte s řešením příkladu. Dále vypočtěte matice

  $$P_{L,L'} + P_{L',L}, \quad P_{L,L'} \cdot P_{L',L}, \quad P_{L',L} \cdot P_{L,L'}, \quad P_{L,L'} \cdot P_{L,L'}$$

  a interpretujte výsledky. (Tečkou „$\cdot$“ jsme pro přehlednost označili násobení matic, tj. $A \cdot B$ je součin matic A a B.)
- S cílem získání praxe při počítání s maticemi prověřte vztahy pro matice projekcí pro případ obecných dimenzí n a k.

VÝSLEDKY ÚKOLŮ: Používáme stejné značení jako v předchozích úvahách.

- $e_{i,L'} = \pi_{L',L}(e_i) = (\sigma_i^{k+1}\, u_{k+1} + \cdots + \sigma_i^n\, u_n)$ (viz výše). Dosadíme pro $k+1 \le j \le n$: $u_j = \sum_{s=1}^n \tau_j^s\, e_s$, pak

$$e_{i,L'} = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=k+1}^{n} \sigma_i^j \tau_j^s\right) e_s = \sum_{s=1}^{n} (p')_i^s\, e_s,$$

$$P_{L',L} = \Gamma' \cdot C' = \begin{pmatrix} \sigma_1^{k+1} & \dots & \sigma_1^n \\ \sigma_2^{k+1} & \dots & \sigma_2^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_n^{k+1} & \dots & \sigma_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{k+1}^1 & \tau_{k+1}^2 & \dots & \tau_{k+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_n^1 & \tau_n^2 & \dots & \tau_n^n \end{pmatrix}$$

- V zmiňovaném příkladu bylo (červeně prvky Γ a C, modře Γ' a C')

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P_{L,L'} = \Gamma C = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$P_{L',L} = \Gamma' C' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte nyní požadované maticové výrazy. Uvidíte, že

$$P_{L,L'} + P_{L',L} = E, \quad P_{L,L'} \cdot P_{L,L'} = P_{L,L'}, \quad P_{L',L} \cdot P_{L',L} = P_{L',L},$$

$$P_{L,L'} \cdot P_{L',L} = P_{L',L} \cdot P_{L,L'} = 0_{M(2,2)},$$

kde $M(2,2)$ je vektorový prostor matic typu $2/2$. Výsledkům se nedivíme, odpovídají vlastnostem operátorů projekcí na podprostory.

- Pro obecné prvky výrazů z matic projekcí dostáváme (úpravy pečlivě provádějte a promýšleje, a i když píšeme sumy, uvědomujte si, které indexy jsou sčítací, a sledujte meze sum). Pro součet $P_{L,L'} + P_{L',L}$ je

$$p_i^s + (p')_i^s = \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j \tau_j^s + \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_i^j \tau_j^s = \sum_{j=1}^{n} \sigma_i^j \tau_j^s = \delta_i^s \implies P_{L,L'} + P_{L',L} = E.$$

Dále pro součin $(P_{L,L'} \cdot P_{L',L})$; jeho obecný prvek $(P_{L,L'} \cdot P_{L',L})_i^s$ je

$$\sum_{\ell=1}^{n} p_i^\ell (p')_\ell^s = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j \tau_j^\ell \right) \left(\sum_{m=k+1}^{n} \sigma_\ell^m \tau_m^s \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=k+1}^{n} \sigma_i^j \left(\sum_{\ell=1}^{n} \tau_j^\ell \sigma_\ell^m \right) \tau_m^s = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=k+1}^{n} \sigma_i^j \delta_j^m \tau_m^s = 0,$$

neboť indexy j a m nejsou nikdy stejné, takže Kroneckerovo delta δ_j^m nabývá vždy nulové hodnoty. Proto je $P_{L,L'} \cdot P_{L',L} = 0_{M(2,2)}$.

Ještě prověříme součin $P_{L,L'} \cdot P_{L,L'}$. Jeho obecný prvek je

$$(P_{L,L'} \cdot P_{L,L'})_i^s = \sum_{\ell=1}^{n} p_i^\ell p_\ell^s = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j \tau_j^\ell \right) \left(\sum_{m=1}^{k} \sigma_\ell^m \tau_m^s \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} \sigma_i^j \left(\sum_{\ell=1}^{n} \tau_j^\ell \sigma_\ell^m \right) \tau_m^s = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} \sigma_i^j \delta_j^m \tau_m^s = \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^j \tau_j^s = p_i^s.$$

Kroneckerovo delta totiž dosadí $m = j$ a smaže jednu sumaci, obecně

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} A_m^j \delta_j^m = \sum_{j=1}^{k} A_j^j.$$

Dokázali jsme, že platí $P_{L,L'} \cdot P_{L,L'} = P_{L,L'}$. Podobně se dokážou zbývající vztahy.

Projekce prakticky

Co znamená promítání na podprostor v praxi? Úkolem je promítnout daný vektor na daný podprostor při daném doplňku. Realizace takového úkolu metodami lineární algebry je jednoduchá výpočetní záležitost v několika krocích. Východiskem je zadání generátorů podprostoru L a generátorů jeho doplňku L' ve V_n v jisté bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Pozor! Generátory nemusí být zadávány nezávislé. O jaké kroky jde:

- Nalezení báze $(u_1, \dots, u_k)$ v L a báze $(u_{k+1}, \dots, u_n)$ v L' (úpravou příslušné matice ze složek generátorů na schodovitý tvar).
- Sestavení matice T přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(u_1, \dots, u_n)$. (Její řádky jsou tvořeny složkami vektorů $u_1, \dots, u_n$ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Ty máme z předchozího kroku).
- Výpočet inverzní matice $S = T^{-1}$ (nejotravnější krok celé procedury, ale některé kalkulačky to umí).

- Výpočet matic projekcí $P_{L,L'}$ a $P_{L',L}$. (Stačí vypočíst jen jednu, druhou dostaneme odečtením té první od jednotkové matice.)

$$S = \left(\begin{array}{c|c} \Gamma & \Gamma' \end{array} \right), \ T = \left(\begin{array}{c} C \\ \hline C' \end{array} \right), \ P_{L,L'} = \Gamma \cdot C, \ P_{L',L} = \Gamma' \cdot C'$$

Připomeňme typy matic: $\Gamma \ldots n/k$, $\Gamma' \ldots n/(n-k)$, $C \ldots k/n$, $C' \ldots (n-k)/n$.

- A můžeme promítat. Je-li vektor $a \in V_n$ v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ zadán složkami tvořícími řádkovou matici $(\alpha) = (\alpha^1 \ \ldots \ \alpha^n)$, má jeho průmět a_L na podprostor L (při doplňku L') složky dané maticí (α_L), průmět $a_{L'}$ na podprostor L' má složky dané maticí $(\alpha_{L'})$, přičemž

$$(\alpha_L) = (\alpha)P_{L,L'}, \quad (\alpha_{L'}) = (\alpha)P_{L',L}.$$

PŘÍKLAD: Budeme postupovat přesně po výše uvedených krocích.

Zadání: V_4, $L = [|(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 0)|]$,
$L' = [|(0, 0, 1, 1), (0, 0, -1, 1)|]$, v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4)

- Dimenze a báze podprostorů L a L'. A je vůbec takto zadaný L' doplňkem L ve V_4? Za chvíli uvidíme, že ano.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \dim L = 2,$$

$$u_1 = (1, 1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1, 0).$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim L' = 2,$$

$$u_3 = (0, 0, 1, 1), \quad u_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Ale ještě musíme prověřit průnik $L \cap L'$. Nebo nemusíme? Přemýšlejte. Jaká je na první pohled hodnost matice sestavené ze složek vektorů u_1, u_2, u_3 a u_4 (po řádcích)?

- Další dva kroky – určení matic T a $S = T^{-1}$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Matici S vypočtěte z cvičných důvodů sami (převodem T elementárními úpravami na jednotkovou matici a souběžnými úpravami jednotkové matice), nebo aspoň ověřte, že je to ona.

- Výpočet matic projekcí $P_{L,L'}$ a $P_{L',L}$.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{L,L'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ještě $P_{L',L}$ – přímý výpočet $P_{L',L} = \Gamma' \cdot C'$.

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{L',L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prověřte, zda získané matice projekcí splňují vztah $P_{L,L'} + P_{L',L} = E$.

- Promítnutí vektoru $a \in V_n$ zadaného v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) složkami $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, zapsanými do řádkové matice $(\alpha) = (\alpha^1 \ \ \alpha^2 \ \ \alpha^3 \ \ \alpha^4)$.

$$(\alpha_L) = (\alpha)P_{L,L'} = (\alpha^1 \ \ \alpha^2 \ \ \alpha^3 \ \ \alpha^4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\alpha_L^1 \ \ \alpha_L^2 \ \ \alpha_L^3 \ \ \alpha_L^4) = (\alpha^1 \ \ \alpha^2 \ \ -\alpha^1 + \alpha^2 \ \ 0).$$

A teď promítněte vektor $a \in V_n$ do podprostoru L' (při doplňku L) a proveďte kontrolu: mělo by vyjít, že $a_L + a_{L'} = a$. A ještě ověřte, zda vektor $a_L = (\alpha^1, \alpha^2, -\alpha^1 + \alpha^2, 0)$ skutečně leží v L (ověříte to třeba pomocí hodnosti určité matice – jaké?)

Ortogonální projekce na podprostor

Jde o projekci na podprostor $L \subset U_n$ v unitárním prostoru. Vybavení prostoru skalárním součinem a volba ortonormálních bází (výchozí ONB je $(e_1, \dots, e_n)$) přináší zjednodušení výpočtů.

- Nechť $L \subset U_n$ je vektorový podprostor dimenze k. I pro něj můžeme volit doplněk nekonečně mnoha způsoby, ale volíme ho ortogonální, $L_\perp$ (to už znáte – vzpomínejte, co to je a že je určen jednoznačně).
- Ortogonální projekcí na podprostor L se rozumí operátor $\pi_L = \pi_{L,L_\perp}$.
- Bázi $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ v U_n, kde $L = [|u_1, \dots, u_k|]$ a $L' = [|u_{k+1}, \dots, u_n|]$ volíme ortonormální.
- Matice přechodu T a $S = T^{-1}$, $(e_1, \dots, e_n) \leftrightarrow (u_1, \dots, u_n)$, jsou unitární, tj. $S = T^{T*}$. Pro matice Γ a C v obecných vztazích pro matici projekce $P_{L,L'}$ tedy platí $\Gamma = C^{T*}$.
- Matice ortogonální projekce na podprostor L pak je $P_L = C^{T*}C$, kde C je matice typu k/n utvořená po řádcích ze složek vektorů $(u_1, \dots, u_k)$ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

PŘÍKLAD: Ortogonální projekce prakticky

V U_4 je zadán vektorový podprostor (složky zadány v ONB $(e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4)$) $L = [|a_1,\, a_2|] = [|(1,\, 1,\, 0,\, 0),\, (0,\, \mathrm{i},\, 1,\, 0)|]$. Máme určit matici ortogonální projekce na L. Postup:

- Dimenze L je 2, báze v něm není ortonormální. Budeme ortogonalizovat (to umíte, tak jen stručně):

$$b_1 = (1,\, 1,\, 0,\, 0),\;\; (b_1,\, b_1) = 2,$$

$$b_2 = -\frac{(a_2,\, b_1)}{(b_1,\, b_1)} + a_2 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(1,\, 1,\, 0,\, 0) + (0,\, \mathrm{i},\, 1,\, 0) =$$

$$= \left(-\frac{\mathrm{i}}{2},\, \frac{\mathrm{i}}{2},\, 1,\, 0\right),\;\; (b_2,\, b_2) = \frac{3}{2}.$$

- Normování:

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, \frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, 0\right),\;\; u_2 = \left(-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}},\, \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}},\, \sqrt{\frac{2}{3}},\, 0\right).$$

- Ortogonální doplněk $L_\perp$ k nalezení matice P_L nepotřebujeme, je určen jednoznačně a je jedno, jak je v něm zvolena báze.
- Matice ortogonální projekce na podprostor L:

$$P_L = C^{T*}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_L = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 2 & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OTÁZKA: A musí se to opravdu dělat takhle (tj. ortonormalizovat bázi v L)? Nejde to s původními generátory prostoru L, které nebyly ortogonální ani normované?

ODPOVĚĎ: Jde to. Umíme přece promítat na podprostor L obecně, máme-li pevně vybraný jeho doplněk. V případě ortogonální projekce je výběr doplňku definitoricky daný – musí to být $L_\perp$. Můžeme se tedy vyhnout nepříjemnému ortogonalizačnímu procesu v L, ale musíme najít (libovolné) generátory doplňku $L_\perp$. Vznikne ovšem jiný nepříjemný problém – výpočet inverzní matice k matici přechodu od původně zadané báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi vektorů $(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$, generujících L a $L_\perp$ $(L = [|u_1, \ldots, u_k|], L_\perp = [|u_{k+1}, \ldots, u_n|])$.

Dokonce ani původní báze $(e_1, \ldots, e_n)$ by nemusela být ortonormální. Jenže to by už byla dost velká komplikace při hledání $L_\perp$. Museli bychom totiž v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ zadat matici G skalárního součinu, který je v prostoru U_n zaveden. Podmínka $(a, b) = 0$, charakterizující ortogonalitu libovolného vektoru $a \in L$ se složkami $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \sim (\alpha)$ v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ a libovolného vektoru $b \in L_\perp$, se složkami $(\beta^1, \ldots, \beta^n) \sim (\beta)$ rovněž v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$, by pak měla tvar $(\alpha)G(\beta)^{T*} = 0$. Soustava rovnic pro složky generátorů prostoru $L_\perp$ při zadaných generátorech prostoru L by tak mohla být složitější.

PŘÍKLAD POKRAČUJE: Pokus a kontrola

Zkusme vypočítat matici ortogonální projekce P_L pro zadání předchozího příkladu s tím, že budeme pracovat s obecnými generátory prostorů L a $L_\perp$, ale výchozí bázi $(e_1, \dots, e_n)$ zvolme přece jen ortonormální (pak bude $G = E$).

- Nalezení vektorů generujících $L_\perp$: Generující vektory jsou typu $c = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, kde $(c, a_1) = 0$, $(c, a_2) = 0$,

$$\alpha + \beta = 0, \ \ -\mathrm{i}\beta + \gamma = 0 \implies c = (-\beta, \beta, \mathrm{i}\beta, \delta),$$

$$L_\perp = [|(-1, 1, \mathrm{i}, 0), (0, 0, 0, 1)|],$$

- Matice přechodu T a $S = T^{-1}$: Matice T je tvořena složkami vektorů generujících L a $L_\perp$, matici S krok za krokem vypočítejte obvyklým způsobem.

$$
T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & -1 & 0 \\ 1 & -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

- Matice projekce $P_L = \Gamma \cdot C$. Ověřte, zda dostanete tutéž matici P_L, kterou jsme získali předtím. Jistěže to vyjde, ale zacvičte si.

$$
\Gamma = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Úlohy k procvičení

- Co je jádrem $(\operatorname{Ker}\pi_{L,L'})$ a obrazem $(\operatorname{Im}\pi_{L,L'})$ operátoru $\pi_{L,L'}$?
- Ve V_4 je v bázi $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$ zadán vektorový podprostor $L = [|(1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (0,\ \mathrm{i},\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ \mathrm{i},\ -\mathrm{i})|]$. Zvolený doplněk je $L' = [|(1,\ -1,\ -\mathrm{i},\ -\mathrm{i})|]$. Určete matici $P_{L,L'}$ operátoru projekce $\pi_{L,L'}$ v bázi $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$.
- Předchozí úlohu modifikujeme takto: prostor je unitární, bázi $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$ volíme ortonormální.
  (a) Přesvědčte se, že L' je ortogonální doplněk k L (složky vektorů generujících L a L' jsou stejné jako v úloze předchozí, jen jsou teď vztaženy k ONB.)
  (b) Zkonstruujte ONB v L (pomocí Grammova-Schmidtova procesu), ze složek jejích vektorů sestavte matici C a určete matici ortogonální projekce P_L na podprostor L jako $P_L = C^{T*}C$.
- Předem si rozmyslete, jaký výsledek máme očekávat, pokud jde o matici $P_{L,L'}$ z druhé a matici P_L z třetí úlohy.

Výsledky úloh

- $\operatorname{Ker} \pi_{L,L'} = L'$, $\operatorname{Im} \pi_{L,L'} = L$.
- Nejprve k čtvrté úloze: Jestliže jste pochopili podstatu projekcí na podprostory, měli byste očekávat stejný výsledek, tj. matice $P_{L,L'}$ z druhé úlohy je rovna matici P_L z třetí úlohy.
- K druhé úloze: Nevyhneme se bohužel výpočtu inverzní matice k matici přechodu T od báze (e_1, e_2, e_3, e_4) k bázi tvořené vektory generujícími podprostory L a L'.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 1 & -2\mathrm{i} & 1 & -1 \\ -\mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 & 3\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad P_{L,L'} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -2\mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 3 & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 3 & -1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- K třetí úloze: Ortonormální báze v L je tvořena např. vektory

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \quad u_2 = \left(-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}}, \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0 \right),$$

$$u_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \right).$$

Matice C je typu $3/4$ a je tvořena jejich složkami po řádcích. Vypočtěte $P_L = C^{T*}C$ a dostanete matici $P_{L,L'}$ z druhé úlohy. A taky na to můžeme jít „trikem“. Ortogonální doplněk $L_\perp = [\|(1, -1, -\mathrm{i}, -\mathrm{i})\|]$ (ověřili jste ortogonalitu?) je pouze jednorozměrný, stačí generující vektor normovat. Dostaneme matici $C_\perp$ typu $1/4$, vypočteme matici $P_{L_\perp} = C_\perp^{T*} C_\perp$ a odečteme ji od jednotkové matice, neboť $P_L + P_{L_\perp} = E$.

OTÁZKA: Ještě něco k přemýšlení na závěr

- V druhé úloze šlo o projekci na podprostor L při konkrétně zvoleném doplňku L'. V prostoru nebyl zadán skalární součin, všechny použité báze tedy byly obecné. Matice projekce $P_{L,L'}$ vyšla samoadjungovaná.
- Že vyšla matice P_L samoadjungovaná ve druhé úloze, překvapující není. Nemělo by to tedy být překvapující ani v druhé úloze, neboť víme, že matice $P_{L,L'}$ v první a matice P_L v druhé úloze musely vyjít stejně.
- Přitom je jasné, že matice projekce na podprostor L při doplňku L' obecně samoadjungovaná nebude – o tom se přesvědčíte, když se vrátíte k některým dřívějším příkladům.
- Je tedy to, že v druhé úloze vyšla matice $P_{L,L'}$ samoadjungovaná, nějaká zcela zvláštní náhoda? Nebo při tom, jak jsme prostory L a L' zadali, to tak dopadnout muselo? Troufnete si na to přijít?