Lineární a multilineární algebra

Téma 7: Všechno možné o projekcích obecně

Motto: Opakovaná projekce je zase jen projekce.

Obsah tématu

1. Zase něco na úvod.
2. Projekce obecně.
3. Rozklady do podprostorů.
4. Spektrální reprezentace podruhé.
5. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi II/1, VUTIUM, Brno 2012 (kap. 4, str. 68-69 – jen úplný základ, to ostatní je až tady).

Zase něco na úvod

Zatím jsme (v tématu 6) hovořili o „projekci na podprostor při daném doplňku“, kdy se příslušný operátor projekce vztahoval ke konkrétnímu podprostoru $L \subset V_n$ a jeho předem libovolně, ale pevně zvolenému doplňku L'. V odstavci o ortogonální projekci na podprostor jsme se zase opírali o skalární součin a vedle zadání podprostoru L jsme byli vázáni „povinnou volbou“ doplňku, jímž byl ortogonální doplněk $L_\perp$. Operátor projekce však lze definovat jen pomocí jeho jediné zásadní vlastnosti, nezávisle na dalších možných strukturách ve vektorovém prostoru, kde tento operátor působí.

Tou zásadní vlastností je ta, kterou měly operátory $\pi_{L,L'}$: opakovaná aplikace operátoru projekce nepřinese nic nového oproti té první.

Projekce obecně

Začneme, jak to občas děláváme, rovnou definicí. Přemýšlejte, jak byste matematicky zapsali vlastnost „opakovaná aplikace operátoru projekce nepřinese nic nového oproti té první“. Z definice to bude zřejmé.

DEFINICE: Projekce

Lineární operátor $\varphi: \ V_n \ni a \ \rightarrow \ \varphi(a) \in V_n$ s vlastností $\varphi \circ \varphi = \varphi$ se nazývá projekce. Operátor projekce je takzvaně idempotentní.

OTÁZKY: Jaké další vlastnosti má obecná projekce společné s $\pi_{L,L'}$?

- Co třeba problém vlastních vektorů a vlastních hodnot?
- Může být operátor projekce regulární?
- Lze obecnou projekci interpretovat jako projekci na podprostor (jaký?) s daným doplňkem (jakým?)

ODPOVĚDI: Vše odvodíme z vlastnosti $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

- Předpokládejme, že $b \in V_n$ je vlastní vektor projekce, tj. $\varphi(b) = \lambda b$. Aplikujeme na tuto rovnici operátor φ a dostaneme

  $$\varphi(\varphi(b)) = \varphi(b) = \lambda b,$$

  a současně

  $$\varphi(\varphi(b)) = \varphi(\lambda b) = \lambda \varphi(b) = \lambda^2 b.$$

  Odtud $(\lambda^2 - \lambda)b = 0_{V_n}$. Vlastní vektor z definice nesmí být nulový, proto $\lambda^2 - \lambda = 0$.

  Jedinými vlastními hodnotami operátoru projekce jsou $\lambda = 1$ a $\lambda' = 0$, stejně jako u operátoru $\pi_{L,L'}$. K vlastním vektorům se dostaneme za chvíli.

- Zvolme libovolně vektor $a \in V_n$. Platí $\varphi(\varphi(a)) = \varphi(a)$, tj. $\varphi(\varphi(a) - a) = 0_{V_n}$, proto $\varphi(a) - a \in \operatorname{Ker} \varphi$. Jádro regulárního operátoru však obsahuje jedině nulový vektor, takže $\varphi(a) = a$. Projekce je tedy regulární právě tehdy, je-li to identita.

- Rovnost $\varphi(b) = 0_{V_n}$ definuje jádro operátoru (každého). Znamená to, že vlastními vektory operátoru projekce φ příslušnými hodnotě $\lambda' = 0$ jsou právě všechny prvky jádra $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Jaká je role obrazu $\mathrm{Im}\,\varphi$? Prověřme průnik $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\varphi$. Nechť $c \in \mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\varphi$. Protože $c \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, je $\varphi(c) = 0_{V_n}$. Protože je $c \in \mathrm{Im}\,\varphi$, existuje $a \in V_n$ tak, že $c = \varphi(a) \Rightarrow \varphi(c) = \varphi(\varphi(a)) = \varphi(a) = c$. Odtud $c = 0_{V_n}$. Vekorové podprostory $\mathrm{Ker}\,\varphi$ a $\mathrm{Im}\,\varphi$ mají společný jen nulový vektor, z věty o dimenzi pak plyne $\mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Im}\,\varphi = n$. Jádro a obraz projekce φ jsou navzájem doplňkové podprostory.

  Zvolme teď libovolný vektor $b \in \mathrm{Im}\,\varphi$. Pak existuje vektor $a \in V_n$ takový, že $\varphi(a) = b$. (Dokonce takových vzorů existuje nekonečně mnoho. Mají tvar $a = b + c$, kde $c \in \mathrm{Ker}$ je libovolný vektor z jádra.) Zobrazme rovnost $\varphi(a) = b$ operátorem φ. Dostaneme $\varphi(\varphi(a)) = \varphi(b)$, tj. $\varphi(a) = \varphi(b)$ (neboť $\varphi \circ \varphi = \varphi$). Zároveň je $\varphi(a) = b$, takže nakonec $\varphi(b) = b$. Každý vektor $b \in \mathrm{Im}\,\varphi$ je vlastním vektorem operátoru φ příslušným vlastní hodnotě $\lambda = 1$.

VĚTA: Všechno o projekcích v souhrnu

Vlastnosti lineárního operátoru projekce ve V_n ($\varphi: V_n \to V_n$, $\varphi \circ \varphi = \varphi$):

- Vektorové podprostory $L = \mathrm{Im}\,\varphi$ a $L' = \mathrm{Ker}\,\varphi$ jsou navzájem doplňky ve V_n ($\mathrm{Im}\,\varphi$ je doplňkem $\mathrm{Ker}\,\varphi$ a naopak.)
- φ je operátorem promítání na vektorový podprostor $\mathrm{Im}\,\varphi \subset V_n$ při doplňku $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset V_n$, tj. $\varphi = \pi_{\mathrm{Im}\varphi,\,\mathrm{Ker}\varphi}$.
- Jeho vlastní hodnoty jsou právě čísla $\lambda = 1$ a $\lambda' = 0$, jejich násobnosti jsou $k = \dim \mathrm{Im}\,\varphi$ a $n - k = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$.
- Vlastní hodnotě $\lambda = 1$ odpovídá podprostor vlastních vektorů $L = \mathrm{Im}\,\varphi$, vlastní hodnotě $\lambda' = 0$ podprostor $L' = \mathrm{Ker}\,\varphi$.
- V libovolné bázi $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$, kde $[|u_1, \dots, u_k|] = \mathrm{Im}\,\varphi$ a $[|u_{k+1}, \dots, u_n|] = \mathrm{Ker}\,\varphi$ má diagonální tvar, diagonála obsahuje k hodnot 1 a $(n-k)$ hodnot 0.
- Je regulární právě když je identitou, tj. $\mathrm{Im}\,\varphi = V_n$ ($\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0_{V_n}\}$), je nulový právě když $\mathrm{Im}\,\varphi = \{0_{V_n}\}$ ($\mathrm{Ker}\,\varphi = V_n$).

Rozklady do podprostorů

Jakýmsi „zlatým hřebem“ tohoto tématu bude zobecnění spektrální reprezentace, kterou jsme se zatím zabývali v tématu 4 jen pro speciální případ – samoadjungované, resp. symetrické operátory v prostorech se skalárním součinem, v unitárním U_n nad $\mathbb{C}$, resp. v euklidovském E_n nad $\mathbb{R}$. Šlo tam o (ortogonální) rozklad obecného vektoru $a \in U_n$, resp. $a \in E_n$ a jeho obrazu $\varphi(a)$ do (navzájem ortogonálních) vektorových podprostorů $L_1, \ldots, L_r$ generovaných vlastními vektory operátoru příslušnými navzájem různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Ve výsledku pak o rozklad operátoru φ do tvaru lineární kombinace operátorů ortogonálních projekcí na tyto podprostory,

$$\varphi = \lambda_1 \pi_{L_1} + \cdots + \lambda_r \pi_{L_r}.$$

Navíc jsme počítali výhradně v ortonormálních bázích. Je to často výhodné zejména s ohledem na praktičnost a potřebné aplikace v geometrii a fyzice (více jich poznáte ve fyzikálních předmětech).

Rozklad operátoru do podprostorů generovaných jeho vlastními vektory, tak jak jsme jej zapsali na předchozím snímku, existuje v daleko obecnějším pojetí, a to pro každý lineární operátor $\varphi : V_n \to V_n$, který „lze diagonalizovat“, tj. pro který existuje ve V_n báze tvořená jeho vlastními vektory. Jinou specifickou vlastnost operátor mít nemusí. Poznamenejme přitom, že diagonalizovatelných operátorů je „většina“ – řekneme-li to dost nematematicky.

Uvažujme obecně, v prostoru V_n nad $\mathbb{C}$, tj. i bez skalárního součinu, a tedy i bez ortonormálních bází. Budeme-li potřebovat bázi, bude výchozí báze $(e_1, \ldots, e_n)$ libovolná. A zase zkusme dospět k závěrům pomocí otázek a odpovědí.

OTÁZKY: Rozklady do podprostorů

- Předpokládejme, nejprve bez vztahu k nějakému operátoru, že pro vektorové podprostory $L_1, \ldots, L_r$ ve V_n platí $L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \cdots \dot{+} L_r = V_n$, tj. podprostrory generují celý prostor a platí $L_i \cap L_j = \{0_{V_n}\}$ pro $i \neq j$. Lze každý vektor $a \in V_n$ rozložit na součet $a = a_{L_1} + \cdots + a_{L_r}$, kde $a_{L_i} \in L_i$? Pokud ano, jak to udělat prakticky?
- A je takový rozklad jednoznačný?
- Lze (v případě předchozích kladných odpovědí) považovat zobrazení $\pi_{L_i} : V_n \ni a \to \pi_{L_i}(a) = a_{L_i} \in L_i \subset V_n$ za projekci v obecném smyslu, resp. ve smyslu projekce na podprostor při nějakém (jakém?) doplňku?
- Je-li odpověď na předchozí otázku kladná, jak bude vypadat matice takové projekce ve výchozí bázi $(e_1, \ldots, e_n)$?

ODPOVĚDI: Postupujeme po jednotlivých otázkách

- Ano, lze. Začneme rovnou prakticky: Je-li $\dim L_i = k_i$, je $k_1 + \cdots + k_r = n$. Zvolme v jednotlivých podprostorech libovolné báze takto: $L_1 \ldots (u_1, \ldots, u_{k_1})$, $L_2 \ldots (u_{k_1+1}, \ldots u_{k_1+k_2})$, …, $L_r \ldots (u_{k_1+\ldots+k_{r-1}}, \ldots, u_n)$. Libovolný vektor $a \in V_n$ lze samozřejmě rozložit do této báze,

$$a = \alpha^1 u_1 + \cdots + \alpha^n u_n =$$

$$= (\alpha^1 u_1 + \cdots \alpha^{k_1} u_{k_1}) + (\alpha^{k_1+1} u_{k_1+1} + \cdots + \alpha^{k_1+k_2} u_{k_1+k_2}) + \cdots +$$
$$+ \cdots + (\alpha^{k_1+\cdots+k_{r-1}} u_{k_1+\cdots+k_{r-1}} + \cdots + \alpha^n u_n)$$

Vypadá to nesympaticky, ale jedná se jen o rozepsání stručného zápisu $a = \alpha^1 u_1 + \cdots + \alpha^n u_n$ podrobněji a uzávorkování jeho částí tak, že je vidět rozklad $a = a_{L_1} + a_{L_2} + \cdots + a_{L_r}$, kde

$$(\alpha^1 u_1 + \cdots + \alpha^{k_1} u_{k_1}) = a_{L_1} \in L_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\alpha^{k_1+\cdots+k_{r-1}} u_{k_1+\cdots+k_{r-1}} + \cdots + \alpha^n u_n) = a_{L_r} \in L_r.$$

- Rozklad $a = a_{L_1} + a_{L_2} + \cdots + a_{L_r}$ je jednoznačný, protože složky vektoru v dané bázi jsou určeny jednoznačně (to jsme si dokazovali někde na začátku výkladu). Vyjádření vektoru jako lineární kombinace vektorů báze je rozkladem do jednorozměrných podprostorů prostoru V_n generovaných jednotlivými vektory báze.
- Zvolme například $L = L_1$, $\dim L_1 = k_1$. Podprostor $L_1' = L_2 \dot{+} \cdots \dot{+} L_r$, $\dim L' = n - k_1$ je jeho doplňkem ve V_n. Zobrazení

$$\pi_{L_1} : V_n \ni a \longrightarrow \pi_{L_1}(a) = a_{L_1} \in L_1 \subset V_n$$

je operátorem projekce na podprostor L_1 při doplňku L_1'. Obecně je každé zobrazení

$$\pi_{L_i} : V_n \ni a \longrightarrow \pi_{L_i}(a) = a_{L_i} \in L_i \subset V_n,$$

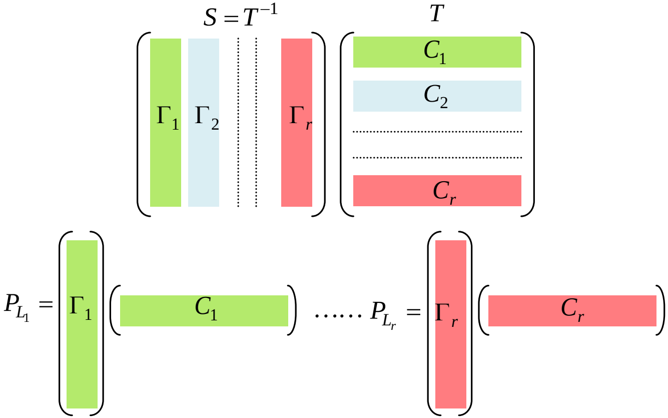
(pro $1 \leq i \leq r$) operátorem projekce na podprostor L_i při doplňku L_i', kterým je přímý součet ostatních podprostorů.

- Pro větší jednoduchost zápisu si všimněme matice operátoru projekce na podprostor L_1 při doplňku $L_1' = L_2 \dot{+} \cdots \dot{+} L_r$. Matici přechodu od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi $u_1, \ldots, u_n$ označme jako vždy T, matici inverzní S. Pro matici P_{L_1} operátoru π_{L_1} platí $P_{L_1} = \Gamma_1 C_1$, kde matice Γ_1 je typu n/k_1 a je tvořena prvními k_1 sloupci matice S, matice C je typu k_1/n a je tvořena prvními k_1 řádky matice T,

$$P_{L_1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \ldots & \sigma_1^{k_1} \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_2^{k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_n^1 & \sigma_n^2 & \ldots & \sigma_n^{k_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \tau_1^2 & \ldots & \ldots & \tau_1^n \\ \tau_2^1 & \tau_2^2 & \ldots & \ldots & \tau_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{k_1}^1 & \tau_{k_1}^2 & \ldots & \ldots & \tau_{k_1}^n \end{pmatrix}$$

Nakonec znázorníme matice takto definovaných projekcí graficky – schematickým obrázkem.

Násobí se matice stejné barvy. Počet sloupců matice Γ_i a počet řádků matice C_i je roven dimenzi podprostoru L_i.



K rozkladu na podprostory stačí tedy jediná věc – výpočet inverzní matice k matici přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(u_1, \dots, u_n)$ tvořené bázemi v podprostorech. A pak už jen násobit matice: $P_{L_i} = \Gamma_i C_i$.

PŘÍKLAD: Rozklad na podprostory prakticky

Ve V_4 jsou dány vektorové podprostory
$L_1 = [|u_1, u_2|] = [|(1, \mathrm{i}, 0, 0), (0, 1, \mathrm{i}, 0)|]$, $L_2 = [|u_3|] = [|(0, 0, 1, \mathrm{i})|]$,
$L_3 = [|u_4|] = [|(-\mathrm{i}, 0, 0, 1)|]$. (Složky jsou zadány v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4).)
Najdeme předpis, jak rozložit obecný vektor $a \in V_n$ do podprostorů
L_1, L_2, L_3, tj. $a = a_{L_1} + a_{L_2} + a_{L_3}$.

Matici přechodu od výchozí báze (e_1, e_2, e_3, e_4) k bázi (u_1, u_2, u_3, u_4), vytvořenou z vektorů generujících podprostory L_1, L_2 a L_3 sestavíme tak, že složky vektorů u_1, u_2, u_3, u_4 zadané v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) „naskládáme" do řádků. A pak musíte bohužel vypočítat inversní matici.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

Inversní matici máme, takže už stačí jen postupovat podle schematického barevného obrázku:

$$ST \cdots \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{L_1} = \Gamma_1 C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{i}{2} & 1 & \frac{i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Matice projekce P_{L_1} na podprostor L_1 reprezentuje operátor π_{L_1} ve výchozí bázi (e_1, e_2, e_3, e_4).

Matice operátorů projekcí na podprostory L_2 a L_3 jsou

$$P_{L_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_{L_3} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sami už pro kontrolu ověřte vlastnosti těchto matic, konkrétně $P_{L_1} + P_{L_2} + P_{L_3} = E$, $P_{L_1} P_{L_2} = 0_{M(4,4)}$, atd. Mně to vyšlo.

Nakonec ještě rozložíme obecný vektor $a \in V_4$ o složkách $(\alpha) = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$ do podprostorů L_1, L_2 a L_3.

$$(\alpha_{L_1}) = (\alpha)P_{L_1} = (\alpha^1 \;\; \alpha^2 \;\; \alpha^3 \;\; \alpha^4) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha^1 - \mathrm{i}\alpha^2 + \alpha^3 + \mathrm{i}\alpha^4 \;\; , \;\; 2\alpha^2 \;\; , \;\; \alpha^1 + \mathrm{i}\alpha^2 + \alpha^3 + \mathrm{i}\alpha^4 \;\; , \;\; 0) =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha^1 - \mathrm{i}\alpha^2 + \alpha^3 + \mathrm{i}\alpha^4)(1 \;\; \mathrm{i} \;\; 0 \;\; 0) -$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha^1 + \mathrm{i}\alpha^2 + \alpha^3 + \mathrm{i}\alpha^4)(0 \;\; 1 \;\; \mathrm{i} \;\; 0) = \gamma^1 u_1 + \gamma^2 u_2,$$

$$\gamma^1 = \frac{1}{2}(\alpha^1 - \mathrm{i}\alpha^2 + \alpha^3 + \mathrm{i}\alpha^4), \;\; \gamma^2 = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha^1 + \mathrm{i}\alpha^2 + \alpha^3 + \mathrm{i}\alpha^4).$$

Ostatní průměty už vypočtěte analogicky sami.

Spektrální reprezentace podruhé

S pojmem spektrální reprezentace jsme se setkali u samoadjungovaných operátorů v U_n, resp. symetrických operátorů v E_n, Jsou to operátory v prostorech se skalárním součinem definované vlastností $(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))$. Připomeňte si, o co tam jde (pište odpovědi na papír):

OTÁZKY: Vlastnosti samoadjungovaných, resp. symetrických operátorů

- Jakou maticí je samoadjungovaný (symetrický) operátor φ reprezentován v ONB?
- Jakou specifickou vlastnost mají vlastní hodnoty operátoru?
- Jakou algebraickou strukturu tvoří v U_n (E_n) vlastní vektory operátoru příslušné téže vlastní hodnotě (po přidání nulového vektoru)?
- Čemu je roven skalární součin livobolných dvou vektorů příslušejících různým vlastním hodnotám?
- Existuje v U_n (E_n) báze z vlastních vektorů operátoru?

ODPOVĚDI: Máte napsáno? Tak kontrolujme:

- Samoadjungovanou $A = A^{T*}$ (symetrickou $A = A^T$).
- Jsou reálné (i v případě, že jde o U_n, tj. vektorový prostor nad $\mathbb{C}$).
- Vektorový podprostor, jehož dimenze je rovna násobnosti příslušné vlastní hodnoty jakožto charakteristického kořene operátoru.
- Nule (přísluší-li vlastní vektor b_1, resp. b_2 vlastní hodnotě λ_1, resp. λ_2, kde $\lambda_1 \neq \lambda_2$, jsou vektory b_1 a b_2 ortogonální).
- Ano. A v této bázi má matice operátoru diagonální tvar. V diagonále je každá vlastní hodnota tolikrát, kolik je její násobnost.

Spektrální reprezentací operátoru φ je rozklad (existenci jsme dokazovali)

$$\varphi = \lambda_1 \pi_{L_1} + \cdots + \lambda_r \pi_{L_r}, \quad A = \lambda_1 P_{L_1} + \cdots + \lambda_r P_{L_r}$$

kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jsou navzájem různé vlastní hodnoty operátoru a $\pi_{L_1}, \ldots, \pi_{L_r}$ operátory ortogonálních projekcí na odpovídající podprostory vlastních vektorů, $P_{L_1}, \ldots, P_{L_r}$ matice těchto projekcí ve výchozí ONB.

Teď se pusťme do obecných úvah. Na vektorový prostor V_n (obecně nad $\mathbb{C}$) neklademe žádné požadavky. Pokud jde o obecnost úvah, nebudou se týkat všech lineárních operátorů, ale jen těch, které mají diagonální reprezentaci, tj. kdy existuje taková báze, v níž je operátor reprezentován diagonální maticí. Víme, že takovými bázemi jsou právě ty, jež jsou tvořeny vlastními vektory operátoru.

Nechť tedy $\varphi : V_n \to V_n$ je diagonalizovatelný operátor, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jeho navzájem různé vlastní hodnoty s násobnostmi $k_1, \ldots, k_r$, $k_1 + \cdots + k_r = n$, a $L_1, \ldots, L_r$ vektorové podprostory prostoru V_n generované vlastními vektory operátoru φ příslušnými vlastním hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Jejich dimenze jsou $k_1, \ldots, k_r$ a jejich přímým součtem je celý prostor V_n.

PŘIPOMENUTÍ: Hovoříme-li o přímém součtu (několika) podprostorů, automaticky platí, že průnikem každých dvou z nich je pouze triviální podprostor $\{0_{V_n}\}$.

Vše je připraveno. Umíme každý vektor $a \in V_n$ rozložit do podprostorů a důkladně jsme to procvičili. Teď ukážeme, že budeme umět diagonalizovatelný operátor rozložit na operátory projekcí do podprostorů generovaných jeho vlastními vektory. Zvolme libovolný vektor $a \in V_n$ a rozložme jej do podprostorů $L_1, \ldots, L_r$, a totéž pak udělejme s jeho obrazem:

$$a = a_{L_1} + \cdots + a_{L_r}, \quad a_{L_1} \in L_1, \ldots, a_{L_r} \in L_r,$$

$$\varphi(a) = \varphi(a_{L_1} + \cdots + a_{L_r}) = \varphi(a_{L_1}) + \cdots + \varphi(a_{L_r}) = \lambda_1 a_{L_1} + \cdots + \lambda_r a_{L_r}.$$

Proč to tak je? Přece proto, že každý (nenulový) vektor ležící třeba v podprostoru L_1 je vlastním vektorem operátoru φ příslušným vlastní hodnotě λ_1, tj. $\varphi(a_{L_1}) = \lambda_1 a_{L_1}$. A podobně pro další vektory $a_{L_2}, \ldots, a_{L_r}$.

Víme ovšem, že každý vektor a_{L_i} je obrazem vzoru $a \in V_n$ operátorem π_{L_i}, tj. $a_{L_1} = \pi_{L_i}(a)$.

Rozklad obrazu $\varphi(a)$ proto můžeme zapsat také takto:

$$\varphi(a) = \lambda_1 \pi_{L_1}(a) + \cdots + \lambda_r \pi_{L_r}(a).$$

Protože tento vztah platí pro každý vektor $a \in V_n$, platí pro operátory

$$\varphi = \lambda_1 \pi_{L_1} + \cdots + \lambda_r \pi_{L_r}.$$

Dostali jsme rozklad operátoru φ ve tvaru lineární kombinace operátorů projekcí na podprostory generované vlastními vektory operátoru φ s koeficienty rovnými odpovídajícím vlastním hodnotám.

DEFINICE: Spektrální reprezentace

Výše uvedený rozklad lineárního operátoru $\varphi : V_n \to V_n$ se nazývá spektrální reprezentace tohoto operátoru.

VĚTA: Spektrální reprezentace diagonalizovatelného operátoru

Každý diagonalizovatelný lineární operátor $\varphi : V_n \ni a \to \varphi(a) \in V_n$ má spektrální reprezentaci.

PŘÍKLAD: Schválně jednoduchý, aby vynikl postup

Lineární operátor $\varphi: \ V_3 \ni a \ \to \ \varphi(a) \in V_3$ je v bázi $(e_1, \, e_2, \, e_3)$ reprezentován maticí

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Máme zjistit, zda je diagonalizovatelný a v kladném případě najít jeho spektrální reprezentaci.

Nejprve najdeme vlastní hodnoty a vektory operátoru:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{i}-\lambda & \mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i}-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda - 2\mathrm{i})^2,$$

$$\lambda_1 = 2\mathrm{i}, \quad k_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 0, \quad k_2 = 1.$$

Pro jednotlivé vlastní hodnoty teď vyřešíme soustavu rovnic pro vlastní vektory $(\beta^1, \, \beta^2, \, \beta^3) = (\beta)$, tj. soustavu $(\beta)(A - \lambda E) = (0)$.

Při výpočtu složek vlastních vektorů upravujeme matici $(A - \lambda E)^T$. (POZOR! Při naší konvenci – zápis složek vektorů do řádkové matice – nezapomeňte na transpozici. Zde je sice matice náhodou symetrická, ale obecně ne.) Pro $\lambda_1 = 2\mathrm{i}$ a $\lambda_2 = 0$ dostaneme postupně

$$(A - \lambda_1 E)^T = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - \lambda_2 E)^T = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešením těchto dvou soustav jsou vektorové podprostory

$$L_1 = [|u_1,\, u_2|] = [|(1,\, 1,\, 0),\, (0,\, 0,\, 1)|], \quad L_2 = [|u_3|] = [|(1,\, -1,\, 0)|].$$

Operátor je diagonalizovatelný, báze z vlastních vektorů je $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ a pro matici D, která v ní operátor reprezentuje, je $\operatorname{diag} D = \{2\mathrm{i},\, 2\mathrm{i},\, 0\}$.

Teď najdeme matice operátorů projekcí na podprostory L_1 a L_2. Matice přechodu T od báze (e_1, e_2, e_3) k bázi (u_1, u_2, u_3) a inversní matice S jsou (inversní matici sami pro kontrolu vypočítejte)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{L_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P_{L_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sami opět ověřte, zda platí $P_{L_1} + P_{L_2} = E$ a $P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_2}P_{L_1} = 0_{M(3,3)}$.

Dostáváme se k zápisu spektrální reprezentace operátoru φ v bázi $(e_1,\ e_2,\ e_3)$:

$$A = \lambda_1 P_{L_1} + \lambda_2 P_{L_2} = 2\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro kontrolu vypočtěte pravou stranu do konce a dostanete matici A.

Následující úkol vám ukáže, zda jste nejen dobře zvládli výpočetní rutinu, ale také pochopili podstatu věci. V takovém případě totiž nemusíte vůbec nic počítat, napíšete rovnou výsledek. Zkuste nad úkolem nejprve přemýšlet a teprve pak se podívejte na další stránku.

ÚKOL: Zapište spektrální reprezentaci operátoru v bázi $(u_1,\ u_2,\ u_3)$.

VÝSLEDEK ÚKOLU: Jednoduchá myšlenka – trochu ji rozebereme

Základem spektrální reprezentace je rozklad vektorů do podprostorů (že jsou to podprostory generované vlastními vektory nějakého operátoru, není pro pochopení myšlenky úkolu podstatné). Pro vyjádření matic operátorů projekcí na podprostory ve výchozí bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ je třeba provést přechod k bázi $(u_1, \ldots, u_n)$ z vektorů generujících tyto podprostory, tj. zápis matice T a výpočet matice $S = T^{-1}$. Matice operátorů projekcí pak dostaneme ve výchozí bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Požadavek vyjádření projekcí v bázi $(u_1, \ldots, u_n)$ ovšem znamená, že považujeme bázi $(u_1, \ldots, u_n)$ za výchozí a zároveň je taky bází výslednou. Matice přechodu T,S mezi takto stanovenou výchozí a výslednou bází jsou tedy jednotkové. V našem příkladu dostaneme v bázi (u_1, u_2, u_3)

$$\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathrm{i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Násobení matic dokončete. Že jsou matice projekcí částmi jednotkové matice, jistě nepřekvapí.

Úlohy k procvičení

- Ve vektorovém prostoru V_n je dán operátor projekce φ. Označme $\psi = \mathrm{id}_{V_n} - \varphi$. Určete jádro a obraz operátoru ψ. Je operátor ψ rovněž projekce? Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.
- Operátor φ je projekce ve V_n. Dokažte, že pro jeho matici A v libovolné bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ platí $A^2 = A$.
  (Návod: Co platí pro matice A, B kompozice operátorů $\varphi \circ \chi$?)
- Ve V_4 jsou dány vektorové podprostory
  $L_1 = [|u_1, u_2|] = [|(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)|]$,
  $L_2 = [|u_3|] = [|(0, 0, 1, 1)|]$, $L_3 = [|u_4|] = [|(-1, 0, 0, 1)|]$. (Složky jsou zadány v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4).) Rozložte vektory této báze do podprostorů L_1, L_2, L_3, tj. např. $e_1 = e_{1,L_1} + e_{1,L_2} + e_{1,L_3}$. (Složky průmětů vyjádřete v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4).)
  (Postup: Prověřte, že $V_4 = [|u_1, u_2, u_3, u_4|]$ a že $L_i \cap L_j = \{0_{V_n}\}$ pro $i \neq j$. Sestavte ze složek vektorů u_1, u_2, u_3, u_4 matici T a vypočtěte $S = T^{-1}$. Vypočtěte matice P_{L_1}, P_{L_2}, P_{L_3} podle schematu na barevném obrázku. Promítněte vektory e_1, e_2, e_3, e_4 do L_1, L_2, L_3.)

Výsledky

- Operátor ψ je rovněž projekce. Proveďte kompozici $(\psi \circ \psi) = (\mathrm{id}_{V_n - \varphi}) \circ (\mathrm{id}_{V_n} - \varphi)$ a uvidíte. Platí $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi$, $\operatorname{Im} \psi = \operatorname{Ker} \varphi$. Vlastní hodnoty operátoru ψ jsou $\lambda_1 = 1$, podprostor generovaný odpovídajícími vlastními vektory je $\operatorname{Im} \psi$, $\lambda_2 = 0$ podprostor generovaný odpovídajícími vlastními vektory je $\operatorname{Ker} \psi$.

- Jsou-li φ a χ lineární operátory ve V_n, je jejich kompozice $\varphi \circ \chi$ rovněž lineární operátor ve V_n. Označíme-li A, resp. B matici reprezentující operátor φ, resp. ψ v dané bázi, pak operátor $\varphi \circ \chi$ reprezentuje matice BA (ano, pořadí je takové). Je-li φ projekce, tj. $\varphi \circ \varphi = \varphi$, pak $A^2 = A$.

- Po řadě jsou uvedeny matice P_{L_1}, P_{L_2} a P_{L_3}:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$