

ALGEBRAICKÉ POSTUPY (NEJEN) V ANALYTICKÝCH FYZIKÁLNÍCH ÚLOHÁCH A NAOPAK -2

Pavla MUSILOVÁ, Jana MUSILOVÁ

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta MU, pavla@physics.muni.cz,
janam@physics.muni.cz

V druhé části stejnojmenného příspěvku se věnujeme významné situaci, kdy analytický postup vede k důkazu či objasnění algebraických výsledků, a situaci, kdy je součinnost lineární algebry a analýzy nejen účinná, ale pro praktické řešení fyzikálního problému nezbytná. Příklad se týká souvislosti algebry a teorie funkcí komplexní proměnné.

A naopak – analytické postupy v algebře

Při řešení fyzikálních úloh často automaticky používáme algebraická tvrzení, aniž se zamýšlíme nad jejich podstatou či důkazem. Jedním z nich je tzv. *základní věta algebry*, podle níž má každý polynom n -tého stupně s obecně komplexními koeficienty právě n kořenů včetně násobnosti. Bereme to jako samozřejmé zjevení a jako jediný problém se obvykle jeví nalezení kořenů. Fyzikálních aplikací této věty je řada, například hledání vlastních hodnot lineárních operátorů a vlastních vektorů nejen v kvantové (vlastní hodnoty a stavy hamiltoniánu a dalších operátorů), ale i v klasické mechanice (hlavní momenty setrvačnosti těles a hlavní osy, hodnoty dielektrické permitivity a indexu lomu u anizotropních látek, apod.)

Jak se ale základní věta algebry dokazuje? V historii matematiky najdeme řadu jejích důkazů, spojených se jmény slavných matematiků (Gauss – vůbec první důkaz 1799, Euler, Lagrange, Liouville). Důkazy jsou algebraické, analytické a dokonce topologické (i když tyto kategorie samozřejmě nejsou zcela disjunktní). Vskutku velmi pěkný a zřejmě i vyčerpávající přehled o nich najde zájemce v práci [1], v níž autorka přináší 30 důkazů této důležité věty. Některé důkazy jsou náročnější, v některých se prolíná potřeba znalostí z algebry, analýzy, či geometrie.

Velmi efektivní jsou některé z důkazů využívající právě poznatků teorie funkcí komplexní proměnné. Dnešní studenti nejspíše znají standardní důkaz pomocí tzv. Liouvilleovy věty¹, jenž je natolik známý, že se jím zde zabývat nebudeme. Čtenář najde znění Liouvilleovy věty i její důkaz prakticky v každé učebnici analýzy v komplexím oboru, jichž je nepřeberné množství. Zde odkazujeme na vynikající a matematicky zcela korektní studijní text [2], viz např. také [3], [4] a [5]. Elegantní a stručný, avšak méně citovaný důkaz poskytuje *Rouchéova věta*. Je i sama o sobě významná. Pro studenta třeba i dobře obeznámeného s matematickou analýzou v reálném oboru může být i překvapivá, pokud se jeho znalost v oboru komplexním pohybuje jen v oblasti prvotního základu. K představení důkazu základní věty algebry využijeme právě této věty. Její podstatou je tvrzení o kořenech (nulových bodech) dvou

¹ Tvrzení s názvem Liouvilleova věta je více. Ta, o níž je zde řeč, spadá do oblasti teorie funkcí komplexní proměnné. Již sama tato věta je příkladem „síly“ analýzy funkcí komplexní proměnné: Je-li funkce komplexní proměnné v komplexní rovině ohraničená a má v každém jejím bodě derivaci, pak je konstantní.

holomorfních funkcí komplexní proměnné, které jsou si v jistém smyslu „dostatečně blízké“. Přitom však ta „blížkost“ ve skutečnosti nemusí být tak úplně „těsná“, jak za chvíli uvidíme. Věta – velmi zhruba – říká, že v jisté oblasti (otevřené souvislé množině) komplexní roviny mají, za specifikovaných podmínek, takové „blízké“ funkce stejný počet kořenů. Prakticky to znamená, že známe-li počet kořenů jedné z těchto funkcí, která je třeba hodně jednoduchá, určíme počet kořenů jiné funkce, která už tak jednoduchá není. A když hovoříme o polynomech, nejjednodušším polynomem n -tého stupně s komplexními koeficienty je polynom $P_n(z) = z^n$. Ten má, jak je z jeho jednoduchého vyjádření zřejmé, v komplexní rovině právě n -násobný kořen nula. Jde tedy o n kořenů, i když jsou stejné. A z Rouchéovy věty plyne, že obecný polynom n -tého stupně $Q_n(z) = z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \dots + A_2z^2 + A_1z + A_0$ má v komplexní rovině také právě n kořenů včetně násobnosti. Že je to skoro neuvěřitelné? A jak je to s tou „blížkostí“ funkcí, když ten polynom je libovolný?

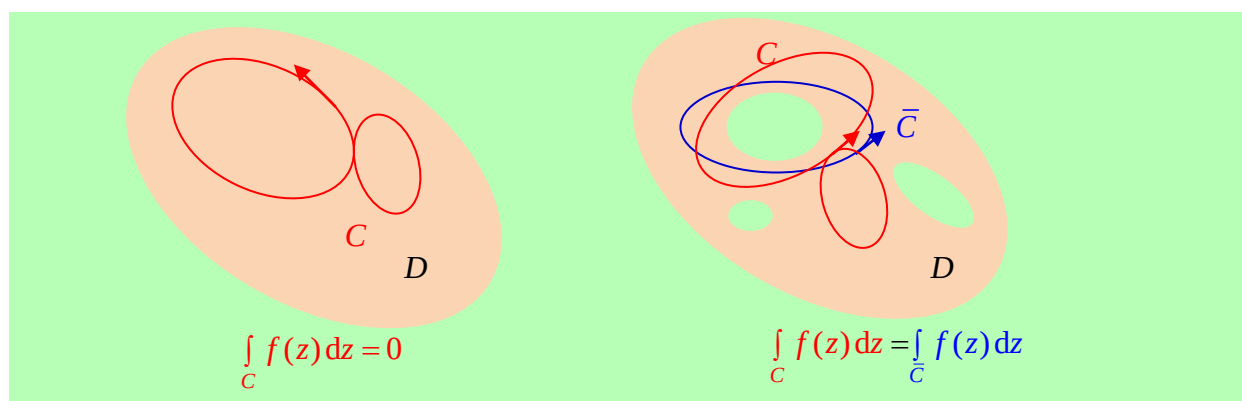
Formulujeme nejprve Rouchéovu větu a pak ji vysvětlíme a dokážeme. Aby její formulaci a „úspornému“ důkazu student porozuměl, budeme předpokládat, že poznal a pochopil nejnужnější pojmy a tvrzení základu analýzy v komplexním oboru: holomorfní funkce (tj. funkce s derivací) a vztahy mezi jejich reálnou a imaginární částí (Cauchyovy-Riemannovy podmínky), lokální Cauchyova věta (nulový integrál z holomorfní funkce po uzavřené, po částech hladké rektifikovatelné² křivce ležící v jednoduše souvislé oblasti), Taylova řada holomorfní funkce, Laurentova řada funkce se singularitami, reziduová věta.

Navíc jen připomenutí známého

I když jsme vyslovili předpoklad, že čtenář Cauchyovu větu zná, zopakujeme ji i v její globální verzi. Pro tu je důležité, že integrál i z holomorfní funkce po křivce, která obíhá nějaké oblasti, v nichž funkce nemusí být holomorfní a třeba ani definovaná (např. izolované body – tzv. singularity), nemusí být nulový. A po názorném příkladu připomeneme i větu o reziduích.

Cauchyova věta

Integrál z funkce holomorfní v jednoduše souvislé³ oblasti D po uzavřené po částech hladké rektifikovatelné křivce (obr. 4 vlevo) ležící v této oblasti je nulový. Pokud oblast není nutně jednonásobně souvislá, může být integrál nenulový. Platí však, že integrály po křivkách, které „obíhají díru“ v oblasti (včetně orientace) stejněkrát, jsou shodné.



Obr. 1: K výkladu Cauchyovy věty.

² Rektifikovatelnou se rozumí, zhruba řečeno, křivka, jejíž délka, definovaná integrálem prvního druhu z délkového elementu, má konečnou hodnotu.

³ Jednoduše souvislá oblast je taková, jejíž doplněk v $\mathbb{C}$ má právě jednu komponentu. Stručně: jednoduše souvislá oblast je spojitě „stažitelná do bodu“, neboli není „děravá“. (Na obr. 1 vpravo je D čtyřnásobně souvislá.)

Příklad: Zvolme funkci $f(z) = (z - z_0)^n$, $n \in \mathbf{Z}$, a počítejme její integrál I po kružnici K o poloměru r , obíhající bod z_0 k -krát v kladném smyslu, $z(t) = z_0 + r e^{it} \in \mathbf{C}$, $t \in [0, 2k\pi]$, $k \in \mathbf{N}$.

$$I_n = \int_K (z - z_0)^n dz = \int_0^{2k\pi} r^n e^{int} (ir e^{it}) dt = r^{n+1} \frac{e^{i \cdot 2k\pi(n+1)} - 1}{i(n+1)} \text{ pro } n \neq -1. \text{ Pro } n = -1 \text{ je}$$

$$I_{-1} = k \cdot (2\pi i).$$

Integrál z funkce $f(z) = z^n$, $n \in \mathbf{Z}$, je tedy nulový pro všechny celé mocniny proměnné z , s výjimkou $n = -1$. Tento výsledek bychom díky Cauchyově větě čekali pro všechna nezáporná n , pro něž je funkce holomorfní v celé komplexní rovině. Integrál je však nulový i pro záporná n různá od -1 , přestože pro ně není funkce definována v nule a integrační křivka přitom bod z_0 obíhá. Při každém oběhu se „naintegruje“ hodnota $2\pi i$. Bude v tom tedy něco hlubšího – a tím je právě platnost věty o reziduích. Než ji (pro potřebu důkazu Rouchéovy věty) připomeneme, využijme předpokladu, že čtenář ví, co je rozvoj funkce komplexní proměnné v (absolutně a stejnoměrně konvergentní) Laurentovu řadu v okolí bodu z_0 .

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \text{rozklad na hlavní a regulární část.}$$

Členy hlavní části nejsou v bodě z_0 definovány, funkce v něm má *izolovanou singularitu*.

Vyjádření funkce touto řadou platí v otevřeném kruhu $P(z_0, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ (tj. s vyjmutým středem v bodě z_0), v němž je funkce holomorfní⁴. Zintegrujeme-li řadu člen po členu (to je možné díky stejnoměrné konvergenci) po uzavřené křivce, která k -krát obíhá singularitu, dostaneme v souladu s uvedeným příkladem výsledek $k \cdot (2\pi i) \cdot c_{-1}$. Koeficient c_{-1} tedy určuje, názorně řečeno, jakousi „zbytkovou hodnotu“ oproti Cauchyově větě, tedy *reziduum funkce v bodě* z_0 , $c_{-1} = \text{res } f(z_0)$. Počet oběhů křivky kolem bodu z_0 opatřený znaménkem podle orientace je tzv. index bodu z_0 vzhledem ke křivce C , značíme jej $\text{Ind}_C(z_0)$. Věta o reziduích v její nejjednodušší podobě teď již snad bude názorná.

Věta o reziduích

Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je v oblasti D holomorfní s výjimkou spočetně mnoha singularit $z_1, z_2, \dots, z_j, \dots$, přičemž množina singularit může mít hromadné body nejvýše na hranici oblasti D . Pro integrál z funkce $f(z)$ po uzavřené po částech hladké rektifikovatelné křivce C ležící v oblasti D platí

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Ind}_C(z_j) \cdot \text{res } f(z_j), \text{ kde } \text{Ind}_C(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Z výše uvedené formulace je zřejmé, že i když singularit může být v oblasti D i nekonečně mnoho (i když „jen“ spočetně), křivka C jich ve skutečnosti obíhá jen konečný počet – to proto, že se singularity podle předpokladu mohou, názorně řečeno, „hromadit“ až na hranici oblasti D . Samozřejmě to lze snadno korektně dokázat. V případě singularit v praktických výpočtech nejčastějšího typu, tzv. pólů, existují i praktické vztahy pro výpočet reziduí, které však pro důkaz Rouchéovy věty nepotřebujeme. Čtenář, který se dostal až sem, se ovšem nemůže domnívat, že zvládl celý základ problematiky funkcí komplexní proměnné. Jistě však

⁴ Má-li funkce singularit více, rozdělí se jimi komplexní rovina na otevřená mezikruží se středem v bodě z_0 , v nichž je funkce holomorfní.

nahlédl, že vlastnosti funkcí komplexní proměnné $z = x + iy$ se v mnohém liší od vlastností funkcí dvou reálných proměnných x a y , jsou mnohem silnější. A tak lze text tohoto odstavce chápat třeba i jako inspiraci pro studium velmi zajímavé oblasti matematiky.

Rouchéova věta a základní věta algebry

Rouchéově větě předchází ještě jedno tvrzení o kořenech funkce. Pro obě formulujeme společné předpoklady:

Předpokládejme, že C je uzavřená (po částech hladká a rektifikovatelná) křivka ležící v oblasti D a neobíhá žádný z bodů v této oblasti neležících (názorně řečeno, neobíhá díry). Dále předpokládejme, že pro každý bod množiny $D \setminus C$ platí, že jej křivka obíhá jednou v kladném smyslu ($\text{Ind}_C(z) = 1$), nebo vůbec $\text{Ind}_C(z) = 0$). Označme jako $D_1 = \{z \in D \setminus C \mid \text{Ind}_C z = 1\}$.

Věta o kořenech funkce

Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v D a v D_1 má právě N_f kořenů (nulových bodů) včetně násobnosti, a nechť nemá nulové body na křivce C . Pak platí

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}_{f \circ C}(0).$$

Zamyslíme-li se nad touto větou, hned vidíme, že opět nemusíme integrál počítat. Stačí zjistit, kolikrát křivka, která je obrazem křivky C funkcí f , oběhne počátek⁵. A po praktické stránce je výsledek zajímavý a užitečný i tím, že integrand má tvar logaritmické derivace funkce $f(z)$.

Příklad: Jednoduchá ukázka funkčnosti věty o kořenech je na obr. 2 vpravo. Jedná se o funkci $f(z) = z^2 + 1$, holomorfní v $D = \mathbb{C}$. Jejími jednonásobnými kořeny jsou body $z_1 = i$ a $z_2 = -i$. Křivkou C (modrá) je kladně orientovaná kružnice se středem v bodě z_1 a poloměrem $r < 2$, tj. $z = i + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, která kořen z_1 obíhá jednou. Křivka $f \circ C$ (červená) je $f \circ C = (i + r e^{it})^2 - 1 = 2ir e^{it} + r^2 e^{2it} = (-2r \sin t + r^2 \cos 2t) + i(2r \cos t + r^2 \sin 2t)$. Ta obíhá jednou bod nula.

Důkaz věty o kořenech: Uvažujme rovnou o funkci $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Každý kořen (nulový bod)

funkce $f(z)$ je zároveň tzv. *pólem* funkce $g(z)$ (singularitou, která „vyrabí“ nulu ve jmenovateli). Předpokládejme, že z_0 je takovým bodem, takže v jistém kruhu⁶

$B = B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ platí $f(z) = (z - z_0)^{m(z_0)} \varphi(z)$, kde $m(z_0)$ je *násobnost kořene* (stejný pojem jako například u polynomu) a $\varphi(z)$ je holomorfní funkce v B a platí $\varphi(z_0) \neq 0$. (Faktor $(z - z_0)^{m(z_0)}$, který je zodpovědný za kořen, lze takto explicitně „vyčlenit“.) Situaci přiblíží schematický obr. 2 vlevo a konkrétní příklad vpravo. Vyjádříme-li nyní funkci $g(z)$, dostaneme (čtenář jistě snadno derivaci i podíl provede)

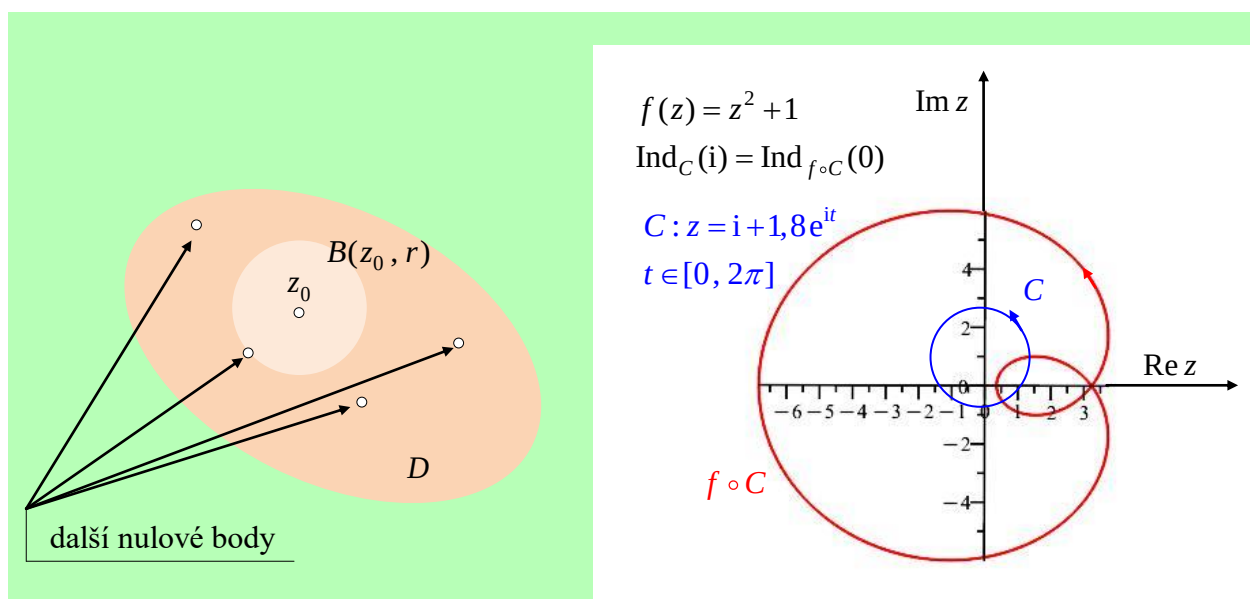
⁵ Tohle vypadá jednoduše, praktické zjištění počtu oběhů křivky $f \circ C$ kolem počátku však jednoduché zdaleka být nemusí. Jde tedy spíše o zajímavost.

⁶ Otevřený kruh má střed v bodě z_0 a sahá po nejbližší nulový bod funkce $f(z)$.

$g(z) = \frac{m(z_0)}{z - z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$. Z toho, co jsme řekli o funkci $\varphi(z)$, je zřejmé, že první zlomek

představuje hlavní část Laurentovy řady funkce $g(z)$ v B a druhý její regulární část, přičemž $\text{res } g(z_0) = m(z_0)$. Integrál, o který nám jde, je podle reziduové věty roven součtu reziduí funkce $g(z)$ v pólech, které křivka C obíhá, započtených včetně násobnosti a vynásobených počtem oběhů. Těchto pólů je ovšem tolik, kolik je kořenů funkce $f(z)$, tj.

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i N_f. \text{ Dále je } \text{Ind}_{f \circ C}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ C} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$



Obr. 2: K vě

Rouchéova věta

Nechť jsou splněny předpoklady uvedené výše. Navíc uvažujme o funkci $h(z)$, která je rovněž holomorfní v oblasti D a platí pro ni $|h(z) - f(z)| < |f(z)|$ pro každý bod z ležící na křivce C . Pak platí $N_h = N_f$.

Je vidět, že je to silná věta. Nerovnost $|h(z) - f(z)| < |f(z)|$ charakterizuje odlišnost dvou funkcí na křivce C , přitom nespecifikuje nic dalšího. Funkce se tedy mohou lišit i dost významně a přesto mají v $D_1 = \{z \in D \setminus C \mid \text{Ind}_C z = 1\}$ stejný počet kořenů (včetně násobnosti).

Důkaz⁷: Uvažujme o křivkách $\gamma_f = f \circ C$ a $\gamma_h = h \circ C$. (Parametrické vyjádření křivky C je $[\alpha, \beta] \ni t \rightarrow C(t) = (x_C(t), y_C(t)) \in \mathbb{C}$.) Víme, že $N_f = \text{Ind}_{\gamma_f}(0)$, $N_h = \text{Ind}_{\gamma_h}(0)$. Dále

zvolme křivku γ s parametrickým vyjádřením $\gamma(t) = \frac{\gamma_h(t)}{\gamma_f(t)}$. Platí (tečka značí derivaci)

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \dot{\gamma}(t) = \frac{\dot{\gamma}_h(t)\gamma_f(t) - \gamma_h(t)\dot{\gamma}_f(t)}{\gamma_f^2(t)}, \text{ a tedy } \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} = \frac{\dot{\gamma}_h(t)}{\gamma_h(t)} - \frac{\dot{\gamma}_f(t)}{\gamma_f(t)}. \text{ Odtud pak}$$

⁷ Důkaz, který uvádíme, není, stejně jako u jiných vět z oblasti funkcí komplexní proměnné, jediný možný. Nevyžaduje však kromě základních znalostí, které jsme výše specifikovali, další předchozí tvrzení.

$$\text{Ind}_{\gamma}(0) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\gamma}_h(t)}{\gamma_h(t)} dt - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\gamma}_f(t)}{\gamma_f(t)} dt = \text{Ind}_{\gamma_h}(0) - \text{Ind}_{\gamma_f}(0).$$

Z nerovnosti $|h(z) - f(z)| < |f(z)|$ platné na křivce C plyne $\left| \frac{\gamma_h(t)}{\gamma_f(t)} - 1 \right| < 1 \Rightarrow |\gamma(t) - 1| < 1$.

Křivka γ tedy leží v otevřeném kruhu o poloměru 1 se středem v bodě 1 na reálné ose a neobíhá proto bod 0. Dostáváme tak $\text{Ind}_{\gamma}(0) = \text{Ind}_{\gamma_h}(0) - \text{Ind}_{\gamma_f}(0) = 0$, čímž jsme Rouchéovu větu (s využitím věty o kořenech) dokázali.

Základní věta algebry

Polynom jedné proměnné stupně n s komplexními koeficienty má v $\mathbb{C}$ právě n kořenů včetně násobnosti.

Důkaz:

Důkaz této velmi důležité a pro praktické výpočty nepostradatelné věty jako přímý důsledek Rouchéovy věty je až neuvěřitelně jednoduchý. Označme polynom n -tého stupně

$$h(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_2z^2 + a_1z + a_0, \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}, \quad f(z) = z^n.$$

Funkce $f(z) = z^n$ má n -násobný kořen (nulu). Snadno dokážeme, že funkce $f(z)$ a $h(z)$ splňují předpoklady Rouchéovy věty: Především je zřejmé, že obě jsou holomorfní v $\mathbb{C}$. Počítejme podíl

$$\begin{aligned} \frac{|h(z) - f(z)|}{|f(z)|} &= \frac{|a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_2z^2 + a_1z + a_0|}{|z^n|} = \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{z^2} \right| + \dots + \left| \frac{a_1}{z^{n-1}} \right| + \left| \frac{a_0}{z^n} \right| \end{aligned}$$

Jako křivku C vystupující v Rouchéově větě zvolme kružnici se středem v bodě $z_0 = 0$ o poloměru $R = 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|$. Pro $z \in C$ je (pro libovolné hodnoty koeficientů polynomu $|h(z)|$)

$$\frac{|h(z) - f(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{|a_{n-1}|}{1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|} + \dots + \frac{|a_0|}{(1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|)^n} < 1 \Rightarrow |h(z) - f(z)| < |f(z)|.$$

Tato nerovnost bude zachována pro libovolnou hodnotu $R' > R$, tj. pro libovolně velkou kružnici ležící v komplexní rovině. Funkce $f(z)$ a $h(z)$ mají tedy v komplexní rovině stejný počet kořenů, tj. n včetně násobnosti⁸.

Algebra, analýza a fyzika

Uvedli jsme typickou ukázkou důležitého algebraického výsledku, který se nejsnáze dokazuje analyticky a navíc je hojně využíván ve fyzice. (Příklady jsme uvedli v první části.) Není

⁸ I když se věta o kořenech funkce a na ní založená Rouchéova věta jeví jen jako podpůrná tvrzení pro důkaz tzv. základní věty algebry, jsou samy o sobě i příkladem algebraických výsledků založených na analytických postupech. V principu třeba umožňují určit oblasti, v nichž zadaná funkce nemá žádné kořeny (například může jít o kořeny jmenovatele lomené funkce). Příliš praktické by to však jistě nebylo.

jednoduché nacházet natolik vyhraněné situace, kdy lze k analytickým výsledkům dospět algebraicky, či naopak, zato však kombinace algebry a analýzy vstupuje do fyziky neustále – vždyť v podstatě všechny objekty definované na euklidovských prostorech, nebo prostorech s obecnějším metrickým tenzorem (např. Minkowského), tj. vektorová a tenzorová pole potřebných vlastností mají algebraický základ. Uvedeme alespoň jeden příklad „prolnutí“ analytického a algebraického aspektu při řešení konkrétní fyzikální úlohy. Jde jen o ukázkou efektivitu matematického aparátu, proto nechť čtenář neočekává podrobné řešení experimentálně i teoreticky netriviální, byť „klasické“ fyzikální úlohy.

Příklad: V první části jsme se pouze zmínili o konvoluci dvou funkcí jako specifickém lineárním integrálním vztahu mezi nimi a možnosti jejího převedení na úměru, tj. lineární algebraický vztah mezi jejich Laplaceovými obrazy⁹. O co jde a jaká je souvislost s fyzikou: Optickou odezvu pevné látky lze v oblasti viditelných frekvencí popsat právě jako *konvoluci*. Uvažme nejjednodušší situaci, kdy mezi intenzitou elektrického pole elektromagnetické vlny a polarizací izotropní látky platí příčinný lokální vztah ve tvaru

$$P(t) = \int_{-\infty}^t \alpha(t-t') E(t') dt = \int_0^{\infty} \alpha(\tau) E(t-\tau) d\tau, \text{ kde vzhledem k předpokladu lokálnosti}$$

nevypisujeme prostorové souřadnice a vzhledem k izotropii látky nevyznačujeme vektorový charakter. Odezvová funkce α , zvaná *polarizovatelnost*, zprostředkuje vztah mezi polarizací v okamžiku t a intenzitou ve všech okamžicích minulých.

Jednostranná Laplaceova transformace

Uvažme zobrazení, které obecně komplexní funkci $f(t)$ jedné reálné proměnné (v našem případě času), splňuje-li potřebné podmínky, přiřadí obraz – komplexní funkci komplexní proměnné vztahem $Lf(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt$. V oblasti, kde *Laplaceův obraz* existuje (tj. kde příslušný integrál konverguje), je $Lf(z)$ holomorfní funkcí¹⁰.

Aniž bychom se dopodrobna zabývali existenčními podmínkami, ukažme jen, že v případě tzv. absolutně integrabilní funkce na intervalu $[0, \infty)$ existuje $Lf(z)$ v celé horní polorovině komplexní roviny. Provedeme odhad s dosazením $z = x + iy$:

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| |e^{i(x+iy)t}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-yt} dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)| dt < \infty \text{ pro } y \geq 0 \text{ a libovolné } x.$$

Absolutní integrabilita funkce $f(z)$ s významem fyzikální veličiny je realistický požadavek.

Laplaceovy obrazy polarizace a intenzity jsou pak spojeny prostou úměrou: Označme

$$\tilde{P}(z) = LP(z), \tilde{E}(z) = LE(z), \tilde{\alpha}(z) = L\alpha(z). \text{ Pak platí}$$

$$\tilde{P}(z) = \int_0^{\infty} P(t) e^{izt} dt = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \alpha(\tau) E(t-\tau) d\tau \right] e^{izt} dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \alpha(\tau) e^{iz\tau} \left(E(t-\tau) e^{iz(t-\tau)} \right) d\tau dt = \tilde{\alpha}(z) \cdot \tilde{E}(z).$$

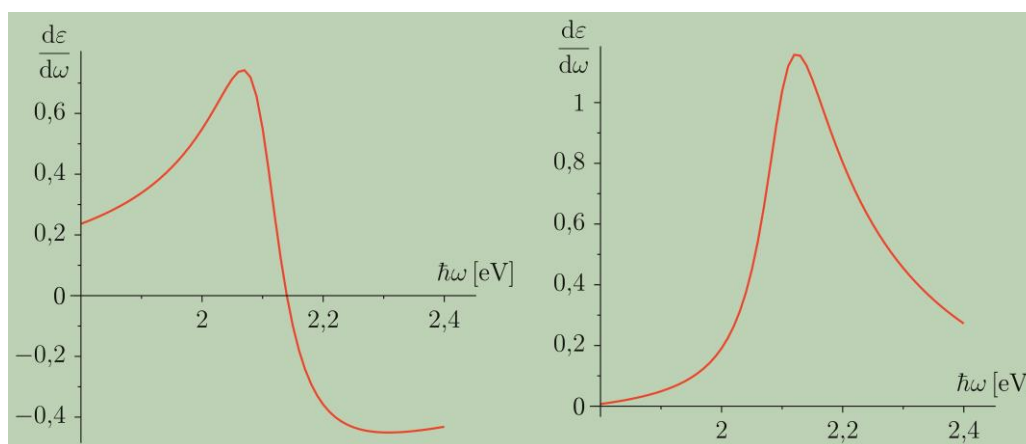
Pro holomorfní funkci $\tilde{\alpha}(z)$ lze pak snadno prokázat souvislost mezi její reálnou a imaginární částí na reálné ose, známé *Kramersovy-Kronigovy relace* – příklad je na obr. 3. (Snadný a názorný výklad viz také např. v ČČF – [6]). A ještě otázka: Jak „zpřístupnit“ funkci $\tilde{\alpha}(z)$ experimentálně? V principu, bez vysvětlení detailů zprostředkovaných měření a zpracování výsledků, takto: Představme si monochromatickou elektromagnetickou vlnu

⁹ Tato vlastnost se využívá například při řešení diferenciálních rovnic (ať již z fyzikálním významem či bez něj) k jejich převodu na rovnice algebraické.

¹⁰ Čtenář znalý Cauchyových-Riemannových podmínek snadno prověří jejich platnost jednoduchým přímým výpočtem.

$$E(t, \omega) = E_0 e^{-i\omega t}. \text{ Pak } P(t, \omega) = \int_0^{\infty} \alpha(\tau) E_0 e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau = E_0 e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} \alpha(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \tilde{\alpha}(\omega) E(t, \omega).$$

Výsledkem je opět úměra mezi polarizací látky a intenzitou pole, v níž je faktorem úměrnosti právě Laplaceův obraz polarizovatelnosti na reálné ose. Polarizace se samozřejmě přímo (ve skutečném experimentu) nezjišťuje, měří se například odrazivost vzorku (relativní odražená intenzita), fáze koeficientu odrazivosti se získá z odpovídajících Kramersových-Kronigových relací. A pak již existují postupy pro zjištění reálné a imaginární části veličiny $\tilde{\alpha}(z)$, jež již lze porovnávat s mikroskopickými modely.



Obr. 3: Grafy reálné (vlevo) a imaginární (vpravo) části derivace veličiny $\varepsilon(\omega) = \tilde{\alpha}(\omega) + 1$, splňující Kramersovy-Kronigovy relace. Relativní jednotky. Převzato z [5]¹¹.

Závěr

Lineární algebra i matematická analýza nejsou jen „technickým aparát“ fyziky. Jsou její součástí. Jsou s ní pevně svázány a jsou provázány i navzájem. A také by se tak ve studiu fyzikálních oborů na vysokých školách měly vyučovat.

Literatura

- [1] P. Čechová: Základní věta algebry a její důkazy. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Brno 2013.
- [2] J. Kalas: Analýza funkcí komplexní proměnné. Masarykova univerzita, Brno, 2009.
- [3] J. Bouchala: Funkce komplexní proměnné. VŠB-TUO Ostrava, Ostrava 2001.
- [4] <https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/testkom.pdf>
- [5] J. Musilová, P. Musilová: Matematika pro porozumění i praxi III, VUTIUM, Brno 2018.
- [6] J. Musilová, M. Lenc: Jak interpretovat odezvové funkce. Československý časopis pro fyziku **62** (2012), 3, 147-150.

¹¹ Výpočet pro kritický bod 3DM₀ sdružené hustoty stavů odpovídající přímému mezipásovému přechodu elektronu z valenčního do vodivostního pásu modelové látky, energie přechodu 2,1 eV, rozšíření 0,05 eV. Struktura samotné veličiny $\tilde{\alpha}(\omega)$ není výrazná, proto je ukázka prezentována pro derivaci, která rovněž splňuje odpovídající K-K relace.