Lineární a multilineární algebra

Téma 8: Jordanův normální tvar operátoru

Obsah tématu

1. Úvod – když operátor nemá diagonální reprezentaci.
2. Jordanova matice.
3. Hledání Jordanovy reprezentace – řetízky z rovnic.
4. Trocha teorie – základní věta o podobnosti matic.
5. Jordanův normální tvar operátoru.
6. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi III/3, VUTIUM, Brno 2017 (kap. 16, str. 961-967, 991-996, 1001-1028).

Úvod – když operátor nemá diagonální reprezentaci

Z předchozích prezentací víme, že lineární operátor $\varphi : V_n \to V_n$, z jehož vlastních vektorů lze sestavit ve V_n bázi, má v takové bázi (a ve všech bázích tvořených jeho vlastními vektory) diagonální tvar. V diagonále pak stojí vlastní hodnoty, každá tolikrát, kolik je její násobnost jako charakteristického kořene operátoru. Víme také toto:

- Je-li V_n nad $\mathbb{C}$, jsou vlastními hodnotami právě charakteristické kořeny operátoru.
- Je-li V_n nad $\mathbb{R}$, jsou vlastními hodnotami právě reálné charakteristické kořeny operátoru.
- Vlastní vektory příslušné dané vlastní hodnotě generují ve V_n vektorový podprostor. Je-li operátor diagonalizovatelný, je dimenze tohoto podprostoru rovna násobnosti příslušné vlastní hodnoty.
- Průnikem vektorových podprostorů L_1, L_2 příslušných vlastním hodnotám $\lambda_1 \neq \lambda_2$ je pouze triviální podprostor $\{0_{V_n}\}$.

Na příkladech jsme zjistili, že existují situace, kdy operátor „nemá dost vlastních vektorů“ na to, aby vytvořily ve V_n bázi. To může nastat i v případě, že V_n je nad $\mathbb{C}$ a všechny charakteristické kořeny operátoru jsou proto vlastními hodnotami. A co teprve, když je prostor nad $\mathbb{R}$ a komplexní charakteristické kořeny nemohou být vlastními hodnotami. Anebo třeba jsou všechny charakteristické kořeny reálné a přesto vlastní vektory nevygenerují celý prostor. Obecně je dimenze vektorového podprostoru generovaného vlastními vektory příslušnými dané vlastní hodnotě nanejvýš rovna její násobnosti.

PŘÍKLAD: Jen narychlo – operátor, který nemá diagonální reprezentaci

Operátor φ ve V_2 je v bázi (e_1, e_2) reprezentován maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} & 1 \\ -1 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Má dvojnásobný charakteristický kořen $\lambda = \mathrm{i}$, který je zároveň jeho vlastní hodnotou. Odpovídající vektorový podprostor generovaný vlastními vektory příslušnými této hodnotě je jen jednorozměrný, $L = [|(1, -1)|]$. Jistě to sami snadno ověříte.

Jordanova matice

I když operátor nemá diagonální reprezentaci, přece jen může existovat jiná jednoduchá reprezentace, která je diagonální „skoro“. Je to Jordanův normální tvar operátoru. V prostorech nad $\mathbb{C}$ existuje vždy, v prostorech nad $\mathbb{R}$ právě tehdy, jsou-li všechny charakteristické kořeny reálné. Tuto jednoduchou rerezentaci představuje bloková matice, zvaná Jordanova.

DEFINICE: Jordanova submatice

Jordanovou submaticí řádu s příslušnou hodnotě $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, resp. $\mathbb{R}$ rozumíme matici typu s/s

$$J^{(s)}(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

DEFINICE: Jordanova matice

Jordanova matice je bloková matice, v jejíž diagonále jsou bloky tvořené Jordanovými submaticemi.

PŘÍKLAD: Jordanova matice

Následující matice je tvořena Jordanovými submaticemi různých řádů příslušnými různým hodnotám v diagonále.

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

hodnota	počet	řády
$\lambda_1 = 3$	$q_1 = 2$	$k_{11} = 3$ $k_{12} = 1$
$\lambda_2 = 5$	$q_2 = 2$	$k_{21} = 2$ $k_{22} = 2$

Tabulka uvádí hodnoty λ, počet jim příslušných submatic a jejich řády.

Taková tabulka jako v předchozím příkladu se bude později hodit. Protože, jak se ukáže, na uspořádání bloků podél diagonály Jordanovy matice nezáleží (bude to znamenat jen jiné pořadí vektorů báze), navrhneme systematické uspořádání takto:

hodnota λ	počet submatic sestupně	řády submatic sestupně
λ_1	q_1	$k_{11} \geq k_{12} \geq \cdots \geq k_{1q_1}$
λ_2	q_2	$k_{21} \geq k_{22} \geq \cdots \geq k_{2q_2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
λ_r	q_r	$k_{r1} \geq k_{r2} \geq \cdots \geq k_{rq_r}$

Navzájem různé hodnoty $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ přitom také číslujeme tak, aby počty odpovídajících submatic byly řazeny sestupně, tj. $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_r$.

Hledání Jordanovy reprezentace – řetízky z rovnic

To, že pro každý operátor ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$ lze najít bázi, v níž bude reprezentován Jordanovou maticí, jsme si řekli předem bez důkazu. Vezměme nyní jako fakt, že tomu tak skutečně je, a položme si otázku, jak takovou bázi najít. V bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ je lineární operátor $\varphi: V_n \to V_n$ reprezentován maticí A. Hledáme bázi $(f_1, \ldots, f_n)$, v níž je reprezentován maticí J (Jordanovou). Mezi maticemi A a J je tedy vztah podobnosti matic, tj. $J = TAT^{-1}$, kde $T = (\tau_i^j)$, $1 \leq i, j \leq n$, je matice přechodu od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi $(f_1, \ldots, f_n)$, tj. $f_i = \tau_i^j e_j$ pro $1 \leq i \leq n$ (Einsteinova symbolika, index j je sčítací).

POZNÁMKA: Je diagonální matice také Jordanovou maticí? Jistě ano – to v případě, že všechny její Jordanovy submatice jsou řádu jedna.

Ponechme pro tuto chvíli stranou jak poznáme, zda dvě zadané čtvercové matice, řekněme A a B jsou podobné, tj. zda existuje regulární matice T tak, že platí $B = TAT^{-1}$.

Co to znamená, že operátor je v bázi $(f_1, \ldots, f_n)$ reprezentován Jordanovou maticí? Právě to, že každý obraz $\varphi(f_i)$ je lineární kombinací vektorů báze $(f_1, \ldots, f_2)$, přičemž koeficienty této lineární kombinace jsou prvky i-tého řádku reprezentující Jordanovy matice. Vyjádření obrazů $\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)$ je tedy mimořádně jednoduché, protože řádky Jordanovy matice obsahují „skoro samé nuly“. Zkusme to pro výše uvedený příklad operátoru ve V_8.

$$\varphi(f_1) = 3f_1 + 1f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 0f_8$$
$$\varphi(f_2) = 0f_1 + 3f_2 + 1f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 0f_8$$
$$\varphi(f_3) = 0f_1 + 0f_2 + 3f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 0f_8 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_3$$
$$\varphi(f_4) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 5f_4 + 1f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 0f_8$$
$$\varphi(f_5) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 5f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 0f_8 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_5$$
$$\varphi(f_6) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 3f_6 + 0f_7 + 1f_8 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_6$$
$$\varphi(f_7) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 0f_6 + 5f_7 + 1f_8$$
$$\varphi(f_8) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 5f_8 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_8$$

Když z obrázku odstraníme všechny zbytečné nuly, bude vypadat takto:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\varphi(f_1)= & 3f_1+1f_2+0f_3 & & & & \\
\varphi(f_2)= & 3f_2+1f_3 & & & & \\
\varphi(f_3)= & 3f_3 & \leftarrow \text{vlastní vektor } f_3 & & & \\
\varphi(f_4)= & & 5f_4+1f_5 & & & \\
\varphi(f_5)= & & 5f_5 & \leftarrow \text{vlastní vektor } f_5 & & \\
\varphi(f_6)= & & & 3f_6 & \leftarrow \text{vlastní vektor } f_6 & \\
\varphi(f_7)= & & & & 5f_7+1f_8 & \\
\varphi(f_8)= & & & & 5f_8 & \leftarrow \text{vlastní vektor } f_8
\end{array}
$$

Všimli jste si? Označme třeba $\Lambda_1 = [|f_1, f_2, f_3|]$ a zvolme lib. $a \in \Lambda_1$, $a = \alpha^1 f_1 + \alpha^2 f_2 + \alpha^3 f_3$. Platí $\varphi(a) = \alpha^1\varphi(f_1) + \alpha^1\varphi(f_2) + \alpha^3\varphi(f_3) \in \Lambda_1$.

Operátor „vrátí“ obraz každého vektoru z Λ_1 zase do Λ_1. A tak je to se všemi bloky. Navíc – poslední vektor každého bloku je vlastní.

DEFINICE: Nechť $\varphi: V_n \to V_n$ je lineární operátor. Vektorový podprostor L, pro který platí $\varphi(a) \in L$ pro každý vektor $a \in L$, se nazývá invariantní podprostor operátoru φ.

Invariantními podprostory jsou například vektorové podprostory generované vlastními vektory operátoru příslušnými téže vlastní hodnotě. Invariantní je také každý jednorozměrný vektorový podprostor generovaný kterýmkoli vlastním vektorem, neboť pro vlastní vektor $b \in V_n$ platí $\varphi(b) = \lambda b \in [|b|]$.

PŘÍKLAD: Vraťte se k barevné tabulce na předchozím snímku. Uvidíte tam hned několik invariantních podprostorů:

- především invariantní podprostory generované vektory báze, které přísluší jednotlivým blokům, $\Lambda_1 = [|f_1, f_2, f_3|]$, $\Lambda_2 = [|f_4, f_5|]$, $\lambda_3 = [|f_6|]$, $\Lambda_4 = [|f_7, f_8|]$,
- invariantní podprostory generované vlastními vektory příslušnými navzájem různým vlastním hodnotám, konkrétně $\lambda_1 = 3 \ \ldots$ $L_1 = [|f_3, f_6|]$, $\lambda_2 = 5 \ \ldots \ L_2 = [|f_5, f_8|]$.

Uvažujme o dvou různých invariantních podprostorech Λ_p a Λ_q. Co je jejich průnikem? Vzhledem k tomu, že jsou generovány různými skupinami vektorů báze – lépe řečeno nemají žádný generující vektor báze společný, je jejich průnikem nulový vektor. A to má další důsledek:

PŘÍKLAD: Znovu k barevné tabulce. Všimněme si:

- na konci každého bloku je vlastní vektor,
- každý invariantní podprostor náležející určitému bloku obsahuje právě jeden jednorozměrný podprostor generovaný vlastním vektorem, konkrétně $[|f_3|] \subset \Lambda_1$, $[|f_5|] \subset \Lambda_2$, $[|f_6|] \subset \Lambda_3$, $[|f_8|] \subset \Lambda_4$,
- vlastní vektory zaujímající poslední místa v blocích jsou lineárně nezávislé (i když třeba patří do podprostoru odpovídajícího stejné vlastní hodnotě) – je to zřejmé z toho, že průnikem invariantních podprostorů daných různými bloky je triviální podprostor $\{0_{V_n}\}$.

Závěr: $q_1 = 2 \ldots$ dva bloky s $\lambda_1 = 3$, opovídající invariantní podprostory Λ_1 $(\dim \Lambda_1 = 3)$, Λ_2, $(\dim, \Lambda_2 = 1)$, $q_2 = 2 \ldots$ dva bloky s $\lambda_2 = 5$, Λ_3 $(\dim, \Lambda_3 = 2)$, Λ_4 $(\dim, \Lambda_4 = 2)$.

Jestliže jsme při řešení problému vlastních vektorů a hodnot nedokázali obecně říci, jaké jsou dimenze podprostorů generovaných vlastními vektory příslušnými téže vlastní hodnotě, teď už to umíme – tedy za předpokladu, že věříme dosud nedokázanému tvrzení, že v případě V_n nad $\mathbb{C}$ má každý lineární operátor Jordanovu reprezentaci:

VĚTA: Nechť $\varphi: V_n \to V_n$, pro V_n nad $\mathbb{C}$ je lineární operátor, λ jeho vlastní hodnota (násobnosti k), L podprostor generovaný vlastními vektory příslušnými hodnotě λ a J jeho Jordanova matice. Pak $\dim L = q \leq k$, kde q je počet Jordanových submatic v matici J odpovídajících hodnotě λ.

V případě prostoru nad $\mathbb{R}$ platí věta rovněž, jsou-li všechny charakteristické kořeny operátoru reálné (pak také existuje Jordanova reprezentace). Dále je zřejmé, že Jordanova matice je diagonální právě tehdy, když všechny bloky jsou matice typu $1/1$.

Zbývá jen, abychom uměli bázi, v níž je operátor reprezentován Jordanovou maticí, najít. Znamená to řešit soustavy rovnic vyplývající opět z barevné tabulky. Uvažme v našem příkladu třeba první blok:

$$\varphi(f_1) = 3f_1 + f_2 \qquad (\varepsilon_1^1 \dots \varepsilon_1^8)(A - 3E) = (\varepsilon_2^1 \dots \varepsilon_2^8) \quad \text{(iii)}$$

$$\varphi(f_2) = 3f_2 + f_3 \qquad (\varepsilon_2^1 \dots \varepsilon_2^8)(A - 3E) = (\varepsilon_3^1 \dots \varepsilon_3^8) \quad \text{(ii)}$$

$$\varphi(f_3) = 3f_3 \qquad (\varepsilon_3^1 \dots \varepsilon_3^8)(A - 3E) = (0 \dots\dots 0) \quad \text{(i)}$$

Jako $(\varepsilon_1^1, \dots, \varepsilon_1^8)$, $(\varepsilon_2^1, \dots, \varepsilon_2^8)$, $(\varepsilon_3^1, \dots, \varepsilon_3^8)$, jsme označili hledané složky vektorů f_1, f_2, f_3 ve výchozí bázi $(e_1, \dots, e_8)$, v níž je operátor φ reprezentován maticí A. Pro první blok tak máme tři soustavy rovnic po osmi rovnicích, každá pro osm neznámých. Poslední soustava (ta dole) je homogenní a je soustavou pro složky vlastního vektoru, dvě soustavy nad ní jsou nehomogenní. Nejprve tedy najdeme vlastní vektory operátoru (to umíme) a pak postupně dosazujeme do dalších soustav. Nejlepší bude ukázat to na praktickém příkladu.

PŘÍKLAD: Lineární operátor ve V_4 je v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) reprezentován maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Úkolem je najít nějakou bázi (f_1, f_2, f_3, f_4) (nebo obecně všechny báze), v níž je operátor reprezentován Jordanovou maticí a určit tuto matici. Úlohu budeme řešit jako obvykle v postupných krocích.

- Vlastní hodnoty:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 7/2-\lambda & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3-\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 5/2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\det \begin{pmatrix} 7/2-\lambda & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 3-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 5/2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(3-\lambda)\left[\left(\frac{7}{2}-\lambda\right)(3-\lambda)\left(\frac{5}{2}-\lambda\right)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(3-\lambda)+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\lambda\right)\right]=$$

$$(3-\lambda)^2\left[\left(\frac{7}{2}-\lambda\right)\left(\frac{5}{2}-\lambda\right)+\frac{1}{4}\right]=(3-\lambda)^4.$$

Charakteristickým kořenem je $\lambda = 3$, jeho násobnost je $k = 4$.

- Jak může vypadat Jordanův normální tvar operátoru? Jen na základě vlastních hodnot, pokud nejsou jednonásobné, to nemůžeme rozhodnout. Možnosti: (1) jeden blok 4. řádu, (2) jeden blok třetího řádu a jeden blok prvního řádu, (3) dva bloky druhého řádu, (4) jeden blok druhého řádu a dva bloky prvního řádu, (5) čtyři bloky prvního řádu.

Možnosti JNT – která to bude?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Abychom mohli rozhodnout, potřebujeme najít podprostory vlastních vektorů a invariantní podprostory odpovídající jednotlivým blokům, tj. řešit zřetězené soustavy rovnic typu (i), (ii), (iii), ... jak jsou znázorněny na posledním obrázku, pro neznámé složky $(\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2, \varepsilon_i^3, \varepsilon_i^4)$ vektorů báze (f_1, f_2, f_3, f_4). (Na rozdíl od obrázku je nyní $n = 4$.)

- Nalezení vlastních vektorů: $(\alpha \;\; \beta \;\; \gamma \;\; \delta)(A-3E) = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0) \ldots$ úprava matice $(A-3E)^T$ na schodovitý tvar:

$$(A-3E)^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Obecné řešení odpovídající soustavy rovnic: $(\alpha, 0, \gamma, -\alpha+\gamma)$, kde α a γ jsou volné neznámé.

- Čtyřnásobné vlastní hodnotě $\lambda = 3$ odpovídá dvojrozměrný vektorový podprostor, generovaný např. takto: $L = [|(1, 0, 0, -1), (0, 0, 1, 1)|]$. Z toho, co jsme zjistili obecně, vyplývá, že JNT obsahuje dva bloky. Zbývají tedy možnosti (2) a (3). Která to bude?

- V prvním kroku jsme řešili homogenní soustavu rovnic typu (i) pro vlastní vektory. Obecné řešení $(\alpha, 0, \gamma, -\alpha+\gamma)$ poslouží jako sloupec pravých stran v první nehomogenní soustavě rovnic typu (ii).

$(u\ \ v\ \ w\ \ t)(A-3E)=(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma\ \ \delta)$, $\quad (A-3E\,|\,\bar{B}_1)^T=$

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2\gamma \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2\alpha+2\gamma \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení jen pro $\alpha=0$. V takovém případě je její obecné řešení tvaru $(u, \gamma, w, -\gamma-u+w)$, kde u, w a γ jsou volné neznámé.

- Už teď je vidět, vzhledem k tomu, že řešení obsahuje volné neznámé, že báze (f_1, f_2, f_3, f_4) není určena jednoznačně. (Jednoznačné jsou podprostory vlastních vektorů a invariantní podprostory odpovídající blokům, které hledáme.) Až na uspořádání bloků podél diagonály je jednoznačný také JNT.

- Obecné řešení soustavy typu (ii) se nyní stane sloupcem pravých stran soustavy typu (iii)

$$(p \;\; q \;\; r \;\; s)(A-3E) = (u \;\; v \;\; w \;\; t), \quad (A-3E \,|\, \bar{B}_2)^T =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 2u \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2\gamma \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2w \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2\gamma - 2u + 2w \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 2\gamma - w \\ 0 & 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení jen pro $u = 0$. V tom případě je její obecné řešení

$$(p, \, q, \, r, \, s) = (p, \, w, \, r, \, 2\gamma - w - p + r),$$

kde p, w, r a γ jsou volné neznámé.

Toto poslední obecné řešení (obecné řešení soustavy typu (iii)) představuje složky vektoru f_1 v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4). Předposlední řešení (obecné řešení soustavy typu (ii)) je vektor f_2, vektorem f_3 je vlastní vektor $(0, 0, \gamma, \gamma)$. Vektory f_1, f_2, f_3 generují trojrozměrný invariantní podprostor Λ_1. Jemu přílúší v Jordanově matici blok třetího řádu.

- Vlastní vektor $f_4 = (\alpha, 0, \vartheta, -\alpha + \vartheta)$, kde $\alpha \neq 0$ a ϑ jsou volné neznámé, generuje invariantní podprostor „zbývající“ dimenze 1, $\Lambda_2 = [|f_4|]$.

  POZNÁMKA: Co by se stalo, kdybychom pokračovali v řešení řetízku soustav rovnic dalším krokem, s obecným řešením $(p, w, r, -2\gamma - w - p + r)$ jako sloupcem pravých stran? Nepochybně by vznikl nějaký spor. Zkuste to. A proč jsme volnou neznámou ϑ ve vyjádření vektoru f_4 neoznačili γ, jako na začátku, když jsme vyřešili soustavu (i)?

- Složky vektorů f_1, f_2, f_3 a f_4 uspořádané do řádků tvoří matici přechodu od báze (e_1, e_2, e_3, e_4) k bázi (f_1, f_2, f_3, f_4). Nejednoznačnost báze (f_1, f_2, f_3, f_4), v níž je operátor reprezentován Jordanovou maticí, je dána možnostmi volby volných neznámých.

$$T = \begin{pmatrix} p & w & r & 2\gamma - w - p + r \\ u & \gamma & w & -\gamma - u + w \\ 0 & 0 & \gamma & \gamma \\ \alpha & 0 & \vartheta & -\alpha + \vartheta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \gamma \neq 0,$$

kde α, γ, ϑ, u, w, p, r jsou volné neznámé. (Umíte zdůvodnit podmínku $\alpha, \gamma \neq 0$?)

Pro ilustraci a částečnou kontrolu zvolme volné neznámé co nejjednodušeji, protože počítání inversní matice je pěkná otrava:

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 1, \quad \vartheta = 0, \quad u = w = 0, \quad p = r = 0.$$

Pro matici T a matici inversní při této volbě dostaneme

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A teď zkontrolujte, zda platí $TAT^{-1} = J$, tj.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$ Mně to po několika pokusech vyšlo.

PŘÍKLAD JEŠTĚ JINAK Rovnou konrétní řešení

Příklad jsme řešili tak, že jsme v každé fázi hledání podprostorů vlastních vektorů a invariantních podprostorů pracovali s obecným řešením. Početně podstatně jednodušší je, neklademe-li si za cíl popsat všechny báze, ve kterých má operátor JNT, ale stačí nám některá z nich a pochopitelně samotný tvar JNT (ten je, jak víme, až na uspořádání bloků invariantní).

Zjistili jsme, že vlastní vektory operátoru generují ve V_4 dvojrozměrný podprostor vlastních vektorů, $L = [|(\alpha, 0, \gamma, -\alpha + \gamma)|]$. Pomocí dvou nezávislých verzí konkrétní volby volných neznámých, např. $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, resp. $\alpha = 0$, $\gamma = 1$, dostaneme $L = [|(1, 0, 0, -1), (0, 0, 1, 1)|]$. Každý z těchto dvou vlastních vektorů náleží určitému bloku, tj. JNT obsahuje dva bloky. (Už v této chvíli vidíme, že hledaná báze není určena jednoznačně, závisí na konkrétní volbě volných neznámých.)

Za sloupce pravých stran nehomogenních soustav v řetízku rovnic teď postupně dosadíme konkrétně vybrané vlastní vektory, tj. $\bar{B}_1 \ldots (0, 0, 1, 1)$ a $\bar{B}'_1 \ldots (1, 0, 0, -1)$.

$$(A - 3E \mid \bar{B}_1)^T =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Obecné řešení je $(u, 1, w, -1 - u + w)$ s volnými neznámými u a w. Zvolme třeba $u = 0$, $w = 0$, pak $\bar{B}_2 = (0, 1, 0, -1)$ Toto řešení dosadíme opět do soustavy rovnic $(A - 3E \mid \bar{B}_2)^T$ jako sloupec pravých stran:

$$(A - 3E \mid \bar{B}_2)^T =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Obecné řešení této soustavy je

$$(p,\, q,\, r,\, s) = (p,\, 0,\, r,\, 2 - p - r)$$

Nejjednodušší volba volných neznámých je $p = r = 0$. Řešením je pak vektor $(0, 0, 0, 2)$.

POZNÁMKA: Zvažte, k čemu by došlo, kdybychom za volné neznámé u a w zvolili jiné hodnoty? Snadno uvidíte, že pro $u \neq 0$ by soustava neměla řešení – je to vidět hned v prvním řádku.

V tuto chvíli máme zcela konkrétní vektory f_1, f_2, f_3:

$$f_3 = (0,\, 0,\, 1,\, 1), \quad f_2 = (0,\, 1,\, 0,\, -1), \quad f_1 = (0,\, 0,\, 0,\, 2).$$

Nyní dosadíme vlastní vektor $(1, 0, 0, -1)$:

$$(A - 3E \mid \bar{B}_1')^T =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Aniž bychom museli cokoli počítat, vidíme, že tato soustava nemá řešení (hodnosti matice soustavy a matice rozšížené nejsou stejné). Nedostaneme tedy již nic jiného, než vlastní vektor $(1, 0, 0 - 1)$. Tomu odpovídá blok prvního řádu a invariantní podprostor $\Lambda_2 = [|f_4|] = [|1, 0, 0 - 1)|]$.

Jedna z možných bází, v nichž je operátor reprezentován Jordanovou maticí, je (f_1, f_2, f_3, f_4). JNT obsahuje dva bloky, oba příslušné hodnotě $\lambda = 3$. První z nich je řádu 3, druhý řádu 1. Toto pořadí bloků odpovídá zvolenému pořadí číslování vektorů báze.

Matice přechodu od báze (e_1, e_2, e_3, e_4) k bázi (f_1, f_2, f_3, f_4), která odpovídá konkrétní volbě volných neznámých po každém kroku v řešení zřetězených soustav rovnic, je

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

V jejích řádcích jsou složky vektorů f_1, f_2, f_3 a f_4 v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4). Je to táž matice, kterou jsme získali z obecného řešení celého souboru soustav rovnic dosazením konkrétních hodnot volných neznámých až na konci celé procedury řešení.