

ALGEBRAICKÉ POSTUPY (NEJEN) V ANALYTICKÝCH FYZIKÁLNÍCH ÚLOHÁCH A NAOPAK

Pavla MUSILOVÁ¹⁾, Pavel KONEČNÝ²⁾, Jana MUSILOVÁ¹⁾

¹⁾Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, pavla@physics.muni.cz, janam@physics.muni.cz,

²⁾ Ústav fyziky a technologií plazmatu, pavelk@physics.muni.cz

Témata matematické analýzy a lineární algebry a geometrie (jakožto dvou zásadních matematických předmětů ve vysokoškolském studiu fyziky a učitelství fyziky například na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity) bývají v univerzitních studijních programech takřka „striktně“ oddělena (stejně jako odpovídající tematické celky v předmětu Matematika na školách nižších stupňů – pokud jsou příslušná témata do výuky vůbec zařazena). Nesleduje se většinou jejich propojení či návaznost, vyučují je různí učitelé, jimiž na univerzitách bývají profesionální matematikové, kteří nemívají blízko k jejich aplikacím ve fyzikálních úlohách (výjimkou je výuka lineární algebry na Přírodovědecké fakultě MU). Při řešení fyzikálních problémů od nejjednodušších po komplexní, zasahujících třeba i do několika fyzikálních oblastí, se však obě disciplíny uplatňují zdaleka ne jen odděleně. Prolínají se. Často lze algebraické postupy efektivně využít při řešení analytických fyzikálních úloh a také naopak. O příkladech takových situací a zejména o uplatnění obojího ve fyzice pojednává tento příspěvek ve dvou částech. První část je algebraická a je doplněná experimentem.

Úvodem: „Výuka matematiky a výuka fyziky“ versus „výuka matematiky a fyziky“

Název tohoto úvodního odstavce se jeví jako nesmyslný jen zdánlivě. Jednou z velkých „bolítek“ výuky fyziky na školách všech stupňů je (podle našeho názoru vyplývajícího ze zkušeností) její odtrženost od výuky matematiky – jako by to často byly dvě zcela odlišné disciplíny. Na základní škole samozřejmě nelze nějaké velké propojení očekávat, tam si představujeme, že by výuka fyziky měla být založena spíše na experimentech (prováděných ovšem před studenty přímo – fyzicky – nikoli prostřednictvím internetových videí) a jejich kvalitativním rozboru. Na středních školách by však propojení výuky fyziky s matematikou mělo být předepsanými plány různých typů (RVP, ŠVP) přímo požadováno. Že tomu tak není nejen „na papíře“ (v plánech), ale bohužel zejména ve skutečnosti, se projeví hned v prvních týdnech prvního semestru univerzitního studia všech fyzikálních specializací, včetně specializace Fyzika se zaměřením za vzdělávání, směřující ke studiu učitelství fyziky.

Tak například: prvním fyzikálním předmětem, s nímž se studenti fyziky na vysoké škole setkají, je předmět Mechanika. O potřebnosti práce s vektory v mechanice není jistě pochyb. Jenže studenti o vektorech z výuky matematiky, z níž třeba i maturovali, vědí snad jen to, že jsou to nějaké „šipky“, v lepším případě „orientované úsečky“, ale pracovat s nimi většinou neumějí. Dovedou sice skládat a rozkládat síly pomocí grafických postupů – pěkný rozbor viz např. v [1] – a někteří si i vzdáleně a po nápovědě poukazující právě na matematiku vzpomenu na Pythagorovu, sinovou a kosinovou větu z matematiky a dovedou tak i něco vypočítat, ale tím vzpomínka na styčné body středoškolské matematiky a fyziky většinou končí – ve znalost a dovednost v počítání se složkami v bázích nelze doufat. (Samozřejmě –

automaticky se předpokládá, že studenti zvládají použití běžných rutinních matematických postupů, k nimž patří např. úprava algebraických výrazů, sestavení kartézských či parametrických rovnic rovinných lineárních a kvadratických útvarů, řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav, apod., ale i tento předpoklad často není splněn – studenti se s uvedenými postupy často doslova potýkají¹.)

Alespoň jeden příklad těsné souvislosti fyzikálního problému s jeho matematickým zázemím za mnohé: Typickou otázkou z mechaniky, na niž studenti odpovídají buď chybně, nebo si vůbec neuvědomí její možné úskalí, je problém nalezení výslednice soustavy sil a jejího umístění, která by danou soustavu sil nahradila z hlediska první i druhé impulsové věty, tj. z hlediska translačního i rotačního pohybu. Zkušenost ukazuje, že studenti jsou vesměs, tedy skutečně bez výjimky, přesvědčeni, že takovou výslednici lze nalézt vždy. K omylu dospívají proto, že se ve středoškolské fyzice setkali pouze se soustavou sil ležících (včetně jejich působišť) v jedné rovině. Vůbec je nenapadne (mj. proto, že je k takovým úvahám výuka fyziky a ani matematiky nevede), že soustava lineárních rovnic pro nalezení působišť výslednice nemusí mít řešení. Fyzikální úloha a odpovídající úloha z lineární algebry se tedy při výuce vůbec „nepotkají“. Důsledný rozbor tohoto problému má ovšem jednak poměrně zásadní význam pro hlubší porozumění zákonům mechaniky (obě impulsové věty), jednak může přispět k rozvoji uvažování v oblasti jednoduché, ale o to důležitější, problematiky lineární algebry – teorii soustav lineárních rovnic. Této úloze však bohužel není ve vzdělávacích textech věnována pozornost – jako by si autoři buď neuvědomili, že nemusí být řešitelná, nebo její řešení považovali za příliš triviální, než aby se jí věnovali, a přivedli tak k tomuto dojmu nechtěně i čtenáře).

Tedy konkrétně (viz také rozbor v [2]): Uvažujme o soustavě sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ působících na těleso v bodech o polohových vektorech $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$. Jejich výslednicí, která soustavu nahrazuje z hlediska translačního pohybu (tj. z hlediska první impulsové věty) je jejich vektorový součet $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N \sim (F_x, F_y, F_z)$, kde jsme jako F_x, F_y, F_z označili složky výslednice v předem zvolené kartézské soustavě souřadnic (bázi)². Otázkou zůstává, jak zvolit umístění (působišť) $\vec{r} \sim (x, y, z)$ výslednice, aby její moment $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_N \sim (M_x, M_y, M_z)$, kde $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, vzhledem ke zvolenému vztažnému bodu byl stejný jako součet momentů sil soustavy vzhledem k témuž bodu. (Tato otázka, jak se zdá, není ve středoškolské fyzice vůbec kladena, neboť studenti neznají pojem vektorového součinu a s momentem síly vzhledem k bodu se nesetkávají – viz např. [3]. Předkládá se jim pouze ne dost obecný pojem momentu síly vzhledem k ose, a to pomocí slovní definice.) Matematicky znamená problém nalezení působišť výslednice řešení soustavy lineárních rovnic $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$, tj. $yF_z - zF_y = M_x$, $zF_x - xF_z = M_y$, $xF_y - yF_x = M_z$ o neznámých x, y, z . Na úrovni střední školy (tj. bez znalosti teorie soustav lineárních algebraických rovnic) může student snadno dospět (třeba tak, že bude soustavu rovnic řešit) k závěru, že má-li mít soustava řešení, musí být $M_x F_x + M_y F_y + M_z F_z = 0$ (podmínka nutná). Kdyby ještě k tomu znal skalární součin vektorů, hned si představí tuto podmínku jako kolmost (v zobecněném smyslu ortogonalitu, zahrnující i případy $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{M} = \vec{0}$) výslednice

¹ Jako zdánlivě humorná, avšak poučná, i když tak trochu smutná ukázka poslouží příhoda: Po výkladu učitele o konkrétních příkladech nezastupitelné role matematiky ve fyzice a přirozeném propojení těchto disciplín, zaznělo z lavic: „Ale já šel studovat fyziku, protože matematika je mi protivná!“)

² Symbol „vlnovka“ mezi vektorem a jeho složkami (např. $\vec{F} \sim (F_x, F_y, F_z)$) neznačí v našem příspěvku přímou úměrnost, ale skutečnost, že vektor jakožto geometrický objekt nezávisí na volbě báze, zatímco jeho složky ano. Proto k vyjádření vektoru pomocí složek nepoužíváme rovnítko.

sil a jejich výsledného momentu. Ta je koneckonců zřejmá již z výchozí rovnice $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$ po jejím skalárním vynásobení vektorem $\vec{F}$, tj. $0 = \vec{F} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{M} \cdot \vec{F} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{M}$, popřípadě $\vec{F} = \vec{0}$ nebo $\vec{M} = \vec{0}$. (Typickým příkladem nulové výslednice a nenulového momentu může být tzv. dvojice sil, jejíž výslednice je nulová.) Pokud si úlohu propojíme se znalostmi z lineární algebry a sestavíme matici a rozšířenou matici této soustavy rovnic.

$$B = (A | \vec{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & F_z & -F_y & M_x \\ -F_z & 0 & F_x & M_y \\ F_y & -F_x & 0 & M_z \end{array} \right),$$

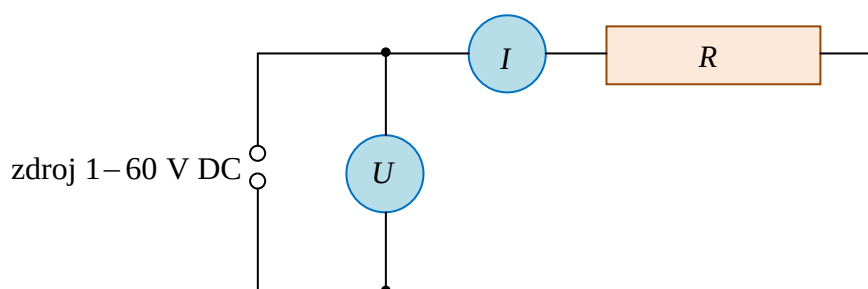
kde $\vec{B}$ je sloupec pravých stran rovnic, zjistíme, že determinant matice soustavy A je nulový, její hodnota je tedy snižená, $h(A) = 2$ (případ $h(A) = 1$ nastat nemůže, případ $h(A) = 0$ odpovídá nulové výslednici), zatímco hodnota rozšířené matice B může být i maximální, tj. rovna třem. V takovém případě nemá soustava řešení a působíště výslednice sil neexistuje. Naopak, je-li $h(A) = h(B)$, má soustava nekonečně mnoho řešení. Konkrétně pro $h(A) = h(B) = 2$ leží všechna přípustná působíště výslednice na přímce kolmé k výslednému momentu soustavy sil a rovnoběžné s výslednicí sil. Na střední škole si ovšem student nejen takové otázky neklade, ale ani se s nimi nesetká. Středoškolské učebnice totiž řeší pouze otázku soustavy sil jako vázaných vektorů ležících v jedné rovině, kdy úloha řešení vždy má až na jedinou výjimečnou situaci, kdy je výslednice sil nulová a výsledný moment nenulový. Učebnice se tímto případem v podstatě nezabývají. Student pak může nabýt dojmu, že výslednici soustavy sil a její vhodné působíště lze najít za všech okolností. I proto si neuvědomí, k čemu při řešení takové úlohy potřebuje matematiku, v tomto případě lineární algebru. (Na situaci, kdy je $\vec{F} = \vec{0}$ a $\vec{M} \neq \vec{0}$ sice upozorňuje učebnice [1] pro případ tzv. dvojice sil, nerozebírá ji však v obecnosti. Absence podrobného rozboru na úrovni střední školy je ovšem pochopitelná a opak by mohl být spíše kontraproduktivní.)

Cílem našeho příspěvku ovšem není (jen) samotné využití lineární algebry při řešení fyzikálních úloh, jak by se z jeho úvodního odstavce mohlo zdát. Odstavec slouží pouze k motivaci přesvědčení o nutnosti těsné provázanosti fyzikálních úloh s matematickými disciplínami jak při výuce fyziky (kde se to občas děje), tak při výuce matematiky (kde se to skoro nikdy neděje). V následujících částech příspěvku předkládáme příklady, kdy lze fyzikální úlohy považované za typicky analytické řešit pomocí algebry, a naopak (v jeho pokračování), kdy je určité základní tvrzení algebry běžně ve fyzice používané dokazováno analytickými metodami.

Metoda nejmenších čtverců – lineární regrese – „tradičně“

Úloha ověření lineárního vztahu mezi fyzikálními veličinami a nalezení některých parametrů lineárního modelu pomocí tzv. metody nejmenších čtverců je zcela běžná – je to dokonce typická školská úloha, přinejmenším v rámci univerzitního studia fyziky (na PřF MU fyzikální praktikum – viz [4], obdobný předmět je jistě realizován ve studiu fyziky a učitelství fyziky i na jiných univerzitách), může se však objevit i v dobře vedené výuce fyziky na střední škole.

Jednou ze snadno realizovatelných úloh fyzikálního praktika na střední, ale možná i na základní škole, je zjištění odporu lineárního vodiče, rezistoru, měřením napětí na něm a proudu jím protékajícího a aplikací Ohmova zákona. Běžná schémata zapojení lze nalézt v běžných učebnicích fyziky. Jednoduché schéma, které bylo použito i při našem ukázkovém měření, je na Obr. 1. Naměřené hodnoty uváděné v tabulce nevyžadují opravu na vnitřní odpor ampérmetru, která je v obecném případě potřebná (viz komentář k měření níže).



Obr. 1: Uspořádání pro měření odporu rezistoru.

j	$U[V]$	$I[\mu A]$	$R[M\Omega]$
1	4,996	0,5	9,992
2	9,9823	0,99	10,083
3	14,984	1,49	10,056
4	19,972	1,99	10,036
5	24,972	2,48	10,069
6	29,961	2,98	10,054

j	$U[V]$	$I[\mu A]$	$R[M\Omega]$
7	34,958	3,48	10,045
8	39,948	3,97	10,062
9	44,958	4,47	10,058
10	49,956	4,97	10,052
11	54,953	5,46	10,065
12	59,944	5,96	10,058
Průměr $R=10,052 M\Omega$			

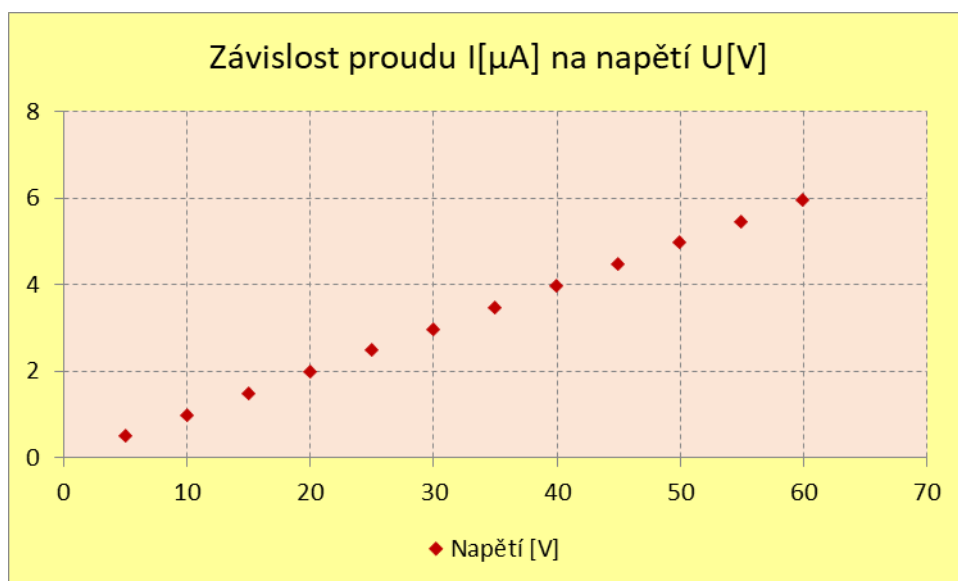
Přestože cílem příspěvku je ukázat jednoduchost a názornost algebraické metody zpracování dat v případě lineárního modelu metodou nejmenších čtverců, nikoli měření odporu jako takové, bylo konkrétní měření provedeno.

Popis měření: Jako měřený rezistor byl použit $10 \pm 1\%$ $M\Omega$ rezistor HR4 (viz Obr. 2). Jedná se o drátem vinutý teplotně stabilní rezistor většího rozměru. Měření napětí i proudu bylo provedeno přístrojem MTX3292. Výsledky měření uvádí tabulka. Nejistota na rozsahu do 1 mA je určena jako 0,1% z absolutní hodnoty čteného údaje plus 150 nA. Na tomto rozsahu je vnitřní odpor ampérmetru 170 Ω , což je vůči odporu 10 $M\Omega$ rezistoru zanedbatelná hodnota. Pro měřené hodnoty proudu je na ampérmetru napětí do 1 mV. Měřené napětí na sériové kombinaci ampérmetru s rezistorem tedy není vnitřním odporem ampérmetru ovlivněno. Nejistota měření napětí je pro rozsah do 100V určena jako 0.03% z čtené hodnoty napětí +8mV. Multimetr MTX 3292 byl v použitém rozsahu měřených hodnot otestován na reprodukovatelnost pomocí kalibračního zdroje proudu Time Electronics 1048 s třídou přesnosti 0.05%. Zjištěná reprodukovatelnost byla lepší, než 10 nA u dvou stejných exemplářů MTX 3292. Čtené hodnoty byly stabilní a reprodukovatelné. Ohřev rezistoru je zanedbatelný. Měřené hodnoty v tabulce jsou úmyslně nezaokrouhlené.



Obr. 2: Rezistor HR4 $10 \pm 1\% \text{ M}\Omega$.

Všimněme si nyní jednotlivých řádků tabulky z algebraického hlediska. Máme pro jednu neznámou R soustavu n (v tabulce $n = 12$) rovnic $I_j R = U_j$, $j = 1, \dots, n$, která pochopitelně nemá řešení. Hodnost (sloupcové) matice soustavy, určené n hodnotami proudu, je totiž $h(A) = 1$, zatímco hodnost rozšířené (dvousloupcové) matice, dané n hodnotami proudu a n hodnotami napětí, je $h(B) = 2$. A taková úloha nemá podle Frobeniovy věty řešení. Jednou z možností, jak získat odpor rezistoru, je vypočítat R z každé rovnice, tj. $R_j = U_j / I_j$ a za hodnotu odporu prohlásit jejich aritmetický průměr. Dostaneme $R = (10,052 \pm 0,007) \text{ M}\Omega$. (Vypočtené podíly U/I v tabulce jsou zaokrouhleny na tři desetinná místa. Směrodatná odchylka aritmetického průměru je $0,006_5$.)



Obr. 3a: Graf závislosti proudu rezistorem na napětí podle tabulky naměřených hodnot.

Jednou z metod stanovení parametrů lineárního modelu (v našem případě směrnice přímky představující graf závislosti $U = RI$, $R = \tan \alpha$) je tzv. metoda nejmenších čtverců – lineární regrese, která minimalizuje odchylku souboru experimentálně zjištěných bodů

$\{U_j, I_j\}$, $j = 1, \dots, n$, jako celku od lineárního modelu $U = RI$, resp. $I = R^{-1}U$. Označme tedy hodnotu odporu jako parametr R . Součet druhých mocnin, tedy „čtverců“ odchylek měření závisle proměnné (v našem případě proudu) od hodnot vypočtených pomocí modelu lineární závislosti z měřených hodnot nezávisle proměnné (napětí) je funkcí tohoto parametru, tj. $\sigma(R^{-1}) = \sum_{j=1}^n (I_j - R^{-1}U_j)^2$. Extrém této funkce je dán nulovostí derivace

$d\sigma(R^{-1})/dR^{-1}$ jako nutnou podmínkou, tedy

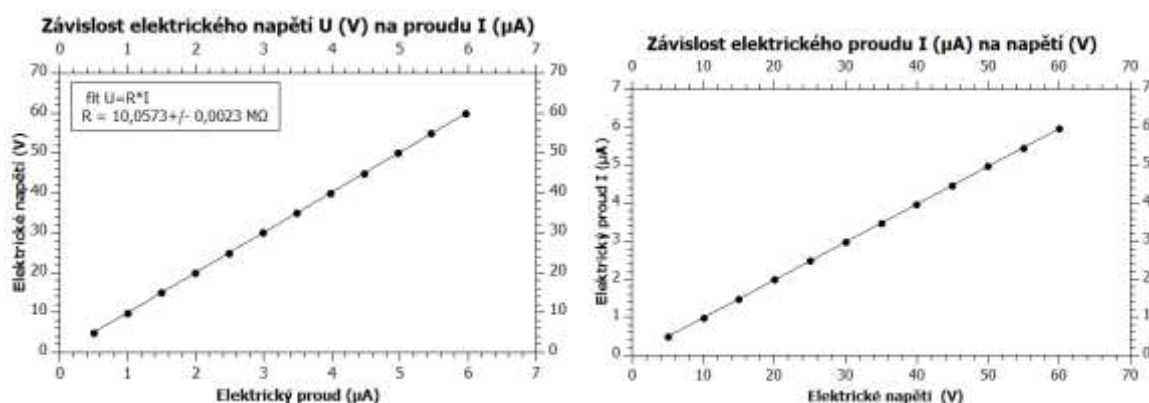
$$\sum_{j=1}^n U_j (I_j - R^{-1}U_j) = 0 \Rightarrow R^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^n I_j U_j}{\sum_{j=1}^n U_j^2}.$$

(Napětí jsme při tomto výpočtu volili jako nezávisle proměnnou, byť je to pro výpočet méně obvyklé, vzhledem k tomu, že je měřením určeno přesněji oproti přesnosti měření proudu.)

Snadno se přesvědčíme, že druhá derivace funkce $\sigma(R^{-1})$ je kladná, předchozí podmínka tedy charakterizuje minimum této funkce. V případě našich měření je výsledek získaný metodou nejmenších čtverců $R = (10,057 \pm 0,003) \text{ M}\Omega$ (Směrodatná odchylka je $0,002_3$. V obou případech zpracování dat je směrodatná odchylka vyčíslena pomocí nezaokrouhlených hodnot a poté zaokrouhlена.)

O přesnosti měření vypovídá až kombinovaná nejistota, tedy nejistota typu C, ve které je zahrnuta nejen statistika měření, ale i přístrojová nejistota. Práce se zabývá pouze statistikou naměřených dat a předpokládá se, že je převážně způsobena jinými vlivy, než použitými multimetry.

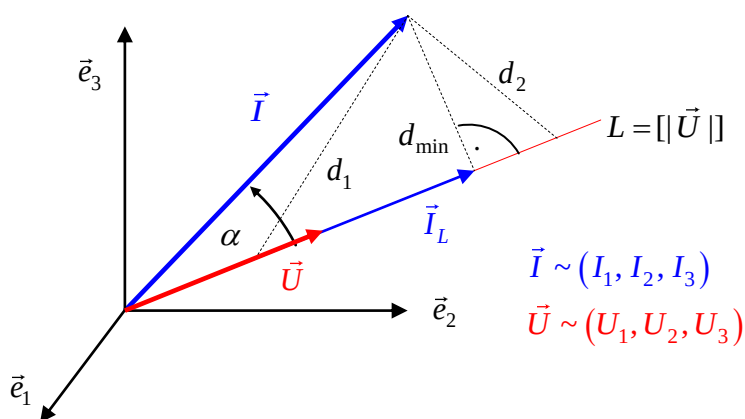
Jako ukázkou uvádíme pro danou experimentální situaci (dle tabulky) grafy závislosti napětí na proudu a proudu na napětí, získané pomocí QTI-plotu, moderního software pro grafy a analýzu dat.



Obr. 3b, c: QTI-plot: závislost napětí na proudu (vlevo) a závislost proudu na napětí (vpravo).

Metoda nejmenších čtverců – lineární regrese – algebraicky

V předchozím odstavci jsme odpor lineárního vodiče určili metodou nejmenších čtverců pomocí hledání stacionárního bodu (minima) součtu kvadrátů odchylek měření od modelu jako funkce hledaného odporu, tedy analyticky. V tomto odstavci odhalíme podstatný rys této metody – její geometrickou názornost a odpovídající algebraické řešení. Derivovat vůbec nepotřebujeme. Představme si n naměřených hodnot napětí jako složky jistého vektoru $\vec{U}$ v n -rozměrném vektorovém prostoru se skalárním součinem, a podobně n naměřených hodnot proudu jako složky jistého vektoru $\vec{I}$ v tomto vektorovém prostoru. Situaci si student jistě ze zkušenosti dovede názorně geometricky představit v trojrozměrném prostoru, tj. v situaci, kdy bychom napětí a proud měřili jen třikrát. Složky jsou zadány v ortonormální bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Kdybychom měřili napětí i proud naprosto přesně, byly by vektory $\vec{U}$ a $\vec{I}$ rovnoběžné, neboť ideálně je $U = RI$ (pro vektory $\vec{U} = R\vec{I}$). Měření jsou ovšem zatížena chybou, a tak budou vektory $\vec{U}$ a $\vec{I}$ obecně lineárně nezávislé. Situaci ukazuje schematický Obr. 4.



Obr. 4: Geometrická představa metody nejmenších čtverců.

Vektor $\vec{U}$ (nezávisle proměnná) generuje v obecně n -rozměrném vektorovém prostoru jednorozměrný vektorový podprostor L . Náš problém spočívá v tom, že hledáme „nejlepší možný“ vektor $\vec{I}_L$, který vystihne lineární model $\vec{I}_L = R^{-1}\vec{U}$ v souladu s Ohmovým zákonem. Názorně řečeno – „vzdálenost“ d koncových bodů vektorů $\vec{I}$ a $\vec{I}_L$ musí být co nejmenší.

Vektor $\vec{I}_L$ tak musí být kolmým průmětem vektoru $\vec{I}$ do směru vektoru $\vec{U}$. V trojrozměrném případě je zjištění vektoru $\vec{I}_L$ velmi snadné s trochou geometrie a znalostí skalárního součinu: $\vec{I}_L = \text{konst} \cdot \vec{U}$ (konstanta úměrnosti je vodivost, tedy převrácená hodnota hledaného odporu), neboť vektory $\vec{I}_L$ a $\vec{U}$ mají být rovnoběžné. Současně pro složku vektoru $\vec{I}_L$ ve směru $\vec{U}$ platí

$$I_L = I \cos \alpha = R^{-1}U \Rightarrow IU \cos \alpha = R^{-1}U^2 \Rightarrow R^{-1} = \frac{\vec{I} \cdot \vec{U}}{U^2} = \frac{I_1U_1 + I_2U_2 + I_3U_3}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}.$$

Vyjádříme-li uvedenou minimální vzdálenost naměřených hodnot proudu (závisle proměnné) a zatím neznámého R^{-1} - násobku naměřených hodnot napětí (nezávisle proměnné) jako funkci parametru R^{-1} již pro zobecnění na n měření, dostaneme

$$d(R^{-1}) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(I_j - I_{L,j})^2} = \sum_{j=1}^n \sqrt{(I_j - R^{-1}U_j)^2},$$

tedy odmocninu z výše již zmíněné „sumy čtverců“.

„Trojrozměrnou“ geometrickou představu nyní převedeme do obecné „ n -rozměrné“ algebraické rutiny. V lineární algebře se vektory pro jednoduchost již neoznačují šipkami (obecně to nemusejí ani být orientované n -rozměrné úsečky, které podporovaly názornou představu v případě jedno-, dvou- a trojrozměrných prostorů). Vyhovíme tedy standardu a nebudeme nad vektory psát šipky. Kolmé promítání neboli *ortogonální projekce* na vektorový podprostor je lineární zobrazení (průmět lineární kombinace vektorů je totéž jako lineární kombinace jejich průmětů s týmiž koeficienty). V bázích je proto reprezentováno maticí, tzv. maticí (ortogonální) projekce P_L n -tého řádu, konkrétně

$$(I_{L,1} \ I_{L,2} \ \dots \ I_{L,n}) = (I_1 \ I_2 \ \dots \ I_n) P_L,$$

kde pravá strana představuje součin řádkové a čtvercové matice. Matici P_L , která „vyrábí“ ortogonální průměty vektorů na daný vektorový podprostor L , získáme docela jednoduše. Označme symbolem (u, v) skalární součin libovolných dvou vektorů. Pro vektory ortonormální báze platí $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (Kroneckerovo delta), $j = 1, 2, \dots, n$. Uvažme libovolný vektor w našeho n -rozměrného prostoru. Ten je lineární kombinací báze, v našem případě $w = w_1 e_1 + \dots + w_n e_n$. V prostoru je definován skalární součin a naše báze je ortonormální. Pak

$$(w, e_j) = w_1(e_1, e_j) + \dots + w_j(e_j, e_j) + w_n(e_n, e_j) = w_j.$$

To je důležitý zápis – j -tá složka libovolného vektoru v dané ortonormální bázi je dána jeho skalárním součinem s j -tým vektorem báze.

Vektorový podprostor L , obecně dimenze k , $1 \leq k \leq n$, je generován bází $(u_1, \dots, u_k)$, o níž předpokládáme, že je rovněž ortonormální (získáme ji z obecné báze běžným ortogonalizačním procesem a následným normováním). Složky vektorů $u_1, \dots, u_k$ v základní ortonormální bázi $(e_1, \dots, e_n)$, $u_\alpha = \gamma_{\alpha 1} e_1 + \dots + \gamma_{\alpha n} e_n$, $\alpha = 1, \dots, k$, uspořádáme do (obdélníkové) matice typu k/n , za chvíli uvidíme, k čemu poslouží:

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \dots & \gamma_{kn} \end{pmatrix}.$$

Potřebujeme vektor w ortogonálně promítnout do L , tedy rozložit jej na součet průmětu do podprostoru L a jeho ortogonálního doplňku $L_\perp$ (ten obsahuje všechny vektory kolmé ke každému vektoru z L). Tedy $w = w_L + w_{L_\perp}$. Tento rozklad je jednoznačný. Platí

$$w_L = w_{L,1} e_1 + \dots + w_{L,n} e_n \Rightarrow (w_L, u_\alpha) = (w - w_{L_\perp}, u_\alpha) = (w, u_\alpha), \text{ neboť } (w_{L_\perp}, u_\alpha) = 0 \text{ (kolmé vektory).}$$

Tím jsme získali složky průmětu $w_L \in L$ v bázi $(u_1, \dots, u_k)$ podprostoru L . Potřebujeme je však vyjádřit v původní bázi $(e_1, \dots, e_n)$. To už nevyžaduje velké přemýšlení – hlavní „trik“ spočívá v rovnosti $(w_L, u_\alpha) = (w, u_\alpha)$, která znamená, že skalární součin hledaného průmětu w_L s každým vektorem ležícím v L je stejný jako skalární součin známého vektoru w s dotýčným vektorem ležícím v L . Následuje už jen rutinní výpočet, jehož postup usnadníme barevným odlišením:

$$\begin{aligned}
w_L &= \sum_{\alpha=1}^k (w_L, u_\alpha) u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k (w, u_\alpha) u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k (w, \sum_{j=1}^n \gamma_{\alpha j} e_j) \sum_{\ell=1}^n \gamma_{\alpha \ell} e_\ell = \\
&= \sum_{\ell=1}^n \left[\sum_{j=1}^n (w, e_j) \left(\sum_{\alpha=1}^k \tilde{\gamma}_{\ell \alpha} \gamma_{\alpha j} \right) \right] e_\ell
\end{aligned}$$

Výsledek je složitý jen zdánlivě. Součet $p_{\ell j} = \sum_{\alpha=1}^k \tilde{\gamma}_{\ell \alpha} \gamma_{\alpha j}$, v němž jsme označili $\tilde{\gamma}_{\ell \alpha} = \gamma_{\alpha \ell}$ je totiž prvek matice $P_L = C^T C$ stojící v jejím ℓ -tém řádku a j -tém sloupci. Pak, uvědomíme-li si, že $(w, e_j) = w_j$, dostáváme

$$w_L = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{j=1}^n w_j p_{\ell j} \right) e_\ell = w_{L, \ell} e_\ell \Rightarrow (w_{L,1} \ w_{L,2} \ \dots \ w_{L,n}) = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n) P_L.$$

Závěrečné vyjádření složek průmětu jsme zapsali pomocí maticového násobení.

S použitím odvozeného obecného postupu již snadno vyřešíme problém určení odporu z měřených hodnot napětí a proudu. V našem případě je $n=12$ a $k=1$. Jednorozměrný podprostor L je generován vektorem I , jehož normováním dostaneme

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{U}{\sqrt{\sum_{j=1}^n U_j^2}} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n U_j^2}} (U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n), \quad P_L = \frac{1}{\sum_{j=1}^n U_j^2} \begin{pmatrix} U_1 U_1 & U_1 U_2 & \dots & U_1 U_n \\ U_1 U_2 & U_2 U_2 & \dots & U_2 U_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_1 U_n & U_2 U_n & \dots & U_n U_n \end{pmatrix} \\
I_L &\sim (I_1 \ I_2 \ \dots \ I_n) P_L = \frac{\sum_{j=1}^n I_j U_j}{\sum_{j=1}^n U_j^2} (U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n) \Rightarrow R^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^n I_j U_j}{\sum_{j=1}^n U_j^2}
\end{aligned}$$

Získali jsme dle očekávání stejný výsledek jako minimalizací součtu druhých mocnin odchylek měření od modelu pomocí derivování.

V našem až příliš jednoduchém ukázkovém příkladu se algebraický postup samozřejmě může jevit oproti analytickému příliš zdlouhavý (a to možná i kdybychom vypustili odvození). Neocenitelný je však díky své názornosti v případě, že určitá měřená veličina Y je lineární kombinací měřených veličin $X_1, X_2, \dots, X_k$, tj. $Y = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_k X_k$, přičemž měření provádíme n -krát, $k < n$. Složky všech vektorů opět vyjadřujeme v ortonormální bázi. Jistě by bylo možné postupovat podle obecného vzoru pomocí matice P_L ortogonální projekce na vektorový podprostor L generovaný vektory $X_1, X_2, \dots, X_k$. Jenže ty nemusí být dokonce ani ortogonální a museli bychom z nich v L sestavit ortonormální bázi ortogonalizačním procesem. To by mohlo být zbytečně pracné. Naštěstí můžeme skalární součin, který je podle předpokladu v našem prostoru zaveden, využít daleko jednodušeji.

Z rovnice pro Y dostaneme postupně skalárním násobením vektory $X_1, X_2, \dots, X_k$ soustavu k lineárních rovnic o k neznámých $A_1, A_2, \dots, A_k$

$$\begin{aligned}(Y, X_1) &= A_1(X_1, X_1) + A_2(X_2, X_1) + \dots + A_k(X_k, X_1) \\(Y, X_2) &= A_1(X_1, X_2) + A_2(X_2, X_2) + \dots + A_k(X_k, X_2) \\&\vdots \\(Y, X_k) &= A_1(X_1, X_k) + A_2(X_2, X_k) + \dots + A_k(X_k, X_k)\end{aligned}$$

Soustavu těchto tzv. *normálních rovnic* vyřešíme. Poznamenejme, že pro skalární součiny platí (za předpokladu, že naměřené hodnoty dané veličiny interpretujeme jako složky odpovídajícího vektoru v ortonormální bázi) jednoduché vztahy

$$(X_\alpha, X_\beta) = \sum_{j=1}^n X_{\alpha j} X_{\beta j}, \quad (Y, X_\beta) = \sum_{j=1}^n Y_j X_{\beta j}, \quad \alpha = 1, \dots, k.$$

Nabízí se otázka, zda tento postup vede k témuž výsledku, jako obvyklá „analytická“ metoda nejmenších čtverců. Součet druhých mocnin odchylek měření od modelu, tj. „ n -rozměrná vzdálenost“ koncového bodu vektoru Y od k -rozměrného podprostoru L je

$$\sigma(A_1, A_2, \dots, A_k) = \sum_{j=1}^n \left(Y_j - A_1 X_{1j} - A_2 X_{2j} - \dots - A_k X_{kj} \right)^2$$

Nutnou podmínkou stacionárního bodu této funkce k proměnných $A_1, A_2, \dots, A_k$ je nulovost parciální derivace podle každé z nich, tj. $\partial\sigma(A_1, A_2, \dots, A_k)/\partial A_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, k$. Odtud

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(A_1, A_2, \dots, A_k)}{\partial A_\alpha} &= -2 \sum_{j=1}^n X_{\alpha j} (Y_j - A_1 X_{1j} - A_2 X_{2j} - \dots - A_k X_{kj}) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n Y_j X_{\alpha j} &= A_1 \sum_{j=1}^n X_{1j} X_{\alpha j} + \dots + A_k \sum_{j=1}^n X_{kj} X_{\alpha j} \Rightarrow \\ \Rightarrow (Y, X_\alpha) &= A_1 (X_1, X_\alpha) + \dots + A_k (X_k, X_\alpha). \end{aligned}$$

Dostali jsme právě α -tou ze soustavy normálních rovnic. Také v tomto případě dává analytická metoda nejmenších čtverců totéž jako algebraický přístup, který je ovšem geometricky názornější, nevyžaduje derivování ani ověření typu stacionárního bodu (je to minimum) pomocí druhých derivací, konkrétně by šlo o sestavení kvadratické formy z druhých derivací funkce $\sigma(A_1, A_2, \dots, A_k)$ a ověření její signatury.

Lineární algebra jako nepostradatelný aparát fyziky

V předchozím textu jsme ukázali, jak je hlubší chápání lineární algebry důležité při formulaci fyzikálních závěrů (problematika působistě výslednice soustavy sil), a také využití lineární algebry při řešení úloh chápaných spíše jako analytické (zpracování experimentálních výsledků při ověřování lineárních modelů – metoda nejmenších čtverců, lineární regrese). Nejde samozřejmě jen o ojedinělé ukázkové situace. Lineární algebra je ve fyzice nepostradatelná. Skoro bychom mohli říci, že fyzika je lineární algebrou prosycená. Fyzikální veličiny, standardně závislé na časoprostorových souřadnicích, jsou z matematického hlediska tenzorovými poli. (I skalární a vektorové veličiny jsou, obecně vzato, tenzorovými poli – nultého a prvního řádu.) Základem pro práci s tenzory je lineární algebra, s jejich závislostmi na časoprostorových souřadnicích pak samozřejmě pracuje matematická analýza. Namátkou uvedme jen několik příkladů se stručným výkladem bez podrobného rozboru.

- Mechanika tuhých těles: moment setrvačnosti, setrvačníky. Základem je lineární vztah mezi momentem hybnosti a úhlovou rychlostí

$(L) = (\omega)J$, kde $(L) = (L_1 \ L_2 \ L_3)$, $(\omega) = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)$ jsou matice složek momentu hybnosti a úhlové rychlosti, J je matice reprezentující tenzor (lineární operátor) momentu setrvačnosti. Například pro nalezení hlavních os momentu setrvačnosti v tělese, tj. os, kolem nichž rotuje těleso tak, že moment hybnosti je rovnoběžný s úhlovou rychlostí, je podstatné řešit algebraický problém – hledat vlastní hodnoty a vektory lineárního operátoru.

- Mechanika kontinua: tenzorový charakter napětí a deformace, elastické moduly a elastické konstanty. Napětí a deformace kontinua se charakterizují (kartézskými) tenzory druhého řádu, elastické moduly a konstanty pak tenzory čtvrtého řádu.
- Relativita: Geometrické vlastnosti prostoročasu jsou popsány Minkowského tenzorem (druhého řádu).
- Klasická elektrodynamika: Antisymetrický tenzor elektromagnetického pole, tenzor energie-hybnosti. Dále také materiálové vztahy v anizotropních prostředích, vlastnosti opticky anizotropních prostředí jsou nejčastěji rovněž lineární, například vztah mezi intenzitou elektrického pole a polarizací (resp. elektrickou indukcí), zprostředkovaný tenzorem (operátorem) dielektrické susceptibility (resp. permitivity). Jeho vlastní hodnoty pak informují např. o tom, zda je látka opticky izotropní, opticky jednoosá, či opticky dvouosá.
- Lineární nelokální a nesynchronní materiálové vztahy a převod analytických vyjádření na algebraická (zde je potřeba i funkce komplexní proměnné): Příčinný nesynchronní vztah mezi elektrickou intenzitou elektromagnetického pole $\vec{E}(t)$ jako podnětu a polarizací $\vec{P}(t)$ jako odezvy (pro jednoduchou představu uvádíme pouze vztah pro časové závislosti a homogenní prostředí ve skalárním tvaru) má tvar konvoluce $P(t) = \int_0^t \alpha(\tau)E(t-\tau)d\tau$, kde $\alpha(\tau)$ je odezвовá funkce (elektrická susceptibilita). Význam tohoto vztahu je názorný: Polarizace v okamžiku t závisí na intenzitě elektrického pole ve všech okamžicích minulých. Tento vztah může být modifikován i pro anizotropní prostředí. Analýza (konkrétně analýza funkcí komplexní proměnné) pak dokáže pomocí tzv. Laplaceovy transformace převést vztah konvoluce reálných veličin na algebraický vztah jejich komplexních Laplaceových obrazů.
- Kvantová mechanika a její matematický aparát: stav objektu (soustavy) je reprezentován prvkem jistého vektorového prostoru³ se skalárním součinem (s dodatečnou vlastností úplnosti), tzv. Hilbertova prostoru, fyzikální veličiny jsou lineární samoadjungované operátory, měřením dané veličiny získáváme vlastní hodnoty příslušného operátoru, přičemž soustava přejde do stavu popsaného vlastním vektorem tohoto operátoru.

Ke každému z uvedených příkladů by bylo napsat samostatný příspěvek se zajímavým rozbořem. A bylo by možné uvést i příklady další.

Poděkování

Děkujeme recenzentovi za velice pečlivé a kritické pročtení příspěvku a řadu námětů k jeho vylepšení mj. i pro komfort čtenářů.

³ V tzv. souřadnicové reprezentaci známější pod názvem vlnová funkce.

Literatura

- [1] E. Svoboda, M Bednařík, M. Šíroká: Fyzika pro gymnázia. Mechanika. Dotisk 5., přepracovaného vydání. Prometheus, Praha 2013. (První vydání 1993.)
- [2] J. Musilová: Mechanika. (Vysokoškolská učebnice.) Masarykova univerzita, Brno 2022.
- [3] P. Musilová, J. Musilová: Momenty – didaktický problém? Československý časopis pro fyziku **74** (2024), 3, 190-198.
- [4] Studijní katalog pro akademický rok 2023/2024, Fyzika, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity.