K základům teorie diferenciálních rovnic

Alexander Ženíšek

Úvod

Tento text, který se rozrostl na 174 stranz, byl původně zamýšlen především pro ty vysokoškolské učitele matematiky, kteří musejí mimo jiné přednášet teorii ODR, přičemž se odborně obyčejnými rovnicemi nezabývají. Přibyla však velmi dlouhá kap. 11, která se zabývá okrajovými problémy ODR druhého řádu z hlediska funkcionální analýzy (a kromě toho obsahuje stručný kurz metody konečných prvků v $\mathbb{R}^1$), takže původní záměr této knížky ustoupil trochu do pozadí.

S kurzem obyčejných DR je spojena tato nepříjemnost: Existenční věty se většinou v přednáškách nedokazují; a co je horší, nejsou ani dokázány ve skriptech či v některých knihách (jako např. [ŠT], kde je dokázána pouze Picardova věta; zbytek se nedokazuje, nebo je špatně; totéž se dá říci o [ČŽ]; v [Re1] se nic nedokazuje). Z kurzů obyčejných DR se tak stává "kuchařka" na lepší či horší úrovni.

Původně jsem se zaměřil na těchto 6 témat (vyšel jsem hlavně ze [St]):

(1) Picardova věta o existenci a jednoznačnosti počátečního problému $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

(2) Peanova věta o existenci počátečního problému $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

(3) Věta o existenci a jednoznačnosti počátečního problému soustavy n diferenciálních rovnic prvního řádu

(4) Věta o existenci a jednoznačnosti počátečního problému
$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)} = y_{n-1}$.

(5) Věta o existenci a jednoznačnosti počátečního problému soustavy n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

(6) Věta o existenci a jednoznačnosti počátečního problému
$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)} = y_{n-1}$.

Ačkoliv v **(1)** – **(6)** jde o 6 existenčních vět, stačí dokázat věty **(2)**, **(3)** a **(5)**. Důkaz věty **(4)** plyne z věty **(3)** a *ekvivalence* dané rovnice n-tého řádu se *speciální* soustavou n rovnic prvního řádu. Důkaz věty **(6)** plyne z věty **(5)** a *ekvivalence* dané lineární rovnice n-tého řádu se *speciální* soustavou n lineárních rovnic prvního řádu. Konečně, důkaz věty **(1)** je speciálním případem důkazu věty **(3)**. // Kromě těchto témat jsem přidal další čtyři kapitoly, které souvisejí s počátečními problémy ODR a obvykle se v základním kurzu přednášejí (co se týče jejich názvů, viz Obsah). Větší zájem by mohla vzbudit kap. 8 či kap. 9.

Jedenáctá kapitola měla mít původně sedm částí. Ale při promýšlení podkap. 11.7 jsem si uvědomil, že se teorie okrajových problémů ODR obvykle vykládá pouze "klasicky", tj. bez užití teorie Sobolevových prostorů, které se začnou systematicky probírat až s teorií parciálních diferenciálních rovnic, kde se celý výklad zamlží problematikou popisu hranice oblastí v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

Protože v $\mathbb{R}^1$ hranice ohraničené oblasti (tj. konečného intervalu) sestává pouze ze dvou bodů, mnoho komplikací technického rázu odpadá. Navíc se některá témata dají vykládat bez ohledu na dimenzi prostoru $\mathbb{R}^N$ (protože nezávisejí na popisu hranice oblasti, jako např. regularizace a s ní související důkaz hustoty $C_0^\infty(\Omega)$ v $L_2(\Omega)$, resp. spojitost podle středu funkcí v prostoru $L_2(\Omega)$). Toho jsem využil a tato témata zpracoval. V položkách 11.7.36a – 11.7.36ℓ je věnována velká pozornost absolutně spojitým funkcím, které tvoří nadmnožinu Sobolevova prostoru $H^1(I)$.

Rozhodl jsem se, že všechny věty vyslovené v kap. 11 dokážu (s výjimkou vět citovaných z [Na] a [Ja]). Tím se sice knížka rozrostla asi o dvacet stran, ale i tak není příliš dlouhá. Text jsem na mnohých místech doplňoval, takže Sobolevovy prostory $W^k(\Omega)$ a $H^k(\Omega)$ jsou téměř souběžně vykládány s prostory $W^k(I)$ a $H^k(I)$, kde I je konečný interval.

V kap. 12 jsou obě Picardovy věty z kap. 1 a 3 dokázány pomocí Banachova principu pevného (BPPB). Zvláště první důkaz je navzdory své stručnosti elegantní a přehledný. Aplikovat BPPB na počáteční problém soustavy lineárních ODR

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(t)x + g(t)$$

kde $\mathbf{A}(t)$ a $g(t)$ jsou spojité na $\langle a, b\rangle$, není vhodné, protože v tomto případě řešení existuje na celém intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž BPPB dá pouze lokální řešení.

Kap. 13 je "un bonbon en plus" k těm částem kap. 11, ve kterých jsem se zabýval kvadratickým funkcionálem celkové potenciální energie v $\mathbb{R}^1$. V kap. 13 jsou tyto výsledky nejprve zobecněny v $\mathbb{R}^2$, čímž se mimo jiné získají Eulerovy rovnice variačního počtu tohoto kvadratického funkcionálu nestandardním způsobem. V další části kap. 13 jsou potom tyto Eulerovy rovnice variačního počtu odvozeny jak v $\mathbb{R}^1$, tak v $\mathbb{R}^2$ standardním způsobem.

Bez kap. 14, která je věnována Sobolevovým prostorům na ohraničené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, by tato knížka nebyla úplná. Sobolevovy prostory $H^k(I)$, kde I je konečný interval, jsou totiž podmnožinami prostoru $AC^0(\overline{I})$ absolutně spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $\overline{I}$. Prostory $H^k(I)$ mají tak dosti výlučnou strukturu, protože analogie či zobecnění absolutně spojitých funkcí v $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ neexistuje. Beppo Leviho prostor $BL_2(\Omega)$ pak dává do souvislosti Sobolevovy prostory $W^k(\Omega)$ a $H^k(\Omega)$ s množinami funkcí, které jsou absolutně spojité na téměř všech přímkách rovnoběžných se souřadnými osami.

Kap. 15 o přibližných řešeních počátečních problémů ODR, resp. počátečních-okrajových problémů PDR je vzhledem ke svému tématu dosti krátká. V případě ODR se zde věnuji hlavně Eulerově explicitní a implicitní formuli. O dalších důležitých metodách (jako např. o Runge - Kuttově metodě) uvádím jenom základní fakta bez důkazů. V případě rovnice pro vedení tepla kombinuji zpětnou diferenci v čase s metodou konečných prvků v $\mathbb{R}^1$. V případě vlnové rovnice pak kombinuji druhou zpětnou diferenci v čase s MKP v $\mathbb{R}^1$.

Titul knížky *K základům teorie diferenciálních rovnic* jsem zvolil tak, abych měl jakési alibi. Nepíši o základech, ale vyjadřuji se k základům, takže jsem leccos podstatného mohl vynechat.

1. Picardova věta

1.1. Věta (Picard). *Je dána diferenciální rovnice*

$$y' = f(x, y(x)) \tag{1.1}$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0 \,. \tag{1.2}$$

Nechť jsou splněny tyto dva předpoklady:

a) Funkce $f(x,y)$ je definovaná a spojitá na dvojrozměrné uzavřené oblasti $\overline{R}$ ve tvaru obdélníku

$$\overline{R} = \{(x,y): \ x_0 \le x \le x_0 + a, \ y_0 - b \le y \le y_0 + b\},$$

tj. existuje

$$M = \max_{\overline{R}} |f(x,y)| \,. \tag{1.3}$$

b) Funkce $f(x,y)$ má v každém bodě uzavřené oblasti $\overline{R}$ parciální derivaci $\partial f/\partial y$, která je ohraničená na $\overline{R}$, tj. platí

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big| \le L \quad \textit{pro všechny body } (x,y) \in \overline{R} \quad (L = \mathrm{const} > 0).$$

Potom existuje jediné řešení počátečního problému (1.1), (1.2), *které je definované a spojité v intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$, kde*

$$\delta = \min\Big(a, \frac{b}{M}\Big) \,. \tag{1.4}$$

Důkaz. Podle Lagrangeovy věty o přírůstku platí

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y_1 - y_2) \,,$$

kde η je vhodné číslo ležící mezi y_1 a y_2, takže z předpokladu b) plyne

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_i) \in \overline{R} \,. \tag{1.5}$$

Tato nerovnost (zvaná Lipschitzova), která byla poprvé publikovaná v roce 1876 (viz [Li]), bude mít v důkazu velký význam. // Definujme posloupnost funkcí (zvanou posloupnost Picardových aproximací) tvaru

$$\begin{gathered}
y_0(x) = y_0 \,, \\
y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0) \,\mathrm{d}t, \\
y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) \,\mathrm{d}t, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t)) \,\mathrm{d}t, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}$$

O této posloupnosti dokážeme, že pro $n \to \infty$ stejnoměrně konverguje k hledanému řešení na intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$. Důkaz rozdělíme do pěti částí:

1. Nejprve dokážeme, že jednotlivé Picardovy aproximace leží v obdélníku $\overline{R}$, takže pro $x \in \langle x_0, x_0+\delta \rangle$ je $y_k(x) \in \langle y_0-b, y_0+b \rangle$. Důkaz provedeme matematickou indukcí: Pro $y_0(x)$ tvrzení platí. Nechť $y_{n-1}(x)$ leží v $\overline{R}$. Potom vzhledem k (1.3) a (1.4) platí

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t \right| \le M \left| \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \right| =$$
$$= M|x - x_0| \le M\delta = M \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \le b\,.$$

První nerovnost přitom plyne z (1.3), poslední rovnost z (1.4).

2. Matematickou indukcí dokážeme, že platí

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{M}{n!} L^{n-1} |x - x_0|^n\,. \tag{1.6}$$

Pro $n = 1$ máme

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t \right| \le M|x - x_0|\,.$$

Předpokládejme, že dokazovaný vztah (1.6) platí pro $n - 1$. Především je

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))]\,\mathrm{d}t\,.$$

Podle části **1** lze na poslední integrand užít Lipschitzovu nerovnost (1.5), která implikuje

$$|f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))| \le L|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \le \frac{LML^{n-2}}{(n-1)!}|t - x_0|^{n-1}\,;$$

druhá nerovnost přitom platí podle indukčního předpokladu. Dostáváme tedy

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{ML^{n-1}}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{ML^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n\,.$$

Odtud plyne, že vztah (1.6) platí pro všechny indexy n.

3. Dokážeme, že Picardova posloupnost konverguje pro všechna $x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ stejnoměrně k nějaké funkci $y = Y(x)$, která je na intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ spojitá. Uvažujme proto funkční řadu

$$y_0 + [y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + \cdots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \ldots\,. \tag{1.7}$$

Podle (1.6) je majorantou této řady číselná řada

$$y_0 + M\delta + \frac{1}{2}M\delta^2 L \cdots + \frac{M}{n!}\delta^n L^{n-1} + \ldots\,,$$

která podle limitního podílového kritéria konverguje. Je totiž

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\delta^{n+1}L^n}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\delta^n L^{n-1}}\right| = \delta L \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0\,.$$

Podle Weierstrassova kritéria konverguje řada (1.7) stejnoměrně pro všechna $x \in \left\langle x_0, x_0+\delta\right\rangle$. Protože členy řady (1.7) jsou na tomto intervalu spojité funkce, je její součet, který označíme $Y(x)$, také spojitou funkcí na $\left\langle x_0, x_0+\delta\right\rangle$.

Pro částečný součet $s_n(x)$ řady (1.7) platí

$$s_n(x) = y_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

takže podle definice součtu funkční řady

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = Y(x)\,. \tag{1.8}$$

4. Nyní ukážeme, že takto určená funkce $Y(x)$ vyhovuje dané diferenciální rovnici (1.1) a počáteční podmínce (1.2). Především, konvergence (1.8) je stejnoměrná, takže

$$|Y(x) - y_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \left\langle x_0, x_0+\delta\right\rangle, \quad \forall n > N(\varepsilon)\,.$$

Dále podle (1.5)

$$|f(x, Y(x)) - f(x, y_n(x))| \le L|Y(x) - y_n(x)|\,.$$

Spojením obou získaných vztahů dostáváme

$$|f(x, Y(x)) - f(x, y_n(x))| < L\varepsilon \quad \forall x \in \left\langle x_0, x_0+\delta\right\rangle, \quad \forall n > N(\varepsilon)\,.$$

Odtud

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \le L\delta\varepsilon\,.$$

Protože číslo ε je libovolné, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.9}$$

Přejděme ve vztahu

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t$$

k limitě pro $n \to \infty$. Potom podle (1.8), (1.9) platí

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.10}$$

Integrand na pravé straně (1.10) je spojitou funkcí. Proto příslušný integrál má derivaci podle x (viz derivaci integrálu jako funkce horní meze), která je rovna $f(x, Y(x))$. Je tedy

$$Y'(x) = f(x, Y(x))\,,$$

takže funkce $Y(x)$ splňuje rovnici (1.1). Položíme-li v (1.10) $x = x_0$, potom dostaneme $Y(x_0) = y_0$, takže $Y(x)$ splňuje (1.2).

5. Nakonec dokážeme jednoznačnost řešení. Předpokládejme, že existuje spojitá funkce $Z(x)$, pro kterou platí

$$Z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Z(t))\,\mathrm{d}t\,, \tag{1.11}$$

tj. vyhovuje vztahům (1.1), (1.2). Nechť $Y(x) \neq Z(x)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že hodnoty x, při kterých platí $Y(x) \neq Z(x)$, jsou napravo od x_0 v libovolné blízkosti bodu x_0; jinak bychom za bod x_0 vzali ten bod $\overline{x} > x_0$, v jehož libovolné blízkosti si hodnoty $Y(x)$ a $Z(x)$ přestávají být rovné; v takovém případě totiž platí

$$Y(x) - Z(x) = \int_{\overline{x}}^{x} [f(t, Y(x)) - f(t, Z(x))] \, \mathrm{d}t \, .$$

Dokážeme, že náš předpoklad vede ke sporu. Zvolíme nějakou malou konstantu $\varepsilon > 0$, konkrétně

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{L} \, . \tag{1.12}$$

Podle předpokladu není v uzavřeném intervalu $x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon$ všude $Y(x) = Z(x)$; kladná funkce $|Y(x) - Z(x)|$ nabývá tedy v některém bodě ξ tohoto intervalu své největší hodnoty $\vartheta > 0$, přičemž je $\xi \neq x_0$ protože pro $x = x_0$ je $Y(x_0) = Z(x_0) = y_0$. Odečtěme (1.11) od (1.10), dosaďme za x hodnotu ξ a užijme Lipschitzovu podmínku (1.5):

$$|Y(\xi) - Z(\xi)| = \vartheta \leq \int_{x_0}^{\xi} |f(t, Y(x)) - f(t, Z(x))| \, \mathrm{d}t \leq L \int_{x_0}^{\xi} |Y(t) - Z(t)| \, \mathrm{d}t \, .$$

Poslední nerovnost bude tím spíše splněna, jestliže za integračním znamením nahradíme rozdíl $|Y(x) - Z(x)|$ jeho největší hodnotou ϑ a jestliže integrujeme po intervalu $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, který je nadintervalem intervalu (x_0, ξ). Dostaneme $\vartheta \leq L\varepsilon\vartheta$. Protože předpokládáme $\vartheta > 0$, plyne odtud podle (1.12)

$$1 \leq L\varepsilon < 1,$$

což je spor. Tedy předpoklad, že by existovalo jiné řešení Z vyhovující téže počáteční podmínce jako Y, vede ke sporu. $\square$

Stejným postupem se dokáže tato věta, která se liší od věty 1.1 pouze umístěním bodu (x_0, y_0) v oblasti $\overline{R}$:

1.1bis Věta (Picard). *Nechť jsou splněny tyto dva předpoklady:*

a) Funkce $f(x, y)$ je definovaná a spojitá na dvojrozměrné uzavřené oblasti $\overline{R}$ ve tvaru obdélníku

$$\overline{R} = \{(x, y) : \; x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\},$$

tj. existuje

$$M = \max_{\overline{R}} |f(x, y)| \, .$$

b) Funkce $f(x, y)$ má v každém bodě uzavřené oblasti $\overline{R}$ parciální derivaci $\partial f / \partial y$, která je ohraničená na $\overline{R}$, tj. platí

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq L \quad \textit{pro všechny body } (x, y) \in \overline{R} \quad (L = \mathrm{const} > 0).$$

Potom existuje jediné řešení počátečního problému (1.1), (1.2), *které je definované a spojité v intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, kde*

$$\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

1.2. Poznámka. Podle Lagrangeovy věty o přírůstku platí

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)(y_1-y_2)\,,$$

kde η je vhodné číslo ležící mezi y_1 a y_2, takže z předpokladu b) plyne

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2| \quad \forall (x,y_i)\in \overline{R}\,. \tag{1.5}$$

Nerovnost (1.5) jsme užili v důkazu věty 1.1 celkem třikrát (v částech 2, 4 a 5), kdežto předpoklad b), ze kterého tato nerovnost plyne, jsme přímo vůbec neužili. Nerovnost (1.5) se nazývá *Lipschitzova podmínka* a věta 1.1 se častěji vyslovuje tak, že předpoklad b) je nahrazen nerovností (1.5). Takový tvar věty 1.1 je obecnější. Např. funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

nemá v počátku $(0,0)$ derivaci $\partial f/\partial y$, splňuje však v každém okolí bodu $(0,0)$ Lipschitzovu podmínku (1.5). // Splnění Lipschitzovy podmínky geometricky znamená, že "směrnice"

$$\frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2}$$

přímky spojující dva body $(x,y_1,f(x,y_1))$, $(x,y_2,f(x,y_2))$ grafu funkce f je v absolutní hodnotě omezena číslem L.

1.3. Poznámka. Je třeba zdůraznit, že tvrzení Picardovy věty má lokální charakter vyjadřený podmínkou (1.4), ze které plyne, že existence řešení je zaručena pouze v nějakém okolí bodu x_0,

1.4. Prodloužení řešení. Dokázali jsme pouze existenci a jednoznačnost řešení v uzavřeném intervalu $x_0-h\le x\le x_0+h$, kde $h=\delta$ je dáno vztahem (1.4). Pokud $a\le \frac{b}{M}$, je existence a jednoznačnost řešení počátečního problému (1.1), (1.2) zaručena na *celém* intervalu $\langle x_0-a,x_0+a\rangle$. Nechť tedy $a>\frac{b}{M}$. Potom je existence a jednoznačnost našeho problému zaručena pouze na intervalu $\langle x_0-\frac{b}{M},x_0+\frac{b}{M}\rangle$. Protože jsme však přitom nevyšli z vnitřku uzavřeného obdélníka $\overline{R}$, kde funkce $f(x,y)$ je definovaná a spojitá (a vyhovuje Lipschitzově podmínce), *nalezené řešení může být prodlouženo*: Nechť $y_0^{(1)}$ je hodnota nalezeného řešení pro $x_0^{(1)}:=x_0+h$; bod $(x_0^{(1)},y_0^{(1)})$ leží v obdélníku $\overline{R}$. Potom lze nalézt uzavřený obdélník

$$\overline{R}_1:\quad |x-x_0^{(1)}|\le a_1,\quad |y-y_0^{(1)}|\le b_1,$$

který ještě celý leží v obdélníku $\overline{R}$.[1] Označíme-li $M_1=\max_{\overline{R}_1}|f(x,y)|$ a zvolíme-li počáteční podmínku $y(x_0^{(1)})=y_0^{(1)}$, potom podle dokázané věty 1.1 (resp. 1.1bis) vidíme, že existuje řešení rovnice (1.1) v intervalu $I_1=\langle x_0^{(1)}-h_1,x_0^{(1)}+h_1\rangle$, kde pro číslo h_1 platí $h_1=\min(a_1,\frac{b_1}{M_1})$. Střed intervalu I_1 splývá s pravým koncem uzavřeného intervalu I; v tomto bodě obě námi sestrojená řešení mají stejnou hodnotu $y_0^{(1)}$, takže podle jednoznačnosti těchto řešení obě řešení splývají v $I\cap I_1$.

[1] Každý vnitřní bod obdélníku $\overline{R}$ je v něm podle své definice obsažen i s nějakým svým okolím; za takové okolí můžeme zvolit dostatečně malý obdélník.

Protože pravá část $(x_0^{(1)}, x_0^{(1)}+h_1\rangle$ intervalu I_1 leží vně I, říkáme, že řešení nalezené v této části je *prodloužením* řešení obdrženého v intervalu I.

Podstatná je tato skutečnost: Platí $M_1 \leq M$, protože M je maximum funkce $|f(x,y)|$ na původním obdélníku $\overline{R}$, kdežto M_1 je maximum téže funkce pouze na obdélníku $\overline{R}_1 \subset \overline{R}$. Nechť dále ℓ je průnik svislé přímky vedené bodem $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})$ s obdélníkem $\overline{R}$. Pořadnice $y_0^{(1)}$ dělí tuto úsečku na dvě části. Nechť b_1 je délka kratší části. Není-li $b_1 \ll b$, tak může být $\frac{b}{M} \doteq \frac{b_1}{M_1}$ a získané prodloužení je podstatné.

Je-li $y_0^{(2)}$ hodnota řešení v bodě $x_0^{(2)} := x_0^{(1)}+h_1$ a leží-li bod $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})$ ještě v oblasti $\overline{R}$, můžeme určit řešení pomocí počáteční podmínky $y(x_0^{(2)}) = y_0^{(2)}$ v uzavřeném intervalu I_2, jehož levá část leží v I_1. V této společné části nové řešení splývá s předchozím; v pravé části $(x_0^{(2)}, x_0^{(2)} + h_2\rangle$ intervalu I_2 dostaneme prodloužení vyšetřovaného řešení. Obdobná konstrukce se dá provést také pro ubývající hodnoty x.

Lze dokázat, že takovými prodlouženími se můžeme dostat do libovolné blízkosti hranice ∂R oblasti $\overline{R}$. To je provedeno na str. 67–69 ve [St]. □

Věta 1.1 (resp. 1.1bis) má tento důsledek:

1.5. Důsledek (Existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy). *Předpokládejme, že* 1) *funkce* $f(x,y)$ *je definovaná a spojitá v otevřené množině* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *a* 2) *v každém bodě této množiny splňuje Lipschitzovu podmínku (vzhledem k* y*). Potom pro každý bod* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *má počáteční úloha* (1.1), (1.2) *právě jedno řešení.*

Důkaz tohoto tvrzení je velmi snadný: Protože (x_0, y_0) je vnitřním bodem otevřené oblasti Ω, má kladnou vzdálenost od její hranice $\partial\Omega$, takže můžeme do Ω vepsat uzavřený obdélník $\overline{R}$ (se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami) tak, že bod (x_0, y_0) leží buď na levé svislé straně tohoto obdélníka, nebo je středem $\overline{R}$. → V prvním případě užijeme větu 1.1, v druhém větu 1.1bis. □

1.6. Poznámka. Obvykle se funkce $f(x,y)$ uvažuje na uzavřené oblasti. Ale nyní je moderní (viz např. [Ci]) uvažovat ji v otevřené oblasti.

1.7. Věta (o odhadu nepřesnosti Picardových aproximací). *Nechť v symbolice věty* 1.1 (*resp.* 1.1*bis*) *platí* $L\delta < 1$. *Potom*

$$|Y(x) - y_n(x)| \leq \frac{M\delta}{(n+1)!} \frac{(L\delta)^n}{1 - L\delta}, \tag{1.13}$$

kde $Y(x)$ *je přesné řešení problému* (1.1), (1.2) *a* $y_n(x)$ n*-tá Picardova aproximace.*

Dokažme to: Platí podle (1.7)

$$y_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{m} \big(y_k(x) - y_{k-1}(x)\big),$$

$$Y(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(y_k(x) - y_{k-1}(x)\big),$$

takže (užijeme také odhad (1.6))

$$|Y(x) - y_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq$$

$$\le ML^n \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{L\delta}{n+2} + \frac{(L\delta)^2}{(n+3)(n+2)} + \dots\Big) <$$

$$< ML^n \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} (L\delta)^{k-1} = \frac{M\delta}{(n+1)!} \frac{(L\delta)^n}{1 - L\delta}. \quad \square$$

1.8. Příklad (Picardovy aproximace v konkrétním případě). Uvažujme počáteční problém

$$y' = \frac{2y}{x}, \quad y(1) = y_0. \tag{1.14}$$

Funkce $f(x, y) = 2y/x$ je spojitá v oblasti $(\varepsilon, \infty) \times (0, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$. Pro Picardovy aproximace problému (1.14) platí

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_1^x \frac{2y_0}{\xi}\, \mathrm{d}\xi = y_0 + 2y_0 \ln x, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_1^x \frac{2y_1(\xi)}{\xi}\, \mathrm{d}\xi = y_0 + \int_1^x \frac{2y_0(1 + 2\ln \xi)}{\xi}\, \mathrm{d}\xi = \\ &= y_0 + 2y_0 \ln x + 4y_0 \ln^2 x, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) &= y_0 + 2y_0 \ln x + 4y_0 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \ln^k x, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{1.15}$$

protože

$$\int \frac{(\ln \xi)^n}{\xi}\, \mathrm{d}\xi = \int (\ln \xi)^n (\ln \xi)'\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{n+1} (\ln \xi)^{n+1}.$$

Podle věty 1.1, resp 1.1bis, platí na segmentu $\langle 1, \delta \rangle$

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 x^2 \quad \text{stejnoměrně na } \langle 1, \delta \rangle,$$

čili

$$y_0 + 2y_0 \ln x + 4y_0 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \ln^k x = y_0 x^2 \quad \text{stejnoměrně na } \langle 1, \delta \rangle, \tag{1.16}$$

kde $y(x) = y_0 x^2$ je řešení problému (1.14). Zajímavý výsledek.

1.9. Příklad (o prodloužení). Pro řádné prozumění teorii je nutné existenční věty pořádně "ohmatat". Toto ohmatání nespočívá pouze v prostudování důkazů, ale také k ověření předpokladů a tvrzení na konkrétních příkladech.

Víme, že podmínka $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, kde $\delta = \min(a, \frac{b}{M})$, zaručuje, že grafy postupných Picardových aproximací leží v oblasti

$$\overline{R} = \{(x, y) : \; x_0 - a \le x \le x_0 + a, \; y_0 - b \le y \le y_0 + b\},$$

(případně některé body tohoto grafu leží i na hranici ∂R).

Uvažujme počáteční problém

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0. \tag{1.17}$$

Je to rovnice se separovanými proměnnými, jejíž řešení je vzhledem k počáteční podmínce tvaru

$$y(x) = \tan x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2). \tag{1.18}$$

Odhlédněme od toho, že známe přesné řešení (1.18) a podívejme se na problém z hlediska věty 1.1bis. Čísla a, b vystupující v definici oblasti $\overline{R}$ můžeme zvolit libovolně velká; položme například

$$a = b = 1000. \tag{1.19}$$

Potom ($x_0 = y_0 = 0$)

$$\overline{R} = \big\langle -1000, 1000\big\rangle \times \big\langle -1000, 1000\big\rangle, \tag{1.20}$$

takže $M = 1000001$ a $\delta = 1000/1000001 \approx 0.001$. V tomto případě jsme se na ose x příliš daleko nedostali, a i když budeme naše řešení prodlužovat, budeme postupovat velmi pomalu. Snažme se proto vertikální rozměry dané oblasti optimalizovat. Obecně platí

$$\frac{b}{M} = F(b) = \frac{b}{1+b^2}. \tag{1,21}$$

Najděme extrémy funkce $F(b)$: Platí $F'(b) = (1-b^2)/(1+b^2)^2$, takže $F'(b_0) = 0$ pro $b_0 = \pm 1$. Snadno se ověří, že $F''(b_0) < 0$, takže v bodech $b_0 = \pm 1$ nastává maximum funkce $F(b)$, pro které platí $\max F(b) = F(b_0) = F(1) = 0.5$.

Naše nová oblast tedy bude

$$\overline{R}_0 = \big\langle -1000, 1000\big\rangle \times \big\langle -1, 1\big\rangle \tag{1.22}$$

a protože $\delta_0 = F(1) = 0.5$ podle věty 1.1bis, máme podle této věty zaručenu existenci a jednoznačnost řešení $y(x)$ problému (1.17) na intervalu $\big\langle -0.5, 0.5\big\rangle$.

Dostali jsme se podstatně dál než v předchozím případě, ale opět ne dosti daleko. Začněme proto získané řešení prodlužovat. Nyní musíme využít toho, že na intervalu $\big\langle -0.5, 0.5\big\rangle$ známe přesné řešení problému (1.17), které je $y(x) = \tan x$. Položme

$$x_0^{(1)} := x_0 + \delta_0 = 0 + 0.5 = 0.5, \quad y_0^{(1)} = y(x_0^{(1)}) = y(0.5) = \tan(0.5) = 0.5463025$$

(počítáno na kapesní kalkulačce). Položme nyní

$$b_1 := b - y_0^{(1)} = 1 - 0.5463025 = 0.4536975$$

a definujme uzavřenou oblast

$$\overline{R}_1 = \big\langle -a + \delta_0, a - \delta_0\big\rangle \times \big\langle y_0^{(1)} - b_1, y_0^{(1)} + b_1\big\rangle = \big\langle -999.5, 999.5\big\rangle \times \big\langle 0.092605, 1\big\rangle.$$

Na této oblasti je

$$M_1 = 1 + b_1^2 = 1 + 1 = 2,$$

takže

$$\delta_1 = \frac{b_1}{M_1} = 0.2284876$$

a prodloužené řešení $y_1(x) = \tan x$ je definováno podle věty 1.1bis na uzavřeném intervalu

$$\left\langle x_0^{(1)} - \delta_1, x_0^{(1)} + \delta_1 \right\rangle = \left\langle 0.2731514, 0.7268487 \right\rangle.$$

Na levé části $\left\langle x_0^{(1)} - \delta_1, x_0 \right\rangle$ tohoto intervalu splývá toto prodloužení s částí řešení problému (1.17), na pravé části $(x_0, x_0^{(1)} + \delta_1\rangle$ definuje skutečné prodloužení řešení problému (1.17). Je

$$y_1(x_0^{(1)} + \delta_1) = \tan 0.7268487 = 0.8892584. \tag{1.23}$$

Pokud provedeme několik dalších prodloužení, jsme schopni maximálně dosáhnout toho, že $x_0^{(n)} := x_0^{(n-1)} + \delta_{n-1} = \frac{\pi}{4} - \varepsilon = 0.7853981 - \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolně malé.

Pokud chceme prodloužit řešení na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\rangle$, musíme se vrátit k oblasti (7.4) či nějaké její uzavřené nadoblasti. $\square$

2. Peanova věta

V této kapitole uvádím existenční Peanovu větu, k jejímuž důkazu je zapotřebí Arzela-Ascoliova věta. (Při zpracování kap. 2 jsem použil [KF], §17.)

2.1. Definice. Funkce z množiny $\{\varphi(x)\}$, kde $x \in \langle a, b\rangle$ se nazývají *stejnoměrně ohraničené*, existuje-li takové číslo K, že

$$|\varphi(x)| \le K \quad \forall x \in \langle a, b\rangle \quad \forall \varphi \in \{\varphi(x)\}.$$

Funkce z množiny $\{\varphi(x)\}$, kde $x \in \langle a, b\rangle$ se nazývají *rovnomocně spojité*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové $\delta(\varepsilon) > 0$, že nerovnost

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$$

je splněna pro všechna $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ taková, že $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, a pro všechna $\varphi \in \{\varphi(x)\}$.

2.2. Věta (Arzela). *Z každé posloupnosti stejnoměrně ohraničených a rovnomocně spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze vybrat posloupnost funkcí, která stejnoměrně konverguje na interalu $\langle a, b\rangle$.*

Modernější formulace (Arzela-Ascoli). *Aby množina spojitých funkcí, které jsou definovány na segmentu $\langle a, b\rangle$, byla kompaktní v $C\langle a, b\rangle$, je nutné a stačí, aby tato množina byla stejnoměrně ohraničená a rovnomocně spojitá.*

Důkaz AA věty. *Nutnost.* Nechť množina $\{\varphi(x)\}$ je kompaktní v $C\langle a, b\rangle$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná $\frac{\varepsilon}{3}$-síť $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$. Každá z funkcí φ_i splňuje

$$|\varphi_i| \le M_i,$$

protože je na segmentu $\langle a, b\rangle$ spojitá. Položme $M = \max M_i + \frac{\varepsilon}{3}$. Podle definice $\frac{\varepsilon}{3}$-sítě existuje ke každé funkci $\varphi \in \{\varphi(x)\}$ alespoňn jedna funkce φ_i z této sítě, že

$$\varrho(\varphi, \varphi_i) = \max |\varphi(x) - \varphi_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Odtud

$$|\varphi| \leq |\varphi_i| + \frac{\varepsilon}{3} \leq M_i + \frac{\varepsilon}{3} \leq M,$$

takže množina $\{\varphi(x)\}$ je stejnoměrně ohraničená.

Dále, protože každá z funkcí φ_i, které tvoří $\frac{\varepsilon}{3}$-síť, je spojitá, a tedy stejnoměrně spojitá na $\langle a, b\rangle$, ke každému $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existuje takové $\delta_i > 0$, že

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro } |x_1 - x_2| < \delta_i.$$

Položme $\delta = \min \delta_i$. Když potom při $|x_1 - x_2| < \delta$ vybereme pro libovolnou funkci $\varphi \in \{\varphi(x)\}$ funkci φ_i tak, že $\varrho(\varphi, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$, bude platit:

$$\begin{gathered} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = \\ |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_2) + \varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| \leq \\ \leq |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \\ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{gathered}$$

Odtud plyne rovnomocná spojitost funkcí množiny $\{\varphi(x)\}$.

Dostatečnost. Nechť funkce množiny $\{\varphi(x)\}$ jsou stejnoměrně ohraničené a rovnomocně spojité. Potom stačí dokázat, že pro tuto množinu existuje v $C\langle a, b\rangle$ při každém $\varepsilon > 0$ konečná ε-síť. Nechť

$$|\varphi| \leq M \quad \text{pro všechna } \varphi \in \{\varphi(x)\}$$

a vyberme $\delta > 0$ tak, že

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{když } |x_1 - x_2| < \delta \text{ pro všechny funkce } \varphi \in \{\varphi(x)\}.$$

Rozdělme úsečku $\langle a, b\rangle$ body $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ na části menší než δ a veďme těmito body kolmice k ose x. Úsečku $\langle -M, M\rangle$ na ose y rozdělme body $y_0 = -M, y_1, y_2, \ldots, y_m = M$ na části o délce nanejvýš rovné $\frac{\varepsilon}{5}$ a veďme těmito body vodorovné přímky. Tímto způsobem jsme rozdělili obdélník $\langle a, b\rangle \times \langle -M, M\rangle$ na obdélníky s vodorovnou stranou $< \delta$ a svislou stranou $\leq \frac{\varepsilon}{5}$. Přiřaďme nyní každé funkci $\varphi \in \{\varphi(x)\}$ polygon $\psi(x)$ s vrcholy v bodech (x_k, y_i), tj. v uzlech sestrojené sítě, ve kterých se liší v bodech x_k od funkce φ méně než o $\frac{\varepsilon}{5}$ (existence takové polygonální čáry je zřejmé). Tedy platí

$$\begin{gathered} |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{5}, \\ |\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}, \\ |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}, \end{gathered}$$

takže

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Protože mezi uzlovými body vytvořené obdélníkové sítě je polygon $\psi(x)$ lineární, platí

$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \frac{3\varepsilon}{5} \quad \forall x \in \langle x_k, x_{k+1} \rangle.$$

Zvolme nyní $x \in \langle a, b \rangle$ libovolně a nechť x_k je nejbližší uzlový bod zleva. Potom

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_k)| +$$
$$+ |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \leq \varepsilon.$$

Tedy polygonální čáry $\psi(x)$ tvoří vzhledem k množině $\{\varphi(x)\}$ ε-síť. Počet těchto funkcí $\psi(x)$ je konečný, protože obecně je možné proložit konečným počtem bodů jenom konečný počet lomených čar. Tedy množina $\{\varphi(x)\}$ je totálně ohraničená. $\square$

2.3. Věta (Peano). *Mějme diferenciální rovnici*

$$y' = f(x, y(x)). \tag{2.1}$$

Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá v nějaké dvojrozměrné uzavřené oblasti $\overline{G}$, potom každým vnitřním bodem $(x_0, y_0) \in G$ této oblasti prochází alespoň jedna integrální křivka rovnice (2.1)*.*

2.4. Poznámka. Existence řešení je zaručena v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, který získáme takto (viz také důkaz Peanovy věty): Veďme bodem (x_0, y_0) přímky o směrnicích M a $-M$. Dále veďme svislé přímky $x = a$ a $x = b$ tak, aby vzniklé dva trojúhelníky se společným vrcholem (x_0, y_0) celé ležely v oblasti G. Pokud přímka $x = a$ je co nejvíce nalevo a přímka $x = b$ co nejvíce napravo, aby vzniklé dva trojúhelníky ještě ležely v oblasti G, získali jsme segment $\langle a, b \rangle$, ve kterém je zaručena existence řešení Peanovou větou.

Důkaz Peanovy věty. Protože funkce $f(x, y)$ je spojitá na uzavřené oblasti, je na ní ohraničená:

$$|f(x, y)| < M \quad \forall (x, y) \in \overline{R}.$$

Veďme bodem (x_0, y_0) přímky o směrnicích M a $-M$. Veďme dále svislé přímky $x = a$ a $x = b$ tak, aby vzniklé dva trojúhelníky se společným vrcholem (x_0, y_0) celé ležely v oblasti G. Tato dvojice trojúhelníků tvoří uzavřenou množinu Δ.

Nyní pro danou rovnici (2.1) sestrojíme *Eulerovy lomené čáry* takto: Z bodu (x_0, y_0) veďme přímku se směrnicí $f(x_0, y_0)$. Na této přímce zvolme nějaký bod (x_1, y_1) a veďme jím přímku se směrnicí $f(x_1, y_1)$. Na této přímce opět zvolme nějaký bod (x_2, y_2) a veďme jím přímku se směrnicí $f(x_2, y_2)$, atd. Mějme nyní posloupnost takových Eulerových lomených čar $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$, které procházejí bodem (x_0, y_0) a takových, že délka největší ze stran lomené čáry L_k konverguje k nule pro $k \to \infty$. Nechť φ_k je funkce, jejímž grafem je lomená čára L_k. Funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ mají tyto vlastnosti:

1. jsou definovány na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. jsou stejnoměrně ohraničené na $\langle a, b \rangle$,
3. jsou rovnomocně spojité na $\langle a, b \rangle$.

Na základě Arzelovy věty lze z posloupnosti $\{\varphi_k\}$ vybrat stejnoměrně konvergentní posloupnost. Nechť je to posloupnost $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(k)}, \ldots$. Položme

$$\varphi(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi^{(k)}(x).$$

Protože všechny lomené čáry $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$ procházejí bodem (x_0, y_0), platí

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Zbývá ověřit, že funkce $\varphi(x)$ splňuje v intervalu $\langle a, b \rangle$ diferenciální rovnici (2.1). K tomu je třeba dokázat, že pro libovolné číslo $\varepsilon > 0$ je

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon, \tag{2.2}$$

je-li rozdíl $|x'' - x'|$ dostatečně malý. K tomu však stačí dokázat, že pro dostatečně velká přirozená čísla k platí

$$\left| \frac{\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon, \tag{2.3}$$

jakmile je rozdíl $|x'' - x'|$ dostatečně malý.

Protože funkce f je spojitá na oblasti $\overline{G}$, lze ke každému číslu $\varepsilon > 0$ najít takové číslo $\eta > 0$, že

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon \quad (y' = \varphi(x')), \tag{2.4}$$

jestliže

$$|x - x'| < 2\eta, \quad |y - y'| < 4M\eta. \tag{2.5}$$

Množina bodů $(x, y) \in \overline{G}$, které vyhovují nerovnostem (2.5), je obdélník; označme jej Q. Nechť číslo K je tak velké, že pro všechna přirozená čísla $k > K$ platí

$$|\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)| < M\eta \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

a že všechny strany lomené čáry L_k mají délku menší než η. Potom pro $|x - x'| < 2\eta$ všechny Eulerovy polygony $\varphi^{(k)}$, pro něž $k > K$, celé leží v obdélníku Q.

Dále nechť $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots, [a_{n+1}, b_{n+1}]$ jsou vrcholy polygonu L_k (tj. jeho body zlomu), přičemž

$$a_0 \leq x' < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < x'' \leq a_{n+1}$$

(pro určitost předpokládáme, že $x' < x''$; obdobně se vyšetřuje případ $x'' < x'$). Potom pro odpovídající funkci $\varphi^{(k)}$ platí

$$\begin{gathered}
\varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') = f(a_0, b_0)(a_1 - x'), \\
\varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i) = f(a_i, b_i)(a_{i+1} - a_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\
\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) = f(a_n, b_n)(x'' - a_n).
\end{gathered}$$

Odtud a z nerovností (2.4) dostaneme pro $|x'' - x'| < \eta$, protože ve (2.4) můžeme postupně položit $(x, y) = (a_0, b_0)$, $(x, y) = (a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $(x, y) = (a_n, b_n)$:

$$\begin{gathered}
[f(x', \varphi(x')) - \varepsilon](a_1 - x') < \varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') < [f(x', \varphi(x')) + \varepsilon](a_1 - x'); \\
[f(x', \varphi(x')) - \varepsilon](a_{i+1} - a_i) < \varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i) < \\
< [f(x', \varphi(x')) + \varepsilon](a_{i+1} - a_i) \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\
[f(x', \varphi(x')) - \varepsilon](x'' - a_n) < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) < [f(x', \varphi(x')) + \varepsilon](x'' - a_n).
\end{gathered}$$

Z těchto nerovností plyne

$$\begin{aligned}
&[f(x'),\varphi(x'))-\varepsilon](x''-x')=\\
&=[f(x'),\varphi(x'))-\varepsilon][(x''-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+(a_1-x')]<\\
&<[\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(a_n)]+[\varphi^{(k)}(a_n)-\varphi^{(k)}(a_{n-1})]+\cdots+\\
&+[\varphi^{(k)}(a_2)-\varphi^{(k)}(a_1)]+[\varphi^{(k)}(a_1)-\varphi^{(k)}(x')]=\\
&=\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')<\\
&<[f(x'),\varphi(x'))+\varepsilon][(x''-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+(a_1-x')]=\\
&=[f(x'),\varphi(x'))+\varepsilon](x''-x').
\end{aligned}$$

Odtud

$$f(x',\varphi(x'))-\varepsilon<\frac{\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')}{x''-x'}<f(x',\varphi(x'))+\varepsilon,$$

což je nerovnost (2.3), kterou jsme chtěli dokázat. $\square$

Různé posloupnosti vybrané z posloupnosti Eulerových polygonů mohou konvergovat k různým řešením rovnice (2.1). Proto řešení rovnice $y'=f(x,y)$ jdoucí bodem $[x_0,y_0]$ není obecně jediné.

Již jsem uvedl, že předpoklad b) Picardovy věty lze různými způsoby oslabit, nelze jej však vynechat. Jestliže tak učiníme, máme Peanovou větou zaručenu existenci řešení, nikoliv však jeho jednoznačnost. Tuto skutečnost ilustruji obvykle Příklady 2.5 a 2.6.

2.5. Příklad. Uvažujme počáteční problém

$$y'=f(x,y)=3y^{2/3}, \tag{2.6}$$

$$y(x_0)=y_0\,. \tag{2.7}$$

Protože funkce $f(x,y)=3y^{2/3}$ je spojitá *v každém* obdélníku $\overline{R}$ o středu $(0,0)$ a stranách rovnoběžných se souřadnými osami, má počáteční problém (2.6), (2.7) pro libovolné hodnoty x_0, y_0 *alespoň* jedno řešení (viz větu 2.3). Protože

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y^{-1/3}\,,$$

není derivace $\partial f/\partial y$ v obdélnících $\overline{R}$ obsahujících body $(x,0)$ ohraničená a ani není splněna Lipschitzova podmínka. (Skutečně: Zvolme $L>0$ libovolně velké a nechť λ je takové, že $L=2/\lambda^{1/3}$. Potom podle Lagrangeovy věty o přírůstku existuje $0<\eta<\lambda$ tak, že $f(x,\lambda)-f(x,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)\lambda=\frac{2}{\eta^{1/3}}\lambda>L\lambda$. Stejně dokážeme, že v případě, když se blížíme k přímce $y=0$ zespodu, tak derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ neomezeně klesá k $-\infty$.)[2] V takových obdélnících nemáme zaručenu jednoznačnost řešení.

[2]Obecně platí v důsledku Lagrangeově věty o přírůstku: Nechť funkce $f(y)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť má v otevřeném intervalu (a,b) spojitou derivaci $f'(y)$, pro kterou $\lim_{y\to a}f'(y)=\infty$. Potom ke každému velkému $L>0$ existuje číslo $\lambda=\lambda(L)>0$, že pro $y\in(a,\lambda\rangle$ platí $f(y)-f(a)>L(y-a)$. $\Rightarrow$ Tedy nerovnost $|\partial f/\partial y|\le L$ je nutnou podmínkou pro platnost Lipschitzovy podmínky.

Podívejme se nyní na celou situaci z výpočetního hlediska. Za předpokladu $y \neq 0$ můžeme provést separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{3y^{2/3}} = \mathrm{d}x$$

a integrací této rovnice dostaneme $y^{1/3} = x + C$ čili

$$y = (x+C)^3. \tag{2.8}$$

Získali jsme tak formálně soustavu křivek (tzv. kubických semiparabol), které tvoří obecný integrál rovnice (2.6). // Všimněme si nyní případu

$$y = 0\,. \tag{2.9}$$

Funkce (2.9) je také řešením rovnice (2.6). Protože je nelze získat z (2.8) žádnou volbou konstanty C, je to výjimečné řešení, které splňuje počáteční podmínku

$$y(x_0) = 0 \quad (x_0 \text{ libovolné}). \tag{2.10}$$

Další výjimečná řešení (je jich nespočetně mnoho) můžeme poskládat ze soustavy křivek (2.8), (2.9) tak, že uvedená řešení různě napojujeme: Nechť a, $b \in R^1$ $(a < b)$ jsou dvě libovolná reálná čísla. Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^3 & \text{pro } x \leq a, \\ 0 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ (x-b)^3 & \text{pro } x \geq b \end{cases} \tag{2.11}$$

je také výjimečné řešení rovnice (2.6).

Všechny tyto úvahy se pohybují v rámci Peanovy věty, která zaručuje existenci řešení, ale ne jeho jednoznačnost.

Vrátíme-li se k podmínkám věty 1.1, tj. hledáme-li řešení počátečního problému (2.6), (2.7) jen v obdélníku $\overline{R}$, který je *nad* nebo *pod* osou x, potom takové řešení je pouze jedno.

2.6. Příklad. Uvažujme diferenciální rovnici

$$(y')^2 + y^2 = 1 \tag{2.12}$$

čili

$$y' = \pm\sqrt{1-y^2}\,. \tag{2.13}$$

Tato rovnice má dvě soustavy řešení

$$y = \sin(x+C) \quad (-\pi/2 < x + C < \pi/2), \tag{2.14a}$$

$$y = \sin(-x+C) \quad (-\pi/2 < -x + C < \pi/2). \tag{2.14b}$$

Jsou to proti sobě posunuté sinusoidy; Řešení (2.14a), resp.(2.14b) vzniklo posunutím

$$y = \sin x \quad (-\pi/2 < x < \pi/2), \quad \text{resp.} \quad y = \sin(-x) \quad (-\pi/2 < -x < \pi/2).$$

Nás v tomto okamžiku zajímá skutečnost, že v okolí přímek

$$y = 1, \quad y = -1 \tag{2.15}$$

není splněna Lipschitzova podmínka

$$|f(x, y^*) - f(x, \pm 1)| \leq L|y^* - (\pm 1)| \quad \forall (x, y^*), (x, \pm 1) \in D = (-\infty, \infty) \times \big\langle -1, 1 \big\rangle.$$

Dokažme to: Zvolme $L > 1$ (protože $\frac{\partial f}{\partial y}$ je na D neohraničená, může být L libovolně velké) a vezměme $0 < \lambda < 1$ tak, aby $L = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$. Potom je $\lambda = \frac{L}{\sqrt{1+L^2}}$. Protože $f(x, 1) = 0$, z Lagrangeovy věty o přírůstku plyne

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y - 1) = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}(1 - y), \quad \lambda < y < \eta < 1.$$

Protože $L = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} < \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$, je $f(x, y) > L(1 - y)$, $y \in (\lambda, 1)$, což znamená, že v okolí přímky $y = 1$ funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ nesplňuje Lipschitzovu podmínku. (Že tato funkce nesplňuje Lipschitzovu podmínku také v okolí přímky $y = -1$, se dokáže stejným způsobem.) $\rightarrow$ Dokázali jsme tak ve speciálním případě opět nutnost podmínky z Lemmatu 2.7 (jehož dostatečná podmínka je dokázána v Poznámce 1.2):

2.7. Lemma. *Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na uzavřené oblasti $\overline{R}$. Postačující podmínkou pro Lipschitzovu podmínku vzhledem k y je existence ohraničené $\frac{\partial f}{\partial y}$ na celé oblasti $\overline{R}$. Nutnou podmínkou pro Lipschitzovu podmínku vzhledem k y je ohraničenost $\frac{\partial f}{\partial y}$ (ve všech bodech, kde existuje).*

Tento výsledek implikuje, že v případě rovnice (2.13) neplatí obecně Picardova věta. Protože však jsou funkce $f(x, y) = \pm\sqrt{1 - y^2}$ v oblasti $(-\infty, \infty) \times \big\langle -1, 1 \big\rangle$ spojité a ohraničené ($M = 1$), platí Peanova věta. Obě funkce (2.15), tj. $y = 1$ a $y = -1$, splňují rovnici (2.13), ale nelze je realizovat žádnou volbou konstanty C v obecných řešeních (2.14a), (2.14b). Jde o řešení *singulární*, protože tyto přímky jsou tečnami grafu každého partikulárního řešení. Pomocí nich a obecného řešení lze vytvořit nespočetně mnoho singulárních řešení: *Každá ze sinusovek* (2.14ab) *může v bodě dotyku k jedné z tečen* $y = \pm 1$ *přejít v tuto tečnu a v libovolném dalším bodě dotyku opět v jednu z obou sinusovek.*

3. Existence a jednoznačnost řešení počátečního problému soustavy ODR 1. řádu

Dokážeme větu o existenci a jednoznačnosti počátečního problému soustavy n diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{3.1}$$

s počátečními podmínkami

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \ldots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}, \tag{3.2}$$

kde body $(x_0, y_1^{(0)}), (x_0, y_2^{(0)}), \ldots, (x_0, y_n^{(0)})$ leží na "svislé" části hranice $\partial\Omega$ uzavřené $(n+1)$-rozměrné oblasti $\overline{\Omega}$ tvaru

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} = \{(x, y_1, \ldots, y_n) : x_0 \le x \le x_0 + a, y_1^{(0)} - b_1 \le y_1 \le y_1^{(0)} + b_1, \ldots, \\ y_n^{(0)} - b_n \le y_n \le y_n^{(0)} + b_n\} = \\ = \langle x_0, x_0 + a\rangle \times \langle y_1^{(0)} - b_1, y_1^{(0)} + b_1\rangle \times \cdots \times \langle y_n^{(0)} - b_n, y_n^{(0)} + b_n\rangle. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.1. Věta (zobecněná Picardova). *Nechť funkce $f_i = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ (kde $i = 1, \ldots, n$) splňují tyto dva předpoklady:*

a) jsou definované a spojité na $(n+1)$-rozměrné uzavřené oblasti $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tvaru (3.3)*, kde kladná čísla $a, b_1, \ldots, b_n$ jsou libovolná;*

b) na oblasti $\overline{\Omega}$ (tj. v každém bodě $P \in \overline{\Omega}$) existují parciální derivace $\partial f_i/\partial y_k$ a jsou tam ohraničené, tj. $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(P)\right| \le L \ \ \forall P \in \overline{\Omega}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

Potom v intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta\rangle$, kde

$$\delta = \min\Big(a, \frac{b_1}{M}, \ldots, \frac{b_n}{M}\Big), \quad M = \max_{\overline{\Omega}} |f_i(x, y_1, \ldots, y_n)|, \tag{3.4}$$

existuje právě jedno řešení $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ soustavy (3.1)*, které splňuje počáteční podmínky* (3.2)*. Posloupnost Picardových postupných aproximací stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta\rangle$ k přesnému řešení problému* (3.1), (3.2).

3.2. Poznámka. Předpoklad b) se dá nahradit slabším předpokladem, že funkce $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ splňuje na $\overline{\Omega}$ Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y_1, \ldots, y_n$.

Důkaz Věty 3.1. Důkaz je zobecněním postupu uvedeného v důkazu Picardovy věty 1.1. Podle věty o přírůstku platí:

$$f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, y_1^*, \ldots, y_n^*) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\eta_1, \ldots, \eta_n)(y_k - y_k^*),$$

kde $y_k \le \eta_k \le y_k^*$. Podle druhého předpokladu věty 3.1 odtud plyne

$$|f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, y_1^*, \ldots, y_n^*)| \le L \sum_{k=1}^{n} |y_k - y_k^*|, \tag{3.5}$$

což je Lipschitzova podmínka připomenutá v Poznámce 3.2. Lipschitzovu podmínku (3.5) několikrát v důkazu využijeme.

Užijeme opět metodu Picardových postupných aproximací. Za přibližnou hodnotu nultého řádu vezmeme hodnoty počátečních podmínek:

$$y_1^{(0)}(x) = y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}(x) = y_n^{(0)}; \tag{3.6$_0$}$$

pomocí těchto aproximací definujeme aproximace prvního řádu:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(\xi, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\,\mathrm{d}\xi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(1)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(\xi, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.6$_1$}$$

Dále definujeme druhé aproximace

$$\begin{aligned} y_1^{(2)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(\xi, y_1^{(1)}(\xi), y_2^{(1)}(\xi), \ldots, y_n^{(1)}(\xi))\,\mathrm{d}\xi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(2)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(\xi, y_1^{(1)}(\xi), y_2^{(1)}(\xi), \ldots, y_n^{(1)}(\xi))\,\mathrm{d}\xi; \end{aligned} \tag{3.6$_2$}$$

obecně jsou m-té aproximace definovány pomocí aproximací $(m-1)$-ho řádu:

$$\begin{aligned} y_1^{(m)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(\xi, y_1^{(m-1)}(\xi), y_2^{(m-1)}(\xi), \ldots, y_n^{(m-1)}(\xi))\,\mathrm{d}\xi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(m)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(\xi, y_1^{(m-1)}(\xi), y_2^{(m-1)}(\xi), \ldots, y_n^{(m-1)}(\xi))\,\mathrm{d}\xi; \end{aligned} \tag{3.6$_m$}$$

1. Je zřejmé, že funkce (3.6$_0$) a (3.6$_1$) jsou spojité. Dále platí: první aproximace nevyjdou z oblasti $\overline{\Omega}$. Vskutku (podle definice čísla δ a ohraničeností funkcí f_i)

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\,\mathrm{d}\xi \right| \le M|x - x_0| \le M\delta \le b_i,$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n$. Předpokládáme-li že $(m-1)$-ní aproximace jsou spojité funkce proměnné x, vidíme, že m-té aproximace, jakožto neurčité integrály spojitých funkcí, jsou rovněž spojité.

Lehce se dokáže, že pokud $(m-1)$-ní aproximace nevyjdou z oblasti $\overline{\Omega}$ pro $|x-x_0| \leq \delta$, pak totéž platí pro m-té aproximace. Skutečně, podle předpokladu o $(m-1)$-ních aproximacích platí

$$|f_i(x, y_1^{(m-1)}, y_2^{(m-1)}, \dots, y_n^{(m-1)})| \leq M \quad \text{pro } |x-x_0| \leq \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

takže vztahy (3.6_m) dají

$$|y_i^{(m)} - y_i^{(0)}| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(m-1)}, y_2^{(m-1)}, \dots, y_n^{(m-1)})\, dx \right| \leq M|x-x_0| \leq M\delta \leq b_i.$$

Protože tato nerovnost byla dokázána pro $m = 1$, je správná pro každé přirozené m. Tedy: *všechny postupné aproximace* (3.6_m) *náležejí do oblasti* $\overline{\Omega}$*, jestliže se argument* x *mění v intervalu* $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$. // Tím jsme dokončili analogii části **1** důkazu věty 1.1. Dokážeme nyní zbývající části.

2. V této části dokážeme, že pro libovolné $m = 1, 2, \dots$ platí odhad (3.7_m). Podle (3.6_1) můžeme psát:

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})\, \mathrm{d}\xi \right| \leq M|x-x_0|;$$

dále

$$\begin{aligned} &|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)| = \\ &= \left| \int_{x_0}^{x} [f_i(\xi, y_1^{(1)}(\xi), \dots, y_n^{(1)}(\xi)) - f_i(\xi, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})]\, \mathrm{d}\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(\xi, y_1^{(1)}(\xi), \dots, y_n^{(1)}(\xi)) - f_i(\xi, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})|\, \mathrm{d}\xi \right|. \end{aligned} \tag{3.7$_1$}$$

Na základě Lipschitzovy podmínky a již získaného odhadu pro $|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}|$ je

$$\begin{aligned} &|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} L(|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}| + \dots + |y_n^{(1)} - y_n^{(0)}|)\, \mathrm{d}x \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} MnL|\xi - x_0|\, \mathrm{d}\xi \right| = MnL\frac{|x-x_0|^2}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \tag{3.7$_2$}$$

Předpokládejme, že jsme již získali odhad pro rozdíl $y_i^{(m-1)}(x) - y_i^{(m)}(x)$ ve tvaru:

$$|y_i^{(m-1)}(x) - y_i^{(m-2)}(x)| \leq M(nL)^{m-2}\frac{|x-x_0|^{m-1}}{(m-1)!} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{3.7$_{m-1}$}$$

Dokážeme, že pro další rozdíl platí obdobný odhad, ve kterém pouze místo $m-1$ stojí m. Skutečně,

$$\begin{aligned}
&|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)| = \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} [f_i(\xi, y_1^{(m-1)}, \dots, y_n^{(m-1)}) - f_i(\xi, y_1^{(m-2)}, \dots, y_n^{(m-2)})] \,\mathrm{d}\xi \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(\xi, y_1^{(m-1)}, \dots, y_n^{(m-1)}) - f_i(\xi, y_1^{(m-2)}, \dots, y_n^{(m-2)})| \,\mathrm{d}\xi \right| \leq \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} |y_i^{m-1} - y_i^{m-2}| \,\mathrm{d}\xi \right| \leq M(nL)^{m-1} \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|\xi - x_0|^{m-1}}{(m-1)!} \right| \mathrm{d}\xi = \\
&= M(nL)^{m-1} \frac{|x - x_0|^m}{m!}.
\end{aligned} \tag{3.7$_m$}$$

Tím jsme dokázali, že odhad (3.7$_m$) platí pro každé přirozené m.

3. Nyní dokážeme, že n *posloupností Picardových postupných aproximací tvoří konvergentní posloupnosti*, které konvergují pro všechna $x \in \langle x_0, x_0+\delta \rangle$ stejnoměrně k nějakým funkcím $y_i = Y_i(x) = \lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, které jsou na intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ spojité. Stejně jako v případě jediné funkce (viz důkaz věty 1.1) vyjdeme od řad

$$\begin{aligned}
&y_i^{(0)} + \left(y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}\right) + \left(y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)\right) + \dots + \\
&+ \left(y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)\right) + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Absolutní hodnoty členů těchto řad počínaje druhým členem jsou odhadnuty v nerovnosti (3.7$_m$). Všimneme-li si dále, že $|x - x_0| \leq \delta$, vidíme, že všechny členy řad (3.8) (počínaje druhým) jsou co do absolutní hodnoty nanejvýš rovny odpovídajícím členům *číselné řady s kladnými členy*

$$\sum_{m=1}^{\infty} M(nL)^{m+1} \frac{\delta^m}{m!}.$$

Tato poslední řada je konvergentní, takže řady (3.8) konvergují podle Weierstrassova kritéria stejnoměrně pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$; protože jejich členy jsou spojité funkce, jsou také jejich součty spojité funkce, které označíme $Y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, takže

$$Y_i(x) = y_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (y_i^{(k)}(x) - y_i^{(k-1)}(x)) = \lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x).$$

4. Dokážeme, že funkce $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_m(x)$ *dávají hledanou soustavu řešení diferenciálních rovnic* (3.1): Podle samotné definice funkcí $y_i^{(m)}(x)$ (viz (3.6$_m$)) je $y_i^{(m)}(x_0) = y_i^{(0)}$; platí tedy

$$\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x_0) = Y_i(x_0) = y_i^{(0)},$$

tj. limitní funkce $Y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ *vyhovují počátečním podmínkám.*

Nyní dokážeme, že funkce $Y_i(x)$ vyhovují soustavě (3.1). Na základě (3.6_m) můžeme psát:

$$\begin{gathered}y_i^{(m)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \{f_i(\xi, y_1^{(m-1)}(\xi), \dots, y_n^{(m-1)}(\xi)) - \\ - f_i(\xi, Y_1(\xi), \dots, Y_n(\xi))\} \, \mathrm{d}\xi + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, Y_1(\xi), \dots, Y_n(\xi)) \, \mathrm{d}\xi \\ (i = 1, 2, \dots, n) \,.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Odhadneme absolutní hodnotu prvního integrálu v (3.9):

$$\begin{gathered}\left| \int_{x_0}^{x} \{f_i(\xi, y_1^{(m-1)}(\xi), \dots, y_n^{(m-1)}(\xi)) - f_i(\xi, Y_1(\xi), \dots, Y_n(\xi))\} \, \mathrm{d}\xi \right| \leq \\ \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(\xi, y_1^{(m-1)}(\xi), \dots, y_n^{(m-1)}(\xi)) - f_i(\xi, Y_1(\xi), \dots, Y_n(\xi))| \, \mathrm{d}\xi \right| \leq \\ \leq L \left| \int_{x_0}^{x} \{|y_1^{(m-1)}(\xi) - Y_1(\xi)| + \dots + |y_n^{(m-1)}(\xi) - Y_n(\xi)|\} \, \mathrm{d}\xi \right|\end{gathered} \tag{3.9*}$$

(poslední nerovnost plyne z Lipschitzovy podmínky). Protože funkce $y_i^{(m-1)}(x)$ ($m = 1, 2, \dots$) konvergují v intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ stejnoměrně k funkcím $Y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), můžeme k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ najít takové $N(\varepsilon)$, že je-li $m-1 > N(\varepsilon)$, jsou pro všechna x z vyšetřovaného intervalu splněny tyto nerovnosti:

$$|y_i^{(m-1)}(x) - Y_i(x)| < \frac{\varepsilon}{nL\delta} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(na pravé straně volíme $\frac{\varepsilon}{nL\delta}$, aby nám na pravé straně (3.10) vyšlo ε), takže pro první integrál ve vztahu (3.9) vychází z nerovnosti (3.9*) pro $|x - x_0| \leq \delta$ tento odhad:

$$\begin{gathered}\left| \int_{x_0}^{x} \{f_i(\xi, y_1^{(m-1)}(\xi), \dots, y_n^{(m-1)}(\xi)) - f_i(\xi, Y_1(\xi), \dots, Y_n(\xi))\} \, \mathrm{d}\xi \right| < \\ < \frac{\varepsilon}{nL\delta} nL\delta = \varepsilon.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Nyní dokážeme:

$$Y_i(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \{f_i(\xi, Y_1(\xi), \dots, Y_n(\xi)) \, \mathrm{d}\xi \quad (i = 1, 2 \dots, n). \tag{3.11}$$

Pro $m \to \infty$ je limita integrálu (3.10) rovna nule. Podle již dokázaného je

$$\lim_{m \to \infty} y_i^{(m)}(x) = Y_i(x),$$

takže vztahy (3.9) dají v limitě (3.11).

Diferencujme obě strany vztahu (3.11) podle x. Derivace levé strany existuje, protože existuje derivace pravé strany (derivace integrálu ze spojité funkce podle horní meze). Dostaneme tak identitu:

$$\frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, Y_1(x), \dots, Y_n(x)) \quad (n = 1, 2, \dots, n),$$

tj. *funkce $Y_i(x)$ vyhovují soustavě* (3.1).[3]

5. Konečně dokážeme, že *nalezené řešení je jediné řešení, které vyhovuje počátečním podmínkám.* Předpokládejme naopak, že kromě řešení $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ existuje ještě jedno řešení $Z_1(x), \dots, Z_n(x)$, přičemž $Y_i(x_0) = Z_i(x_0) = y_i^{(0)}$ (kde opět $i = 1, 2, \dots, n$), ale že každé Z_i není identicky rovno Y_i. Potom podle našeho předpokladu není spojitá funkce

$$\varphi(x) \equiv |Y_1(x) - Z_1(x)| + |Y_2(x) - Z_2(x)| + \cdots + |Y_n(x) - Z_n(x)| \tag{3.12}$$

identicky rovna nule v intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varphi(x) \neq 0$ pro jakési hodnoty x libovolně blízké k x_0 (kdyby pro $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$ bylo $\varphi(x) = 0$ a kdyby nastala nerovnost pro hodnoty větší než x_1 a libovolně blízké tomuto číslu, pak bychom v dalších úvahách zaměnili x_0 za x_1).[4] Všimněme si intervalu $\langle x_0, x_0 + h_1 \rangle$, kde h_1 je libovolné kladné číslo menší než δ nebo jemu rovné. Podle předpokladu funkce $\varphi(x)$ nabývá hodnot různých od nuly (tedy kladných) v intervalu $\langle x_0, x_0 + h_1 \rangle$ pro hodnoty x libovolně blízké číslu x_0, tj. *pro libovolně malá* h_1. Podle známé vlastnosti spojitých funkcí, funkce (3.12) nabude kladného maxima ϑ v intervalu $\langle x_0, x_0 + h_1 \rangle$ pro nějakou hodnotu $x = \xi$, kde $x_0 < \xi \leq x_0 + h_1$. Protože naše funkce $Y_i(x)$ a $Z_i(x)$ vyhovují podle předpokladu soustavě (3.1), platí identity

$$\frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, Y_1(x), \dots, Y_n(x)), \quad \frac{\mathrm{d}Z_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, Z_1(x), \dots, Z_n(x)),$$

z nichž plyne

$$\frac{\mathrm{d}(Y_i - Z_i)}{\mathrm{d}x} = f_i(x, Y_1(x), \dots, Y_n(x)) - f_i(x, Z_1(x), \dots, Z_n(x)). \tag{3.13}$$

Integrací (3.13) v intervalu (x_0, x), kde x je proměnná, která probíhá interval $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$, dostaneme:

$$Y_i(x) - Z_i(x) = \int_{x_0}^{x} (f_i(\xi, Y_1(\xi), \dots, Y_n(\xi)) - f_i(\xi, Z_1(\xi), \dots, Z_n(\xi)))\, \mathrm{d}\xi$$
$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Odhadněme levé strany těchto rovností užitím Lipschitzovy podmínky a toho, že hodnoty funkce (3.12) jsou v intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ nanejvýš rovny ϑ. Obdržíme:

$$|Y_i(x) - Z_i(x)| \leq$$
$$\leq L \int_{x_0}^{x} \{|Y_1(\xi) - Z_1(\xi)| + |Y_2(\xi) - Z_2(\xi)| + \cdots + |Y_n(\xi) - Z_n(\xi)|\}\, \mathrm{d}\xi <$$
$$< L\vartheta \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\xi = L\vartheta(x - x_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

[3] Lipschitzova podmínka je v této části důkazu zavedena pouze pro jednoduchost odhadu integrálu ve vztazích (3.8); konvergence tohoto integrálu při $m \to \infty$ plyne z pouhého předpokladu spojitosti funkcí f_i argumentů $y_1, \dots, y_n$ a ze stejnoměrné konvergence funkcí $y_i^{(m-1)}(x)$ k limitním funkcím $Y_i(x)$. Důkaz neužívající Lipschitzovu podmínku byl podán v kap. II knihy [St] v případě jedné diferenciální rovnice.

[4] Množina $\mathbb{E}$ těch x z $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$, pro která je spojitá funkce $\varphi(x)$ rovna nule, je uzavřená množina; za bod x_1 můžeme vzít kterýkoliv bod množiny $\mathbb{E}$ hromadný pro množinu komplementární; takový bod nutně existuje, jestliže $\mathbb{E}$ nesplyne s celým intervalem $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$, ale v tomto posledním případě platí jednoznačnost.

Sečtěme poslední nerovnosti pro $i = 1, 2, \ldots, n$; dostaneme tento výsledek: Pro každé $x \in \langle x_0, x_0 + h_1 \rangle$ platí

$$\begin{aligned} |Y_1(x) - Z_1(x)| + \cdots + |Y_n(x) - Z_n(x)| < \\ < nL\vartheta(x - x_0) \le nL\vartheta h_1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Zvolíme-li nyní hodnotu $x = \xi$, potom levá strana (3.14) bude rovna ϑ, takže dostaneme nerovnost $\vartheta < nL\vartheta h_1$. To vede ke sporu, protože (jak víme) h_1 může být zvoleno *libovolně malé*; zejména můžeme vzít $h_1 \le \frac{1}{nL}$; potom pravá strana bude $\le \vartheta$ a dostaneme $\vartheta < \vartheta$. Tento spor dokazuje jednoznačnost řešení. □

Poznámka A. Opět lze zkonstruovat *prodloužení* našeho řešení. Takové prodloužení je vždy možné, dokud nedojdeme libovolně blízko ke hranici uzavřené oblasti, ve které jsou funkce f_i spojité a splňují Lipschitzovu podmínku. (Viz [St], str. 151.)

Poznámka B. Pokud pravá strana rovnice (3.1) nesplňuje Lipschitzovu podmínku, potom můžeme dokázat existenci řešení, ale ne jeho jednoznačnost. (Obdoba Peanovy věty.) To je poznamenáno v [St] na str. 160 v poznámce pod čarou.

Poznámka C (o odhadu nepřesnosti). Je-li $nL\delta < 1$ potom platí

$$|Y_i(x) - y_i^{(m)}(x)| \le \frac{M\delta}{(m+1)!} \frac{(nL\delta)^m}{1 - nL\delta} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.15}$$

Dokažme to: Platí

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \big(y_i^{(k)}(x) - y_i^{(k-1)}(x)\big),$$
$$Y_i(x) = y_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (y_i^{(k)}(x) - y_i^{(k-1)}(x)\big),$$

takže (užijeme také odhad (3.7_m))

$$\begin{aligned} |Y_i(x) - y_i^{(m)}(x)| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} |y_i^{(k)}(x) - y_i^{(k-1)}(x)| \le \\ \le M(nL)^m \frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!} \Big(1 + nL\frac{\delta}{m+2} + (nL)^2 \frac{\delta^2}{(m+3)(m+2)} + \ldots\Big), \\ < M(nL)^m \frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} (nL\delta)^{k-1} = \frac{M\delta}{(m+1)!} \frac{(nL\delta)^m}{1 - nL\delta}. \quad \square \end{aligned}$$

Podobně jako v kap. 1 uvedeme kromě věty 3.1 ještě větu 3.1bis, kterou opět nedokazujeme, protože její důkaz je doslovným opakováním důkazu věty 3.1:

3.1bis. Věta. *Nechť funkce* $f_i = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *splňují tyto dva předpoklady:*

a) jsou definované a spojité na $(n+1)$*-rozměrné uzavřené oblasti* $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *tvaru*

$$\overline{\Omega} = \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_1^{(0)} - b_1, y_1^{(0)} + b_1 \rangle \times \cdots \times \langle y_n^{(0)} - b_n, y_n^{(0)} + b_n \rangle \quad (3.3\text{bis})$$

kde kladná čísla $a, b_1, \ldots, b_n$ *jsou libovolná;*

b) v oblasti $\overline{\Omega}$ *(tj. v každém bodě* $P \in \overline{\Omega}$*) existují parciální derivace* $\partial f_i / \partial y_k$ *a jsou tam ohraničené, tj.* $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(P)\right| \le L \ \ \forall P \in \Omega$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

Potom v intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$*, kde*

$$\delta = \min\left(a, \frac{b_1}{M}, \ldots, \frac{b_n}{M}\right), \quad M = \max_{\overline{\Omega}} |f_i(x, y_1, \ldots, y_n)|, \tag{3.4}$$

existuje právě jedno řešení $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ *soustavy* (3.1)*, které splňuje počáteční podmínky* (3.2)*. Posloupnost Picardových postupných aproximací stejnoměrně konverguje na intervalu* $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ *k přesnému řešení problému* (3.1), (3.2).

4. Věta o existenci a jednoznačnosti řešení počátečního problému ODR n-tého řádu

Nyní budeme vyšetřovat ODRn v normálním tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \,. \tag{4.1}$$

Připomeňme, že počátečním problémem pro rovnici (4.1) je úloha nalézt řešení rovnice (4.1), které vyhovuje n počátečním podmínkám

$$y(x_0) = \xi_0, \ y'(x_0) = \xi_1, \ \ldots \ , y^{(n-1)}(x_0) = \xi_{n-1} \,, \tag{4.2}$$

kde bod $(x_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ leží v definičním oboru funkce f.

4.1. Věta. *Nechť funkce* $f = f(x, y_1, \ldots, y_n)$ *splňuje tyto dva předpoklady:*

a) je definovaná a spojitá na nějaké $(n+1)$*-rozměrné uzavřené oblasti* $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *obsahující bod* $(x_0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ *ve svém vnitřku;*

b) v oblasti $\overline{\Omega}$ *(tj. v každém bodě* $P \in \overline{\Omega}$*) existují parciální derivace* $\partial f / \partial y_k$ *a jsou tam ohraničené, tj.* $\left|\frac{\partial f}{\partial y_k}(P)\right| \le L \ \ \forall P \in \overline{\Omega}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Potom v jistém intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ *existuje právě jedno řešení* $y = y(x)$ *rovnice* (4.1)*, které splňuje počáteční podmínky* (4.2).

4.2. Poznámka. Předpoklad b) se dá nahradit slabším předpokladem, že funkce $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ splňuje na $\overline{\Omega}$ vzhledem k $y_1, \ldots, y_n$ Lipschitzovu podmínku.

Důkaz Věty 4.1. V [ČŽ] je pouze uvedeno, že důkaz je zobecněním postupu uvedeného při důkazu Picardovy věty 1.1bis. Myšlenka tohoto zobecnění spočívá podle [St] (kap. IV) v tomto: Rovnici (4.1) nahradíme *ekvivalentní soustavou n diferenciálních rovnic prvního řádu s n neznámými funkcemi.* Proto zavedeme vedle hledané funkce y ještě $n-1$ pomocných neznámých funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, které jsou mezi sebou a s y spojeny vztahy:

$$y' = y_1,\ y_1' = y_2,\ \ldots,\ y_{n-2}' = y_{n-1}. \tag{4.3}$$

Ze vztahů (4.3) vyplývá, že $y_k = y^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Tedy $y^{(n)} = y_{n-1}'$ a rovnice (4.1) přejde na tvar

$$y_{n-1}' = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})\,. \tag{4.3*}$$

Když místo $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ zavedeme označení $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tak rovnice (4.3), (4.3*) dostanou tvar

$$y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ \ldots,\ y_{n-1}' = y_n, \tag{4.4}$$

$$y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,, \tag{4.4*}$$

což je speciální případ soustavy (3.1), pro jejíž počáteční problém máme k dispozici věty 3.1 a 3.1bis. Tím je věta 4.1 dokázána. □

5. Existence a jednoznačnost řešení počátečního problému soustavy lineárních ODR 1. řádu

5.1. Věta. *Uvažujme soustavu n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu*

$$\begin{aligned}
y_1' + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_1 &= f_1(x),\\
y_2' + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_1 &= f_2(x),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n' + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_1 &= f_n(x),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

s počátečními podmínkami

$$y_i(x_0) = y_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.2}$$

Nechť funkce $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ jsou definované a spojité na uzavřeném intervalu (segmentu) $S = \langle x_1, x_2 \rangle$, přičemž $x_0 \in S$. Potom počáteční problém (5.1), (5.2) *má právě jedno řešení na celém segmentu S a Picardovy postupné aproximace stejnoměrně konvergují na tomto segmentu.*

Důkaz. Nechť L je horní hranice absolutních velikostí počátečních hodnot

$$|y_i^{(0)}| \le L \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

a nechť K ohraničuje absolutní hodnoty koeficientů $a_{ij}(x)$ a pravých stran $f_i(x)$ rovnic (5.1), tj.

$$|a_{ij}| \le K \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \quad |f_i| \le K \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

1. Nechť se x mění v uzavřeném intervalu $S_2 = x_0 \leq x \leq x_2$, tj. v pravé části segmentu S. Budeme definovat postupné Picardovy aproximace $y_i^{(0)}(x), y_i^{(1)}(x), \dots, y_i^{(m)}(x), \dots$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ počátečního problému (5.1), (5.2) a dokážeme o nich, že *všechny náležejí do oblasti* $\overline{\Omega}$, *jestliže* $x \in S_2$, *a že stejnoměrně konvergují na tomto segmentu k jistým funkcím* $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. (Tím se zároveň vypořádáme s analogií bodů **2** a **3** důkazů vět 1.1 a 3.1.) Podle definice Picardových aproximací pro rovnici $y_i' = F_i(x, y_1, \dots, y_n)$ platí

$$y_i^{(0)}(x) = y_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^{(0)} - \int_{x_0}^{x} (a_{i1}y_1^{(0)} + a_{i2}y_2^{(0)} + \dots + a_{in}y_n^{(0)} - f_i)\,\mathrm{d}x \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

z čehož

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}| \leq (nKL + K) \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = K(nL + 1)(x - x_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.3_1)$$

pro všechna $x \in \langle x_0, x_2 \rangle$. Dále podle téže definice Picardových aproximací

$$y_i^{(2)}(x) = y_i^{(0)} - \int_{x_0}^{x} (a_{i1}y_1^{(1)} + a_{i2}y_2^{(1)} + \dots + a_{in}y_n^{(1)} - f_i)\,\mathrm{d}x \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Odhadněme absolutní velikost rozdílu $|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)|$:

$$|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [a_{i1}(y_1^{(1)}(x) - y_1^{(0)}) + \dots + a_{in}(y_n^{(1)}(x) - y_n^{(0)})]\,\mathrm{d}x \right| \leq$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} (|a_{i1}| \cdot |y_1^{(1)}(x) - y_1^{(0)}| + \dots + |a_{in}| \cdot |y_n^{(1)}(x) - y_n^{(0)}|)\,\mathrm{d}x.$$

Užijeme-li toho, že $|a_{ik}| \leq K$, a nahradíme-li pod integračním znamením výrazy $|y_n^{(1)}(x) - y_n^{(0)}|)$ jejich odhady (5.3_1), dostaneme:

$$\begin{aligned} |y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}| &\leq nK \cdot K(nL + 1) \int_{x_0}^{x} (x - x_0)\,\mathrm{d}x = \\ &= nK \cdot K(nL + 1) \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.3_2)$$

Podobně

$$|y_i^{(3)}(x) - y_i^{(2)}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [a_{i1}(y_1^{(2)} - y_1^{(1)}) + \dots + a_{in}(y_n^{(2)} - y_n^{(1)})]\,\mathrm{d}x \right| \leq$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} (|a_{i1}| \cdot |y_1^{(2)} - y_1^{(1)}| + \dots + |a_{in}| \cdot |y_n^{(2)} - y_n^{(1)}|)\,\mathrm{d}x \leq$$
$$\leq (nK)^2 K(nL + 1) \int_{x_0}^{x} \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= (nK)^2 K(nL + 1) \frac{(x - x_0)^3}{3!}. \quad (5.3_3)$$

Metodou úplné indukce snadno dokážeme:

$$|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)| \leq (nK)^{m-1} K(nL + 1) \frac{(x - x_0)^m}{m!}. \quad (5.3_m)$$

Tedy každá z n řad

$$y_i^{(0)} + (y_i^{(1)} - y_i^{(0)}) + (y_i^{(2)} - y_i^{(1)}) + \dots + (y_i^{(m)} - y_i^{(m-1)}) + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{5.4}$$

je majorizovatelná konvergentní číselnou řadou

$$|y_i^{(0)}| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K(nL+1)}{nK} \frac{[nK(x_2 - x_0)]^m}{m!},$$

kterou jsme získali tím, že jsme nahradili výraz $x - x_0$ hodnotou $x_2 - x_0$. (O konvergenci uvedené číselné řady se lze přesvědčit stejně jako v důkazu věty 1.1 pomocí limitního d'Alembertova (podílového) kritéria.) Tedy řady (5.4) konvergují stejnoměrně na segmentu $\langle x_0, x_2 \rangle$ a definují spojité funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Tím jsme dokázali obdobu částí **1**, **2** a **3** důkazu Picardovy věty. V další části důkazu ukážeme, že tyto funkce vyhovují soustavě rovnic (5.1) a tvoří jediné řešení této soustavy, které vyhovuje počátečním podmínkám (5.2). Obdobnými úvahami se dokáže existence a jednoznačnost řešení v levé části segmentu S, tj. na segmentu $S_1 = \langle x_1, x_0 \rangle$.

Prozatím jsme definovali Picardovy postupné aproximace

$$y_i^{(m)}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2 \dots)$$

a dokázali o nich, že jsou spojité a že posloupnosti $\{y_i(x)\}_{m=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ konvergují pro $x \in \langle x_0, x_2 \rangle$ stejnoměrně k funkcím $y_i(x)$:

$$\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x) = y_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)}) = y_i(x) \quad \forall x \in \langle x_0, x_2 \rangle, \tag{5.5}$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$.

4. Dokážeme, že funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ *dávají hledanou soustavu řešení diferenciálních rovnic* (5.2): Podle definice funkcí $y_i^{(m)}(x)$ je $y_i^{(m)}(x_0) = y_i^{(0)}$; platí tedy

$$\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x_0) = y_i(x_0) = y_i^{(0)},$$

tj. limitní funkce $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ *vyhovují počátečním podmínkám.*

Nyní dokážeme, že tyto funkce vyhovují soustavě (5.1). Na základě rovností

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^{(0)} - \int_{x_0}^{x} (a_{i1} y_1^{(m-1)} + a_{i2} y_2^{(m-1)} + \dots + a_{in} y_n^{(m-1)} - f_i)\,\mathrm{d}x$$
$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

můžeme psát:

$$\begin{aligned} y_i^{(m)}(x) = y_i^{(0)} - \int_{x_0}^{x} \{[a_{i1} y_1^{(m-1)} + a_{i2} y_2^{(m-1)} + \dots + a_{in} y_n^{(m-1)} - f_i] - \\ -[a_{i1} y_1(x) + a_{i2} y_2(x) + \dots + a_{in} y_n(x) - f_i]\}\,\mathrm{d}x + \\ - \int_{x_0}^{x} [a_{i1} y_1(x) + a_{i2} y_2(x) + \dots + a_{in} y_n(x) - f_i]\,\mathrm{d}x \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Odhadneme absolutní hodnotu prvního integrálu v (5.6):

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{x_0}^{x}\{[a_{i1}y_1^{(m-1)}+a_{i2}y_2^{(m-1)}+\cdots+a_{in}y_n^{(m-1)}-f_i]-\\&-[a_{i1}y_1(x)+a_{i2}y_2(x)+\cdots+a_{in}y_n(x)-f_i]\}\,\mathrm{d}x\Big|\leq\\&\leq K\Big|\int_{x_0}^{x}\{|y_1^{(m-1)}-y_1|+\cdots+|y_n^{(m-1)}-y_n|\}\,\mathrm{d}x\Big|\end{aligned}\tag{5.7}$$

Protože funkce $y_i^{(m-1)}(x)$ $(m=1,2,\dots)$ konvergují v intervalu $\langle x_0,x_2\rangle$ stejnoměrne k $y_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$, můžeme k libovolně danému $\varepsilon>0$ najít takové $N(\varepsilon)$, že pro $m-1>N(\varepsilon)$ jsou pro všechna x z vyšetřovaného intervalu splněny tyto nerovnosti:

$$|y_i^{(m-1)}-y_i(x)|<\frac{\varepsilon}{nKh}\quad(i=1,2,\dots,n),$$

takže pro první integrál ve vztahu (5.6) vychází z nerovnosti (5.7) pro $|x-x_0|\leq h$ tento odhad:

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{x_0}^{x}\{[a_{i1}y_1^{(m-1)}+a_{i2}y_2^{(m-1)}+\cdots+a_{in}y_n^{(m-1)}-f_i]-\\&-[a_{i1}y_1(x)+a_{i2}y_2(x)+\cdots+a_{in}y_n(x)-f_i]\}\,\mathrm{d}x\Big|<\\&<\frac{\varepsilon}{nKh}hnK=\varepsilon.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Nyní dokážeme:

$$y_i(x)=y_i^{(0)}-\int_{x_0}^{x}[a_{i1}y_1(x)+a_{i2}y_2(x)+\cdots+a_{in}y_n(x)-f_i]\,\mathrm{d}x.\tag{5.9}$$

Pro $m\to\infty$ je limita integrálu (5.8) rovna nule. Podle již dokázaného je

$$\lim_{m\to\infty}y_i^{(m)}(x)=y_i(x),$$

takže vztahy (5.6) dají v limitě (5.9).

Diferencujme obě strany vztahu (5.9) podle x. Derivace levé strany existuje, protože existuje derivace pravé strany (derivace integrálu ze spojité funkce podle horní meze). Dostaneme tak identitu:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=-a_{i1}(x)y_1-a_{i2}(x)y_2-\cdots-a_{in}(x)y_1+f_i(x)\quad(i=1,2,\dots,n),$$

tj. *funkce $y_i(x)$ vyhovují soustavě* (5.2).

5. Zbývá dokázat, že *nalezené řešení je jediné řešení, které vyhovuje počátečním podmínkám.* Předpokládejme naopak, že kromě řešení $y_1(x),\dots,y_n(x)$ existuje ještě jedno řešení $Z_1(x), \ldots, Z_n(x)$, přičemž $y_i(x_0) = Z_i(x_0) = y_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ale že není každé Z_i identicky rovno y_i. Potom podle našeho předpokladu není (spojitá) funkce

$$\varphi(x) \equiv |y_1(x) - Z_1(x)| + |y_2(x) - Z_2(x)| + \cdots + |y_n(x) - Z_n(x)| \tag{5.10}$$

identicky rovna nule v intervalu $(x_0 - h, x_0 + h)$. Že tento předpoklad vede ke sporu, se doslova dokáže stejně jako v části **5** důkazu věty 3.1. $\square$.

Poznámka 5.1. Jetliže koeficienty a_{ij} a pravé strany f_i jsou spojité v *otevřeném* intervalu (a, b) (kde může být $a = -\infty$, $b = +\infty$), potom výše provedené úvahy dokazují existenci a jednoznačnost řešení soustavy (5.1) v libovolném *uzavřeném* intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, který leží uvnitř (a, b): Vezměme posloupnost uzavřených intervalů $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle, \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle, \ldots, \langle \alpha_n, \beta_n \rangle, \ldots$, kde každý následující interval obsahuje ve svém vnitřku každý předcházející, přičemž $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = b$. Potom můžeme definovat řešení v libovolném intervalu $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$; tedy podle jednoznačnosti také v jejich sjednocení, tj. v celém otevřeném intervalu (a, b). Zřejmě funkce dávající řešení budou spojité a budou vyhovovat soustavě (5.1) v celém intervalu (a, b); v libovolném uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ obsaženém v (a, b) jsou tyto funkce stejnoměrně spojité a tedy postupné aproximace $y_i^{(m)}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ konvergují stejnoměrně pro $m \to \infty$.

6. Věta o existenci a jednoznačnosti řešení počátečního problému lineární ODR n-tého řádu

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

je *ekvivalentní* se soustavou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu speciálního tvaru:

$$\begin{gathered} y' - y_1 = 0, \quad y_1' - y_2 = 0, \quad \ldots, \quad y_{n-2}' - y_{n-1} = 0, \\ y_{n-1}' + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_{n-1} y_1 + a_n y = f(x). \end{gathered}$$

Užijeme-li větu 5.1, dostaneme tento výsledek:

6.1. Věta. *Počáteční problém lineární rovnice n-tého řádu s koeficientem při nejvyšší derivaci rovným jedné má spojitá a n-krát diferencovatelná řešení v každém uzavřeném intervalu, ve kterém jsou koeficienty i pravá strana dané diferenciální rovnice spojité funkce. Toto řešení existuje právě jedno.*

7. Věty o řešeních lineární ODR n-tého řádu

A. Obecná homogenní LODRn

Obecná homogenní LODRn, tj. rovnice tvaru

$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0, \tag{7.1}$$

má řadu důležitých vlastností, které ostatní ODRn nemají.

7.1. Věta. *Jsou-li funkce* $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_k = y_k(x)$ *řešeními rovnice* (7.1), *potom také funkce*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ky_k, \tag{7.2}$$

kterou nazýváme lineární kombinací řešení $y_1, y_2, \ldots, y_k$, *je řešením rovnice* (7.1).

Důkaz. Jsou-li $y_1, \ldots, y_k$ řešeními rovnice (7.1), potom

$$A_n(x)y_i^{(n)} + \cdots + A_1(x)y_i' + A_0(x)y_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Násobením i-té rovnice konstantou C_i dostaneme

$$A_n(x)C_iy_i^{(n)} + \cdots + A_1(x)C_iy_i' + A_0(x)C_iy_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Sečtěme získané vztahy od $i = 1$ do $i = k$:

$$A_n(x)\sum_{i=1}^{k} C_iy_i^{(n)} + \cdots + A_1(x)\sum_{i=1}^{k} C_iy_i' + A_0(x)\sum_{i=1}^{k} C_iy_i = 0. \tag{7.3}$$

Podle (7.2) je

$$y = \sum_{i=1}^{k} C_iy_i, \; y' = \sum_{i=1}^{k} C_iy_i', \ldots, \; y^{(n)} = \sum_{i=1}^{k} C_iy_i^{(n)}.$$

Dosazením těchto vztahů do (7.3) dostaneme rovnici tvaru (7.1), kde y má význam daný vztahem (7.2). □

V teorii LODRn hraje velkou důležitost pojem *lineárně nezávislých funkcí.*

7.2. Definice. Nechť $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou reálné, popř. komplexní funkce reálné proměnné x, které jsou definovány na intervalu I. Říkáme, že uvedené funkce jsou na intervalu I *lineárně nezávislé*, jestliže vztah

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) = 0, \qquad x \in I, \tag{7.4}$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou konstanty, platí pouze v případě $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$.

V opačném případě (tj. když alespoň jedno $C_k \neq 0$) říkáme, že uvedené funkce jsou *lineárně závislé* na intervalu I.

Uvedeme nyní obecnou metodu, jak zjistit, zdali daná n-tice funkcí

$$y_1(x),\; y_2(x), \ldots,\; y_n(x), \tag{7.5}$$

které jsou na intervalu I alespoň $(n-1)$-krát spojitě derivovatelné, tvoří n lineárně nezávislých funkcí na intervalu I.

7.3. Definice. Nechť funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou na intervalu I alespoň $(n-1)$-krát spojitě derivovatelné. Potom determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{7.6}$$

se nazývá *wronskián* nebo *Wronského determinant* funkcí (7.5).

7.4. Věta. *Nechť funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou na intervalu I alespoň $(n-1)$-krát spojitě derivovatelné. Pak $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně závislé na I, když a jen když*

$$W(x) = 0 \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Důkaz. Derivujme $(n-1)$-krát vztah (7.4). Dostaneme tak n vztahů

$$\begin{gathered} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0, \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \dots + C_n y_n'(x) = 0, \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{gathered}$$

Získali jsme pro každé x soustavu n homogenních lineárních rovnic s neznámými $C_1, \dots, C_n$. Z algebry víme, že tato soustava má nenulové řešení (tj. existuje alespoň jedno $C_k \neq 0$) tehdy a jen tehdy, když determinant této soustavy je roven nule, tj. $W(x) = 0$ pro všechna $x \in I$. □

Dále budeme předpoklédat, že funkce (7.5) tvoří nějaký systém partikulárních řešení rovnice (7.1), což je silnější požadavek než předpoklad věty 7.4. Potom platí toto tvrzení:

7.5. Věta. *Nechť funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou partikulárními řešeními homogenní LODRn (7.1), kde $A_n(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Potom jsou tyto funkce lineárně nezávislé na I, když a jen když*

$$W(x) \neq 0 \qquad \text{pro všechna } x \in I. \tag{7.7}$$

Důkaz. Tvrzení věty dokážeme v případě $n = 2$. Podle předpokladů věty 7.5 platí

$$A_2(x) y_1'' + A_1(x) y_1' + A_0(x) y_1 = 0, \tag{7.8}$$

$$A_2(x) y_2'' + A_1(x) y_2' + A_0(x) y_2 = 0. \tag{7.9}$$

Násobme rovnici (7.8) funkcí $-y_2$ a rovnici (7.9) funkcí y_1 a získané vztahy sečtěme. Dostaneme

$$A_2(x)[y_1 y_2'' - y_2 y_1''] + A_1(x)[y_1 y_2' - y_2 y_1'] = 0. \tag{7.10}$$

Pomocí (7.6) lze vztah (7.10) přepsat na tvar

$$A_2(x) W'(x) + A_1(x) W(x) = 0. \tag{7.11}$$

Vztah (7.11) je separovatelná ODR1 pro funkci $W(x)$. Integrujme ji v intervalu $\langle x_0, x \rangle$, kde $x_0, x \in I$. Dostaneme

$$W(x) = W(x_0) \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} (A_1(x)/A_2(x))\,\mathrm{d}x}. \tag{7.12}$$

Podle věty 7.4 jsou řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$ lineárně nezávislá na I tehdy a jen tehdy, když existuje alespoň jeden bod $\bar{x}$ takový, že $W(\bar{x}) \neq 0$. Položíme-li ve vztahu (7.12) $x_0 = \bar{x}$, pak snadno vidíme, že $W(\bar{x}) \neq 0$ právě tehdy, když $W(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$, tj. platí (7.7).

V případě obecného n nebudeme větu 7.5 dokazovat, protože k důkazu je potřeba jistá znalost z teorie determinantů. □

Poznámka. V případě obecného n se věta 7.5 nazývá *Liouvilleova*. V tomto případě platí vztah

$$W(x) = W(x_0) \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} (A_{n-1}(x)/A_n(x))\,\mathrm{d}x}. \tag{7.12*}$$

S pomocí věty 7.5 nyní dokážeme hlavní výsledek této podkapitoly.

7.6. Věta. *Nechť $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou partikulární řešení homogenní LODRn (7.1), kde $A_n(x) \neq 0$, které jsou lineárně nezávislé na intervalu I. Potom každé řešení $y(x)$ této rovnice lze psát jednoznačně ve tvaru*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x), \tag{7.13}$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou vhodné konstanty.

Důkaz. Důkaz provedeme pro jednoduchost zápisu pro $n = 2$, tj. pro rovnici

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0. \tag{7.14}$$

Podle věty 7.1 je funkce

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{7.15}$$

také řešením rovnice (7.14). Ukážeme, že se touto funkcí dá při vhodné volbě konstant C_1, C_2 vyjádřit *každé* partikulární řešení rovnice (7.14). (Tím zároveň dokážeme, že vektorový prostor všech řešení homogenní rovnice $A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0$ má dimenzi rovnou dvěma.) Zvolme tedy partikulární řešení předepsáním počátečních podmínek

$$y(x_0) = \xi_0,\ y'(x_0) = \xi_1, \tag{7.16}$$

kde x_0, ξ_0, ξ_1 jsou tři *libovolná* pevná čísla, přičemž $x_0 \in I$. Dosazením (7.15) do (7.16) dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) &= \xi_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) &= \xi_1. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Vztahy (7.17) tvoří soustavu dvou lineárních algebraických rovnic pro neznámé C_1, C_2, jejichž hodnota bude záviset na zvolených číslech x_0, ξ_0, ξ_1. Její determinant

$$W(x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)$$

je podle věty 7.5 různý od nuly pro každé $x_0 \in I$, takže konstanty C_1, C_2 jsou určeny jednoznačně při každé volbě trojice x_0, ξ_0, ξ_1. $\square$

7.7. Poznámka. Vztah (7.13) je současně vyjádřením obecného řešení rovnice (7.1). Větu 7.6 lze tedy volně formulovat tak, že k určení obecného řešení rovnice (7.1) stačí nalézt n lineárně nezávislých partikulárních řešení dané rovnice.

B. Nehomogenní LODRn

Jde o rovnici

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)\,, \tag{7.18}$$

kde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ a $f(x)$ jsou dané nenulové funkce.

7.8. Věta. *Obecné řešení rovnice* (7.18) *lze psát ve tvaru*

$$y = y_h + y_p\,, \tag{7.19}$$

kde $y_h = y_h(x, C_1, \dots, C_n)$ *je obecné řešení homogenní LODRn příslušné k rovnici* (7.18)*, tj. splňuje rovnici*

$$a_n(x)y_h^{(n)} + a_{n-1}(x)y_h^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_h' + a_0(x)y_h = 0\,, \tag{7.20}$$

a y_p *je libovolné partikulární řešení rovnice* (7.18)*, tj. platí*

$$a_n(x)y_p^{(n)} + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p = f(x)\,. \tag{7.21}$$

Důkaz. Dosaďme (7.19) do levé strany rovnice (7.18). S pomocí (7.20) a (7.21) dostaneme

$$a_n(x)(y_h+y_p)^{(n)} + a_{n-1}(x)(y_h+y_p)^{(n-1)} + \dots + a_1(x)(y_h+y_p)' + a_0(x)(y_h+y_p) =$$

$$= \underbrace{a_n(x)y_h^{(n)} + a_{n-1}(x)y_h^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_h' + a_0(x)y_h}_{=0} +$$

$$+ \underbrace{a_n(x)y_p^{(n)} + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p}_{=f(x)} = f(x)\,,$$

což jsme chtěli dokázat. □

8. Regulární, singulární a výjimečná řešení ODR

Různí autoři přistupují k těmto pojmům různě. Stěpanov [St] definuje *singulární* řešení jako integrální křivku, jejímž každým bodem může procházet alespoň ještě jedna integrální křivka. V opačném případě hovoří o *regulárním* řešení.

V souladu s knihou [ŠT] budu užívat tyto čtyři pojmy: **(1)** *obecný* (*regulární*) *integrál* ODR n-tého řádu (resp. n ODR 1. řádu); tj. funkce, která vyhovuje dané ODR a obsahuje n na sobě nezávislých konstant $C_1, \dots, C_n$; **(2)** *partikulární* (*regulární*) *integrál* ODR n-tého řádu; tj. řešení, v němž jsou konstanty $C_1, \dots, C_n$ vyjádřeny konkrétními čísly (většinou v důsledku předepsaných počátečních podmínek); **(3)** *singulární integrál* ODR n-tého řádu; tj. řešení, dané ODR, které se nedá vyjádřit žádnou volbou konstant $C_1, \dots, C_n$ v obecném řešení, přičemž graf tohoto řešení má alespoň jeden bod společný s bodem některého partikulárního integrálu; **(4)** *výjimečný integrál* ODR n-tého řádu; tj. řešení dané ODR, které se nedá vyjádřit žádnou volbou konstant $C_1, \dots, C_n$ v obecném řešení, přičemž graf tohoto řešení nemá žádný společný bod s grafem kteréhokoliv partikulárního integrálu.

8.1. Příklad. Jako v Příkladu 2.5 uvažujme počáteční problém

$$y' = f(x,y) = 3y^{2/3}\,, \tag{8.1}$$

$$y(x_0) = y_0\,. \tag{8.2}$$

Protože funkce $f(x,y) = 3y^{2/3}$ je spojitá *v každém* obdélníku $\overline{R}$ o středu $(0,0)$ a stranách rovnoběžných se souřadnými osami, ale nesplňuje na něm Lipschitzovu podmínku (viz Příklad 2.5), má počáteční problém (8.1), (8.2) podle Peanovy věty 2.3 *nejméně* jedno řešení pro libovolné hodnoty x_0, y_0: Za předpokladu $y \neq 0$ můžeme provést separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{3y^{2/3}} = \mathrm{d}x$$

a integrací této rovnice dostaneme $y^{1/3} = x + C$ čili

$$y = (x + C)^3. \tag{8.3}$$

Získali jsme tak formálně soustavu křivek (tzv. kubických semiparabol), které tvoří obecný integrál rovnice (8.1). // Počáteční podmínku (8.2) splňuje integrální křivka $y = (x + y_0^{1/3} - x_0)^3$. // Všimněme si nyní případu

$$y = 0\,. \tag{8.4}$$

Funkce (8.4) splňuje také rovnici (8.1), ale nelze ji získat z (8.3) žádnou volbou obecné konstanty C. Podle naší klasifikace je to *singulární* řešení, protože má společný počá tek $(0,0)$ s partikulárním řešením $y = x^3$ a bod $(-C^*, 0)$ spartikulár ním řešením $y = (x+C^*)^3$, kde C^* je libovolně zvolené číslo. Každé další singulární řešení (je jich nespočetně mnoho) můžeme poskládat ze soustavy křivek (8.3), (8.4) tak, že uvedená řešení různě napojujeme: Nechť a, $b \in R^1$ $(a < b)$ jsou dvě libovolná reálná čísla. Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^3 & \text{pro } x \le a, \\ 0 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ (x-b)^3 & \text{pro } x \ge b \end{cases} \tag{8.5}$$

je také singulární řešení rovnice (8.1). // Všechny tyto úvahy se pohybují v rámci Peanovy věty, která zaručuje existenci řešení, ale ne jeho jednoznačnost.

Vrátíme-li se k podmínkám věty 1.1bis, tj. hledáme-li řešení počátečního problému (8.1), (8.2) jen v obdélníku $\overline{R}$, který je buď *nad* osou x, nebo *pod* ní, potom takové řešení je pouze jedno, protože v těchto případech je parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y} = y^{-\frac{1}{3}}$ ohraničená ve všech bodech $\overline{R}$, takže funkce $f(x,y)$ splňuje na $\overline{R}$ Lipschiutzovu podmínku vzhledem k y.

8.2. Příklad. Stejně jako v Příkladu 2.6 uvažujme diferenciální rovnici

$$(y')^2 + y^2 = 1 \tag{8.6}$$

čili

$$y' = \pm\sqrt{1 - y^2}\,. \tag{8.7}$$

Tato rovnice má dvě soustavy řešení

$$y = \sin(x + C_1) \quad (-\pi/2 < x + C < \pi/2), \tag{8.8a}$$
$$y = \sin(-x + C_2) \quad (-\pi/2 < -x + C < \pi/2). \tag{8.8b}$$

Jsou to proti sobě posunuté sinusoidy: Řešení (8.8a), resp. (8.8b) vzniklo posunutím

$$y = \sin x \quad (-\pi/2 < x < \pi/2), \quad \text{resp.} \quad y = \sin(-x) \quad (-\pi/2 < -x < \pi/2).$$

Rovnici (8.6), resp. (8.7) vyhovují ještě přímky

$$y = 1, \quad y = -1. \tag{8.9}$$

Protože funkce $\sqrt{1 - y^2}$ nesplňuje Lipschitzovu podmínku (důkaz viz v Příkladu 2.6), pohybujeme se v rámci Peanovy věty 2.3, takže přímky (8.9) jsou dvě singulární řešení rovnice (8.6): Obě funkce (8.9) splňují rovnici (8.6), ale nelze je realizovat žádnou volbou konstanty C v obecných řešeních (8.8a), (8.8b). Rovnice (8.6) má nekonečně mnoho singulárních řešení: *Každá ze sinusovek* (8.8ab) *může v bodě dotyku k jedné z tečen* $y = \pm 1$ *přejít v tuto tečnu a v libovolném dalším bodě dotyku opět v jednu z obou sinusovek.*

8.3. Příklad. Uvažujme diferenciální rovnici

$$(y')^2 + yy' - xy - x^2 = 0. \tag{8.10}$$

Tuto rovnici můžeme napsat ve tvaru

$$(y' - x)(y' + y + x) = 0,$$

takže dostáváme dvě diferenciální rovnice

$$y' = x, \tag{8.11}$$

$$y' = -y - x. \tag{8.12}$$

Pravé strany obou rovnic (8.11), (8.12) jsou spojité v celé rovině $\mathbb{R}^2$ a mají v ní ohraničenou parciální derivaci podle y. V obou případech můžeme tedy užít Picardovu větu 1.1bis, podle které obecné řešení rovnice (8.11) má tvar

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \tag{8.13}$$

a obecné řešení rovnice (8.12) tvar

$$y_2(x) = C_2 \mathrm{e}^{-x} - x + 1. \tag{8.14}$$

Funkce (8.13), (8.14) tvoří dvě soustavy *regulárních* řešení rovnice (8.10).

8.4. Poznámka. Mezi příklady 8.2 a 8.3 je jasný rozdíl, pokud si všímáme integrálních křivek nejen lokálně (tj. v okolí každého bodu, ve kterém jsou splněny podmínky existenční věty), ale v celém jejich průběhu: V Příkladu 8.3 definovala rovnice (8.10) dvě soustavy integrálních křivek, které neměly nic společného (jednou je to soustava algebraických křivek, podruhé transcendentních); tyto dvě soustavy jsou mechanicky spojeny v jedinou rovnici: Obecně můžeme vyjít ode dvou úplně libovolných diferenciálních rovnic tvaru

$$y' - f(x,y) = 0, \quad y' - \varphi(x,y) = 0.$$

Vynásobíme-li levé strany mezi sebou, dostaneme diferenciální rovnici prvního řádu, ale druhého stupně vzhledem k y':

$$(y')^2 - [f(x,y) + \varphi(x,y)]y' + f(x,y)\varphi(x,y) = 0,$$

která je ekvivalentní se dvěma původně danými rovnicemi; pole integrálních křivek v rovině $\mathbb{R}^2$ vznikne prostou superpozicí polí obou rovnic, přičemž tato dvě pole jsou obecně zcela nezávislá jedno na druhém. // Jinak je tomu v Příkladu 8.2: každým bodem některé oblasti procházejí sice opět dvě integrální křivky, ale můžeme je všechny považovat za členy jediné soustavy. Vysvětlit kořeny tohoto hlubokého rozdílu (poznamenává Stěpanov) nelze učinit prostředky, kterými disponujeme; je třeba vzít na pomoc aparát teorie analytických funkcí (*analytické teorie diferenciálních rovnic*).

Stěpanov uvádí pouze konečný výsledek: Jestliže levá strana rovnice

$$F(x,y,y') = 0, \tag{8.15}$$

(o které předpokládáme, že je to mnohočlen v y' s racionálními koeficienty vzhledem k y) se dá rozložit na činitele nižších stupňů vzhledem k y', které jsou racionální v y a jednoznačné v x v celém svém definičním oboru,[5] potom rovnice (8.15) je mechanickým sjednocením rovnic, které dostaneme, když anulujeme jednotlivé ireducibilní činitele; druhý případ nastane, když y' je iracionální (algebraická) funkce y; jinak řečeno, když $F(x,y,y')$ je *ireducibilní mnohočlen* vzhledem k y' v oboru racionálnosti y.

• Následující dva příklady ukazují, že je vhodné zavést vedle singulárního řešení také pojem *výjimečné* řešení:

8.5. Příklad. Řešme diferenciální rovnici

$$y' = y^{3/2}. \tag{8.16}$$

Pro $y \neq 0$ dostáváme z (8.16) vztah

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^{3/2}} = \mathrm{d}x.$$

Odtud integrací

$$\frac{2}{\sqrt{y}} = x + C$$

čili obecný integrál rovnice (8.16) má tvar

$$y = \frac{4}{(x+C)^2}. \tag{8.17}$$

Funkce $y = 0$ je také řešením rovnice (8.16) a protože se nedostane z (8.17) pro žádnou (konečnou) hodnotu konstanty C, je to výjimečný integrál. Že není singulárním integrálem, plyne z toho, že ostatní integrální křivky (8.17), které znázorňují obecný integrál, se přímky $y = 0$ nikde nedotýkají, ani ji neprotínají.

[5] V tomto případě říkáme, že levá strana diferenciální rovnice (8.15) je *reducibilní mnohočlen* vzhledem k y' v oboru racionálnosti proměnné y.

8.6. Příklad. Řešme diferenciální rovnici

$$(2xy - y)\,\mathrm{d}y + 4x^2y\,\mathrm{d}x = 0. \tag{8.18}$$

Za předpokladu, že

$$y \neq 0, \quad 2x - 1 \neq 0, \tag{8.19}$$

ji můžeme upravit na tvar

$$\frac{4x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y = 0.$$

Platí

$$\frac{4x^2}{2x-1} = \frac{4x^2-1}{2x-1} + \frac{1}{2x-1} = 2x + 1 + \frac{1}{2x-1},$$

takže integrací předchozí rovnice dostaneme

$$x^2 + x + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + y = C$$

a hledané obecné řešení můžeme psát ve tvaru

$$y = C - x^2 - x - \frac{1}{2}\ln|2x-1| \tag{8.20}$$

Zbývá vyšetřit situace, kdy není splněn předpoklad (9.19): a) $y = 0$ splňuje rovnici (8.18), takže je jejím výjimečným řešením; b) v případě $2x-1 = 0$ je první sčítanec v (8.18) anulován; druhý je anulován také, protože $\mathrm{d}x = 0$, takže $x = \frac{1}{2}$ je také výjimečným řešením rovnice (8.18).

8.7. Příklad. Řešme tuto Clairautovu rovnici

$$x = \dot{x}t + \frac{1}{\dot{x}}. \tag{8.21}$$

Jako obvykle při řešení Clairautovy rovnice, zderivujme rovnici (8.21) podle t:

$$\dot{x} = \ddot{x}t + \dot{x} - \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2},$$

takže dostaneme

$$0 = \ddot{x}\Big(t - \frac{1}{\dot{x}^2}\Big)$$

čili

$$\ddot{x} = 0, \tag{8.22a}$$

$$t - \frac{1}{\dot{x}^2} = 0. \tag{8.22b}$$

Formálně dvojí integrací rovnice (8.22a) získáme její řešení

$$x = Ct + D. \tag{8.23}$$

Protože však hledáme řešení rovnice (8.21), která je prvního řádu, musíme konstantu D vyloučit. Dosazením (8.23) do (8.21) dostaneme

$$Ct + D = Ct + \frac{1}{C}$$

čili $D = \frac{1}{C}$ a obecné řešení rovnice (8.21) má tvar

$$x(t) = Ct + \frac{1}{C}\,, \tag{8.24}$$

ve kterém vystupuje pouze jedna obecná konstanta C. // V rovnici (8.22b) položme $v := \dot{x}$ a totéž provedme v rovnici (8.21), takže dostaneme

$$t = \frac{1}{v^2}, \quad x = v\,t + \frac{1}{v}\,.$$

Vyloučením parametru v z těchto dvou rovnic dostaneme (jak za chvíli ukážeme) *singulární* řešení rovnice (8.21) (z první rovnice získáme $v = \pm\frac{1}{\sqrt{t}}$, což dosadíme do druhé):

$$x = \pm 2\sqrt{t} \tag{8.25}$$

čili $x^2 = 4t$. Je to rovnice paraboly s vodorovnou osou t a vrcholem v bodě $(0, 0)$.

V případě rozboru počáteční podmínky

$$x(t_0) = x_0 \tag{8.26}$$

budeme rozlišovat několik případů:

(a) Bod (t_0, x_0) leží v levé polorovině, tj. $t_0 = -t_a$, kde $t_a > 0$. Dosazením do obecného řešení (8.24) potom dostaneme

$$x_0 = -Ct_a + \frac{1}{C},$$

z čehož vynásobením C získáme kvadratickou rovnici pro C:

$$t_a C^2 + x_0 C - 1 = 0 \quad (t_a > 0). \tag{8.27}$$

Musíme rozlišit dva případy:

(aa) Bod $(t_0, x_0) = (-t_a, x_0)$ leží na ose t, tj. $x_0 = 0$. Potom z rovnice (8.27) plyne tento výraz pro C:

$$C = \pm\frac{1}{\sqrt{t_a}}$$

a vztah (8.24) pro obecné řešení dostane tvar

$$x(t) = \pm\frac{t}{\sqrt{t_a}} \pm \sqrt{t_a} \quad \text{čili} \quad x(t) = \pm\sqrt{t_a}\Big(\frac{t}{t_a} + 1\Big). \tag{8.28}$$

Je to rovnice dvou tečen k parabole (8.25), které vycházejí z bodu $(-t_a, 0)$ $(t_a > 0)$. Je třeba zdůraznit, že z každého bodu $(-t_a, 0)$ vycházejí *dvě* tečny. Že to jsou vskutku tečny, se přesvědčíme takto: Hledejme číslo t^*, které splňuje

$$\pm\sqrt{t^*} = \pm\sqrt{t_a}\Big(\frac{t^*}{t_a} + 1\Big).$$

Podělme tento vztah výrazem $\pm\sqrt{t_a}$ a výsledek povyšme na druhou. Dostaneme $(t^*/t_a - 1)^2 = 0$ čili $t^* = t_a$. // Položme nyní $t = t_a$ v (8.28), takže dostaneme $x(t_a) = \pm 2\sqrt{t_a}$, tj. bod $(t_a, 2\sqrt{t_a})$, resp. bod $(t_a, -2\sqrt{t_a})$ je společným bodem přímky

$$x(t) = \sqrt{t_a}\Big(\frac{t}{t_a} + 1\Big) \tag{8.29}$$

a horní části paraboly (8.25), resp. přímky $x(t) = -\sqrt{t_a}(\frac{t}{t_a} + 1)$ a dolní části paraboly (8.25). Musíme se ještě přesvědčit, že bod $(t_a, 2\sqrt{t_a})$ je pouze bodem dotyku (a ne průsečík): Dosaďme $t_4 = t_a + 4$ do (8.29), resp. do (8.25). Dostaneme

$$x_1(t_4) = 2\sqrt{t_a} + \frac{4}{\sqrt{t_a}}, \quad \text{resp.} \quad x_2(t_4) = 2\sqrt{t_a + 4}.$$

Protože $t_a > 0$, povýšením obou výrazů na druhou zjistíme, že $x_1(t_4) > x_2(t_4)$, takže z každého bodu $(-t_a, 0)$ vycházejí dvě *tečny* paraboly (8.25).

(ab) Bod $(t_0, x_0) = (-t_a, x_0)$ leží mimo osu t, tj. $x_0 \neq 0$. Potom z rovnice (8.27) plyne tento komplikovaný výraz pro C:

$$C_{1,2} = \frac{-x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 4t_a}}{2t_a} \quad (t_a > 0). \tag{8.30}$$

Zvolme v (8.24) např. $C = C_1$, takže partikulární řešení rovnice (8.21) bude mít tvar

$$x_1(t) = C_1 t + \frac{1}{C_1} \tag{8.31}$$

a zkoumejme, zdali má tato přímka společný bod s horním obloukem $2\sqrt{t}$ paraboly (8.25), tj. hledejme t, které splňuje vztah

$$2\sqrt{t} = C_1 t + \frac{1}{C_1}.$$

Vynásobením tohoto vztahu číslem C_1, dostaneme kvadratickou rovnici

$$(C_1)^2(\sqrt{t})^2 - 2C_1\sqrt{t} + 1 = 0$$

čili

$$(C_1\sqrt{t} - 1)^2 = 0,$$

odkud plyne

$$\sqrt{t} = \frac{1}{C_1} = \frac{2t_a}{-x_0 + \sqrt{x_0^2 + 4t_a}}.$$

Protože $t_a > 0$, je jmenovatel tohoto zlomku kladný a přímka (8.31) se dotýká horního oblouku paraboly (8.25) v bodě, který má t-souřadnici

$$t = \left(\frac{2t_a}{-x_0 + \sqrt{x_0^2 + 4t_a}}\right)^2,$$

přičemž x-ová souřadnice bodu dotyku (hodnota funkce (8.25)) je

$$x = \frac{4t_a}{-x_0 + \sqrt{x_0^2 + 4t_a}}.$$

(b) Bod (t_0, x_0) leží na ose x mimo počátek, tj. $t_0 = 0$, $x_0 \neq 0$. Dosazením do obecného řešení (8.24) potom dostaneme

$$x_0 = \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{x_0}$$

čili řešení (8.24) získává tvar

$$x(t) = \frac{t}{x_0} + x_0. \tag{8.32}$$

Opět zkoumejme, zdali v případě $x_0 > 0$ má tato přímka společný bod s horním obloukem $2\sqrt{t}$ paraboly (8.25), tj. hledejme t, které splňuje vztah

$$2\sqrt{t} = \frac{t}{x_0} + x_0.$$

Vynásobme tuto rovnici číslem x_0; po malé úpravě dostaneme

$$(\sqrt{t} - x_0)^2 = 0,$$

odkud

$$t_1 = x_0^2. \tag{8.33}$$

Bod t_1 je t-souřadnicí bodu, ve kterém se přímka (8.32) dotýká horního oblouku paraboly (8.25), přičemž x-ová souřadnice bodu dotyku je

$$x_1 = 2x_0$$

(a získáme ji jak dosazením (8.33) do (8.32), tak dosazením (8.33) do (8.25)).

(c) Vytvořit přímky (8.24) určené počáteční podmínkou $x(t_0) = 0$ ($t_0 > 0$) (tj. s bodem $(t_0, 0)$ ležícím uvnitř paraboly (8.25), resp. s bodem (t_0, x_0) ležícím rovněž uvnitř paraboly (8.25)) nelze, protože v tomto případě by C nebylo reálné číslo. V případě $t_0 > 0$ číslo C bude reálné, když předepíšeme $x(t_0) \geq 2\sqrt{t_0}$, resp. $x(t_0) \leq -2\sqrt{t_0}$.

• Na obrázku (viz [MM], Obr. 7.10 na str. 466) jsou modře nakresleny přímky s počátečními hodnotami $x(-t_0) = 0$ (kde $t_0 > 0$) v bodech $(-t_0, 0)$ vně vrcholu paraboly $x^2 = 4t$. Každá z těchto přímek je tečnou této paraboly. → Vyjdeme-li z nějakého bodu $(-t_0, 0)$ ($t_0 > 0$) a postupujeme k parabole, můžeme v bodě dotyku přejít na parabolu, postupovat po ní a v libovolném jejím dalším bodě přejít opět na jinou tečnu, která vychází z bodu $(-t_1, 0)$, kde $-t_1 < -t_0$. Takovým způsobem můžeme získat nespočetně mnoho *výjimečných* řešení rovnice (8.21).

8.8. Vztah mezi singulárním a výjimečným řešením. Často bývá výjimečné řešení zároveň singulárním řešením. Tak je tomu vždy u řešení, které představuje *obálku obecného řešení*, tj. obálku soustavy příslušných integrálních křivek. (Viz předchozí Příklad 8.7.) Tato obálka totiž představuje řešení příslušné diferenciální rovnice, neboť ve všech svých bodech má s korespondujícími integrálními křivkami společnou tečnu. (Pokud tato obálka nepatří do soustavy integrálních křivek, znázorňujících obecný integrál, jde o *výjimečný integrál*.) Každým bodem obálky prochází ještě další integrální křivka, a to *partikulární integrál*, jehož se tato obálka v tomto bodě dotýká. Proto obálka představuje také *integrál singulární*. Obecně však není výjimečný integrál identický se singulárním integrálem (viz Příklad 8.5 a Příklad 8.6; v obou příkladech vystupují výjimečné integrály, které nemají nic společného se singulárním integrálem, který v těchto příkladech neexistuje).

8.9. O Clairautově rovnici obecně. Obecně má tato rovnice tvar

$$x = \dot{x}t + g(\dot{x}), \tag{8.34}$$

kde g je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce. Na začátku jejího řešení ji zderivujeme podle t:

$$\dot{x} = \ddot{x}\,t + \dot{x} + g'(\dot{x})\ddot{x}$$

čili

$$0 = \ddot{x}\big(t + g'(\dot{x})\big).$$

Zavedeme-li označení

$$v := \dot{x}, \tag{8.35}$$

nabude poslední rovnice tvar

$$\dot{v}\big(t + g'(v)\big) = 0,$$

takže se rozpadá na dvě rovnice

$$\dot{v} = 0, \quad t + g'(v) = 0. \tag{8.36}$$

Integrací $(8.36)_1$ dostaneme $v = C$, což dosazeno do (8.34) spolu se zavedeným označením (8.35) dá obecné řešení Clairautovy rovnice (8.34) ve tvaru

$$x(t) = Ct + g(C). \tag{8.37}$$

Z rovnice $(8.36)_2$ plyne

$$t = -g'(v). \tag{8.38_1}$$

Dosadíme-li (8.38_1) spolu s (8.35) do původní rovnice (8.34), dostaneme

$$x = -vg'(v) + g(v) \tag{8.38_2}$$

Rovnice (8.38_1) a (8.38_2) jsou parametrickým vyjádřením výjimečného řešení Clairautovy rovnice (8.34).

Obecné řešení Clairautovy rovnice (8.34) je tvořenou soustavou přímek (8.37). Vyberme jednu z nich volbou $C = C^*$; je to přímka

$$x_*(t) = C^*t + g(C^*). \tag{8.39}$$

Volbou $v = C^*$ vybereme na křivce (8.38_1), (8.38_2) bod

$$[t^*, x^*] = [-g'(C^*), -C^*g'(C^*) + g(C^*)]. \tag{8.40}$$

Ověřme, že přímka (8.39) prochází bodem (8.40): Dosadíme-li do levé strany (8.39) $x = x^* = -C^*g'(C^*)+g(C^*)$ a do pravé strany (8.39) $t = t^* = -g'(C^*)$, dostaneme identitu, takže bod $[t^*, x^*]$ leží na přímce (8.39).

Směrnice přímky (8.39) je C^*. Ověřme, že směrnice tečny ke křivce (8.38_1), (8.38_2) v bodě $[t^*, x^*]$ je $k^* = C^*$. Pro směrnici k^* platí

$$k^* = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{v=C^*}.$$

Vypočtěme pravou stranu tohoto vztahu. Z (8.38_2) plyne

$$\mathrm{d}x = -g'(v)\,\mathrm{d}v - vg''(v)\,\mathrm{d}v + g'(v)\,\mathrm{d}v = -vg''(v)\,\mathrm{d}v$$

a z (8.38_1)

$$\mathrm{d}t = -g''(v)\,\mathrm{d}v,$$

takže

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{-vg''(v)\,\mathrm{d}v}{-g''(v)\,\mathrm{d}v} = v. \tag{8.41}$$

Odtud

$$k^* = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{v=C^*} = C^*,$$

což znamená, že *přímka* $x_*(t) = C^*t + g(C^*)$ *je tečnou křivky* (8.38_1), (8.38_2), *které se dotýká v bodě* $[t^*, x^*] = [-g'(C^*), -C^*g'(C^*) + g(C^*)]$. $\Rightarrow$ *Obecné řešení Clairautovy rovnice* (8.34)) (*tj. soustava přímek* $x(t) = Ct + g(C)$) *má jako obálku singulární řešení* (8.38_1), (8.38_2).

8.10. Poznámka. Kdo nemá rád výpočet derivace $\dot{x}(t)$ pomocí podílu diferenciálů $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$, může vyjít přímo z definice derivace funkce (zde půjde o derivaci funkce dané parametricky):

$$\dot{x}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{-(v+h)g'(v+h) + g(v+h) - [-vg'(v) + g(v)]}{-g'(v+h) + g'(v)} = \frac{0}{0}\,.$$

Dostali jsme neurčitý výraz typu 0/0, takže musíme v dalším výpočtu užít l'Hospitalovo pravidlo (kde derivujeme čitatel i jmenovatel posledního "velkého" zlomku podle h):

$$\dot{x}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{-vg''(v+h) - g'(v+h) - hg''(v+h) + g'(v+h)}{-g''(v+h)} =$$
$$= \frac{-vg''(v) - g'(v) + g'(v)}{-g''(v)} = v.$$

Dostali jsme stejný výsledek jako v (8.41). (Protože jsme v odst. 8.9 předpokládali, že druhá derivace $g''(v)$ je spojitá, mohli jsme při limitním přechodu při $h \to 0$ přejít k limitě v argumentu, tj. $\lim_{h\to 0} g'(v+h) = g'(v)$, $\lim_{h\to 0} g''(v+h) = g''(v)$.)

8.11. Poznámka. Aplikujme výsledky z odst. 8.9 na zadání Příkladu 8.7 a konfrontujme získané výsledky. V tomto případě

$$g(v) = \frac{1}{v}, \quad g'(v) = -\frac{1}{v^2},$$

takže vztah (8.40) má tvar

$$[t^*, x^*] = \Big[\frac{1}{(C^*)^2}, C^*\frac{1}{(C^*)^2} + \frac{1}{C^*}\Big] = \Big[\frac{1}{(C^*)^2}, \frac{2}{C^*}\Big].$$

Odtud plyne, že

$$x^* = \pm 2\sqrt{t^*},$$

což je ve shodě se vztahem (8.25). $\square$

8.12. Příklad. Řešte tuto diferenciální rovnici (převzato z [MM], str. 441)

$$\dot{x} = \sqrt{2x - x^2}. \tag{8.42}$$

Nejprve ji upravíme na tvar

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = 1. \tag{8.43}$$

Pravá strana $f(t,x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$ původní rovnice (8.42) je spojitá ve všech bodech (t,x) uzavřené množiny $D = (-\infty, \infty) \times \langle 0, 2\rangle$, takže podle Peanovy věty 2.3 existuje na množině D řešení diferenciální rovnice (8.42), resp. (8.43). A protože platí $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$, je parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ v okolí přímek $x = 0$ a $x = 2$ neohraničená, takže na těchto přímkách může být porušena jednoznačnost řešení, protože zde není splněna Lipschitzova podmínka.

Levá strana upravené rovnice (8.43) je derivací funkce $\arcsin(x-1)$, takže řešením rovnice (8.42) jsou všechny funkce tvaru

$$x_C(t) = 1 + \sin(t+C), \quad t \in \left\langle -C - \tfrac{\pi}{2}, -C + \tfrac{\pi}{2} \right\rangle, \tag{8.44}$$

kde C je obecná konstanta. // Řešeními diferenciální rovnice (8.42) jsou také funkce $x_1(t) \equiv 0$ a $x_2(t) \equiv 2$, kde $t \in (-\infty, \infty)$, což jsou podle námi zavedeného názvosloví singulární řešení, s pomocí kterých můžeme poskládat libovolné další singulární řešení. Každé řešení (8.44) lze totiž rozšířit na interval $(-\infty, \infty)$ takto:

$$\begin{aligned} x_C(t) &= 0, \quad t \in (-\infty, -C + \tfrac{\pi}{2}\rangle, \\ x_C(t) &= 1 + \sin(t+C), \quad t \in \left\langle -C - \tfrac{\pi}{2}, -C + \tfrac{\pi}{2} \right\rangle, \\ x_C(t) &= 2, \quad t \in \langle -C + \tfrac{\pi}{2}, \infty). \end{aligned}$$

Takových rozšířených řešení $x_C(t)$ je nespočetně mnoho, protože C je obecná konstanta.

9. Nejjednodušší problém vlastních hodnot a jeho aplikace

Uvažujme tento *nejjednodušší problém vlastních hodnot*: Nechť $\varrho(x) > 0$, kde $x \in \langle 0, \ell \rangle$, je daná funkce. Máme najít všechny hodnoty λ (tzv. *vlastní hodnoty*), pro které existuje *nenulové* řešení okrajového problému

$$X'' + \lambda \varrho X = 0\,, \quad X(0) = X(\ell) = 0 \tag{9.1}$$

a tato řešení, která se nazývají *vlastní funkce*, najít.

Tento problém se nazývá nejjednodušší, protože diferenciální rovnice uvedená v (9.1) je nejjednodušším možným případem rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)X(x) + \lambda \varrho X(x) = 0. \tag{9.1*}$$

9.1. Věta. *Všechny vlastní hodnoty problému* (9.1) *jsou reálné a kladné.*

Důkaz. Dokážeme nejprve, že všechny vlastní hodnoty problému (9.1) jsou reálné. Předpokládejme naopak, že existuje komplexní vlastní hodnota

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0\,. \tag{9.2}$$

Protože $\lambda = X''/(\varrho X)$, bude příslušná vlastní funkce tvaru

$$X(x) = v(x) + iw(x)\,, \quad \text{funkce } w(x) \text{ není identicky rovna nule}\,. \tag{9.3}$$

Přejděme v rovnici (9.1) ke komplexně sdruženým hodnotám:

$$\overline{X}'' + \overline{\lambda}\varrho\overline{X} = 0 \quad (\varrho > 0), \tag{9.4}$$

kde

$$\overline{X} = v - iw, \quad \overline{\lambda} = \alpha - i\beta. \tag{9.5}$$

Tedy $\overline{\lambda}$ je také vlastní hodnota problému (9.1) a $\overline{X}$ vlastní funkce. Násobme $(9.1)_1$ funkcí $\overline{X}$

$$\overline{X}X'' + \lambda\varrho X\overline{X} = 0 \tag{9.6}$$

a rovnici (9.4) funkcí X:
$$X\overline{X}'' + \overline{\lambda}\varrho X\overline{X} = 0. \tag{9.7}$$
Odečtěme (9.7) od (9.6). Protože $\lambda - \overline{\lambda} = 2i\beta$, $X\overline{X} = |X|^2$, dostaneme:
$$X''\overline{X} - X\overline{X}'' + 2i\beta\varrho|X|^2 = 0\,. \tag{9.8}$$
Integrujme (9.8) v intervalu $\langle 0, \ell\rangle$ a první dva integrály upravme integrací per partes:
$$[X'\overline{X}]_0^\ell - \int_0^\ell X'\overline{X}'\,\mathrm{d}x - [X\overline{X}']_0^\ell + \int_0^\ell X'\overline{X}'\,\mathrm{d}x + i\beta\int_0^\ell \varrho|X|^2\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{9.9}$$
Protože jak $X(x)$, tak $\overline{X}(x)$ splňují okrajové podmínky $(9.1)_2$, z (9.9) plyne
$$\beta\int_0^\ell \varrho|X|^2\,\mathrm{d}x = 0, \quad \beta \neq 0;\ \varrho(x) > 0,\ x \in \langle 0, \ell\rangle,$$
což je spor, protože $X(x)$ je vlastní funkce, tj. $X(x)$ je spojitá funkce, která není identicky rovna nule na $\langle 0, \ell\rangle$. Předpoklad (9.2) tedy neplatí, takže musí být $\beta = 0$, tj. všechny vlastní hodnoty jsou reálné.

Nyní dokážeme, že pro libovolnou vlastní hodnotu platí $\lambda > 0$. Předpokládejme nejprve, že $\lambda = 0$ je vlastní hodnota. Problém (9.1) se pak redukuje na problém
$$X''(x) = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0\,.$$
Obecné řešení této rovnice je $X(x) = c_1x + c_2$. Z okrajových podmínek plyne, že $c_1 = c_2 = 0$, takže $X(x) \equiv 0$ je *jediné* řešení problému (9.1) při $\lambda = 0$, což je spor s požadavkem nenulovosti vlastní funkce. Tedy $\lambda = 0$ není vlastní hodnota. // Násobme rovnici (9.1) vlastní funkcí X; dostaneme:
$$X''X + \lambda\varrho X^2 = 0\,. \tag{9.10}$$
Rovnici (9.10) integrujme v intervalu $\langle 0, \ell\rangle$ a první integrál upravme integrací per partes:
$$[X'X]_0^\ell - \int_0^\ell (X')^2\,\mathrm{d}x + \lambda\int_0^\ell \varrho X^2\,\mathrm{d}x = 0. \tag{9.11}$$
Vzhledem k okrajovým podmínkám $(9.1)_2$ je první výraz na levé straně (9.11) roven nule, takže
$$\lambda = \frac{\int_0^\ell (X')^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^\ell \varrho X^2\,\mathrm{d}x}, \quad \varrho(x) > 0,\ x \in \langle 0, \ell\rangle. \tag{9.12}$$
Tedy $\lambda \geq 0$. Případ $\lambda = 0$ jsme již vyloučili, takže $\lambda > 0$. $\square$

9.2. Poznámka. Z důkazu věty 9.1 plyne, že pro případ $\varrho(x) < 0$, $x \in \langle 0, \ell\rangle$ se tvrzení věty změní takto: Všechny vlastní hodnoty problému (9.1) jsou reálné a *záporné.*

9.3. Věta. *Vlastní hodnoty problému* (9.1)*, kde* $\varrho(x) > 0$*, jsou jednoduché, kladné a tvoří posloupnost, která diverguje k* $+\infty$: $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to +\infty$.

Tuto větu uvádím bez důkazu, protože kap. 9 vznikla na základě mého zápisu přednášek prof. Miloše Zlámala, které jsem poslouchal na přelomu zimního a letního semestru ve šk. r. 1957/58; Zlámal tehdy důkaz neuvedl a já jsem po něm zatím v literatuře příliš nepátral. Pomocí vyhledávače Google jsem tuto větu našel opět bez důkazu. (Je třeba poznamenat, že v případě $\varrho(x) < 0$, $x \in \langle 0, \ell\rangle$ se tvrzení věty změní takto: $0 > \lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots \to -\infty$.)

9.4. Věta. *Posloupnost $\{X_n(x)\}$ vlastních funkcí problému (9.1) je v intervalu $(0,\ell)$ ortogonální s vahou $\varrho(x)$, tj. platí*

$$\int_0^\ell \varrho(x)X_r(x)X_s(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (r \neq s), \tag{9.13}$$

$$\int_0^\ell \varrho(x)X_r^2(x)\,\mathrm{d}x \neq 0\,. \tag{9.14}$$

Tato věta platí nezávisle na tom, je-li $\varrho(x) > 0$ nebo $\varrho(x) < 0$ pro $x \in \langle 0,\ell\rangle$.

Důkaz. Vztah (9.14) je zřejmě splněn, protože z vlastností funkcí ϱ, X_r plyne, že součin ϱX_r^2 nemění v $\langle 0,\ell\rangle$ znaménko a není v tomto intervalu identicky roven nule.

Nechť $\lambda_m \neq \lambda_n$ jsou dvě vlastní hodnoty problému (9.1) a $X_m(x)$, $X_n(x)$ k nim příslušné vlastní funkce:

$$X_m'' + \lambda_m \varrho X_m = 0, \quad X_n'' + \lambda_n \varrho X_n = 0\,. \tag{9.15}$$

Rovnici $(9.15)_1$ násobme X_n, rovnici $(9.15)_2$ násobme X_m a vzniklé rovnice od sebe odečtěme:

$$X_m''X_n - X_mX_n'' + (\lambda_m - \lambda_n)\varrho X_mX_n = 0\,. \tag{9.16}$$

Vztah (9.16) integrujme v intervalu $\langle 0,\ell\rangle$ a první dva integrály upravme integrací per partes:

$$[X_m'X_n]_0^\ell - \int_0^\ell X_m'X_n'\,\mathrm{d}x - [X_mX_n']_0^\ell + \int_0^\ell X_m'X_n'\,\mathrm{d}x + (\lambda_m - \lambda_n)\int_0^\ell \varrho X_mX_n\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Protože vlastní funkce X_m, X_n splňují okrajové podmínky $(9.1)_2$, poslední vztah se zjednoduší:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^\ell \varrho X_mX_n\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Podle předpokladu je $\lambda_m - \lambda_n \neq 0$, tedy $\int_0^\ell \varrho X_mX_n\,\mathrm{d}x = 0$, což jsme chtěli dokázat. □

Právě uvedené výsledky pro nejjednodušší problém vlastních hodnot se dají zobecnit pro mnohem komplikovanější problémy vlastních hodnot, jako např. *Sturm-Liouvilleův problém vlastních hodnot*:

$$-[k(x)X']' + q(x)X = \lambda\varrho(x)X \quad (k(x) > 0,\ \varrho(x) > 0 \text{ pro } x \in \langle 0,\ell\rangle) \tag{9.17}$$

$$\alpha_1X(0) + \beta_1X'(0) = 0, \quad \alpha_2X(\ell) + \beta_2X'(\ell) = 0\,. \tag{9.18}$$

9.1. Řešení vlnové rovnice metodou vlastních funkcí

Omezíme se na výpočet vlastních kmitů struny upevněné na koncích. Z matematického hlediska jde o řešení tohoto počátečního-okrajového problému vlnové rovnice: Najít funkci $u(x,t)$ které splňuje homogenní vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{9.1.1}$$

homogenní okrajové podmínky

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \tag{9.1.2}$$

a počáteční podmínky

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)\,, \tag{9.1.3}$$

kde funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v $\langle 0,\ell\rangle$ a mají tam po částech spojitou derivaci. (Funkce $f(x)$ má fyzikální význam počáteční výchylky a funkce $g(x)$ význam počáteční rychlosti.)

Abychom problém (9.1.1) – (9.1.3) vyřešili, řešme tuto pomocnou úlohu: Najít řešení rovnice (9.1.1), která nejsou identicky rovna nule, vyhovují okrajovým podmínkám (9.1.2) a které lze psát ve tvaru

$$u(x,t) = X(x)T(t)\,, \tag{9.1.4}$$

kde $X(x)$ je funkcí pouze x a $T(t)$ funkcí pouze t. Dosaďme (9.1.4) do (9.1.1) a vzniklý vztah podělme výrazem a^2XT, takže dostaneme:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,. \tag{9.1.5}$$

Levá strana (9.1.5) je funkcí pouze t, pravá strana funkcí pouze x. Měníme-li při nějaké pevně zvolené hodnotě x proměnnou t (nebo naopak), vidíme, že pravá i levá strana rovnice (9.1.5) zachovává při změně proměnných x, t svou hodnotu:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda\,, \tag{9.1.6}$$

kde λ je konstanta, před kterou dáváme kvůli dalším výpočtům znaménko minus, aniž činíme předpoklad o její hodnotě. Ze vztahů (9.1.6) dostáváme dvě LODR2:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0\,, \tag{9.1.7}$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0\,. \tag{9.1.8}$$

Přiberme nyní do svých úvah okrajové podmínky. Z (9.1.2) a (9.1.4) plyne

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(\ell)T(t) = 0\,.$$

Protože hledáme řešení $u(x,t) = X(x)T(t)$, která nejsou identicky rovna nule, není $T(t)$ identicky rovno nule, takže

$$X(0) = X(\ell) = 0\,. \tag{9.1.9}$$

Okrajový problém (9.1.7), (9.1.9) je náš známý problém vlastních hodnot (9.1), kde $\varrho = 1 > 0$. Podle věty 9.1 je tedy $\lambda > 0$. Proto obecné řešení rovnice (9.1.7) je tvaru

$$X(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x\,. \tag{9.1.10}$$

Z okrajové podmínky $X(0) = 0$ plyne $c_2 = 0$, takže (9.1.10) se redukuje na tvar

$$X(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x\,. \tag{9.1.11}$$

Funkci (9.1.11) podrobíme druhé okrajové podmínce $X(\ell) = 0$; dostaneme:

$$c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0\,. \tag{9.1.12}$$

Protože $X(x)$ je vlastní funkce, musí být $c_1 \neq 0$, takže z (9.1.12) plyne

$$\ell\sqrt{\lambda} = n\pi\,, \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

Vztahu (9.1.12) vyhovuje i $n = 0$, ale pak by podle (9.1.11) bylo $X \equiv 0$, což nelze. Vlastní hodnoty jsou tedy dány předpisem

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots\ . \tag{9.1.13}$$

Vlastní funkce $X_n(x)$ příslušná k vlastní hodnotě λ_n je pak podle (9.1.11) a (9.1.13) dána vztahem

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{\ell}x\,, \quad n = 1, 2, \dots\ . \tag{9.1.14}$$

Multiplikativní konstantu jsme pro jednoduchost položili rovnu jedné, protože kX_n, kde $k \neq 0$ je libovolné číslo, je také vlastní funkce.

Nyní se budeme zabývat řešením rovnice (9.1.8). Dosaďme do ní za λ ze vztahu (9.1.13) a pišme ji ve tvaru

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi a n}{\ell}\right)^2 T_n(t) = 0\,, \tag{9.1.15}$$

kde indexem n u T vyjadřujeme, že jsme do (9.1.8) dosadili n-tou vlastní hodnotu. Obecné řešení rovnice (9.1.15) můžeme psát ve tvaru

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi a n}{\ell} t + B_n \sin \frac{\pi a n}{\ell} t\,. \tag{9.1.16}$$

Dosadíme-li vztahy (9.1.14) a (9.1.16) do (9.1.4), dostaneme:

$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \Big(A_n \cos \frac{\pi a n}{\ell} t + B_n \sin \frac{\pi a n}{\ell} t \Big)\,. \tag{9.1.17}$$

Množina funkcí $\{u_n(x,t)\}_{n=1}^{\infty}$ představuje úplné řešení našeho pomocného problému: Každá funkce $u_n(x,t)$ $(n = 1, 2, \dots)$ vyhovuje rovnici (9.1.1) a okrajovým podmínkám (9.1.2) a není identicky rovna nule.

Fyzikální význam funkcí $u_n(x,t)$ je jasný: jsou to stojaté vlny na struně, přičemž $u_1(x,t)$ je první harmonická, $u_2(x,t)$ druhá harmonická, atd.

Užijeme nyní *princip superposice*, tj. řešení problému (9.1.1) – (9.1.3) budeme hledat ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

čili

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \Big(A_n \cos \frac{\pi a n}{\ell} t + B_n \sin \frac{\pi a n}{\ell} t \Big)\,. \tag{9.1.18}$$

Konstanty A_n, B_n $(n = 1, 2, \dots)$ určíme tak, aby byly splněny počáteční podmínky (9.1.3). Podle (9.1.18) platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi a n}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \Big(-A_n \sin \frac{\pi a n}{l} t + B_n \cos \frac{\pi a n}{l} t \Big)\,. \tag{9.1.19}$$

Z (9.1.3), (9.1.18) a (9.1.19) plyne

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x\,, \tag{9.1.20}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi a n}{\ell} B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x\,. \tag{9.1.21}$$

Řady (9.1.20) a (9.1.21) jsou Fourierovy řady funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Dostali jsme je formálně; protože ale $f(x)$ a $g(x)$ jsou podle předpokladu spojité a mají po částech spojitou první derivaci, rovnají se tyto funkce svým Fourierovým řadám.

Násobme vztahy (9.1.20) a (9.1.21) funkcí $\sin(m\pi/\ell)x$ a integrujme vzniklé vztahy přes interval $\langle 0, \ell \rangle$. Podle věty 9.4 dostaneme:

$$\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{m\pi}{\ell} x \,\mathrm{d}x = A_m \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{m\pi}{\ell} x \,\mathrm{d}x\,, \tag{9.1.22}$$

$$\int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{m\pi}{\ell} x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi a m}{\ell} B_m \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{m\pi}{\ell} x \,\mathrm{d}x\,. \tag{9.1.23}$$

Protože

$$\int_0^{\ell} \sin^2 \frac{m\pi}{\ell} x \,\mathrm{d}x = \frac{\ell}{2}\,,$$

dostáváme z (9.1.22) a (9.1.23)

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \,\mathrm{d}x\,, \quad B_n = \frac{2}{\ell} \pi a n \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \,\mathrm{d}x\,. \tag{9.1.24}$$

Řešení problému (9.1.1) – (9.1.3) jsme dostali ve tvaru (9.1.18), (9.1.24).

Poznámka. Právě uvedené metodě vlastních funkcí pro řešení PDR se někdy také říká Fourierova metoda pro řešení PDR.

9.2. Řešení rovnice pro vedení tepla metodou vlastních funkcí

Mějme tento počáteční-okrajový problém rovnice pro vedení tepla v jedné dimenzi

$$a(t)\frac{\partial u}{\partial t} = b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a(t) > 0,\ b(x) > 0) \tag{9.2.1}$$

při těchto podmínkách:

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \tag{9.2.2}$$

$$u(x,0) = f(x) \quad \forall x \in \langle 0,\ell\rangle, \tag{9.2.3}$$

kde $f(x)$ je spojitá funkce s po částech spojitou a ohraničenou derivací na $\langle 0,\ell\rangle$.

Při řešení problému (9.2.1) – (9.2.3) začneme opět s touto pomocnou úlohou: Najít řešení rovnice (9.2.1), která nejsou identicky rovna nule, vyhovují okrajovým podmínkám (9.2.2) a které lze psát ve tvaru

$$u(x,t) = X(x)T(t)\,. \tag{9.2.4}$$

Dosazením (9.2.4) do (9.2.1) a podělením získaného vztahu součinem XT dostaneme (zdůvodnění je zcela stejné jako v podkapitole 9.1):

$$a(t)\frac{T'(t)}{T(t)} = b(x)\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda\,, \tag{9.2.5}$$

kde λ je konstanta, jejíž hodnotu je třeba určit. Položme

$$\alpha(t) := \frac{1}{a(t)}\,, \quad \beta(x) := \frac{1}{b(x)}\,. \tag{9.2.6}$$

Z (9.2.5) potom dostáváme tyto dvě LODR:

$$T'(t) + \lambda\alpha(t)T(t) = 0\,, \tag{9.2.7}$$

$$X''(x) + \lambda\beta(x)X(x) = 0\,. \tag{9.2.8}$$

Dosadíme-li (9.2.4) do (9.2.2), potom požadavek netriviálnosti řešení ve tvaru (9.2.4) dá

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0\,. \tag{9.2.9}$$

Dostali jsme nejjednodušší problém vlastních hodnot ve tvaru (9.2.8), (9.2.9). Protože $\beta(x) > 0$, z věty 9.3 plyne, že posloupnost vlastních hodnot je tvořena kladnými čísly a diverguje k $+\infty$:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty\,. \tag{9.2.10}$$

Nechť $\{X_n(x)\}$ je posloupnost vlastních funkcí příslušná k posloupnosti (9.2.10). Podle věty 9.4 jsou tyto funkce ortogonální s vahou $\beta(x)$. Ortonormujme je, tj. násobme vlastní funkci $X_n(x)$ číslem $\left(\int_0^\ell \beta(x)X_n^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1/2}$ a označme vzniklou funkci symbolem $\widetilde{X}_n$. Potom

$$\int_0^\ell \beta(x)\widetilde{X}_m(x)\widetilde{X}_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq n, \\ 1 & \text{pro } m = n. \end{cases} \tag{9.2.11}$$

Abychom náš pomocný problém vyřešili, zbývá nalézt ke každé vlastní hodnotě λ_n funkci $T_n(t)$. Budeme tedy řešit rovnici

$$T'(t) + \lambda_n\alpha(t)T_n(t) = 0\,.$$

Separujme proměnné:

$$\frac{\mathrm{d}T_n}{T_n} = -\lambda_n\alpha(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Odtud

$$T_n(t) = C_n \mathrm{e}^{-\lambda_n \int_0^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s} . \tag{9.2.12}$$

Podle (9.2.4) máme

$$u_n(x,t) = T_n(t)\widetilde{X}_n(x) .$$

Řešení problému (9.2.1) – (9.2.3) hledejme podle principu superposice ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\lambda_n \int_0^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s} \widetilde{X}_n(x) . \tag{9.2.13}$$

Funkce (9.2.13) splňuje rovnici (9.2.1) a okrajové podmínky (9.2.2). Aby byla splněna i počáteční podmínka (9.2.3), musíme vhodně určit koeficienty C_n. Podle (9.2.3) a (9.2.13) platí

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \widetilde{X}_n(x) , \tag{9.2.14}$$

což je Fourierova řada pro funkci $f(x)$. Násobme (9.2.14) výrazem $\beta(x)\widetilde{X}_m(x)$, integrujme vzniklý vztah přes interval $\langle 0, \ell \rangle$ a užijme (9.2.11). Dostaneme

$$C_m = \int \beta(x) f(x) \widetilde{X}_m(x)\,\mathrm{d}x , \quad m = 1, 2, \dots . \tag{9.2.15}$$

Řešení problému (9.2.1) – (9.2.3) jsme získali ve tvaru (9.2.13), (9.2.15).

Poznámka. Pokud $b(x) = 1$ a tedy také $\beta(x) = 1$, potom řešení problému (9.2.8), (9.2.9) známe z podkapitoly 9.1:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 , \quad \widetilde{X}_n(x) = \frac{2}{\ell} \sin \frac{\pi n}{\ell} x .$$

10. Soustavy ODR 1. řádu

Při výkladu soustav ODR 1. řádu je nutné zdůrazňovat tyto dvě skutečnosti:

(1) Důkazy obou existenčních vět v případě soustav 1. řádu jsou přehledným zobecněním důkazu Picardovy věty a z jejich tvrzení bezprostředně plynou důkazy existenčních vět pro ODR n-tého řádu. (Viz kap. 3 a 5, resp. 4 a 6, kde jsou příslušné teorémy vysloveny a dokázány.)

(2) Libovolná ODR n-tého řádu, resp. libovolná soustava ODR libovolných řádů (z nichž každá je normovaná, tj. má koeficient u nejvyšší derivace roven jedné) se dá převést na *ekvivalentní* soustavu ODR 1. řádu. To je důvodem, že stačí studovat soustavy 1. řádu.

10.1. Příklad. Celá mechanika hmotného bodu a tuhého tělesa (včetně příbuzných oborů) je vybudována na II. Newtonově zákonu, který má obecně tvar soustavy tří nelineárních ODR druhého řádu:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= X(t, x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ \ddot{y}(t) &= Y(t, x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \\ \ddot{z}(t) &= Z(t, x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \end{aligned}\right\} , \tag{10.1}$$

kde tečkou značíme derivaci podle času t a kde

$$X(t, s_1, s_2 \dots, s_6), \ Y(t, s_1, s_2 \dots, s_6), \ Z(t, s_1, s_2 \dots, s_6)$$

jsou dané funkce. Počáteční podmínky jsou tvaru

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0, \tag{10.2}$$

$$\dot{x}(t_0) = u_0,\ \dot{y}(t_0) = v_0,\ \dot{z}(t_0) = w_0, \tag{10.3}$$

kde t_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0 jsou daná čísla.

Problém (10.1) – (10.3) převedeme na počáteční problém šesti ODR 1.řádu takto: Položíme

$$u(t) := \dot{x}(t),\ v(t) := \dot{y}(t),\ w(t) := \dot{z}(t)\,. \tag{10.4}$$

Potom lze psát rovnice (10.1) ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}(t) &= X(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)) \\ \dot{v}(t) &= Y(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)) \\ \dot{w}(t) &= Z(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)) \end{aligned}\right\}. \tag{10.5}$$

K těmto třem rovnicím připojíme vztahy (10.4), které napíšeme formálně trochu jinak:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t) \\ \dot{y}(t) &= v(t) \\ \dot{z}(t) &= w(t) \end{aligned}\right\}. \tag{10.6}$$

Počáteční podmínky (10.2), (10.3) lze nyní psát takto:

$$\left.\begin{aligned} x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0 \\ u(t_0) = u_0,\ v(t_0) = v_0,\ w(t_0) = w_0 \end{aligned}\right\}. \tag{10.7}$$

Rovnice (10.5), (10.6) tvoří SODR1 pro šest neznámých funkcí u, v, w, x, y, z.

10.2. Poznámka. Je třeba zdůraznit, že nelineární problémy (10.1) – (10.3) a (10.5) – (10.7) jsou ekvivalentní. V příkladu 10.1 jsme dokázali implikaci

$$(10.1) - (10.3) \quad \Rightarrow \quad (10.5) - (10.7)\,.$$

Důkaz opačné implikace

$$(10.5) - (10.7) \quad \Rightarrow \quad (10.1) - (10.3)$$

je také snadný: do pravých stran (10.5) dosadíme z rovnic (10.6) a derivace $\dot{u}(t)$, $\dot{v}(t)$, $\dot{w}(t)$ na levých stranách (10.5) vyjádříme pomocí (10.6), tj.

$$\dot{u}(t) = \ddot{x}(t),\ \dot{v}(t) = \ddot{y}(t),\ \dot{w}(t) = \ddot{z}(t)\,.$$

Tím získáme soustavu (10.1). Počáteční podmínky (10.2) jsou první tři podmínky (10.7); podmínky (10.3) dostaneme, když levé strany posledních tří podmínek (10.7) vyjádříme pomocí (10.6). $\square$

Na FSI VUT se hlavně přednášejí a *cvičí* lineární SODR1; s nekonstantními koeficienty kvůli procvičení *variace konstant*, s konstantními koeficienty kvůli seznámení s *vlastními čísly matic.*

10.1. Soustava lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (SLODR1)

Je to soustava rovnic tvaru

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ &\dots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{aligned}\right\}, \tag{10.1.1}$$

kde všechny koeficienty $a_{ij}(x)$ a funkce $f_k(x)$ jsou spojité a ohraničené na některém intervalu (a, b), přičemž může být $a = -\infty$, $b = +\infty$ (proto nehovoříme o uzavřeném intervalu $I = \langle a, b\rangle$) a kde $y_k = y_k(x)$ jsou hledané funkce ($k = 1, \ldots, n$; $i, j = 1, \ldots, n$). // V případě nekonstantních koeficientů *nebudeme* argument x u funkcí $a_{ij}(x)$ vynechávat.

10.1.1. SLODR1 v maticovém tvaru. Položme

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

resp. v případě konstantních koeficientů

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

a zaveďme sloupcové vektory

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Potom můžeme soustavu (10.1.1) psát stručně ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x) \tag{10.1.2}$$

a SLODR1 s konstantními koeficienty ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)\,. \tag{10.1.3}$$

Pro úsporu místa budeme psát sloupcové vektory ve tvaru transponovaných řádkových vektorů; např.

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T\,.$$

Zavedeme-li konstantní vektor

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T,$$

kde b_i jsou pravé strany počátečních podmínek

$$y_1(x_0) = b_1,\ y_2(x_0) = b_2,\ \dots,\ y_n(x_0) = b_n\,, \tag{*}$$

přičemž $x_0 \in I$ je libovolný, ale pevný bod, potom můžeme psát počáteční podmínku (*) ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{b}\,. \tag{10.1.4}$$

Z kap. 5 a předpokladů o funkcích a_{ij}, $f_k(x)$ plyne tato věta o existenci a jednoznačnosti řešení SLODR1:

10.1.2. Věta. *Pro každý bod $x_0 \in (a, b)$ existuje právě jedno řešení problému* (10.1.2), (10.1.4).

Dále platí tato věta (opět důsledek výsledků kap. 5):

10.1.3. Věta. *Nechť x_0 je dané číslo a $\mathbf{b}$ konstantní vektor. Potom existuje právě jedno řešení $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ homogenní soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ s konstantními koeficienty, které je definováno na intervalu $(-\infty, \infty)$ a přitom splňuje počáteční podmínku $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{b}$.*

10.2. Struktura řešení homogenní SLODR1

10.2.1. Věta. a) *Je-li vektor $\mathbf{y}$ řešením soustavy*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \tag{10.2.1}$$

na intervalu I, potom také vektor $c\mathbf{y}$, kde c je libovolná konstanta, je řešením soustavy (10.2.1) *na intervalu I.*

b) *Jsou-li vektory $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ řešením soustavy* (10.2.1) *na intervalu I, potom také jejich součet $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ je řešením této soustavy na intervalu I.*

c) *Jsou-li vektory $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, ..., $\mathbf{y}_k$ řešením soustavy* (10.2.1) *na intervalu I, potom také jejich jejich lineární kombinace*

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2 + \dots + C_k\mathbf{y}_k \tag{10.2.2}$$

je řešením této soustavy na intervalu I.

Důkaz. a) Protože derivace konstanty je nula, platí

$$(c\mathbf{y})' = c\mathbf{y}' = c\mathbf{A}(x)\mathbf{y} = \mathbf{A}(x)(c\mathbf{y})\,.$$

b) V druhém případě je

$$(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)' = \mathbf{y}_1' + \mathbf{y}_2' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_2 = \mathbf{A}(x)(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)\,.$$

c) Třetí případ je důsledkem obou předchozích případů. □

10.2.2. Definice. Položme

$$\mathbf{y}_k := (\mathbf{y}_{1k}, \mathbf{y}_{2k}, \dots, \mathbf{y}_{nk})^T. \tag{10.2.3}$$

Jsou-li vektory $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ lineárně nezávislé na intervalu I a jsou-li řešeními soustavy (10.2.1), potom říkáme, že tvoří *fundamentální systém* soustavy (10.2.1) na intervalu I. *Fundamentální maticí* soustavy (10.2.1) potom nazýváme matici

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(x) = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \tag{10.2.4}$$

10.2.3. Věta. *Tvoří-li vektory* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ *fundamentální systém homogenní soustavy* (10.2.1) *na intervalu* I, *potom každé řešení této soustavy lze psát při vhodných konstantách* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *ve tvaru*

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2 + \cdots + C_n\mathbf{y}_n\,. \tag{10.2.5}$$

Položíme-li

$$\mathbf{c} := (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T, \tag{10.2.6}$$

potom lze psát (10.2.5) *stručně ve tvaru*

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}\,\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbf{Y}^T, \tag{10.2.7}$$

kde $\mathbf{Y}$ *je fundamentální matice* (10.2.4).

Důkaz. Zvolme libovolně číslo $x_0 \in I = (a, b)$ a počáteční podmínku

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T. \tag{10.2.8}$$

Vzhledem k (10.2.7) lze psát (10.2.8) ve tvaru

$$\mathbf{Y}(x_0)\mathbf{c} = \mathbf{b}\,. \tag{10.2.9}$$

To je soustava n lineárních algebraických rovnic pro n složek $C_1, \ldots, C_n$ vektoru $\mathbf{c}$. Protože $\mathbf{Y}$ je fundamentální matice, je determinant číselné matice $\mathbf{Y}(x_0)$ různý od nuly. Odtud plyne, že soustava (10.2.9) má právě jedno řešení $C_1, \ldots, C_n$. □

10.2.4. Poznámka. Vzhledem k tomu, že vektor (10.2.5) obsahuje n nezávislých konstant, je obecným řešením homogenní soustavy (10.2.1).

10.3. Eulerova metoda řešení homogenní SLODR1 s konstantními koeficienty

Hledejme partikulární řešení soustavy

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y} \tag{10.3.1}$$

ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{h} = \mathrm{e}^{\lambda x}(h_1, \ldots, h_n)^T, \tag{10.3.2}$$

kde je třeba určit neznámé veličiny $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$, kde $\mathbf{o}$ je nulový vektor, $\mathbf{o} = (0, \ldots, 0)^T$). Dosazením (10.3.2) do (10.3.1) dostaneme

$$\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{h} = \mathbf{A}(\mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{h}) = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{A}\,\mathbf{h}\,.$$

Po zkrácení nenulovým výrazem $\mathrm{e}^{\lambda x}$ získáme rovnici

$$\mathbf{A}\,\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}\,. \tag{10.3.3}$$

Ta čísla λ, pro která má rovnice (10.3.3) nenulové řešení $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$, tj. vektor $\mathbf{h}$, který má alespoň jednu složku různou od nuly, nazýváme *vlastní čísla* (*vlastní hodnoty*) matice $\mathbf{A}$. Konstantní nenulové vektory $\mathbf{h}$, které pro danou vlastní hodnotu λ vyhovují rovnici (10.3.3), se nazývají *vlastní vektory* matice $\mathbf{A}$ příslušné vlastní hodnotě λ. Následující větu uvádím bez důkazu:

10.3.1. Věta. *Ke každé vlastní hodnotě λ přísluší alespoň jeden vlastní vektor* $\mathbf{h}$ *matice* $\mathbf{A}$.

Nejprve uvedeme, jak lze zjistit všechny vlastní hodnoty čtvercové matice $\mathbf{A}$: Užitím vztahu $\mathbf{h} = \mathbf{E}\,\mathbf{h}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice (tj. čtvercová matice, která má na hlavní diagonále jedničky a mimo hlavní diagonálu nuly), dostaneme ze vztahu (10.3.3) vztah $\mathbf{A}\,\mathbf{h} = \lambda\mathbf{E}\,\mathbf{h}$ čili

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{o}\,, \tag{10.3.4}$$

kde $\mathbf{o} := (0, \ldots, 0)^T$ je už zmíněný nulový vektor. Z algebry víme, že homogenní soustava (10.3.4) má *nenulové* řešení $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)^T$ (ne jediné!), když a jen když determinant této soustavy je roven nule:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \tag{10.3.5}$$

čili

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{10.3.5*}$$

Rovnice (10.3.5*) se nazývá *charakteristická rovnice* soustavy (10.3.1). Je to algebraická rovnice stupně n pro neznámou λ. Např. pro $n = 2$ je to kvadratická rovnice

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0\,.$$

Postup při řešení soustavy (10.3.1) je zhruba tento:

1) Nalezneme všechny kořeny λ charakteristické rovnice.

2) Ke každému vlastnímu číslu λ nalezneme vlastní vektor $\mathbf{h}$.

3) Pokud jsou všechna vlastní čísla navzájem různá, nalezli jsme n lineárně nezávislých partikulárních řešení soustavy (10.3.1), tj. fundamentální systém $\mathbf{Y}$. Pokud jsou některá vlastní čísla λ násobnými kořeny charakteristické rovnice nebo jejími komplexními kořeny, musíme užít dodatečné obraty.

• Podrobnosti se obvykle vysvětlují na příkladech (viz např. [Že], str. 80-83, nebo [ČŽ], str. 149-154).

10.4. Řešení nehomogenní SLODR1 metodou variace konstant

10.4.1. Věta. *Mějme soustavu*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x) \tag{10.4.1}$$

a nechť $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ *jsou lineárně nezávislá partikulární řešení přidružené homogenní soustavy*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}\,. \tag{10.4.2}$$

Nechť

$$\mathbf{Y}(x) = [\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)] \tag{10.4.3}$$

je příslušná fundamentální matice soustavy (10.4.2)*. Potom obecné řešení soustavy* (10.4.1) *lze psát ve tvaru*

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int \frac{D_j(x)}{D(x)} \, \mathrm{d}x + C_j \right) \mathbf{y}_k(x) \,, \tag{10.4.4}$$

kde $D(x) = \det \mathbf{Y}(x)$ *a* $D_j(x)$ *je determinant matice* $\mathbf{Y}_j(x)$*, kterou získáme z matice* $\mathbf{Y}(x)$*, když její* j*-tý sloupec nahradíme sloupcovým vektorem* $\mathbf{f}(x)$*.*

Důkaz. Hledejme obecné řešení soustavy (10.4.1) ve tvaru

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{k}(x), \quad \mathbf{k}(x) = (k_1(x), \dots, k_n(x))^T, \tag{10.4.5}$$

kde funkce $k_1(x), \dots, k_n(x)$ je zapotřebí určit. Protože $\mathbf{Y}(x)$ je fundamentální matice soustavy (10.4.2), platí

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x) \,. \tag{10.4.6}$$

Dosaďme (10.4.5) do (10.4.1) (na levé straně derivujeme součin $\mathbf{Y}(x)\mathbf{k}(x)$):

$$\mathbf{Y}'(x)\mathbf{k}(x) + \mathbf{Y}(x)\mathbf{k}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x)\mathbf{k}(x) + \mathbf{f}(x)$$

čili

$$[\mathbf{Y}'(x) - \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x)]\mathbf{k}(x) + \mathbf{Y}(x)\mathbf{k}'(x) = \mathbf{f}(x) \,.$$

Podle (10.4.6) je matice v hranatých závorkách nulovou maticí, takže

$$\mathbf{Y}(x)\mathbf{k}'(x) = \mathbf{f}(x) \,. \tag{10.4.7}$$

Soustava (10.4.7) je soustavou pro neznámé $k_1'(x), \dots, k_n'(x)$. Podle Cramerova pravidla v každém bodě x platí

$$k_j'(x) = \frac{D_j(x)}{D(x)} \quad (j = 1, \dots, n). \tag{10.4.8}$$

Integrací (10.4.8) dostaneme

$$k_j(x) = \int \frac{D_j(x)}{D(x)} \, \mathrm{d}x + C_j \,. \tag{10.4.9}$$

Dosazením (10.4.9) do (10.4.5) dostaneme (10.4.4). $\square$

11. Okrajové problémy ODR 2. řádu

Zatímco jsem psal kapitoly 1 – 6 se zvídavostí, kapitoly 7 – 10 s rutinou, tak kapitolu 11 jsem psal s láskou.

Okrajové problémy ODR 2. řádu se v základních kurzech ODR neprobírají. Vidím pro to hlavně tyto dva důvody: **(1)** Okrajové problémy ODR 2. řádu nenalézají v aplikacích příliš velké uplatnění. **(2)** Příslušná teorie je zcela odlišná od teorie počátečních problémů ODR a je dosti komplikovaná z hlediska úrovně základního kurzu. Přesto se budu okrajovými problémy ODR 2. řádu zabývat, protože jejich teorie je jednodušší než teorie okrajových problémů PDR 2. řádu, takže tvoří přípravu k teorii PDR.

Uvažujme nejprve tento okrajový problém ODR2 s *homogenními* okrajovými podmínkami:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = f(x) \quad \forall x \in (0,\ell), \tag{11.1}$$

$$u(0) = u(\ell) = 0\,. \tag{11.2}$$

Klasické řešení problému (11.1), (11.2) musí splňovat tyto předpoklady: **(a)** řešení u je spojité na uzavřeném intervalu $\langle 0,\ell\rangle$, **(b)** splňuje okrajové podmínky (11.2), **(c)** první a druhá derivace u', u'' jsou spojité v otevřeném intervalu $(0,\ell)$. Navíc platí: **(d)** funkce $p(x), f(x)$ jsou spojité v $(0,\ell)$, přičemž funkce $p(x)$ má v $(0,\ell)$ spojitou derivaci $p'(x)$.

Požadavky **(a)** – **(d)** jsou příliš silné. Proto se v aplikacích spokojujeme hledáním *slabého řešení* problému (11.1), (11.2). Heuristicky k jeho formulaci dospějeme takto: Uvažujme libovolnou funkci $v(x)$, která je spojitá na $\langle 0,\ell\rangle$, splňuje okrajové podmínky

$$v(0) = v(\ell) = 0 \tag{11.3}$$

a má v $(0,\ell)$ spojitou první derivaci $v'(x)$. Předpokládejme, že požadavky **(a)** až **(d)** jsou splněny, násobme rovnici (11.1) funkcí $v(x)$ a výsledek integrujme přes interval $(0,\ell)$. Dostaneme

$$-\int_0^\ell \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)v(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.4}$$

Levou stranu vztahu (11.4) nyní integrujme per partes, takže (11.4) transformujeme s pomocí okrajových podmínek (11.3) na tvar[6]

$$\int_0^\ell p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)v(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.5}$$

Dostali jsme vztah, který budeme nazývat *zobecněným* (*nebo abstraktním*) *principem virtuální práce.* Podrobnosti o tomto principu viz podkap. 11.9.

Nejprve si všimněme, co stačí k platnosti vztahu (11.5) požadovat: **(a)** Funkce $p(x)$ je spojitá na $\langle 0,\ell\rangle$, tj. $p \in C^0\langle 0,\ell\rangle$. **(b)** Funkce $f(x)$ je kvadraticky integrovatelná na $(0,\ell)$, tj. $f \in L_2(0,\ell)$. **(c)** Platí $u \in H_0^1(0,\ell)$, $v \in H_0^1(0,\ell)$, přičemž

[6] Tentýž výsledek (11.5) dostaneme i v případě, když jsou předepsány místo (11.2) *nehomogenní* okrajové podmínky $u(0) = a$, $u(\ell) = b$, protože i v tomto případě o tzv. *testovacích funkcích* $v(x)$ předpokládáme, že splňují (11.3).

symbol $H_0^1(0,\ell)$ označuje množinu $\{w\}$ funkcí spojitých na $\langle 0,\ell\rangle$, které splňují okrajové podmínky $w(0) = w(\ell) = 0$ a mají na $(0,\ell)$ kvadraticky integrovatelnou derivaci $w'(x)$. Později v podkap. 11.7 o *zobecněných derivacích* pojmy prostorů $H_0^1(0,\ell)$, resp. $H^1(0,\ell)$ upřesníme, kde funkce $u \in H^1(0,\ell) \supset H_0^1(0,\ell)$ nemusí splňovat (11.2).

Hledání slabého řešení okrajového problému (11.1), (11.2) spočívá v tomto: Hledáme funkci $u \in H_0^1(0,\ell)$, která pro všechny testovací funkce $v \in H_0^1(0,\ell)$ splňuje vztah (11.5).

Dříve než se začneme zajímat otázkou existence a jednoznačnosti slabého řešení okrajového problému (11.1), (11.2), ukažme, jak definujeme přibližné řešení slabé formulace (11.5) problému (11.1), (11.2) pomocí metody konečných prvků(MKP). Pomocí bodů (většinou stejně vzdálených od sebe)

$$\mathcal{D}_h: \quad x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = \ell, \tag{11.6}$$

kde h je délka největšího intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, rozdělme uzavřený interval $\langle 0,\ell\rangle$ na $n+1$ dílků. Tomuto dělení přiřaďme n-rozměrný prostor $\widehat{H}_0^1(0,\ell) \subset H_0^1(0,\ell)$ funkcí, které jsou po úsečkách dělení (11.6) lineární a v koncových bodech intervalu $\langle 0,\ell\rangle$ rovny nule. Bázi prostoru $\widehat{H}_0^1(0,\ell)$ tvoří funkce $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$, pro které platí

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (i,j = 1,\ldots,n), \tag{11.7}$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta ($\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$). Přibližným řešením slabé formulace (11.5) je funkce

$$\widehat{u}(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(x) \in \widehat{H}_0^1(0,\ell), \tag{11.8}$$

která splňuje

$$\int_0^\ell p(x)\frac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\widehat{v}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)\widehat{v}(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \widehat{v} \in \widehat{H}_0^1(0,\ell), \tag{11.9}$$

Vzhledem k (11.7) a (11.8) vztah (11.9) vede na soustavu n lineárních algebraických rovnic pro neznámé souřadnice $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ funkce $\widehat{u}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_0^\ell p(x)\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x \quad (i = 1,\ldots,n). \tag{11.10}$$

Nyní zbývá dokázat, že soustava (11.10) má právě jedno řešení. // Abychom mohli soustavu (11.10) řešit na počítači, integrály vystupující v (11.10) se vypočtou přibližně pomocí kvadraturních formulí.

Tolik jako úvod k řešení okrajových problémů ODR 2. řádu. V následujících podkapitolách se pokusím vyložit základy teorie těchto okrajových problémů z hlediska metody konečných prvků. I když se ke čtení této kapitoly předpokládají pouze základní znalosti funkcionální analýzy, všechny věty v této rozsáhlé kapitole dokazuji. Teorie není z hlediska funkcionální analýzy nijak ochuzena, protože komplikace, které vznikají v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, jsou spojeny s popisem hranice $\partial\Omega$ vícerozměrné oblasti Ω.

11.1. Formální ekvivalence okrajového problému a slabé formulace

11.1.1. Věta. *a) Nechť problém* (11.1), (11.2) *má klasické řešení* u. *Potom funkce* u *je řešením slabé formulace.*

b) Nechť slabá formulace má řešení u. *Má-li* u *spojité a ohraničené derivace* u' *a* u'' *v* $(0, \ell)$ *a* $p \in C^1\langle 0, \ell\rangle$, *potom slabé řešení* u *splňuje rovnici* (11.1) *téměř všude v* $(0, \ell)$.

Důkaz. a) Implikace (11.1), (11.2) $\Rightarrow$ (11.5) byla dokázána na str. 57.

b) Protože u má spojité a ohraničené derivace u' a u'' v $(0, \ell)$ a $p \in C^1\langle 0, \ell\rangle$, můžeme vztah (11.5) upravit pomocí per partes a podmínek (11.3) na tvar

$$\int_0^\ell \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + f(x)\right\} v(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, \ell)\,. \tag{11.11}$$

Stačí nyní dokázat, že z (11.11) plyne

$$w := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + f(x) = 0 \quad \text{téměř všude v } (0, \ell) \tag{11.12}$$

čili ekvivalentně

$$||w||_0 := \sqrt{\int_0^\ell w^2\,\mathrm{d}x} = 0, \tag{11.12*}$$

kde integrál je brán v Lebesgueově smyslu. Při důkazu (11.12) užijeme mimo jiné toto lemma, které bude dokázáno později v průběhu kapitoly 11:

Lemma A. *Prostor* $H_0^1(0, \ell)$ *je hustý v* $L_2(0, \ell)$, *tj. ke každé funkci* $v \in L_2(0, \ell)$ *existuje taková posloupnost* $\{v_n\} \subset H_0^1(0, \ell)$, *že*

$$\lim_{n\to\infty} ||v_n - v||_0 = 0. \tag{11.13}$$

Užijeme dále toto lemma:

Lemma B (Schwarz-Buňakovského nerovnost). *Nechť* $v_1, v_2 \in L_2(0, \ell)$. *Potom*

$$|(v_1, v_2)| \equiv \left| \int_0^\ell v_1 v_2\,\mathrm{d}x \right| \le ||v_1||_0 ||v_2||_0. \tag{11.14}$$

Nyní již snadno dokážeme (11.12*): Vztah (11.11) můžeme napsat ve tvaru

$$(w, v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, \ell)\,. \tag{11.11*}$$

Podle lemmatu **A** lze najít takovou posloupnost $\{w_n\} \subset H_0^1(0, \ell)$, že

$$\lim_{n\to\infty} ||w_n - w||_0 = 0.$$

Podle (11.11*) je

$$(w_n, w) = 0.$$

Odtud podle lemmatu **B**

$$||w||_0^2 = (w, w) = |(w_n, w) - (w, w)| = |(w_n - w, w)| \le ||w_n - w||_0 ||w||_0 \to 0,$$

čili $||w||_0 = 0$, což jsme potřebovali dokázat. $\square$

Poznámka. Tvrzení b) platí i za předpokladu, že $u \in H^2(0, \ell)$, kde $H^2(0, \ell) \subset L_2(0, \ell)$ je prostor funkcí s první a druhou zobecněnou derivací.

11.2. Existence a jednoznačnost slabého řešení

Následující věta, jejíž podrobný důkaz je např. v [Re2, str. 404 - 407], má zásadní význam pro úvahy v této podkapitole.

11.2.1. Věta (Lax-Milgram). *Nechť H je Hilbertův prostor se skalárním součinem (z, v) a nechť $B(z, v)$ je bilineární forma (tedy lineární jak v z, tak ve v) definovaná pro $z, v \in H$ a taková, že platí*

$$|B(z,v)| \le M\|z\| \cdot \|v\| \quad \forall z, v \in H, \tag{11.15}$$

$$B(v,v) \ge \beta\|v\|^2 \quad \forall v \in H, \tag{11.16}$$

kde $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$ a konstanty $M > 0$ a $\beta > 0$ nezávisejí na z a v. Potom lze každý lineární funkcionál F, který je definovaný a ohraničený na H, vyjádřit ve tvaru

$$F(v) = B(w,v) \quad \forall v \in H, \tag{11.17}$$

kde w je prvek prostoru H jednoznačně určený funkcionálem F.

11.2.2. Poznámka. Bilineární forma $B(z, v)$ nemusí být symetrická; proto na rozdíl od skalárního součinu v ní záleží na pořadí u, v.

11.2.3. Označení. Položme

$$a(v,z) := \int_0^\ell p(x) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \tag{11.18}$$

$$L(v) := \int_0^\ell f(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11.19}$$

Potom můžeme vztah (11.5) psát ve tvaru

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(0,\ell). \tag{11.20}$$

S pomocí Věty 11.2.1 nyní dokážeme existenci a jednoznačnost slabé formulace.

11.2.4. Věta (o existenci a jednoznačnosti řešení slabé formulace). *Je-li bilineární forma $a(z, v)$ ohranièená na $H_0^1(0,\ell) \times H_0^1(0,\ell)$, tj.*

$$|a(z,v)| \le M\|z\|_1\|v\|_1 \quad \forall z, v \in H_0^1(0,\ell) \quad (M = const), \tag{11.21}$$

kde

$$\|v\|_1 = \sqrt{\int_0^\ell \left\{ v^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 \right\} \mathrm{d}x} \tag{11.22}$$

a $H_0^1(0,\ell)$-eliptická, tj.

$$a(v,v) \ge \beta\|v\|_1^2 \quad \forall v \in H_0^1(0,\ell) \quad (\beta = const > 0), \tag{11.23}$$

a je-li lineární forma $L(v)$ ohraničená na $H_0^1(0,\ell)$, tj.

$$|L(v)| \le K\|v\|_1 \quad \forall v \in H_0^1(0,\ell) \quad (K = const), \tag{11.24}$$

potom existuje právě jedna funkce $u \in H_0^1(0,\ell)$, která splňuje vztah (11.20).

Důkaz. V případě homogenních okrajových podmínek (11.2) je tvrzení věty 11.2.4 okamžitým důsledkem Lax-Milgramovy věty, ve které stačí položit[7]

$$H = H_0^1(0,\ell), \quad B(z,v) = a(z,v), \quad F(v) = L(v).$$

Pro lepší orientaci tento samozřejmý důkaz proveďme.

a) *Existence.* Z předpokladů (11.21), (11.23) plyne, že jsou splněny předpoklady (11.15), (11.16) Lax-Milgramovy věty, ve kterých klademe[8]

$$B(z,v) = a(z,v), \quad \|v\| = \|v\|_1.$$

V Lax-Milgramově větě dále položíme[9]

$$F(v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(0,\ell). \tag{11.25}$$

Podle (11.24) je funkcionál $F(v)$ ohraničený, takže jsou splněny všechny předpoklady Lax-Milgramovy věty. Podle této věty existuje právě jedna funkce $w \in H_0^1(0,\ell)$ tak, že platí

$$F(v) = a(w,v) \quad \forall \in H_0^1(0,\ell). \tag{11.26}$$

Když položíme $u := w$, plyne z (11.26) a (11.25)

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(0,\ell),$$

což je vztah (11.20). Existence slabého řešení je dokázána.

b) *Jednoznačnost* slabého řešení plyne opět z Lax-Milgramovy věty, ve které vystupuje jednoznačně určený prvek $w \in H \equiv H_0^1(0,\ell)$. Ten v případě homogenních okrajových podmínek je slabým řešením, tj. můžeme položit $u = w$. $\square$

Zbývá nalézt postačující podmínky, které zaručují platnost (11.21), (11.23), (11.24). Napřed ještě jedno lemma:

11.2.5. Lemma (jednorozměrný případ Friedrichsovy nerovnosti). *Platí*

$$\|u\|_1^2 \le C_0 \int_0^\ell \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x = C_0 |u|_1^2 \quad \forall u \in H_0^1(0,\ell), \tag{11.27}$$

kde kladná konstanta C_0 nezávisí na funkci $v \in H_0^1(0,\ell)$.

Důkaz. Důkaz prozatím provedeme v případě $u \in C^1\langle 0,\ell\rangle$. (Obecný důkaz je v podkap. 11.8.) Označme

$$g(x) = \cos\frac{\pi x}{4\ell}, \tag{11.28}$$

$$v = \frac{u}{g} \quad \text{čili} \quad u = gv. \tag{11.29}$$

[7] Případ nehomogenních okrajových podmínek $u(0) = a$, $u(\ell) = b$ bude probrán v samostatné podkapitole.

[8] Skalární součin (z,v), který vystupuje v Lax-Milgramově větě, má zde tvar $(z,v) = \int_0^\ell \left(zv + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$, takže pro normu $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$ platí vztah (11.22).

[9] V případě nehomogenních okrajových podmínek bude mít funkcionál $F(v)$ tvar $F(v) = L(v) - a(\omega,v)$, kde funkce $\omega \in H^1(0,\ell)$ souvisí s okrajovými podmínkami vztahy $\omega(0) = a$, $\omega(\ell) = b$ a $H^1(0,\ell)$ je prostor všech funkcí spojitých na $< 0,\ell >$, které mají na $(0,\ell)$ kvadraticky integrovatelnou první dervivaci. V případě homogenních okrajových podmínek (11.2) je $\omega \equiv 0$, takže z bilinearity $a(z,v)$ plyne $F(v) = L(v) - a(0,v) = L(v)$, což je vztah (11.25).

Zřejmě platí

$$(u')^2 = ((gv)')^2 = g^2(v')^2 + 2vv'gg' + v^2(g')^2 = g^2(v')^2 + (v^2gg')' - v^2gg'', \quad (11.30)$$

takže

$$(v^2gg')' - v^2gg'' \leq (u')^2. \quad (11.31)$$

Integrujeme-li (11.31) v mezích od 0 do ℓ, dostaneme

$$\left[v^2gg'\right]_0^\ell - \int_0^\ell v^2gg''\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\ell (u')^2\,\mathrm{d}x. \quad (11.32)$$

Ale podle (11.28) je

$$g'' = -\frac{\pi^2}{16\ell^2}g, \quad (11.33)$$

takže

$$v^2gg'' = -\frac{\pi^2}{16\ell^2}v^2g^2 = -\frac{\pi^2}{16\ell^2}u^2. \quad (11.34)$$

Konečně podle (11.2)

$$\left[v^2gg'\right]_0^\ell = \left[v^2g^2\frac{g'}{g}\right]_0^\ell = \left[u^2\frac{g'}{g}\right]_0^\ell = 0. \quad (11.35)$$

Z (11.32), (11.34) a (11.35) plyne

$$\frac{\pi^2}{16\ell^2}\int_0^\ell u^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\ell (u')^2\,\mathrm{d}x. \quad (11.36)$$

Přičteme-li k oběma stranám (11.36) výraz $\frac{\pi^2}{16\ell^2}|u|_1^2$, dostaneme po jednoduché úpravě nerovnost (11.27), kde $C_0 = 1 + 16\ell^2/\pi^2$. $\square$

11.2.6. Věta. *Nechť $p \in C^0\langle 0, \ell\rangle$ a $f \in L_2(0,\ell)$. Nechť dále*

$$p(x) \geq \mu > 0 \quad \forall x \in \langle 0, \ell\rangle. \quad (11.37)$$

Potom má slabá formulace právě jedno řešení.

Důkaz. Je třeba ověřit platnost nerovností (11,21), (11.23), (11.24).

a) Položme $M = \max_{x\in<0,\ell>} |p(x)|$. Potom s užitím Schwarz-Buňakovského nerovnosti dostaneme

$$|a(v,w)| = \left|\int_0^\ell p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|\mathrm{d}x \leq M\int_0^\ell \left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|\cdot\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|\mathrm{d}x \leq$$
$$\leq M|v|_1|w|_1 \leq M\|v\|_1\|w\|_1.$$

b) Opět s užitím Schwarz-Buňakovského nerovnosti dostaneme

$$|L(v)| = \left|\int_0^\ell f(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|f\|_0\|v\|_0 \leq K\|v\|_1,$$

kde jsme položili $K = \|f\|_0$.

c) Podle (11.37) a potom (11.27) platí

$$a(v,v) = \int_0^\ell p(x)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \geq \mu|v|_1^2 \geq (\mu/C_0)\|v\|_1^2 = \beta\|v\|_1^2,$$

kde jsme položili $\beta = \mu/C_0$. $\square$

11.3. Věta o minimu kvadratického funkcionálu

Definujme kvadratický funkcionál vztahem

$$\Pi(v) = \tfrac{1}{2}a(v,v) - L(v), \tag{11.38}$$

kde bilineární forma $a(v,z)$ je dána na $H^1(0,\ell) \times H^1(0,\ell)$ vztahem (11.18), takže je symetrická:

$$a(v,z) = a(z,v) \quad \forall v,z \in H^1(0,\ell). \tag{11.39}$$

V $\mathbb{R}^N$ vztah (11.39) obecně neplatí, protože zde $a(v,z) = \sum_{i,j} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x$. Pro platnost (11.39) je nutné a stačí $k_{ij} = k_{ji}$. // Aby naše úvahy zde měly obecnější charakter, zaveďme pro tyto účely označení

$$V := H_0^1(0,\ell). \tag{11.40}$$

Potom slabá formulace (odpovídající homogenním okrajovým podmínkám (11.2)) bude znít: Najít $u \in V$ tak, aby platilo

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V. \tag{11.41}$$

Na str. 61 jsem v poznámce 9 pod čarou poznamenal, že okrajové podmínky, ve kterých platí alespoň jeden ze vztahů $u(0) = a$, $u(\ell) = b$, jsou při slabé formulaci charakterizované funkcí $\omega \neq 0$, pro kterou $\omega \in H^1(0,\ell)$, přičemž $\omega(0) = a$, $\omega(\ell) = b$. (V případě (11.2) platí $\omega = 0$.) Poznamenávám dále, že v případě $\omega \neq 0$ slabá formulace zní takto:

Obecná forma slabé formulace. *Najít funkci*

$$u \in \omega + V \tag{11.42}$$

tak, aby platil vztah (11.41) (*který zde opakuji*)

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V. \tag{11.41}$$

Přitom

$$\omega + V = \{w \in H^1(0,\ell) : \ \ w = \omega + v \quad \forall v \in V\}. \tag{11.43}$$

kde $H^1(0,\ell)$ je podprostor prostoru $L_2(0,\ell)$ s kvadraticky integrovatelnými prvními derivacemi.

V následující obecné formulaci věty 11.3.1 si pro jednoduchost můžete myslet, že prostor V je definován vztahem (11.40) a že $\omega = 0$. Formy $a(v,z)$ a $L(v)$, které jsme definovali v Označení 11.2.3, mohou mít v této obecné větě jiný tvar. (Např. $a(w,z) = \int_0^\ell (pw'z' + qwz)\,\mathrm{d}x$ – viz podkap. 11.10.) // Věta 11.3.1 platí v $\mathbb{R}^N$; proto je v ní uveden předpoklad (11.39).

11.3.1. Věta (o minimu kvadratického funkcionálu). *Nechť bilineární forma $a(v,w)$, která vystupuje ve slabé formulaci, je symetrická, tj. platí* (11.39). *Je-li dále V-eliptická, tj. platí*

$$a(v,v) \geq \beta \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V, \tag{11.44}$$

potom funkce $u \in H^1(0,\ell)$ je jediným řešením slabé formulace (11.42), (11.41), *když a jen když ostře minimalizuje funkcionál* (11.38) *na množině $\omega + V$, tj.*

$$\Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in \omega + V, \tag{11.45}$$

kde znamení rovnosti platí pouze pro $v = u$.

Důkaz. Množina $\omega + V$ může být psána ve tvaru

$$\omega + V = \{v \in H^1 : \ v = u + \lambda w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^1, \ \forall w \in V\}.$$

Nechť $v \in \omega + V$. Potom podle (11.38) a (11.39) platí

$$\Pi(u + \lambda w) - \Pi(u) = \tfrac{1}{2} a(u + \lambda w, u + \lambda w) - L(u + \lambda w) -$$
$$-\tfrac{1}{2} a(u, u) + L(u) = \tfrac{1}{2} \lambda a(u, w) + \tfrac{1}{2} \lambda a(w, u) + \tfrac{1}{2} \lambda^2 a(w, w) - \lambda L(w) =$$
$$= \lambda \{a(u, w) - L(w)\} + \tfrac{1}{2} \lambda^2 a(w, w) \quad \forall w \in V. \tag{11.46}$$

Nyní se důkaz rozpadá do dvou částí:

a) Nechť u je jediné řešení slabé formulace (11.42), (11.41). Potom podle (11.41) a (11.46) platí

$$\Pi(u + \lambda w) - \Pi(u) = \tfrac{1}{2} \lambda^2 a(w, w) \quad \forall w \in V.$$

Tento výsledek a V-eliptičnost formy $a(v, v)$ implikují, že funkce u ostře minimalizuje funkcionál $\Pi(v)$ na množině $\omega + V$.

b) Nyní dokážeme opačnou implikaci: Nechť funkce u ostře minimalizuje funkcionál $\Pi(v)$ na množině $\omega + V$, tj. platí (11.45). Jestliže existuje funkce $w_0 \in V$, pro kterou platí

$$a(u, w_0) \neq L(w_0), \tag{11.47}$$

potom, zvolíme-li $\lambda = -\{a(u, w_0) - L(w_0)\}/a(w_0, w_0)$, dostaneme ze vztahu (11.46)

$$\Pi(u + \lambda w_0) - \Pi(u) = -\{a(u, w_0) - L(w_0)\}^2 / \{2a(w_0, w_0)\} < 0,$$

protože podle (11.44) je $a(w_0, w_0) > 0$. (Funkce w_0 nemůže být ekvivalentní nule; jinak by neplatil předpoklad (11.47).) To je však spor s předpokladem, že platí (11.45). Tedy (11.47) nemůže platit, takže u splňuje (11.41), tj. u je jediné řešení slabé formulace. $\square$

11.4. Existence a jednoznačnost přibližného řešení slabé formulace

Připomeňme si, že jsme definovali dělení intervalu $\langle 0, \ell \rangle$ na $n + 1$ dílků pomocí bodů (většinou stejně vzdálených od sebe)

$$\mathcal{D}_h : \ x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = \ell \tag{11.6}$$

Tomuto dělení jsme přiřadili n-rozměrný prostor $\widehat{H}^1_0(0, \ell) \subset H^1_0(0, \ell)$ funkcí, které jsou po úsečkách dělení (11.6) lineární a v bodech x_0 a x_{n+1} rovny nule. Bázi prostoru $\widehat{H}^1_0(0, \ell)$ tvoří funkce

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x),$$

pro které platí

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{11.7}$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta ($\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$). Přibližným řešením slabé formulace (11.5) je funkce

$$\widehat{u}(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(x) \in \widehat{H}^1_0(0, \ell), \tag{11.8}$$

která splňuje

$$\int_0^\ell p(x)\frac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\widehat{v}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)\widehat{v}(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \widehat{v}\in \widehat{H}_0^1(0,\ell), \tag{11.9}$$

Vzhledem k (11.7) a (11.8) vztah (11.9) vede na soustavu n lineárních algebraických rovnic pro neznámé souřadnice $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ funkce $\widehat{u}$:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^\ell p(x)\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x \quad (i=1,\dots,n). \tag{11.10}$$

Tolik opakování ze str. 58. Poznamenejme ještě, že díky Označení 11.2.3 můžeme lineární algebraické rovnice (11.10) napsat stručněji takto:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j a(\varphi_j,\varphi_i) = L(\varphi_i) \quad (i=1,\dots,n), \tag{11.48}$$

kde $a(\varphi_j,\varphi_i)$ a $L(\varphi_i)$ jsou daná čísla. Neznámé jsou označeny symboly $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

Aby naše značení bylo konzistentní s obvyklou konečněprvkovou symbolikou, zaveďme stručný symbol

$$V_h := \widehat{H}_0^1(0,\ell), \tag{11.49}$$

kde h má význam délky největšího podintervalu dělení (11.6), které stručně značíme $\mathcal{D}_h$. Kromě symbolu V_h se v metodě konečných prvků užívají v případě po prvcích (podintervalech) lineárních funkcí další dva symboly $X_h \equiv X_h^{(1)}$ a $W_h \equiv W_h^{(1)}$ definované takto:

$$X_h = \{w\in H^1(0,\ell):\ w \text{ je spojitá funkce lineární na prvcích dělení } \mathcal{D}_h\}, \tag{11.50}$$

$$W_h = \{w\in X_h:\ w(x_0)=w(0)=a,\ w(x_{n+1})=w(\ell)=b\}, \tag{11.51}$$

jsou-li v koncových bodech intervalu $\langle 0,\ell\rangle$ předepsány nehomogenní okrajové podmínky $u(0)=a$, $u(\ell)=b$.

Prostor V_h je n-rozměrný, prostor X_h je $(n+2)$-rozměrný a platí $V_h\subset X_h$. Symbol W_h neoznačuje prostor, ale n-rozměrnou podmnožinu prostoru X_h. Platí-li $a=b=0$ v (11.51), potom $W_h=V_h$. Nyní můžeme definovat přibližné řešení slabé formulace (s obecně nehomogenními okrajovými podmínkami) pomocí MKP:

11.4.1. Definice. Přibližné řešení u_h slabé formulace (doposud jsme užívali značení $\widehat{u}$) je definováno jako řešení tohoto problému: Najít funkci $u_h\in W_h$, pro kterou platí

$$a(u_h,v)=L(v)\quad \forall v\in V_h. \tag{11.52}$$

11.4.2. Věta (o existenci a jednoznačnosti přibližného řešení slabé formulace). *Nechť bilineární forma $a(v,w)$ je V-eliptická, tj.*

$$a(v,v)\ge \beta\|v\|_1 \quad \forall v\in V.$$

Potom problém formulovaný v Definici 11.4.1 *má právě jedno řešení $u_h\in W_h$.*

Důkaz. Již víme a v podkapitole 11.5 podrobněji uvidíme, že (11.52) není nic jiného než soustava lineárních algebraických rovnic pro parametry $\alpha_1 = u_h(x_1), \ldots, \alpha_n = u_h(x_n)$, které jednoznačně určují spolu s parametry $u_h(x_0) = u_h(0) = a$, $u_h(x_{n+1}) = u_h(\ell) = b$ funkci $u_h(x)$ ve tvaru

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} u_h(x_j)\varphi_j(x). \tag{11.53}$$

Tedy stačí dokázat, že determinant příslušné soustavy lineárních algebraických rovnic je různý od nuly. Jinými slovy, stačí dokázat jednoznačnost problému z Definice 11.4.1.

Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme tedy, že kromě funkce $u_h \in W_h$, která splňuje vztah (11.52), existuje funkce $\widetilde{u}_h \in W_h$ tak, že

$$a(\widetilde{u}_h, v) = L(v) \quad \forall \in V_h. \tag{11.54}$$

Odečteme-li (11.54) od (11.52), dostaneme vzhledem k tomu, že forma $a(v, w)$ je bilineární,

$$a(u_h - \widetilde{u}_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \tag{11.55}$$

Ze vztahů (11.49) a (11.51) plyne, že $u_h - \widetilde{u}_h \in V_h$. Tedy ve vztahu (11.55) můžeme položit $v = u_h - \widetilde{u}_h$. Užijeme-li navíc V-eliptičnost formy $a(v, w)$, dostaneme vzhledem k inkluzi $V_h \subset V$

$$0 = a(u_h - \widetilde{u}_h, u_h - \widetilde{u}_h) \geq \beta \|u_h - \widetilde{u}_h\|_1 .$$

Odtud plyne, že $\widetilde{u}_h = u_h$ téměř všude v $(0, \ell)$, a protože u_h má tvar (11.53), tak všude v $\langle 0, \ell \rangle$. $\square$

11.4.3. Poznámka. Nechť platí předpoklady věty 11.3.1. Z důkazu této věty snadno vidíme, že $u_h \in W_h$ splňuje vztah (11.52), když a jen když u_h ostře minimalizuje kvadratický funkcionál $\Pi(v)$ na W_h.

11.5. Přibližné řešení slabé formulace je řešením soustavy lineárních algebraických rovnic

Prozatím neznámé funkční hodnoty přibližného řešení $u_h(x)$ v uzlových bodech $x_1, \ldots, x_n$ označme symboly $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Protože $u_h \in W_h$, platí podle (11.51)

$$u_h(x_0) \equiv u_h(0) = a, \;\; u_h(x_{n+1}) \equiv u_h(\ell) = b, \tag{11.56}$$

takže můžeme psát

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(x) + a\varphi_0(x) + b\varphi_{n+1}(x). \tag{11.57}$$

Vztah (11.49) definující prostor V_h a vztahy $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ dávají

$$\varphi_i(x) \in V_h \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11.58}$$

Dosaďme (11.57) do (11.52), tj. do vztahu

$$a(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h,$$

a položme $v = \varphi_i$ ($i = 1, \ldots, n$), což jsme vzhledem k (11.58) oprávněni. Dostaneme

$$\sum_{j=1}^{n} a(\varphi_j, \varphi_i)\alpha_j = L(\varphi_i) - a(\varphi_0, \varphi_i)a - a(\varphi_{n+1}, \varphi_i)b \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11.59}$$

V $\mathbb{R}^1$ je bilineární forma $a(v, w)$ vždy symetrická, takže

$$a(\varphi_j, \varphi_i) = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

a vztahy (11.59) mohou být psány také ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j)\alpha_j = L(\varphi_i) - a(\varphi_0, \varphi_i)a - a(\varphi_{n+1}, \varphi_i)b \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11.60}$$

V obou případech (11.59) a (11.60) jsme získali soustavu n lineárních algebraických rovnic pro n neznámých $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; přičemž v $\mathbb{R}^N$ buď s nesymetrickou maticí $\{a(\varphi_j, \varphi_i)\}$, nebo se symetrickou maticí $\{a(\varphi_i, \varphi_j)\}$. Podle Věty 11.4.2 každá z těchto soustav má právě jedno řešení $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

11.6. Konvergence přibližných řešení

11.6.1. Věta (abstraktní odhad chyby). *Nechť $u \in H^1(0, \ell)$ je řešení slabé formulace, ve které vystupuje V-eliptická a ohraničená bilineární forma $a(v, w)$. Potom platí*

$$\|u - u_h\|_1 \le C \inf_{v \in W_h} \|u - v\|_1, \tag{11.61}$$

kde C je konstanta nezávislá na h, u a v.

Důkaz. Zvolme $v \in W_h$ libovolně. Podle (11.40) a (11.51) platí, že $u_h - v \in V_h$. Užitím inkluze $V_h \subset V$, podmínky V-eliptičnosti, bilinearity formy $a(w, v)$ a vztahů (11.40), (11.41) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \beta\|u_h - v\|_1^2 \le a(u_h - v, u_h - v) = a(u_h, u_h - v) - a(v, u_h - v) = \\ = L(u_h - v) - a(v, u_h - v) = a(u, u_h - v) - a(v, u_h - v) = \\ = a(u - v, u_h - v). \end{aligned} \tag{11.62}$$

Podle předpokladů o slabé formulaci je forma $a(v, w)$ ohraničená, takže platí

$$|a(u - v, u_h - v)| \le M\|u - v\|_1\|u_h - v\|_1. \tag{11.63}$$

Zkombinujeme-li (11.62) a (11.63) a výsledek podělíme výrazem $\beta\|u_h - v\|_1$, dostaneme za předpokladu, že $\|u_h - v\|_1 > 0$,

$$\|u_h - v\|_1 \le \frac{M}{\beta}\|u - v\|_1. \tag{11.64}$$

Tato nerovnost spolu s trojúhelníkovou nerovností

$$\|u - u_h\|_1 \le \|u - v\|_1 + \|u_h - v\|_1 \tag{11.65}$$

implikuje

$$\|u - u_h\|_1 \le \left(1 + \frac{M}{\beta}\right)\|u - v\|_1. \tag{11.66}$$

Pokud $\|u_h - v\|_1 = 0$, potom (11.64) platí bez úvah spojených s (11.62) a (11.63), takže s pomocí (11.65) opět dostaneme (11.66).

Přejdeme-li v (11.66) k infimu vzhledem k $v \in W_h$, dostaneme (11.61), kde $C = 1 + M/\beta$. $\square$

Věta 11.6.1 má dva důležité důsledky:

11.6.2. Věta (o maximální rychlosti konvergence). *Nechť bilineární forma $a(v, w)$ je V-eliptická a ohraničená a nechť $u \in H^2(0, \ell)$, kde u je řešení slabé formulace a $H^2(0, \ell) \subset L_2(0, \ell)$ je podprostor funkcí s kvadraticky integrovatelnou první a druhou derivací. Potom*

$$\|u - u_h\|_1 \le Ch|u|_2 \quad \forall h \in (0; 1), \tag{11.67}$$

kde konstanta C nezávisí na h a u a kde seminorma $|u|_2$ je definovaná vztahem

$$|u|_2 = \sqrt{\int_0^\ell (u'')^2 \, \mathrm{d}x}.$$

Důkaz. Nechť $I_h^1 u$ je interpolace funkce $u \in H^2(0, \ell)$ spojitou funkcí, která je po prvcích dělení $\mathcal{D}_h$ (viz (11.6)) lineární. Protože $I_h^1 u \in W_h$, vztah (11.61) implikuje

$$\|u - u_h\|_1 \le C\|u - I_h^1 u\|_1.$$

Výsledek (11.67) nyní plyne z interpolačního teorému pro jednorozměrné konečné prvky s lineární násadou (viz větu 11.15.4). Tvrzení tohoto teorému má tvar:

$$\|u - I_h^1 u\|_1 \le Ch|u|_2. \qquad \square \tag{11.68}$$

11.6.3. Věta (obecná věta o konvergenci metody konečných prvků). *Nechť jsou splněny předpoklady věty* 11.4.2 *o existenci a jednoznačnosti řešení slabé formulace. Potom*

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_1 = 0, \tag{11.69}$$

kde $u \in H^1(0, \ell)$ je řešení slabé formulace.

Také Věta 11.6.3 bude dokázána v podkap. 11.15.

Věta 11.6.3 zaručuje konvergenci metody konečných prvků za podmínek, které stačí k existenci a jednoznačnosti přesného řešení $u \in H^1(0, \ell)$ slabé formulace. Je-li navíc přesné řešení dostatečně hladké, tj. $u \in H^2(0, \ell)$, potom věta 11.6.2 zaručuje rychlost konvergence $O(h)$, za předpokladu lineární konečněprvkové násady. Je-li tato násada po prvcích kvadratická a $u \in H^3(0, \ell)$, potom rychlost konvergence je $O(h^2)$, atd.

11.7. Zobecněné derivace a Sobolevovy prostory. Inkluze $\mathbf{H^1(I) \subset AC^0(\bar{I})}$

Touto podkapitolou měl výklad kap. 11 začít. Nechtěl jsem však čtenáře odradit přílišnou abstrakcí, takže jsem se dopustil metodické nepřesnosti. Napřed stručné opakování potřebných pojmů a výsledků z funkcionání analýzy.

11.7.1. Definice (reálného lineárního prostoru). Množina $S = \{x, y, z, \dots\}$ se nazývá *reálným lineárním prostorem* – stručně RLP, jsou-li splněny následující podmínky:

I. K libovolným dvěma prvkům $x, y \in S$ je jednoznačně přiřazen třetí prvek $x + y \in S$, který se nazývá jejich součtem, přičemž

1) platí $x + y = y + x$ (*komutativní zákon*),

2) platí $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*asociativní zkon*),

3) existuje takový prvek $\theta \in S$, že $x+\theta = x$ pro všechny prvky $x \in S$ (*existence nulového prvku*);

4) ke každému $x \in S$ existuje takový prvek $-x \in S$, že $x + (-x) = \theta$ (*existence opačného prvku*).

II. Ke každému reálnému číslu $\alpha \in \mathbb{R}^1$ a každému prvku $x \in S$ je definován prvek $\alpha x \in S$ (tzv. *násobek prvku* $x \in S$ *reálným číslem* $\alpha \in \mathbb{R}^1$), přičemž

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1)$,

2) $1 \cdot x = x$.

III. Obě operace (tj. sčítání prvků a násobení prvku reálným číslem) jsou spojeny těmito dvěma distribučními zákony:

1) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

RLP budeme stručně nazývat *lineál*.

1.7.2. Definice (normy). Nechť M je lineál. Je-li každému prvku $u \in M$ přiřazeno číslo $\|u\|$ s vlastnostmi

$$\|u\| \geq 0,\ \text{přičemž}\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta \text{ v } M, \tag{11.70}$$

$$\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\| \quad \text{pro každé reálné } \alpha, \tag{11.71}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in M, \tag{11.72}$$

potom $\|u\|$ nazýváme *normou* prvku $u \in M$. Nerovnost (11.72) se nazývá *trojúhelníková nerovnost*. Lineál M, na němž je definována norma, nazýváme *lineární normovaný prostor* – stručně LNP.

11.7.3. Definice (B–prostoru). Úplný lineární normovaný prostor nazýváme Banachovým prostorem.

11.7.4. Definice (skalárního součinu a unitárního prostoru). Říkáme, že na lineálu M je definován skalární součin, je-li ke každé dvojici $u, v \in M$ přiřazeno reálné číslo (u, v) s těmito vlastnostmi:

$$(u, v) = (v, u)\,, \tag{11.73}$$

$$(c_1u_1 + c_2u_2, v) = c_1(u_1, v) + c_2(u_2, v), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1, \tag{11.74}$$

$$(u, u) \geq 0\,, \tag{11.75}$$

$$(u, u) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \theta \text{ v } M\,. \tag{11.76}$$

Lineál M, na němž je definován skalární součin, se nazývá *unitární prostor*.

11.7.5. Definice (H–prostoru). Úplný unitární prostor se nazývá *Hilbertovým prostorem.*

11.7.6. Poznámka. Příkladem Banachova prostoru je prostor $L_2(I)$; obecněji každý Hilbertův prostor s normou $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$.

11.7.7. Definice ($C^\infty(\overline{I})$, supp u, $C_0^\infty(I)$). Označme symbolem I otevřený interval konečné délky. Nechť $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ je lineál funkcí $u(x)$, které jsou spojité včetně derivací všech řádů v celém prostoru $\mathbb{R}^1$. Symbolem $C^\infty(\overline{I})$ budeme značit lineál, který dostaneme restrikcí funkcí z $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ na uzavřený interval $\overline{I}$. // Uzávěr množiny těch bodů intervalu I, v nichž je $u(x) \neq 0$, nazýváme *nosičem* funkce $u(x)$ a značíme $\operatorname{supp} u$. // Označme dále symbolem $C_0^\infty(I)$ lineál všech funkcí s kompaktním nosičem v intervalu I, tj. množinu těch funkcí z $C^\infty(\overline{I})$, pro něž platí $u(x) \equiv 0$ v určitém okolí koncových bodů intervalu I (v obecném případě jsou tato okolí různá pro různé funkce z $C_0^\infty(I)$). Pro každou funkci $u \in C_0^\infty(I)$ je $\operatorname{supp} u$ uzavřená množina a $\operatorname{supp} u \subset I$, takže $\operatorname{supp} u$ má od koncových bodů intervalu I určitou kladnou vzdálenost. $\rightarrow$ Tedy $\varphi^{(j)}(a) = \varphi^{(j)}(b) = 0$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ v koncových bodech a, b intervalu I v případě $\varphi \in C_0^\infty(I)$.

11.7.8. Příklad (funkce z $C_0^\infty(I)$). Nechť $I = (-2, 2)$. Příkladem funkce s kompaktním nosičem v I je funkce

$$u(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2)} & \text{pro } x^2 < 1, \\ 0 & \text{jinde v } I. \end{cases}$$

Přímým výpočtem (s použitím matematické indukce) se dá dokázat, že tato funkce má v I derivace všech řádů, takže je předně $u \in C^\infty(\overline{I})$. Dále $\operatorname{supp} u = \langle -1, 1 \rangle$, takže $u \in C_0^\infty(I)$. Více viz podkap. 11.17 (Dodatek B).

11.7.9. Věta (Schwarzova nerovnost[10]). *Nechť M je unitární prostor se skalárním součinem (u,v). Potom pro libovolné prvky $u, v \in M$ platí*

$$|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|\,,$$

kde $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$.

11.7.10. Definice (husté množiny v LNP). Nechť S je lineární normovaný prostor s normou $\|\cdot\|_S$. Říkáme, že množina $M \subset S$ je hustá v S, jestliže pro každý prvek $u \in S$ lze najít posloupnost $\{u_n\} \subset M$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_S = 0$.

11.7.11. Věta. *Lineál $C_0^\infty(I)$ je hustý v $L_2(I)$, tj. podle definice* 11.7.10 *lze pro každý prvek $u \in L_2(I)$ najít posloupnost $\{u_n\} \subset C_0^\infty(I)$ takovou, že*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_0 = \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L_2(I)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_I (u_n - u)^2 \, \mathrm{d}x} = 0\,.$$

Důkaz této důležité věty je dlouhý a komplikovaný, takže je uveden v samostatné podkapitole 11.14.

[10] Zvaná také Schwarz-Buňakovského nebo Cauchy-Buňakovského nerovnost.

11.7.12. Věta. *Nechť* $u_n \to u$ *v* $L_2(I)$ *a* $v \in L_2(I)$. *Potom* $(u_n, v) \to (u, v)$.

Důkaz. Z (11.74) a ze Schwarzovy nerovnosti plyne

$$|(u_n, v) - (u, v)| = |(u_n - u, v)| \leq \|u_n - u\|_0 \|v\|_0.$$

Protože podle předpokladu věty $\|u_n - u\|_0 \to 0$, jde levá strana získané nerovnosti k nule. $\square$

11.7.13. Věta. *Nechť množina* M *je hustá v* $L_2(I)$ *a nechť* $(u, v) = 0$ $\forall v \in M$, *kde* $u \in L_2(I)$ *je pevný prvek. Potom* $u = 0$ *v* $L_2(I)$.

Důkaz. Podle definice husté množiny (viz definici 11.7.10) lze najít posloupnost $\{u_n\} \subset M$ takovou, že $\lim u_n = u$ v $L_2(I)$, tj. $\lim \|u_n - u\|_0 = 0$. Podle předpokladu věty je $(u_n, u) = 0$. Odtud a z věty 11.7.12 plyne, že $\lim (u_n, u) = (u, u) = 0$. Tento výsledek a vztah (11.76) implikují, že $u = 0$ v $L_2(I)$. $\square$

11.7.14. Lemma. *Vztah*

$$(u, v)_{k,I} = \sum_{j=0}^{k} \int_I u^{(j)}(x) v^{(j)}(x) \, \mathrm{d}x \tag{11.77}$$

definuje na lineálu $C^\infty(\overline{I})$ *skalární součin.*

Důkaz. První dvě vlastnosti (11.73) a (11.74) skalárního součinu plynou z vlastností integrálů a derivací:

$$\int_I u^{(j)}(x) v^{(j)}(x) \ \mathrm{d}x = \int_I v^{(j)}(x) u^{(j)}(x) \ \mathrm{d}x \,,$$

$$\int_I (au_1 + bu_2)^{(j)} v^{(j)} \ \mathrm{d}x = a \int_I u_1^{(j)} v^{(j)} \ \mathrm{d}x + b \int_I u_2^{(j)} v^{(j)} \ \mathrm{d}x \,.$$

Co se týče třetí vlastnosti (11.75), je podle (11.77)

$$(u, u)_{k,I} = \sum_{j=0}^{k} \int_I (u^{(j)}(x))^2 \ \mathrm{d}x \geq 0 \,. \tag{11.78}$$

Zároveň je vidět, že vztah $(u, u)_{k,I} = 0$ platí právě tehdy, když každý ze sčítanců v (11.78) je roven nule; odtud zejména plyne

$$\int_I u^2 \ \mathrm{d}x = 0,$$

čili $u(x) \equiv 0$ v I (protože $u \in C^\infty(\overline{I})$), takže i čtvrtá vlastnost (11.76) je splněna. $\square$

11.7.15. Definice. Zavedeme-li v lineálu $C^\infty(\overline{I})$ skalární součin $(u, v)_{k,I}$ podle vztahu (11.77), dostaneme unitární prostor, který označíme $S^k(I)$ (obšírněji $S^{k,2}(I)$). Normu v $S^k(I)$ definujeme obvyklým způsobem

$$\|u\|_{k,I} := \sqrt{(u, u)_{k,I}} \quad \forall u \in S^k(I) \tag{11.79}$$

a vzdálenost (metriku) vztahem

$$\varrho(u, v) := \|u - v\|_{k,I} \quad \forall u, v \in S^k(I) \,. \tag{11.80}$$

Poznámka. **(a)** Unitární prostor $S^k(I)$ je také lineárním normovaným prostorem a metrickým prostorem. Množinově jsou prostory $S^k(I)$ identické pro všechna celá nezáporná k. **(b)** Pro $k=0$ dostáváme skalární součin, normu a metriku prostoru $L_2(I)$, tj.

$$(u,v)_{0,I} = (u,v)_{L_2(I)} \quad \forall u,v \in C^\infty(\overline{I}) \quad \text{atd.} \tag{11.81}$$

Ještě trochu funkcionální analýzy:

(1) Nechť R je metrický prostor a $M \subset R$. Symbolem $[M]_R$ značíme *uzávěr* množiny M v metrice prostoru R. // Nechť $M \subset L_2(I)$. Symbolem $[M]_0$ značíme *uzávěr* množiny M v normě prostoru $L_2(I)$. // Nechť $M \subset S^k(I)$. Symbolem $[M]_k$ značíme *uzávěr* množiny M v normě prostoru $S^k(I)$.

(2) Nechť R je libovolný metrický prostor. Úplný metrický prostor R^* nazýváme *zúplněním* prostoru R, jestliže: **(a)** R je podprostorem prostoru R^*; **(b)** prostor R je hustý v R^*, tj. $[R]_{R^*} = R^*$. (Zde $[R]_{R^*}$ označuje uzávěr prostoru R v R^*.)

(3) Nechť S je LNP, resp. metrický prostor. Posloupnost $\{u_n\} \subset S$ se nazývá *cauchyovská v prostoru* S, když

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_m - u_n\|_S = 0\,, \quad \text{resp.} \quad \lim_{m,n\to\infty} \varrho(u_m,u_n) = 0\,.$$

(4) LNP, resp. metrický prostor S se nazývá *úplný*, když každá cauchyovská posloupnost $\{u_n\} \subset S$ má v S limitu, tj. existuje takový prvek $u \in S$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_S = 0\,, \text{resp.} \quad \lim_{n\to\infty} \varrho(u_n,u) = 0\,.$$

(5) **Věta o zúplnění metrického prostoru** (viz např. [KF1]): Každý metrický prostor R má zúplnění a všechna jeho zúplnění jsou izometrická.

(6) **Fischerova věta** (viz např. [Na, kap. VIII]): Prostor $L_2(I)$ je úplný, tj. každá cauchyovská posloupnost $\{u_n\} \subset L_2(I)$ má limitu $u \in L_2(I)$. Obšírněji řečeno, úplnost prostoru $L_2(I)$ znamená toto: Pokud

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\|_{L_2(I)} = 0\,,$$

potom existuje taková funkce $u \in L_2(I)$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L_2(I)} = 0\,.$$

11.7.16. Věta. *a) Posloupnost $\{u_n\}$ konverguje v normě prostoru $S^k(I)$ k prvku $u \in S^k(I)$ právě tehdy, konverguje-li posloupnost $\{u_n\}$ a posloupnosti derivací $\{u_n^{(j)}\}$ (kde $j=1,\ldots,k$) k funkci u a jejím derivacím $u^{(j)}$ v normě prostoru $L_2(I)$.*

b) Posloupnost $\{u_n\}$ je v prostoru $S^k(I)$ cauchyovská právě tehdy, jsou-li všechny posloupnosti $\{u_n^{(j)}\}$ (kde $j=0,1,\ldots,k$) cauchyovské v prostoru $L_2(I)$.

Důkaz. a) Z (11.79) a (11.78) plyne pro $u \in S^k(I)$

$$\|u\|_{k,I}^2 = \sum_{j=0}^{k} \int_I (u^{(j)}(x))^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|_{L_2(I)}^2\,. \tag{11.82}$$

Konvergence v prostoru $S^k(I)$, tj. $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ v $S^k(I)$, tedy znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{k,I}^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \|u_n^{(j)} - u^{(j)}\|_{L_2(I)}^2 = 0.$$

Odtud plyne první tvrzení věty.

b) Je-li posloupnost $\{u_n\}$ cauchyovská v $S^k(I)$, potom podle (11.82) platí

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_m - u_n\|_{k,I}^2 = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \|u_m^{(j)} - u_n^{(j)}\|_{L_2(I)}^2 = 0.$$

Odtud plyne druhé tvrzení věty. $\square$

Dá se ukázat příkladem, že prostor $S^k(I)$ není úplný. S pomocí Věty 11.7.16b a faktu, že prostor $L_2(I)$ je úplný (tj. každá cauchyovská posloupnost má v $L_2(I)$ limitu – viz Fischerovu větu na str. 72), lze však prostor $S^k(I)$ *zúplnit*. Získaný úplný prostor označíme $W^k(I)$ (obšírněji $W^{k,2}(I)$). Toto nyní provedeme.

Uvažujme libovolnou posloupnost $\{u_n\}$ cauchyovskou v $S^k(I)$. Jsou možné tyto dva případy:

a) Posloupnost $\{u_n\}$ je v prostoru $S^k(I)$ konvergentní, tj. existuje $u \in S^k(I)$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{k,I} = 0\,.$$

Podle Věty 11.7.16a posloupnost $\{u_n\}$ a posloupnosti $\{u_n^{(j)}\}$ příslušných derivací konvergují v $L_2(I)$ k funkci u a k jejím derivacím $u^{(j)}$.

b) Posloupnost $\{u_n\}$ není v prostoru $S^k(I)$ konvergentní. Podle Věty 11.7.16b je však každá z posloupností $\{u_n^{(j)}\}$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$ cauchyovská v $L_2(I)$, a protože $L_2(I)$ je úplný prostor, má v něm každá z těchto posloupností určitou limitu, což je funkce, kterou označíme v případech $j = 1, \ldots, k$ symbolem $D^j u$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{(j)} = D^j u \quad \text{v } L_2(I) \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{11.83}$$

čili

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^{(j)} - D^j u\|_{L_2(I)} = 0 \quad (j = 1, \ldots, k)\,. \tag{11.83*}$$

Pro $j = 0$ označíme příslušnou limitu symbolem u:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \equiv D^0 u \quad \text{v } L_2(I)\,. \tag{11.84}$$

čili

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L_2(I)} = 0\,. \tag{11.84*}$$

O funkcích $D^j u$, $1 \le j \le k$, nemůžeme tvrdit, že jsou derivacemi limitní funkce u, protože o funkci u zatím víme jen to, že patří do $L_2(I)$. O funkcích $D^j u$ však ukážeme, že mají všechny vlastnosti derivací $u^{(j)}$ funkce $u \in S^k(I)$, které se projeví, když tyto derivace vystupují v integrálních vztazích.

Od tohoto místa začneme uplatňovat Větu 11.7.11 o hustotě $C_0^\infty(I)$ v $L_2(I)$.

11.7.17. Lemma. *Nechť $u \in S^k(I)$. Potom platí*

$$\int_I u^{(j)}\varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^j \int_I u\,\varphi^{(j)}\,\mathrm{d}x \;\; (j = 0, 1, \dots, k) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I)\,. \tag{11.85}$$

Důkaz. Integrací per partes

$$\int_I u'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\varphi(x)]_a^b - \int_I u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_I u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

protože $\varphi = 0$ v koncových bodech intervalu I. Tím je vztah (11.85) dokázán v případě $j = 1$. Dále v případě $j = 2$ platí

$$\int_I u''(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = [u'(x)\varphi(x)]_a^b - \int_I u'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_I u'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -[u(x)\varphi'(x)]_a^b + \int_I u(x)\varphi''(x)\,\mathrm{d}x = \int_I u(x)\varphi''(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

protože $\varphi = \varphi' = 0$ v koncových bodech intervalu I – viz 11.7.7. Získali jsme vztah (11.85) pro $j = 2$. (Jak se postupuje v obecném případě, je již zřejmé.) □

11.7.18. Věta. *Limitní funkce $u \in L_2(I)$, $D^j u \in L_2(I)$, které vystupují ve vztazích* (11.83) *a* (11.84) *splňují vztahy*

$$\int_I \varphi\, D^j u\,\mathrm{d}x = (-1)^j \int_I u\,\varphi^{(j)}\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I),\; 1 \le j \le k. \tag{11.86}$$

Důkaz. Protože $u_n \in S^k(I)$ pro každé $n = 1, 2, \dots$, platí podle lemmatu 11.7.17 pro $1 \le j \le k$

$$\int_I u_n^{(j)}\varphi\,\mathrm{d}x = (-1)^j \int_I u_n\varphi^{(j)}\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I) \quad (j = 1, \dots, k).$$

Přejděme v tomto vztahu k limitě

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi\, u_n^{(j)}\,\mathrm{d}x = (-1)^j \lim_{n\to\infty} \int_I u_n\varphi^{(j)}\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I). \tag{11.87}$$

Podle (11.83), (11.84) a Věty 11.7.12 implikuje (11.87) vztah (11.86). □

11.7.19. Věta. *Funkce $D^j u$ jsou jednoznačně určeny funkcí u* (*ve smyslu prostoru $L_2(I)$, tj. až na množinu míry nula*).

Důkaz. Předpokládejme, že dvě posloupnosti $\{u_n\}$, $\{\widetilde{u}_n\}$ cauchyovské v $S^k(I)$ mají tutéž limitu v $L_2(I)$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \widetilde{u}_n = u \quad \text{v } L_2(I), \tag{11.88}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_0 = \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{u}_n - u\|_0 = 0\,. \tag{11.88*}$$

Označme

$$\widetilde{D}^j u := \lim_{n\to\infty} D^j \widetilde{u}_n \quad \text{v } L_2(I), \quad 1 \le j \le k, \tag{11.89}$$

tj. funkce $\widetilde{D}^j u$ splňuje

$$\lim_{n\to\infty} \|D^j \widetilde{u}_n - \widetilde{D}^j u\|_0 = 0, \tag{11.89*}$$

a zjistěme, jaký je vztah mezi $\widetilde{D}^j u$ a $D^j u$.

Stejným postupem jako jsme získali (11.86) dostaneme ze vztahů (11.88) a (11.89)

$$\int_I \varphi\, \widetilde{D}^j u \,\mathrm{d}x = (-1)^j \int_I u\, \varphi^{(j)} \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I),\ 1 \le j \le k. \tag{11.90}$$

Odečtěme (11.90) od (11.86) (pro libovolné $1 \le j \le k$). Dostaneme

$$\int_I (D^j u - \widetilde{D}^j u)\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I). \tag{11.91}$$

Protože lineál $C_0^\infty(I)$ je hustý v $L_2(I)$ (viz Větu 11.7.11), plyne z (11.91) podle Věty 11.7.13

$$\widetilde{D}^j u = D^j u \quad \text{v } L_2(I)$$

pro všechna $1 \le j \le k$, což jsme chtěli dokázat.[11] □

11.7.20. Definice. Funkce $D^j u$ nazveme *zobecněnými derivacemi funkce* u a budeme je značit (stejně jako klasické derivace) symbolem $u^{(j)}$ (někdy však $D^j u$).

Nahradíme-li $D^j u$ v (11.86) symbolem $u^{(j)}$, dostaneme vztah, který je formálně totožný se vztahem (11.85). (Vztah (11.86) ovšem platí pro širší množinu funkcí.) To je hlavní důvod zavedené definice 11.7.20. Že tato definice má dobrý smysl, plyne z Věty 11.7.19, kterou nyní můžeme vyslovit takto: *Zobecněné derivace funkce* u *jsou touto funkcí jednoznačně určeny.*

Označme symbolem $W^k(I)$ uzávěr lineárního prostoru $S^k(I)$ v jeho normě $\|\cdot\|_{k,I}$:

$$W^k(I) = \left[S^k(I)\right]_k. \tag{11.92}$$

Z konstrukce množiny $W^k(I)$ přímo plyne tvrzení této důležité věty:

11.7.21. Věta. *Lineární prostor $C^\infty(\overline{I})$ je hustý v množině $W^k(I)$ vzhledem k normě*

$$\|v\|_{k,I} = \sqrt{\sum_{j=0}^{k} \int_I \left(u^{(j)}(x)\right)^2 \mathrm{d}x}\,. \tag{11.93}$$

Věta 11.7.21 o hustotě lineárního prostoru $C^\infty(\overline{I})$ v prostoru $W^k(I)$ nepotřebuje důkaz, protože je součástí konstrukce $W^k(I)$; symbolicky ji lze vyjádřit takto:

$$\left[C^\infty(\overline{I})\right]_k = W^k(I). \tag{11.94}$$

[11] Text "$\widetilde{D}^j u = D^j u$ v $L_2(I)$" znamená: $\widetilde{D}^j u(x) = D^j u(x)$ pro téměř všechny body $x \in I$.

Následující tři věty budou dokázány v podkap. 11.13.

11.7.22. Věta. *Množina $W^k(I)$ je lineární prostor.*

11.7.23. Věta. *Výraz*

$$(u,v)_{k,I} = \sum_{j=0}^{k} \int_I u^{(j)}(x) v^{(j)}(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.95}$$

je skalárním součinem v lineárním prostoru $W^k(I)$.

Z věty 11.7.23 plyne, že výraz

$$\|v\|_{k,I} = \sqrt{\sum_{j=0}^{k} \int_I \bigl(u^{(j)}(x)\bigr)^2\,\mathrm{d}x} \quad \forall u \in W^k(I) \tag{11.96}$$

je norma v prostoru $W^k(I)$.

11.7.24. Věta. *$W^k(I)$ je Hilbertův prostor, tj. $W^k(I)$ je úplný unitární prostor (což znamená, že i cauchyovské posloupnosti sestávající z limitních prvků (viz (11.83)) jsou konvergentní v normě $\|\cdot\|_{k,I}$).*

11.7.25. Definice. Hilbertův prostor $W^k(I)$, ve kterém je skalární součin definován vztahem (11.95), se nazývá *Sobolevův prostor.* Norma je v tomto prostoru definována standardním způsobem:

$$\|u\|_{k,I} = \sqrt{(u,u)_{k,I}} \quad \forall u \in W^k(i). \tag{11.97}$$

Z této definice plyne, že $L_2(I) \equiv W^0(I) \supset W^1(I) \supset W^2(I) \ \ldots$.[12]

Věta 11.7.21 může být nyní reformulována:

11.7.26. Věta. *Lineární prostor $C^\infty(\overline{I})$ je hustý v Sobolevově prostoru $W^k(I)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. (V případě $k = 0$ Sobolevův prostor koinciduje s Lebesgueovým prostorem $L_2(I)$).*

Lze ukázat, že *prostor $W^k(I)$ je separabilní.* Příkladem spočetné množiny husté v $W^k(I)$ je množina všech polynomů s racionálními koeficienty.

Vyvrcholením úvah této podkapitoly je Věta 11.7.27, která odůvodňuje směr těchto úvah a dává do souvislostí zde zavedenou definici Sobolevových prostorů s jejich přirozenou definicí (viz (11.98)), ve které vztah (11.86) je definicí a ne tvrzením (tvrzením je v případě prostorů $W^k(I)$):

11.7.27. Věta ($W^k = H^k$)[13]. *Nechť $D^j w \in L_2(I)$ značí j-tou zobecněnou derivaci funkce $w \in L_2(I)$,[14] tj. nechť funkce $D^j w$ splňuje vztah* (11.86). *Mějme LNP*

$$H^k(I) = \bigl\{w \in L_2(I) :\ D^j w \in L_2(I) \ (j = 1, \ldots, k)\bigr\} \tag{11.98}$$

[12]Např. stupňovitá funkce patří do $L_2(I)$, ale nenáleží do $W^k(I)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

[13]Symboly W^k a H^k jsou standardně užívány pro uvedené dva typy Banachových prostorů. Článek [MS] Meyerse a Serrina s názvem $H = W$ byl, je a zůstane článkem s nejkratším nadpisem. Kdysi vzbudil velkou pozornost. Symboly H a W mají v [MS] opačný význam než zde.

[14]Každá klasická derivace je současně zobecněnou derivací.

s normou

$$\|w\|_{k,I} = \sqrt{\|w\|^2_{L_2(I)} + \sum_{j=1}^{k} \|D^j w\|^2_{L_2(I)}}\,.$$

Potom prostor $H^k(I)$ je úplný a platí[15]

$$H^k(I) = W^k(I)\,. \tag{11.98*}$$

Důkaz úplnosti. Uvažujme posloupnost prvků $\{u_n\}$ prostoru $H^k(I)$, která je cauchyovská v normě $\|\cdot\|_{k,I}$. Potom posloupnosti $\{u_n\}$, $\{u'_n\}$,…, $\{u_n^{(k)}\}$, kde $u_n^{(j)}$ je j-tá zobecněná derivace funkce u_n, jsou cauchyovské v normě $\|\cdot\|_{0,I}$ prostoru $L_2(I)$, takže mají v $L_2(I)$ limity $u, \omega_1, \ldots, \omega_k$. Ukážeme, že limity $\omega_1, \ldots, \omega_k$ jsou zobecněnými derivacemi funkce u. Platí (podle definice zobecněné derivace)

$$\int_I u_n^{(j)} \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^j \int_I u_n \varphi^{(j)} \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I)\,,$$

takže po limitním přechodu pro $n \to \infty$ dostaneme podle Věty 11.7.12

$$\int_I \omega_j \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^j \int_I u \varphi^{(j)} \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I)\,,$$

což znamená, že $\omega_j = D^j u$ $(j = 1, \ldots, k)$. (Vzhledem k (11.98*) a úplnosti prostoru $W^k(I)$ nebylo třeba úplnost prostoru $H^k(I)$ dokazovat.) □

K rovnosti $H^k(I) = W^k(I)$. Nechť $u \in W^k(I)$. Potom existují zobecněné derivace $D^j u \in L_2(I)$ $(j = 1, \ldots, k)$, které jsou podle Věty 11.7.19 jednoznačně určeny funkcí u. Tedy $u \in H^k(I)$ čili $W^k(I) \subset H^k(I)$. // Opačnou inkluzi $H^k(I) \subset W^k(I)$ lze dokázat tak, že dokážeme hustotu lineálu $C^\infty(\overline{I})$ v prostoru $H^k(I)$ (viz Dodatek C, kde již budeme mít vybudovaný potřebný matematický aparát). Zbytek důkazu je pak jednoduchý: Ke každé funkci $u \in H^1(I)$ vybereme posloupnost $\{u_n\} \subset C^\infty(\overline{I})$ tak, že $\|u - u_n\|_{k,I} < \frac{1}{n}$. Odtud $\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{k,I} = 0$, takže $u \in W^k(I)$ podle definice prostoru $W^k(I)$ (posloupnost $\{u_n\}$ je cauchyovská v normě prostoru $W^k(I)$ a má limitu $u \in H^k(I)$). Tedy $H^k(I) \subset W^k(I)$. □

11.7.27a. Poznámka. Je třeba zdůraznit, že zatímco v případě prostorů $W^k(I)$ je vztah (11.86) *tvrzením* dávajícím do vzájemných souvislostí limitní funkce, které vznikly v důsledku uzávěru (11.92), je v případě prostorů $H^k(I)$ vztah (11.86) výchozím vztahem, kterým *definujeme* zobecněné derivace $D^j u$. Tyto zobecněné derivace užíváme v definičním vztahu (11.98) Sobolevova prostoru $H^k(I)$. • V prostoru $W^k(I)$ je lineál $C^\infty(\overline{I})$ hustý definitoricky; v prostoru $H^k(I)$ se musí hustota lineálu $C^\infty(\overline{I})$ dokázat, protože v případě prostoru $H^k(I)$ pouze víme, že $C^\infty(\overline{I}) \subset H^k(I)$. •• Vše, co jsme doposud vyslovili v podkap. 11.7, zůstává v platnosti, když nahradíme interval I vícerozměrnou ohraničenou oblastí Ω. (Co se týče textu před Větou 11.7.27 v případě $N = 2$, viz též kap. 14, zejména část **14.3**).

[15] V případě $N \geq 2$ lze rovnost $H^k(\Omega) = W^k(\Omega)$ dokázat za předpokladu, že hranice $\partial\Omega$ ohraničené oblasti Ω je po částech hladká a spojitá (symbolicky $\Omega \in \mathcal{C}^{0,0}$). To je zároveň podmínka hustoty $C^\infty(\overline{\Omega})$ v $H^k(\Omega)$.

11.7.28. Důsledek. *$H^k(I) = \{w \in L_2(I) : D^j w \in L_2(I) \ (j = 1, \dots, k)\}$ je Hilbertův prostor a lineární prostor $C^\infty(\overline{I})$ je v něm hustý (vzhledem k $\|\cdot\|_{H^k(I)}$).*

Velmi důležitá je tato věta, jejíž důkaz je uveden v podkap. 11.12:

11.7.29. Věta (Sobolevova věta o vnoření prostoru $H^1(I)$ do prostoru spojitých funkcí). *Nechť $u \in H^1(I)$. Potom je funkce u spojitá na intervalu $\overline{I}$ (tj. $u \in C^0(\overline{I})$), přičemž platí*

$$\|u\|_{C^0(\overline{I})} \le C\|u\|_{H^1(I)} \quad \forall u \in H^1(I). \tag{11.99}$$

Platí dokonce více: Funkce u je hölderovsky spojitá na $\overline{I}$ s kvocientem $\lambda = \frac{1}{2}$ (tj. $u \in C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})$), přičemž platí

$$\|u\|_{C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})} = \|u\|_{C^0(\overline{I})} + \sup_{x,y\in I,\ x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{\sqrt{|x-y|}} \le C\|u\|_{H^1(I)} \quad \forall u \in H^1(I). \tag{11.100}$$

kde v obou případech kladná konstanta C nezávisí na funkci u.

Stejně důležité jsou následující dvě položky 11.7.30 a 11.7.31, které platí však pouze v $H^1(I)$ a jsou pro prostor $H^1(I)$ charakteristické:

11.7.30. Věta (Newton-Leibnizova formule v $H^1(I)$). *Nechť $u \in H^1(I)$, kde $I = (a, b)$. Potom pro $x, y \in I$ platí*

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{11.101}$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně malé. Protože lineární prostor $C^\infty(\overline{I})$ je hustý v $H^1(I)$, lze nalézt $u_\varepsilon \in C^\infty(\overline{I})$ tak, že

$$\|u - u_\varepsilon\|_{1,I} < \frac{\varepsilon}{2C + \max\{1, \sqrt{b-a}\}}, \tag{11.102}$$

kde C je konstanta ze Sobolevovy nerovnosti (11.99). Užijeme-li klasickou Newton-Leibnizovu formuli pro funkci u_ε a potom Větu 11.7.29 (podle níž $|u(x) - u_\varepsilon(x)| \le \|u - u_\varepsilon\|_{C^0(\overline{I})} \le C\|u - u_\varepsilon\|_{1,I}$) a Schwarzovu nerovnost, dostaneme s užitím (11.102)

$$\begin{aligned}
\left|u(y) - u(x) - \int_x^y u'(t)\,\mathrm{d}t\right| &\le \left|u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x) - \int_x^y u_\varepsilon'(t)\,\mathrm{d}t\right| + \\
+\left|u(y) - u(x) - \int_x^y u'(t)\,\mathrm{d}t - \left(u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x) - \int_x^y u_\varepsilon'(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| &= \\
= \left|u(y) - u_\varepsilon(y) - u(x) + u_\varepsilon(x) - \int_x^y \big(u'(t) - u_\varepsilon'(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| &\le \\
\le \left\{2C + \sqrt{y-x}\right\}\|u - u_\varepsilon\|_{1,I} &< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vzhledem k libovolnosti $\varepsilon > 0$ odtud plyne vztah (11.101). $\square$

11.7.31. Absolutní spojitost funkcí z $H^1(I)$. Každá funkce $u \in H^1(a,b)$ je na konečném intervalu (a, b) *absolutně spojitá*, tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro *libovolný* konečný (resp. spočetný) systém navzájem disjunktních intervalů $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ ležících v (a, b), které splňují levou stranu implikace (11.103), platí

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}|u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon. \tag{11.103}$$

Dokažme to. Podle Věty 11.7.30 a Schwarzovy nerovnosti platí

$$\big|u(b_i)-u(a_i)\big| = \left|\int_{a_i}^{b_i} u'(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{a_i}^{b_i} |u'(x)|\,\mathrm{d}x \le \sqrt{b_i-a_i}\|u'\|_{L_2(a_i,b_i)}.$$

Tento výsledek sečtěme od jedné do n a užijme Cauchy-Buňakovského nerovnost pro součty, která má tvar $\sum|A_i|\cdot|B_i| \le \sqrt{\sum A_i^2}\sqrt{\sum B_i^2}$. Dostaneme

$$\sum_i \big|u(b_i)-u(a_i)\big| \le \sum_i \sqrt{b_i-a_i}\|u'\|_{L_2(a_i,b_i)} \le \left(\sum_i (b_i-a_i)\right)^{\frac{1}{2}} |u|_{H^1(a,b)}.$$

Aby byla splněna implikace (11.103) stačí zvolit $\delta = \varepsilon^2/|u|^2_{H^1(a,b)}$. Vidíme, že každá funkce $u \in H^1(a,b)$ je na $\overline{I} = \langle a,b\rangle$ absolutně spojitá. // Množina $AC^0\langle a,b\rangle$ absolutně spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ je relativně úzkou množinou funkcí, ve které vystačíme s klasickou matematickou analýzou (viz 11.7.36a–36ℓ). Tím více je zajímavé, že $H^1(a,b) \subset AC^0\langle a,b\rangle$.

11.7.32. Poznámka. (a) Pokud $u \in C^{0,1}\langle a,b\rangle$, což je stručný zápis faktu, že spojitá funkce $u(x)$ splňuje na $\langle a,b\rangle$ Lipschitzovu podmínku

$$|u(x_1)-u(x_2)| \le L|x_1-x_2| \quad \forall x_1,x_2 \in \langle a,b\rangle,$$

potom je funkce na $\langle a,b\rangle$ také absolutně spojitá, přičemž $\delta = \varepsilon/L$.

(b) Z nerovnosti (11.100) plyne hölderovská spojitost s exponentem $\lambda = \frac{1}{2}$ funkcí $u \in H^1(I)$:

$$|u(x)-u(y)| \le C\sqrt{|x-y|}\|u\|_{1,I} \quad \forall u \in H^1(I).$$

Tuto nerovnost, kde nyní $C=1$, lze získat z Newton-Leibnizovy formule (11.101):

$$u(y)-u(x) = \int_x^y u'(t)\,\mathrm{d}t \le \sqrt{y-x}|u|_{1,I} \le \sqrt{y-x}\|u\|_{1,I}.$$

(c) Funkce $u \in H^1(I)$ je na intervalu $\overline{I} = \langle a,b\rangle$ také *stejnoměrně* spojitá: Položíme-li $\delta = \varepsilon^2/\|u\|^2_{1,I}$, potom pro $|x-y|<\delta$ platí $|u(x)-u(y)|<\varepsilon$.

(d) Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ (parabola $x = y^2$ s vrcholem v počátku) nesplňuje Lipschitzovu podmínku na $\langle 0,\ell\rangle$; nicméně $f(x) \in AC^0\langle 0,\ell\rangle$ (je-li $\varepsilon < 1$, stačí položit $\delta = \varepsilon^2$). Platí $(f'(x))^2 = 1/x$; odtud $f(x) \notin H^1(0,\ell)$, takže $AC^0\langle 0,\ell\rangle \supset H^1(0,\ell)$. // Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je také *stejnoměrně spojitá* na $\overline{I} = \langle 0,\ell\rangle$ s δ opět $\delta = \varepsilon^2$.

11.7.33. Příklad. a) Funkce $u \in H^k(I)$ nemají obecně spojitou derivaci. Nejjednodušším příkladem takové funkce je "stříška" na intervalu $(0,\ell)$

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x & \text{pro } x \in (0,\frac{1}{2}\ell\rangle, \\ \ell - \frac{\sqrt{3}}{2}x & \text{jinde.} \end{cases}$$

Je to funkce z $H^1_0(0,\ell)$.

b) Obecnějším příkladem funkce $u \in H^1_0(0,\ell)$ je "nekonečná pila s výškami zubů, které konvergují k nule": Rozpůlíme interval $(0,\ell)$ a na jeho levé polovině definujeme stříšku

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x & \text{pro } x \in (0, \frac{1}{4}\ell\rangle, \\ \frac{1}{2}\ell - \frac{\sqrt{3}}{2}x & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{4}\ell, \frac{1}{2}\ell); \end{cases}$$

zbývající část $(\frac{1}{2}\ell, \ell)$ rozdělíme bodem $[\frac{3}{4}\ell, 0]$ na dvě části a nad jeho levou částí sestrojíme stříšku, která spolu s úsečkou $\langle \frac{1}{2}\ell, \frac{3}{4}\ell\rangle$ tvoří rovnostranný trojúhelník, jehož plošný obsah je roven jedné čtvrtině plošného obsahu rovnostranného trojúhelníka nad úsečkou $\langle 0, \frac{1}{2}\ell\rangle$. Zbývající část $(\frac{3}{4}\ell, \ell)$ opět rozpůlíme a nad jeho levou částí sestrojíme rovnostranný trojúhelník, atd. // Tímto spočetně nekonečným procesem vyvoříme "pilovitou" funkci $u(x)$, pro kterou platí

$$\int_0^\ell (u'(x))^2 \, dx = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3,$$

takže $u \in H_0^1(0, \ell)$.

c) Když nad stejným dělením zleva uzavřeného intervalu $\langle 0, \ell)$ sestrojíme "pilu", jejíž zuby mají stejnou výšku, pak $\int_0^\ell (u'(x))^2 \, dx = +\infty$, takže $u \notin H^1(0, \ell)$.

11.7.34. Příklad. Uvažujme funkci

$$u(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle 0, 1\rangle.$$

Jejím grafem je pravá dolní čtvrtina kružnice s poloměrem $r = 1$ a středem v bodě $[0, 1]$. Dokážeme, že $u \notin H^1(0, 1)$. Přesvědčíme se o tom přímým výpočtem integrálu $\int_0^1 (u'(x))^2 \, dx$: Je $u'(x) = x/\sqrt{1 - x^2}$, takže

$$\int_0^1 (u'(x))^2 \, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1 - x^2} \, dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{1}{2(1 - x)} + \frac{1}{2(1 + x)} \right) dx = +\infty.$$

Tedy $u \notin H^1(0, 1)$. // Avšak funkce u je jak absolutně, tak stejnoměrně spojitá na $\langle 0, \ell\rangle \equiv \langle 0, 1\rangle$. Abychom to dokázali, zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a definujme x_ε vztahem $\varepsilon = \ell - (\ell - \sqrt{\ell^2 - x_\varepsilon^2}) = \sqrt{\ell^2 - x_\varepsilon^2}$. Potom $x_\varepsilon = \sqrt{\ell^2 - \varepsilon^2}$ a my můžeme definovat $\delta = \delta(\varepsilon) = \ell - x_\varepsilon = \ell - \sqrt{\ell^2 - \varepsilon^2}$, což vyhovuje jak definici absolutní spojitosti, tak definici stejnoměrné spojitosti. // Tento příklad a příklad uvedený v Poznámce 11.7.32(d) ukazují, že absolutně spojité funkce, jejichž grafy mají body vratu, nepatří do $H^1(0, \ell)$. (Derivace $u'(x)$ je v těchto bodech nekonečná.) $\square$

Následující tvrzení je okamžitým důsledkem nerovnosti (11.99) ze Sobolevovy věty o vnoření; vzhledem k jeho důležitosti jej však formuluji v samostatné větě:

11.7.35. Věta (o stopách v $\mathbb{R}^1$). *Nechť $u \in H^1(I)$, kde $I = (a, b)$ je konečný interval. Potom pro každé $\xi \in \langle a, b\rangle$ platí:*

$$|u(\xi)| \leq \|u\|_{C^0[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |u(x)| \leq C\|u\|_{1,I}. \tag{11.104}$$

Tato nerovnost má zejména význam v krajních bodech intervalu I:

$$|u(a)| \leq C\|u\|_{1,I}, \quad |u(b)| \leq C\|u\|_{1,I}. \tag{11.105}$$

Součtem obou nerovností (11.107) *dostáváme "úplnou" větu o stopách:*

$$|u(a)| + |u(b)| \leq 2C\|u\|_{1,I}. \tag{11.106}$$

Tato $\mathbb{R}^1$-analogie věty o stopách z $\mathbb{R}^N$, která má tvar $\|\mathfrak{T}u\|_{L_2(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ ($\Gamma \subset \partial\Omega$, $\mathrm{meas}_{N-1}\Gamma > 0$, $N \geq 2$), je pouze speciálním případem nerovnosti ze Sobolevovy věty o vnoření, kdežto v $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) je věta o stopách samostatnou větou, protože Sobolevova věta o vnoření platí v $\mathbb{R}^N$ až pro funkce $u \in H^k(\Omega)$, kde $k \geq 2$ (viz 11.7.37).

V 11.7.34 – 11.7.36h nyní gvedu nejdůležitější výsledky (1) o monotónních funkcích, (2) o funkcích s konečnou variací a (3) o absolutně spojitých funkcích, které jsem převzal z [Na, kap. VIII, §2 a §3 a kap. IX, §2]. Tyto výsledky pomohou čtenáři lépe porozumnět Větě 11.7.36h.

11.7.34. Věta (Lebesgue). *Je-li $f(x)$ monotónní funkce,*[16] *která je zadaná na segmentu $\langle a, b\rangle$, potom téměř ve všech bodech $x \in \langle a, b\rangle$ má konečnou (klasickou) derivaci $f'(x)$. Tato derivace je měřitelná na $\langle a, b\rangle$, přičemž*

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leq f(b) - f(a),$$

takže $f'(x)$ je lebesgueovsky integrovatelná.[17]

11.7.36b. Definice. Nechť na segmentu $\langle a, b\rangle$ je dána konečná funkce $f(x)$. Rozdělme $\langle a, b\rangle$ na části body

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a sestavme součet

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

Supremum všech možných součtů V nazýváme *totální variací funkce $f(x)$ na segmentu $\langle a, b\rangle$* a značíme $\mathbf{V}_a^b(f)$. Pokud

$$\mathbf{V}_a^b(f) < +\infty,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ *má na $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci.*

11.7.36c. Věta. *Monotónní funkce je funkcí s konečnou variací.*

11.7.36d. Věta. *Součet, rozdíl a součin dvou funkcí s konečnou variací je funkce s konečnou variací. (Toto tvrzení platí také pro podíl f/g, je-li $g \neq 0$).*

11.7.36e. Věta. *Aby funkce $f(x)$ byla funkcí s konečnou variací, je nutné a stačí, aby se dala vyjádřit ve tvaru rozdílu dvou neklesajících funkcí. (Buď $f_1 - f_2$, nebo $f_2 - f_1$.)*

Z této věty a z Lebesgueovy věty 11.7.34 plynou dva důsledky:

[16] Je vhodné si všimnout, že není vysloven předpoklad o spojitosti funkce $f(x)$.

[17] Kdyby derivaci $f'(x)$ neexistovala téměř všude, nebyla by lebesgueovsky integrovatelná.

11.7.36f. Důsledek. *Má-li funkce $f(x)$ konečnou variaci na $\langle a, b\rangle$, potom v téměř každém bodě $x \in \langle a, b\rangle$ existuje konečná (klasická) derivace $f'(x)$, která je lebesgueovsky integrovatelnou funkcí.*

11.7.36g. Důsledek. *Množina bodů nespojitosti funkce s konečnou variací je nanejvýš spočetná. V každém bodě nespojitosti x_i existují obě limity*

$$f(x_i + 0) = \lim_{x \to x_i} f(x) \;\; (x > x_i), \quad f(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i} f(x) \;\; (x < x_i). \tag{11.107}$$

11.7.36h. Věta. *Absolutně spojitá funkce $f(x)$ zadaná na $\langle a, b\rangle$ má na $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci, takže má v téměř všech bodech $x \in \langle a, b\rangle$ konečnou (klasickou) derivaci $f'(x)$, která je na $\langle a, b\rangle$ lebesgueovsky integrovatelnou funkcí.*

Důkaz. Najděme takové $\delta > 0$, že pro každou soustavu disjunktních intervalů $\{(a_k, b_k)\}$, které splňují $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, bude

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < 1.$$

Vzhledem k tomu, že $f(x)$ je absolutně spojitá, lze takové $\delta > 0$ najít. Rozdělme $\langle a, b\rangle$ body

$$c_0 = a < c_1 < c_2 < \cdots < c_N = b$$

na části, které splňují

$$c_{k+1} - c_k < \delta \quad (k = 0, 1, \ldots, N - 1);$$

zde N závisí na $\delta > 0$. Potom při každém rozkladu segmentu $\langle c_k, c_{k+1}\rangle$ na takové části, že součet absolutních přírůstků na těchto částech je menší než jedna, bude

$$\mathbf{V}_{c_k}^{c_{k+1}}(f) \leq 1,$$

takže

$$\mathbf{V}_a^b(f) \leq N$$

čili $f(x)$ má na $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci. Zbytek tvrzení věty plyne z předchozích částí **a**–**h**. $\square$

Ještě zůstanu u absolutně spojitých funkcí a připojím další věty opět z [Na]; tentokrát z [Na, kap IX, §4] o neurčitém Lebesguově integrálu, který je dán vztahem

$$\Phi(x) = C + \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t, \tag{11.108}$$

kde $C \in \mathbb{R}^1$ je libovolná konstanta a $f(x)$ lebesgueovsky integrovatelná funkce. Z [Na, kap IX, §4] vybírám první dvě věty a čtvrtou:

11.7.36i. Věta. *Neurčitý Lebesgueův integrál $\Phi(x)$ je absolutně spojitou funkcí.*

11.7.36j. Věta. *Derivace neurčitého integrálu* (11.108) *je téměř všude rovna integrandu $f(x)$, tj. $\Phi'(x) = f(x)$ čili*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = f(x).$$

11.7.36k. Věta. *Je-li bod $x \in (a, b)$ bodem spojitosti funkce $f(t)$, potom má funkce $\Phi(x)$ v tomto bodě* (*klasickou*) *derivaci.*

Věta 11.7.36i je pouhým důsledkem věty o absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu (viz Větu $\mathcal{P}$.1 na str. 114), kdežto důkaz Věty 11.7.36j je v [Na] téměř na tři strany.

Vypočtěme nyní *zobecněnou derivaci* funkce (11.108). Z Vět 11.7.36i a 11.7.36h plyne, že funkce $\Phi(x)$ má v téměř všech bodech $x \in \langle a, b \rangle$ konečnou klasickou derivaci $\Phi'(x)$. Nechť derivace $\Phi'(x)$ neexistuje v bodech $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Tedy při našem výpočtu zobecněné derivace funkce $\Phi(x)$ můžeme psát (počítáme zobecněnou derivaci na I):

$$\int_a^b \Phi(x)\varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^{x_1} \Phi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.109}$$

Na intervalech (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots$ má funkce $\Phi(x)$ ve všech bodech klasickou derivaci, takže na těchto intervalech můžeme užít *riemannovskou* integraci per partes (užíváme zde také Větu 11.7.36j, podle které $\Phi'(x) = f(x)$):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \big[\Phi(x)\varphi(x)\big]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.110}$$

Sečteme-li vztahy (11.110) přes všechna i a užijeme-li toho, že $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, dostaneme z (11.109) a (11.110) výsledek

$$\int_a^b \Phi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I)\,. \tag{11.111}$$

Tedy funkce $f(x)$ je zobecněnou derivací svého neurčitého integrálu $\Phi(x)$ daného vztahem (11.108), *která je rovna klasické derivaci.* Je-li funkce $f(x)$ v tomto vztahu spojitá (nebo aspoň po částech spojitá), potom na pravé straně (11.108) je Riemannův integrál (či součet Riemannových integrálů).

Poslední věta o absolutně spojitých funkcích je zobecněním Newton-Leibnizova vzorce

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\ \mathrm{d}t. \tag{11.112}$$

který se používá při integrování spojitě diferencovatelných funkcí v elementární matematické analýze. Tento výsledek, který přebírám z [KF2, str. 378], jsem pro funkce $u \in H^1(I)$ dokázal ve Větě 11.7.30. Věta 11.7.36ℓ však platí v $AC^0(\overline{I}) \supset H^1(I)$:

11.7.36ℓ. Věta (Lebesgue). *Derivace F' absolutně spojité funkce F, definované na intervalu $\langle a, b \rangle$, je lebesgueovsky integrovatelná na tomto intervalu a pro každý bod $x \in \langle a, b \rangle$ platí*

$$\int_a^x F'(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a)\,. \tag{11.113}$$

Věta 11.7.36ℓ vlastně také tvrdí, že mezi všemi funkcemi s konečnou variací právě jen u absolutně spojitých funkcí je derivace v obvyklém smyslu totožná se zobecněnou derivací (či s derivací ve smyslu distribucí).

Věty 11.7.36i a 11.7.36ℓ ukazují, že právě jen absolutně spojité funkce jsou neurčitými Lebesgueovými integrály (s přesností až na integrační konstantu) své derivace.

11.7.37. Poznámka. V případě $N = 2$ a $N = 3$ platí tato Sobolevova věta o vnoření: *Nechť hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω má lipschitzovsky spojitou hranici. Potom (je-li funkce u případně vhodně změněna na množině míry nula) platí $H^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, přičemž $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le C\|u\|_{H^2(\Omega)}$ pro všechny funkce $u \in H^2(\Omega)$.* // Protože tuto větu nebudeme užívat, neobjasňuji pojem lipschitzovsky spojité hranice. Uvádím tuto větu proto, aby byl vidět velký rozdíl mezi $N = 1$ a $N \ge 2$ v případě Sobolevových prostorů.

11.7.38. Příklad (funkce $\ln(r^{-1})$ v $\mathbb{R}^N$, kde $N = 1, 2, 3$). Nechť

$$K_R = \{[x_1, \ldots, x_N] : x_1^2 + \cdots + x_N^2 < R^2,\ \ 0 < R < 1\}.$$

Položme pro stručnost $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$. Platí

$$\ln\frac{1}{r} \in H^1(K_R) \text{ pro } N = 3, \quad \ln\frac{1}{r} \in L_2(K_R) \text{ pro } N = 2. \tag{11.114}$$

Pro $N = 1$ není funkce $\ln(1/r)$ na intervalu K_R vůbec definována. // Ověřme relaci (11.114) v případě $N = 3$. Transformací do sférických souřadnic

$$x_1 = \varrho\cos\varphi\sin\vartheta, \quad x_2 = \varrho\sin\varphi\sin\vartheta, \quad x_3 = \varrho\cos\vartheta,$$

kde $\varrho \in \langle 0, R\rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $\vartheta \in \langle 0, \pi\rangle$, snadno zjistíme, že

$$\Big\|\ln\frac{1}{r}\Big\|_{0,K_R}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R \left\{\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\pi \Big(\ln\frac{1}{\varrho}\Big)^2 \varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right\}\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\varrho\,.$$

Pro $\varrho \in (0, R\rangle$ je $\frac{1}{\varrho} > 1$, takže $(\ln\frac{1}{\varrho})^2 < \frac{1}{\varrho^2}$. Odtud

$$\Big\|\ln\frac{1}{r}\Big\|_{0,K_R}^2 < \int_0^R \left\{\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\pi \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right\}\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\varrho = 4\pi R\,.$$

Dále,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\ln r = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r^2},$$

takže

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big)\right]^2 = \frac{1}{r^2}\,. \tag{11.115}$$

Pro $N = 3$ odtud plyne transformací do sférických souřadnic

$$\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big)\right\|^2_{0,K_R}=\int_0^R\left\{\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right\}\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\varrho=4\pi R\,.$$

Tím jsme ověřili (11.114) pro $N=3$. // Pro $N=2$ z (11.114) plyne transformací do polárních souřadnic

$$\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big)\right\|^2_{0,\mathcal{K}_R}=2\pi\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{d}\varrho\to\infty,$$

takže $\ln\frac{1}{r}\notin H^1(\mathcal{K}_R)$, kde jsme v případě $N=2$ položili $\mathcal{K}_R=K_R$. Dále

$$\left\|\ln\frac{1}{r}\right\|^2_{0,\mathcal{K}_R}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R\left\{\int_0^{2\pi}\Big(\ln\frac{1}{\varrho}\Big)^2\varrho\,\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\varrho=2\pi\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R\varrho(\ln\varrho)^2\,\mathrm{d}\varrho\,.$$

Dvojí integrací per partes snadno zjistíme, že

$$\int\varrho\,(\ln\varrho)^2\,\mathrm{d}\varrho=\frac{1}{2}\Big[(\varrho\ln\varrho)^2-\varrho^2\ln\varrho+\frac{1}{2}\varrho^2\Big]=\frac{1}{2}\Big[\Big(\varrho\ln\frac{1}{\varrho}\Big)^2+\varrho^2\ln\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{2}\varrho^2\Big]\,.$$

Protože

$$\lim_{\varrho\to 0+}\varrho\ln\frac{1}{\varrho}=\lim_{\varrho\to 0+}\frac{\ln\frac{1}{\varrho}}{\frac{1}{\varrho}}=\lim_{\varrho\to 0+}\frac{-\varrho\frac{1}{\varrho^2}}{-\frac{1}{\varrho^2}}=0,$$

dostáváme z předchozího $\ln\frac{1}{r}\in L_2(\mathcal{K}_R)$. Je však $\ln\frac{1}{r}\notin H^1(\mathcal{K}_R)$, protože

$$\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\ln\frac{1}{r}\Big)\right\|^2_{0,\mathcal{K}_R}=2\pi\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^R\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{d}\varrho\to\infty.$$

Různé výsledky $(11.114)_{1,2}$ vysvětluje N-rozměrná věta o stopách: Kruh $\mathcal{K}_R$ můžeme interpretovat jako průnik koule K_R s rovinou $x_3=0$, takže $\ln\frac{1}{r}\in L_2(\mathcal{K}_R)$ je stopa funkce $\ln\frac{1}{r}\in H^1(K_R)$ v rovině $x_3=0$. V tomto případě má věta o stopách obecně tvar $\|\mathfrak{T}u\|_{L_2(\mathcal{K}_R)}\le C\|u\|_{H^1(K_r)}$, kde $\mathfrak{T}u$ je stopa funkce u, tj. $\mathfrak{T}u=u|_{\mathcal{K}_R}$. Vidíme, že naše výsledky jsou v souhlasu s větou o stopách: $\ln\frac{1}{r}\in H^1(K_R)$, $\mathfrak{T}\big(\ln\frac{1}{r}\big)\in L_2(\mathcal{K}_R)$. □

11.8. Ještě Friedrichsova nerovnost v případě N = 1

V podkap. 11.2 jsem uvedl Lemma 11.2.5, které zde opakuji jako Lemma 11.8.1:

11.8.1. Věta (Friedrichsova nerovnost v $H_0^1(0,\ell)$). *Platí*

$$\|u\|_1^2\le C_0\int_0^\ell\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x=C_0|u|_1^2\quad\forall u\in H_0^1(0,\ell),\tag{11.116}$$

kde kladná konstanta C_0 nezávisí na funkci $v\in H_0^1(0,\ell)$.

Toto lemma jsem v podkap. 11.2 dokázal za předpokladu, že u je spojitá funkce se spojitou derivací u'. Tento důkaz nyní rozšířím na případ pilovité funkce z Příkladu 11.7.33b a všechny ostatní funkce z $H_0^1(0,\ell)$ (jsou totiž všechny absolutně spojité). Důkaz je přitom snadný: Uveďme opět vztahy (11.28), (11.29):

$$g(x)=\cos\frac{\pi x}{4\ell},\tag{11.28}$$

$$v=\frac{u}{g},\quad\text{čili } u=gv.\tag{11.29}$$

Následující vztah (11.30) zřejmě platí ve všech bodech, kde existuje derivace naší pilovité funkce $u(x)$ (v těchto bodech také existuje derivace $v'(x)$)

$$(u')^2 = ((gv)')^2 = g^2(v')^2 + 2vv'gg' + v^2(g')^2 = g^2(v')^2 + (v^2gg')' - v^2gg'', \quad (11.30)$$

takže v těchto bodech platí

$$(v^2gg')' - v^2gg'' \leq (u')^2. \quad (11.31)$$

Vztah (11.31) neplatí pouze ve spočetně mnoha bodech, které tvoří vrcholy trojúhelníkových zubů naší pily. Proto můžeme podle věty 11.7.36h integrovat nerovnost (11.31) v mezích od 0 do ℓ. Dostaneme

$$\left[v^2gg'\right]_0^\ell - \int_0^\ell v^2gg''\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\ell (u')^2\,\mathrm{d}x. \quad (11.32)$$

Zbytek důkazu je už stejný jako na str. 63; přesto jej pro účely této podkapitoly zopakujeme: Podle (11.28) je

$$g'' = -\frac{\pi^2}{16\ell^2}g, \quad (11.33)$$

takže

$$v^2gg'' = -\frac{\pi^2}{16\ell^2}v^2g^2 = -\frac{\pi^2}{16\ell^2}u^2. \quad (11.34)$$

Konečně podle (11.2)

$$\left[v^2gg'\right]_0^\ell = \left[v^2g^2\frac{g'}{g}\right]_0^\ell = \left[u^2\frac{g'}{g}\right]_0^\ell = 0. \quad (11.35)$$

Z (11.32), (11.34) a (11.35) plyne

$$\frac{\pi^2}{16\ell^2}\int_0^\ell u^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\ell (u')^2\,\mathrm{d}x. \quad (11.36)$$

Přičteme-li k oběma stranám (11.36) výraz $\frac{\pi^2}{16\ell^2}|u|_1^2$, dostaneme po jednoduché úpravě nerovnost (11.116), kde $C_0 = 1 + 16\ell^2/\pi^2$. $\square$

Tím jsme se vyrovnali s Friedrichsovou nerovností v případě Sobolevova prostoru $H_0^1(0,\ell)$. (Jiný přístup k Friedrichsovým nerovnostem viz v závěru podkap. 11.15.)

11.8.2. Lemma. *Nechť $u \in H^1(I)$, kde $I = (a,b)$ je konečný interval. Když $u(a) = 0$, tak*

$$|u(b)|^2 \leq (b-a)|u|_{1,I}^2\,. \quad (11.117)$$

Když $u(b) = 0$, tak

$$|u(a)|^2 \leq (b-a)|u|_{1,I}^2\,. \quad (11.118)$$

Důkaz. Důkaz vedu v případě $a = 0$ a $b = \ell$, abych mohl v důkazu věty 11.8.3 navázat na text uvedený na předchozí straně. Když $u(0) = 0$, tak podle Věty 11.7.30 (Newton-Leibnizova formule v $H^1(I)$) platí

$$u(\ell) = \int_0^\ell u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Povyšme tento vztah na druhou a užijme Schwarzovu nerovnost:

$$u^2(\ell) = \left(\int_0^\ell u'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_0^\ell 1^2\,\mathrm{d}x \int_0^\ell \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \ell|u|_{1,I}^2.$$

Tím jsme dostali vztah (11.117). Když $u(\ell) = 0$, tak podle Věty 11.7.30 platí

$$-u(0) = \int_0^\ell u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Povýšením na druhou dostaneme nyní pomocí Schwarzovy nerovnosti (11.118). □

11.8.3. Věta (Friedrichsova nerovnost). *Nechť $u \in H^1(I)$, kde $I = (a, b)$ je konečný interval. Když v jednom z krajních bodů je funkce u rovna nule, potom*

$$\|u\|_{1,I}^2 \leq C|u|_{1,I}^2\,. \tag{11.119}$$

Důkaz. **(a)** Nechť $u(0) = 0$ (kde $a = 0$). Navážeme na text z předchozí strany, který končí vztahem (11.34). Protože $\frac{g'}{g} = -\frac{\pi}{4\ell}\tan\frac{\pi x}{4\ell}$, místo (11.35) nyní máme

$$\left[u^2\frac{g'}{g}\right]_0^\ell = -\frac{\pi}{4\ell}u^2(\ell)\,. \tag{11.35*}$$

Z (11.32), (11.34) a (11.35*) plyne

$$\frac{\pi^2}{16\ell^2}\int_0^\ell u^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\ell (u')^2\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4\ell}u^2(\ell)\,. \tag{11.36*}$$

Užitím první části Lemmatu 11.8.2 nyní z (11.36*) dostaneme

$$\tfrac{\pi^2}{16\ell^2}\|u\|_{0,I}^2 \leq (1 + \tfrac{\pi}{4})|u|_{1,I}^2\,.$$

Přičteme-li k oběma stranám této nerovnosti výraz $\frac{\pi^2}{16\ell^2}|u|_1^2$, dostaneme (11.119).

(b) Nechť nyní $u(\ell) = 0$ (kde $b = \ell$). Potom místo funkce (11.28) uvažujeme funkci

$$g(x) = \cos\frac{\pi(x-\ell)}{4\ell}, \tag{11.28*}$$

Všechny vztahy až do (11.34) včetně zůstávají beze změny. Místo (11.35) (resp. (11.35*)) dostaneme

$$\left[u^2\frac{g'}{g}\right]_0^\ell = -\frac{\pi}{4\ell}u^2(0)\,. \tag{11.35**}$$

Z (11.32), (11.34) a (11.35**) plyne

$$\frac{\pi^2}{16\ell^2}\int_0^\ell u^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\ell (u')^2\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4\ell}u^2(0)\,. \tag{11.36**}$$

Užitím druhé části Lemmatu 11.8.2 nyní opět snadno dostaneme (11.119). □

11.8.4. Poznámka. Vraťme se k důkazu Lemmatu 11.8.2: Nechť $0 \le \xi \le \ell$ a nechť $u \in H^1(0,\ell)$, přičemž $u(a) = 0$. Potom podle Věty 11.7.30 platí

$$u(\xi) = \int_0^\xi u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Povyšme tento vztah na druhou a užijme Schwarzovu nerovnost:

$$u^2(\xi) = \left(\int_0^\xi u'(x)\ \mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^\ell 1^2\ \mathrm{d}x \int_0^\ell \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \ell |u|_{1,I}^2.$$

Tím jsme dostali speciální případ Sobolevovy věty o vnoření v podprostoru $V_{M1} = \{u \in H^1(0,\ell) : u(0) = 0\}$ prostoru $H^1(0,\ell)$:

$$|u(\xi)| \le \sqrt{\ell}|u|_{1,I} \quad \forall \xi \in \langle 0, \ell\rangle.$$

Tentýž speciální případ platí v podprostoru $V_{M2} = \{u \in H^1(0,\ell) : u(\ell) = 0\}$.

11.9. Ještě k zobecněnému principu virtuální práce

Uvažujme okrajový problém ODR2, který je zobecněním problému (11.1), (11.2):

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)u = f(x) \quad \forall x \in (0,\ell), \tag{11.120}$$

$$u(0) = u(\ell) = 0\,. \tag{11.121}$$

Předpokládáme, že $q \in C^0\langle 0,\ell\rangle$ a $q(x) \ge 0\ \forall x \in \langle 0,\ell\rangle$. Stejným způsobem jako jsme získali vztah (11.5) dostaneme

$$\int_0^\ell p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x + \int_0^\ell q(x)uv\ \mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(0,\ell). \tag{11.122}$$

Funkci $u \in H_0^1(0,\ell)$, která splňuje vztah (11.122), opět nazýváme *slabým řešením* okrajového problému (11.120), (11.121).

Vztah (11.122) budeme nazývat jako vztah (11.5) *zobecněným* (*nebo abstraktním*) *principem virtuální práce.* Na začátku kap. 11 jsem slíbil, že podrobnosti o tomto principu uvedu v podkap. 11.9, tj. zde.

Nejprve uvedeme ODR typu (11.120) pro zavěšený pružný drát, jehož průřez má plochu S. Na element drátu délky Δx působí podle principu akce-reakce dvě síly $-F(x)$ a $F(x+\Delta x)$; první na horní řez o souřadnici x, druhá na dolní řez o souřadnici $x + \Delta x$ (oba tyto řezy jsou základnami našeho elementu). Na element působí dále jeho tíha $f(x)\Delta x$ a distribuovaná pružná síla $T_{pr} = -q(x)u(x)$ [Nm^{-1}]. Součet všech sil, které působí na element, je roven nule:

$$-F(x) + F(x+\Delta x) - q(x)u\Delta x + f(x)\Delta x = 0. \tag{11.123}$$

Předpokládáme-li, že $F(x)$ je diferencovatelná funkce, platí

$$F(x+\Delta x) = F(x) + \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\Delta x + O(\Delta x^2). \tag{11.124}$$

Dosaďme (11.124) do (11.123) a výsledek podělme Δx. Dostaneme

$$-\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} + q(x)u(x) = f(x). \tag{11.125}$$

Předpokládáme, že napětí σ je rovnoměrně rozloženo na kolmém řezu drátu S. Potom $\sigma = F/S$. Podle Hookova zákona platí $\sigma = E\varepsilon$, kde E je modul pružnosti drátu v tahu a $\varepsilon = \mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x$ je deformace drátu. Tedy

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(S\sigma)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ES\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right).$$

Dosazením tohoto výrazu do (11.125) dostáváme tuto ODR2 pro funkci $u(x)$:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ES\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + qu = f\,. \tag{11.126}$$

Srovnáním s rovnicí (11.120) dostáváme tento fyzikální význam funkce p: $p(x) = ES$. Rovnice (11.122) bude pak mít tvar

$$\int_0^\ell \left(ES\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + q(x)uv\right)\mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in Y, \tag{11.127}$$

kde Y je prostor testovacích funkcí, který v případě okrajových podmínek (11.121) má tvar $Y = H_0^1(0,\ell)$. V případě těchto okrajových podmínek hledáme řešení u také v $H_0^1(0,\ell)$.

Proberme ostatní případy okrajových podmínek. **(1)** Případ

$$u(0) = a, \quad u(\ell) = b, \tag{11.128a}$$

kde alespoň jedno z čísel a, b je různé od nuly. Zde opět $Y = H_0^1(0,\ell)$ a řešení u hledáme ve varietě

$$W = \{w \in H^1(0,\ell) : w(0) = a,\, w(\ell) = b\}. \tag{11.128b}$$

Okrajové podmínky (11.121), resp. (11.128a) nazýváme *hlavními okrajovými podmínkami* (anglicky obvykle *essential boundary conditions*).

(2a) Případ, kdy je pouze v jednom krajním bodě ($x = 0$ nebo $x = \ell$) předepsána hlavní okrajová podmínka. Nechť pro určitost $u(0) = a$, kde $a \in \mathbb{R}^1$ (tj. a může být různé od nuly, nebo rovno nule). Nechť v bodě $x = \ell$ je předepsána síla $F_\ell = ESu'(\ell)$, která jako vektor leží na ose x. Potom rovnice vyjadřující princip virtuální práce má tvar

$$\int_0^\ell \left(ES\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + q(x)uv\right)\mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)v(x)\,\mathrm{d}x + F_\ell v(\ell) \quad \forall v \in Y, \tag{11.129a}$$

kde prostor testovacích funkcí je tvaru

$$Y = \{v \in H^1(0,\ell) : v(0) = 0\} \tag{11.129b}$$

a řešení u hledáme ve varietě

$$W = \{w \in H^1(0,\ell) : w(0) = a\}. \tag{11.129c}$$

Poznámka: Odvodíme vztah (11.129a). Vynásobíme rovnici (11.126) testovací funkcí $v \in Y$ a první člen na levé straně získaného vztahu integrujeme per partes:

$$-\int_0^\ell (ESu')v \,\mathrm{d}x = -\big[ESu'v\big]_0^\ell + \int_0^\ell ESu'v' \,\mathrm{d}x.$$

Protože $ESu'(\ell) = F_\ell$ a $v(0) = 0$, dostáváme odtud vztah (11.129a).

(2b) Nechť je nyní hlavní okrajová podmínka předepsána v bodě $x = \ell$, tj. $u(\ell) = b$, kde $b \in \mathbb{R}^1$. Nechť v bodě $x = 0$ je předepsána síla $F_0 = ESu'(0)$, která jako vektor leží na ose x. Potom rovnice vyjadřující princip virtuální práce má tvar

$$\int_0^\ell \left(ES\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + q(x)uv \right) \mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)v(x) \,\mathrm{d}x - F_0 v(0) \quad \forall v \in Y, \tag{11.130a}$$

kde prostor testovacích funkcí je tvaru

$$Y = \{v \in H^1(0,\ell) : v(\ell) = 0\} \tag{11.130b}$$

a řešení u hledáme ve varietě

$$W = \{w \in H^1(0,\ell) : w(\ell) = b\}. \tag{11.130c}$$

(3) Nechť není předepsána žádná hlavní okrajová podmínka. Nechť v bodě $x = 0$, resp. $x = \ell$ je předepsána síla F_0, resp. F_ℓ; obě síly jako vektory leží na ose x. Nechť konečně funkce $q(x)$ není identicky rovna nule. (Protože funkce $q(x)$ je spojitá, existuje bod $x_q \in (0,\ell)$, v jehož okolí je $q(x) > 0$.) Potom rovnice vyjadřující princip virtuální práce má tvar

$$\int_0^\ell \left(ES\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + q(x)uv \right) \mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)v(x) \,\mathrm{d}x - F_0 v(0) + F_\ell v(\ell) \quad \forall v \in Y, \tag{11.131a}$$

kde prostor testovacích funkcí je tvaru

$$Y = H^1(0,\ell), \tag{11.131b}$$

a řešení u hledáme ve stejném prostoru

$$W = Y = H^1(0,\ell). \tag{11.131c}$$

Poznámka: Vztahy, kterými jsou v krajních bodech předepsány síly F_0 a F_ℓ, tj. vztahy

$$ESu'(0) = F_0, \quad ESu'(\ell) = F_\ell,$$

se nazývají *přirozené okrajové podmínky* (natural boundary conditions). Pokud je síla předepsána pouze v jednom krajním bodě, hovoříme o přirozené okrajové podmínce předepsané v tomto bodě, protože hodnota řešení u se v tomto bodě "nastaví" přirozeným způsobem.

(4) Nechť jsou v obou krajních bodech $x = 0$ a $x = \ell$ opět předepsány přirozené okrajové podmínky $ESu'(0) = F_0$ a $ESu'(\ell) = F_\ell$ a nechť navíc $q(x) \equiv 0$. Potom rovnice vyjadřující princip virtuální práce má tvar

$$\int_0^\ell ES \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x)v(x)\, \mathrm{d}x - F_0 v(0) + F_\ell v(\ell) \quad \forall v \in Y, \tag{11.132a}$$

kde opět $Y = H^1(0, \ell)$. V tomto případě musí zadané síly splňovat tuto rovnici rovnováhy

$$F_\ell - F_0 + \int_0^\ell f(x)\, \mathrm{d}x = 0, \tag{11.132b}$$

která plyne z (11.132a), protože $v = K = \mathrm{const}$ náleží do $H^1(0, \ell)$. V tomto případě řešení $u \in H^1(0, \ell)$ je určeno až na libovolnou konstantu, která vyjadřuje *posunutí tuhého tělesa jako celku*.

11.10. Neumannovy okrajové podmínky

V předchozí podkapitole jsme si všimli Neumannových okrajových podmínek, kterým se někdy říká *silové*, protože reprezentují působící síly; častěji se však o nich mluví jako o *přirozených* (resp. *nestabilních*) okrajových podmínkách. Nyní tyto podmínky zanalyzujeme důkladně. // Uvažujme obecnou ODR 2. řádu

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)u = f(x) \quad \forall x \in (0, \ell), \tag{11.133}$$

na uzavřeném intervalu $\langle 0, \ell \rangle$, kde $\ell < +\infty$. (Daný interval neznačíme $\langle a, b \rangle$, protože symboly a, b využijeme jinak.) O funkcích $p(x)$, $q(x)$ předpokládáme

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq q_0 > 0 \quad \forall x \in \langle 0, \ell \rangle. \tag{11.134}$$

přičemž $p \in C^1\langle 0, \ell \rangle$ a $q \in C^0\langle 0, \ell \rangle$. Dále předpokládáme, že $f \in L_2(0, \ell)$. Předepišme nehomogenní Neumannovy okrajové podmínky tvaru

$$p(0)u'(0) = F_0, \quad p(\ell)u'(\ell) = F_\ell, \tag{11.135}$$

kde F_0 a F_ℓ jsou daná reálná čísla. Z předpokladů (11.134) plyne, že symetrická bilineární forma

$$a(w, v) = \int_0^\ell \big(p(x)w'(x)v'(x) + q(x)w(x)v(x)\big)\, \mathrm{d}x \tag{11.136}$$

je jak $H^1(0, \ell)$-eliptická, tak V-eliptická, kde jako obvykle značíme

$$V := H_0^1(0, \ell).$$

Dokáže se to snadno:

$$a(w, w) \geq p_0 \|w'\|_0^2 + q_0 \|w\|_0^2 \geq \min\{p_0, q_0\} \|w\|_1^2.$$

Dále: lineární forma

$$L(v) := \int_0^\ell v(x)f(x)\ \mathrm{d}x - F_0 v(0) + F_\ell v(\ell) \tag{11.137}$$

je ohraničená na $H^1(0,\ell)$, protože

$$|L(v)| = \left| \int_0^\ell v(x)f(x)\ \mathrm{d}x - F_0 v(0) + F_\ell v(\ell) \right| \le$$

$$\le \|f\|_0\|v\|_0 + (|F_0| + |F_\ell|) \max_{x\in<0,\ell>} |v(x)| \le \|f\|_0\|v\|_1 + (|F_0| + |F_\ell|)\|v\|_1;$$

poslední odhad plyne z Věty 11.7.29 (což je Sobolevova věta o vnoření prostoru $H^1(0,\ell)$ do prostoru spojitých funkcí $C^0\langle 0,\ell\rangle$):

$$\max_{x\in<0,\ell>} |v(x)| \equiv \|v\|_{C^0<0,\ell>} \le C\|v\|_1.$$

Po těchto přípravných úvahách zvolme prostor testovacích funkcí

$$M_N = H^1(0,\ell), \tag{11.138}$$

násobme rovnici (11.133) libovolnou funkcí $v \in M_N$ a výsledek integrujme přes interval $\langle 0,\ell\rangle$:

$$\int_0^\ell \big\{ -\big(p(x)u'(x)\big)'v(x) + q(x)u(x)v(x)\big\}\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell v(x)f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{11.139}$$

První člen na levé straně (11.139) integrujme per partes a potom užijme zadané Neumannovy okrajové podmínky (11.135):

$$-\int_0^\ell \big(p(x)u'(x)\big)'v(x)\ \mathrm{d}x = -\big[p(x)u'(x)v(x)\big]_0^\ell + \int_0^\ell p(x)u'(x)v'(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= -F_\ell v(\ell) + F_0 v(0) + \int_0^\ell p(x)u'(x)v'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Dosadíme-li tento výsledek do (11.139) a užijeme-li (11.136) a (11.137), dostaneme slabou formulaci okrajového problému (11.133), (11.135) ve standardním tvaru: *Najít $u \in M_N \equiv H^1(0,\ell)$ tak, aby platilo*

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in M_N, \tag{11.140}$$

kde formy $a(u,v)$ a $L(v)$ jsou dány vztahy (11.136) a (11.137). Již víme, že symetrické bilineární forma $a(w,v)$ je v důsledku (11.134) $H^1(0,\ell)$-eliptická a že lineární forma $L(v)$ je ohraničená na $H^1(0,\ell)$. Pro naše účely zbývá dokázat, že bilineární forma $a(w,v)$ je ohraničená na $H^1(0,\ell)\times H^1(0,\ell)$. To není obtížné:

$$|a(w,v)| \le \left|\int_0^\ell pw'v'\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_0^\ell qwv\ \mathrm{d}x\right| \le$$

$$\le \|p\|_{C^0<0,\ell>}\|w'\|_0\|v'\|_0 + \|q\|_{C^0<0,\ell>}\|w\|_0\|v\|_0 \le$$

$$\le \max\big\{\|p\|_{C^0<0,\ell>}, \|q\|_{C^0<0,\ell>}\big\}\|w\|_1\|v\|_1.$$

Jsou tedy splněny všechny předpoklady následující věty, která je obdobou Věty 11.2.4:

11.10.1. Věta (o existenci a jednoznačnosti řešení slabé formulace s Neumannovými okrajovými podmínkami). *Je-li bilineární forma $a(z,v)$ ohraniěená na $H^1(0,\ell)\times H^1(0,\ell)$, tj.*

$$|a(z,v)| \le M\|z\|_1\|v\|_1 \quad \forall z,v\in H^1(0,\ell) \quad (M = const), \tag{11.141}$$

kde

$$\|v\|_1 = \sqrt{\int_0^\ell \left\{v^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\right\}\mathrm{d}x}, \tag{11.142}$$

a $H^1(0,\ell)$-eliptická, tj.

$$a(v,v) \ge \beta\|v\|_1^2 \quad \forall v\in H^1(0,\ell) \quad (\beta = const > 0), \tag{11.143}$$

a je-li lineární forma $L(v)$ ohraničená na $H^1(0,\ell)$, tj.

$$|L(v)| \le K\|v\|_1 \quad \forall v\in H^1(0,\ell) \quad (K = const), \tag{11.144}$$

potom existuje právě jedna funkce $u\in H^1(0,\ell)$, která splňuje vztah (11.140).

Důkaz. Stejně jako v případě věty 11.2.4 je tvrzení věty 11.10.1 okamžitým důsledkem Lax-Milgramovy věty (viz 11.2.1), ve které stačí nyní položit

$$H = H^1(0,\ell), \quad B(z,v) = a(z,v), \quad F(v) = L(v).$$

Pro lepší orientaci tento samozřejmý důkaz proveďme.

a) *Existence.* Z předpokladů (11.141), (11.143) plyne, že jsou splněny předpoklady (11.15), (11.16) Lax-Milgramovy věty, ve kterých klademe[18]

$$B(z,v) = a(z,v), \quad \|v\| = \|v\|_1.$$

V Lax-Milgramově větě dále položíme

$$F(v) = L(v) \quad \forall v\in H^1(0,\ell). \tag{11.145}$$

Podle (11.144) je funkcionál $F(v)$ ohraničený, takže jsou splněny všechny předpoklady Lax-Milgramovy věty. Podle této věty existuje právě jedna funkce $w\in H^1(0,\ell)$ tak, že platí

$$F(v) = a(w,v) \quad \forall \in H^1(0,\ell). \tag{11.146}$$

Když položíme $u := w$, plyne z (11.145) a (11.146)

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v\in H^1(0,\ell),$$

což je vztah (11.140), protože $M_N = H^1(0,\ell)$. Existence slabého řešení je dokázána.

b) *Jednoznačnost* slabého řešení plyne opět z Lax-Milgramovy věty, ve které vystupuje jednoznačně určený prvek $w\in H\equiv H^1(0,\ell)$. Ten v případě Neumannových okrajových podmínek je slabým řešením, tj. můžeme položit $u = w$. $\square$

---

[18] Skalární součin (z,v), který vystupuje v Lax-Milgramově větě, má zde tvar $(z,v) = \int_0^\ell \left(zv + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$, takže pro normu $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$ platí vztah (11.142).

11.10.2. Poznámka. Je třeba zdůraznit (což jsem v podkapitole 11.3 neučinil), že jsme pomocí Lax-Milgramovy věty nejen dokázali existenci a jednoznačnost řešení slabé formulace; my jsme pomocí Lax-Milgramovy věty slabou formulaci přímo zkonstruovali (nezávisle na okrajovém problému (11.133) – (11.135)). Takto zkonstruovaná slabá formuluce je zcela nezávislý matematický objekt.

Protože jsme dokázali Větu 11.10.1 o existenci a jednoznačnosti řešení slabé formulace, můžemem nyní aplikovat větu o minimu kvadratického funkcionálu (viz 11.3.1), kterou pro účely této podkapitoly přeformulujeme:

11.10.3. Věta (o minimu kvadratického funkcionálu). *Nechť bilineární forma $a(v, w)$, která vystupuje ve slabé formulaci* (11.140) *je $H^1(0, \ell)$-eliptická, tj. platí*

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H^1(0, \ell) \quad (\beta = const). \tag{11.147}$$

Potom funkce $u \in H^1(0, \ell)$ je jediným řešením slabé formulace (11.140)*, když a jen když ostře minimalizuje funkcionál*

$$\Pi(v) = \tfrac{1}{2} a(v, v) - L(v) \tag{11.148}$$

na prostoru $M_N = H^1(0, \ell)$, tj.

$$\Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in H^1(0, \ell), \tag{11.149}$$

kde znamení rovnosti platí pouze pro $v = u$.

Důkaz. Důkaz je nepatrnou obměnou důkazu věty 11.3.1, který je na str. 65: Místo variety $\omega + V$ uvažujeme prostor $M_N = H^1(0, \ell)$, který vyjádříme ve tvaru

$$M_N = \left\{ v \in H^1(0, \ell) : \ v = u + \lambda w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^1, \quad \forall w \in H^1(0, \ell) \right\},$$

kde u je řešení slabé formulace (11.140). Nyní se může celý důkaz věty 11.3.1 zopakovat; místo V-eliptičnosti bilineární formy $a(w, v)$ užíváme její $H^1(0, \ell)$-eliptičnost. $\square$

Podle Věty 11.10.3 a vztahů (11.136), (11.137) budeme řešit tento variační problém: Najít funkci $u \in M_N$, která na M_N minimalizuje kvadratický funkcionál

$$\begin{aligned} \Pi(v) = \tfrac{1}{2} \int_0^\ell & \left\{ p(x)(v'(x))^2 + q(x)(v(x))^2 \right\} \mathrm{d}x - \\ - \int_0^\ell & v(x) f(x) \, \mathrm{d}x + F_0 v(0) - F_\ell v(\ell). \end{aligned} \tag{11.150}$$

Při přibližném řešení užijeme metodu konečných prvků. // Zopakujme, co je MKP v $\mathbb{R}^1$: Říkáme, že je dán konečný prvek, pokud definujeme tyto tři skutečnosti:

(1) uzavřený interval $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ $(-\infty < x_i < x_{i+1} < +\infty)$;

(2) typ funkce (obvykle polynom stupně s); tato funkce je omezena na interval $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$;

(3) parametry (tj. hodnoty, které jednoznačně určují daný typ funkce); je-li to polynom stupně s, potom je dáno $s + 1$ hodnot, které jednoznačně určují tento polynom. Protože chceme, aby definovaný konečný prvek byl alespoň C^0-element, tj. generoval napojením konečných prvků na sebe koncovými body (jako

$$\cdots \cup \langle x_i, x_{i+1} \rangle \cup \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle \cup \dots)$$

spojitou funkci na $\langle x_0, x_{n+1}\rangle$, jejímž grafem je "pila s nepravidelnými zuby", musí být předepsány v koncových bodech každého intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ funkční hodnoty $w(x_i)$ a $w(x_{i+1})$. Protože parametry jsou libovolná reálná čísla, je konečný prvek vektorovým prostorem; v tomto případě $(s+1)$-rozměrným. Nejjednodušší C^0-konečný prvek je polynomem 1. stupně, který je jednoznačně určen funkčními hodnotami $w(x_i)$ a $w(x_{i+1})$ v koncových bodech intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$. Budeme užívat pouze tento konečný prvek.[19]

Protože jde o základní popis MKP, rozdělme interval $\langle 0, \ell\rangle$ na $n+1$ stejných dílků body $x_1, \ldots, x_n \in (0, \ell)$, takže dostaneme $n+2$ uzlových bodů

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = \ell. \tag{11.151}$$

Nechť $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ jsou spojité a po úsečkách $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ lineární bázové funkce s vlastnostmi

$$u_i(x_i) = 1, \quad u_i(x_j) = 0 \quad (i \neq j,\ i = 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, n+1). \tag{11.152}$$

Každá z bázových funkcí $u_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ je kladná v otevřeném intervalu (x_{i-1}, x_{i+1}); grafem této funkce nad $\langle x_{i-1}, x_{i+1}\rangle$ jsou dvě úsečky; první má koncové body $[x_{i-1}, 0]$, $[x_i, 1]$, druhá koncové body $[x_i, 1]$, $[x_{i+1}, 0]$, takže platí pro $i = 1, \ldots, n$

$$u_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_0 \le x \le x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{pro } x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{pro } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0 & \text{pro } x_{i+1} \le x \le x_{n+1}. \end{cases} \tag{11.153}$$

Konečně definujeme ještě dvě bázové funkce $u_0(x)$ a $u_{n+1}(x)$, které jsou opět spojité a po úsečkách $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ lineární, přičemž platí

$$\begin{gathered} u_0(x_0) = 1,\ u_0(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1); \\ u_{n+1}(x_{n+1}) = 1,\ u_{n+1}(x_j) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, n). \end{gathered} \tag{11.154}$$

To znamená, že

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{pro } x_0 \le x \le x_1, \\ 0 & \text{pro } x_1 \le x \le x_{n+1}, \end{cases} \tag{11.155}$$

$$u_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_0 \le x \le x_n, \\ \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} & \text{pro } x_n \le x \le x_{n+1}. \end{cases} \tag{11.156}$$

Řešme nyní přibližně variační problém kvadratického funkcionálu (11.150) pomocí MKP tím, že minimalizujeme tento funkcionál na $(n+2)$-rozměrném prostoru

$$\widehat{M}_N = \left\{ w(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i u_i(x),\ \ c_i \in \mathbb{R}^1 \ (i = 0, 1, \ldots, n+1) \right\}. \tag{11.157}$$

---

[19] Zajímavý je C^1-prvek definovaný pomocí polynomu 3. stupně, který je jednoznačně určen parametry $w(x_i), w'(x_i), w(x_{i+1}), w'(x_{i+1})$.

Dosaďme $w \in \widehat{M}_N$ do (11.150); dostaneme

$$\Pi(w) = \tfrac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ p\Big(\sum_{i=0}^{n+1} c_i u_i'\Big)^2 + q\Big(\sum_{i=0}^{n+1} c_i u_i\Big)^2 \right\} \mathrm{d}x -$$
$$- \int_0^\ell \Big(\sum_{i=0}^{n+1} c_i u_i\Big) f \ \mathrm{d}x - F_\ell \sum_{i=0}^{n+1} c_i u_i(x_{n+1}) + F_0 \sum_{i=0}^{n+1} c_i u_i(x_0). \qquad (11.158)$$

Přitom je

$$F_0 \sum_{i=0}^{n+1} c_i u_i(x_0) = c_0 F_0, \quad F_\ell \sum_{i=0}^{n+1} c_i u_i(x_{n+1}) = c_{n+1} F_\ell. \qquad (11.159)$$

Abychom našli hodnoty parametrů $\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n, \widehat{c}_{n+1}$, při kterých nabývá funkcionál (11.158) minima, vyjdeme z nutné podmínky extrému

$$\frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_i}(\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n, \widehat{c}_{n+1}) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n, n+1), \qquad (11.160)$$

která vede na soustavu $n+2$ lineárních algebraických rovnic. V případě $i = 1, \ldots, n$ platí

$$\frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_i} = \int_0^\ell \left(u_i' p \sum_{j=0}^{n+1} c_j u_j' + u_i q \sum_{j=0}^{n+1} c_j u_j \right) \mathrm{d}x - \int_0^\ell u_i f \ \mathrm{d}x \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (11.161)$$

Kromě toho ze vztahů (11.157), (11.158) plyne

$$\frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_0} = \int_0^\ell \left(u_0' p \sum_{j=0}^{n+1} c_j u_j' + u_0 q \sum_{j=0}^{n+1} c_j u_j \right) \mathrm{d}x - \int_0^\ell u_0 f \ \mathrm{d}x + F_0,$$
$$\frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_{n+1}} = \int_0^\ell \left(u_{n+1}' p \sum_{j=0}^{n+1} c_j u_j' + u_{n+1} q \sum_{j=0}^{n+1} c_j u_j \right) \mathrm{d}x - \int_{n+1}^\ell u_0 f \ \mathrm{d}x - F_\ell. \qquad (11.161ab)$$

Položme

$$\widehat{\mathbf{c}} = (\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n, \widehat{c}_{n+1}), \quad \mathbf{S} = \{S_{ij}\}_{i,j=0}^{n+1} = \{S_{ji}\}_{i,j=0}^{n+1},$$
$$S_{ij} = \int_0^\ell \big(p u_i' u_j' + q u_i u_j \big) \, \mathrm{d}x,$$
$$\mathbf{g}_N = (g_0, g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}), \ g_0 = \int_0^\ell u_0 f \ \mathrm{d}x - F_0,$$
$$g_i = \int_0^\ell u_i f \ \mathrm{d}x \ (i = 1, \ldots, n), \ g_{n+1} = \int_0^\ell u_{n+1} f \ \mathrm{d}x + F_\ell.$$

Potom ze vztahů (11.160), (11.161) a (11.161ab) dostaneme tuto soustavu $n+2$ lineárních algebraických rovnic pro neznámé $\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n, \widehat{c}_{n+1}$

$$\widehat{\mathbf{c}}\,\mathbf{S} = \mathbf{g}_N \, . \qquad (11.162)$$

• Zeslabme nyní předpoklady (11.134) tím, že o funkci $q(x)$ pouze předpokládáme

$$q(x) \geq 0, \tag{11.163}$$

přičemž funkce $q(x)$ není na intervalu $\langle 0, \ell \rangle$ identicky rovna nule. Musíme dokázat, že platí

$$\int_0^\ell \left\{ p(v')^2 + qv^2 \right\} \mathrm{d}x \geq C^2 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in M_N. \tag{11.164}$$

Jako speciální případ v $\mathbb{R}^1$ z [Ne, str. 22, Exercise 1.5] plyne, že pro libovolný, ale pevný interval $\langle c, d \rangle$ kladné délky, který leží uvnitř $\langle 0, \ell \rangle$, existuje takové číslo $\varkappa > 0$ nezávislé na funkcích prostoru M_N, že platí

$$\|v\|_1^2 \leq \varkappa \left(\int_0^\ell (v')^2 \,\mathrm{d}x + \int_c^d v^2 \,\mathrm{d}x \right) \quad \forall v \in M_N. \tag{11.165}$$

Nechť tedy platí (11.163), takže existuje bod $\overline{x} \in \langle 0, \ell \rangle$ takový, že $q(\overline{x}) > 0$. Protože funkce $q(x)$ je podle předpokladu spojitá v $\langle 0, \ell \rangle$, musí $q(x)$ splňovat v některém intervalu $\langle c, d \rangle$, který leží v $\langle 0, \ell \rangle$ a obsahuje bod $\overline{x}$, tuto nerovnost

$$q(x) \geq m > 0 \quad \forall x \in \langle c, d \rangle. \tag{11.166}$$

Z nerovnosti (11.165) potom plyne $\big($protože je $p(x) \geq p_0 > 0\ \forall x \in \langle 0, \ell \rangle\big)$

$$\int_0^\ell \left\{ p(v')^2 + qv^2 \right\} \mathrm{d}x \geq p_0 \int_0^\ell (v')^2 \,\mathrm{d}x + m \int_c^d v^2 \,\mathrm{d}x \geq C^2 \|v\|_1^2,$$

kde zřejmě stačí položit

$$C^2 = \min \left(\frac{p_0}{\varkappa}, \frac{m}{\varkappa} \right),$$

takže jsme dokázali nerovnost (11.164). // Nyní již stačí mírně modifikovat text této podkapitoly, který končí rovnicí (11.162)

• Zbývá probrat případ $q(x) \equiv 0$, takže uvažujme rovnici

$$-(pu)' = f(x) \quad \forall x \in (0, \ell) \tag{11.167}$$

s okrajovými podmínkami (které jsou zde pro větší jednoduchost homogenní)

$$u'(0) = 0 \quad u'(\ell) = 0. \tag{11.168}$$

Snadno je vidět, že v případě $f(x) \equiv 0$ nemá okrajový problém pouze triviální řešení. Stačí položit $u = K$, kde $K \in \mathbb{R}^1$ je libovolná konstanta. Tedy neplatí $\int_0^\ell p(v')^2 \,\mathrm{d}x \geq C^2 \|v\|_1^2\ \forall v \in M_N$ a předchozí úvahy nelze obecně aplikovat.

Existuje však speciální případ: Předpokládejme, že okrajový problém (11.167), (11.168) má řešení a integrujme rovnici (11.167) od nuly do ℓ. Dostaneme

$$-\int_0^\ell (pu)' \,\mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Podle (11.168) však platí

$$-\int_0^\ell (pu)'\,\mathrm{d}x = -\big[pu'\big]_0^\ell = 0,$$

takže má-li problém (11.167), (11.168) řešení, je nutně

$$\int_0^\ell f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{11.169}$$

V našem případě je tedy vztah (11.169) nutnou podmínkou existence řešení okrajového problému (11.167), (11.168). // Pokud uvažujeme místo (11.168) nehomogenní Neumannovy okrajové podmínky

$$p(0)u'(0) = F_0, \quad p(\ell)u'(\ell) = F_\ell, \tag{11.170}$$

zadané s rovnicí (11.167), potom integrací (11.167) dostáváme

$$\int_0^\ell f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\ell (pu)'\,\mathrm{d}x = -\big[pu'\big]_0^\ell = -F_\ell + F_0,$$

takže nutnou podmínkou existence řešení problému (11.167), (11.170) je vztah

$$\int_0^\ell f(x)\,\mathrm{d}x + F_\ell - F_0 = 0. \tag{11.171}$$

Tento vztah je identický se vztahem (11.132b), který je uveden v závěru podkap. 11.9.

11.11. Dirichletovy a smíšené okrajové podmínky

Uvažujme opět ODR 2. řádu

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)u = f(x) \quad \forall x \in (0,\ell), \tag{11.172}$$

na intervalu $\langle 0,\ell\rangle$, kde $\ell < +\infty$. O funkcích $p(x)$, $q(x)$ nyní předpokládáme

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq q \geq 0 \quad \forall x \in \langle 0,\ell\rangle. \tag{11.173}$$

Co se týče okrajových podmínek, budeme v této podkapitole uvažovat tyto tři možnosti (takže budeme mít tři nezávislé teorie, které mají některé společné vlastnosti):

$$u(0) = a, \quad u(\ell) = b, \tag{11.174D}$$

$$u(0) = a, \quad p(\ell)u'(\ell) = F_\ell, \tag{11.174S1}$$

$$p(0)u'(0) = F_0, \quad u(\ell) = b. \tag{11.174S2}$$

Uvažujeme tedy jednak (obecně nehomogenní) Dirichletovy okrajové podmínky a potom dva typy smíšených okrajových podmínek, které se od sebe liší pouze pozicí Dirichletovy okrajové podmínky.

Ke každému typu těchto okrajových podmínek přísluší jiný prostor V testovacích funkcí:

$$V \equiv V_D = \{w \in H^1(0,\ell) : \ w(0) = 0, \ w(\ell) = 0\}, \tag{11.175D}$$

$$V \equiv V_{S1} = \{w \in H^1(0,\ell) : \ w(0) = 0\}, \tag{11.175S1}$$

$$V \equiv V_{S2} = \{w \in H^1(0,\ell) : \ w(\ell) = 0\}. \tag{11.175S2}$$

Index u symbolu V prostoru testovacích funkcí nebudeme psát, když bude jasné, o který prostor jde. // Standardním postupem získáme tyto tři slabé formulace:

Slabá D-formulace. Najít funkci $u \in H^1(0,\ell)$, pro kterou

$$\begin{gathered} \int_0^\ell \big(p(x)u'(x)v'(x) + q(v)u(x)v(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell v(x)f(x)\ \mathrm{d}x \quad \forall v \in V_D \\ \big(a_D(u,v) = L_D(v) \quad \forall v \in V_D\big), \end{gathered} \tag{11.176D}$$

$$u - \omega_D \in V_D, \tag{11.177D}$$

kde funkce $\omega_D \in H^1(0,\ell)$ splňuje $\omega_D(0) = a$, $\omega_D(\ell) = b$.

Slabá S1-formulace. Najít funkci $u \in H^1(0,\ell)$, pro kterou

$$\begin{gathered} \int_0^\ell \big(p(x)u'(x)v'(x) + q(v)u(x)v(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell v(x)f(x)\ \mathrm{d}x + F_\ell v(\ell) \quad \forall v \in V_{S1} \\ \big(a_{S1}(u,v) = L_{S1}(v) \quad \forall v \in V_{S1}\big), \end{gathered} \tag{11.176S1}$$

$$u - \omega_{S1} \in V_{S1}, \tag{11.177S1}$$

kde funkce $\omega_{S1} \in H^1(0,\ell)$ splňuje $\omega_{S1}(0) = a$.

Slabá S2-formulace. Najít funkci $u \in H^1(0,\ell)$, pro kterou

$$\begin{gathered} \int_0^\ell \big(p(x)u'(x)v'(x) + q(v)u(x)v(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell v(x)f(x)\ \mathrm{d}x - F_0 v(0) \quad \forall v \in V_{S2} \\ \big(a_{S2}(u,v) = L_{S2}(v) \quad \forall v \in V_{S2}\big), \end{gathered} \tag{11.176S2}$$

$$u - \omega_{S2} \in V_{S2}, \tag{11.177S2}$$

kde funkce $\omega_{S2} \in H^1(0,\ell)$ splňuje $\omega_{S2}(\ell) = b$.

Poznámka. Podle Sobolevovy věty o vnoření (viz 11.7.29) je každá funkce z $H^1(0,\ell)$ spojitá na $\langle 0,\ell\rangle$, takže definice funkcí $\omega_D, \omega_{S1}, \omega_{S2}$ mají smysl.

Větu o formální ekvivalenci okrajového problému a slabé formulace dokážeme na konci této podkapitoly. Nás především zajímá existence a jednoznačnost slabého řešení.

11.11.1. Věta (o existenci a jednoznačnosti slabého řešení). *Je-li bilineární forma $a(v,w)$ ohraničená na $H^1(0,\ell) \times H^1(0,\ell)$, tj.*

$$|a(v,w)| \le M\|v\|_1\|w\|_1 \quad \forall v,w \in H^1(0,\ell) \quad (M = const), \tag{11.178}$$

a V-eliptická, tj.

$$a(v,v) \geq \beta \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V \quad (\beta = const > 0), \tag{11.179}$$

kde prostor $V \subset H^1(0,\ell)$ je definován v (11.175)*, a je-li lineární forma $L(v)$ ohraničená na $H^1(0,\ell)$, tj.*

$$|L(v)| \leq K\|v\|_1 \quad \forall v \in H^1(0,\ell) \quad (K = const), \tag{11.180}$$

potom existuje právě jedna funkce $u \in H^1(0,\ell)$, která splňuje vztahy (11.176), (11.177)*, tj. vztahy*

$$u - \omega \in V, \tag{11.181}$$

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V. \tag{11.182}$$

Důkaz. a) *Existence.* V důkazu existence řešení všech tří slabých formulací použijeme Lax-Milgramovu větu (viz 11.2.1), kde za prostor H zvolíme prostor V. To lze, protože V je podprostor prostoru $H^1(0,\ell)$, tedy je Hilbertovým prostorem s metrikou prostoru $H^1(0,\ell)$.

Z předpokladů (11.178) a (11.179) plyne, že jsou splněny předpoklady (11.15), (11.16) Lax-Milgramovy věty 11.2.1:

$$|a(t,v)| \leq M\|t\|_1\|v\|_1 \quad \forall t,v \in V \subset H^1(0,\ell), \tag{11.183}$$

$$a(v,v) \geq \beta\|v\|_1^2 \quad \forall v \in V \subset H^1(0,\ell). \tag{11.184}$$

V prostoru V uvažujme funkcionál

$$F(v) = L(v) - a(\omega,v) \quad \forall v \in V, \tag{11.185}$$

kde $\omega \in H^1(0,\ell)$ je pevná funkce z příslušné slabé formulace (viz všechny tři vztahy (11.177)).

Funkcionál (11.185) je zřejmě na prostoru V lineární. Dokážeme-li, že je na V také ohraničený, budeme mít ověřeno, že jsou splněny všechny předpoklady Lax-Milgramovy věty. Z (11.185), (11.180) a (11.178) plyne

$$\begin{aligned} |F(v)| \leq |L(v)| + |a(\omega,v)| \leq K\|v\|_1 + M\|\omega\|_1\|v\|_1 = \\ = (K + M\|\omega\|_1)\|v\|_1 \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{11.186}$$

Protože $\omega \in H^1(0,\ell)$ je pevný prvek, je výraz $K + M\|\omega\|_1$ konstanta nezávislá na $v \in V$. Tedy $F(v)$ je ohraničený funkcionál na V.

Z Lax-Milgramovy věty 11.2.1 tedy plyne, že existuje *právě jedna funkce $w \in V$* tak, že platí

$$F(v) = a(w,v) \quad \forall v \in V, \tag{11.187}$$

tj. že platí (dosadili jsme do (11.187) za $F(v)$ z (11.185))

$$a(w,v) = L(v) - a(\omega,v) \quad \forall v \in V. \tag{11.188}$$

Protože forma $a(t,v)$ je lineární v obou argumentech, můžeme psát

$$a(w,v) + a(\omega,v) = a(w+\omega,v). \tag{11.189}$$

Položíme-li tedy

$$u := w + \omega, \tag{11.190}$$

z (11.188) a (11.189) plyne

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V,$$

což je rovnice (11.182). Protože podle (11.190) je zároveň

$$u - \omega = w \in V,$$

což je inkluze (11.181), splňuje funkce u obě podmínky (11.176) a (11.177) (zde ve třech vydáních), které jsou kladeny na řešení všech tří slabých formulací. Tím je existence dokázána.

b) *Jednoznačnost.* Víme, že existuje právě jedno $w \in V$ tak, že platí vztah (11.188). Toto jediné w vystupuje spolu s danou funkcí $\omega \in H^1(0, \ell)$ ve vztahu (11.190), kterým definujeme řešení u. Tedy pro dané $\omega \in H^1(0, \ell)$ existuje právě jedno řešení u slabé formulace. □

Platnost předpokladů (11.178) a (11.180) o ohraničenosti forem $a(v, w)$, resp. $L(v)$ na $H^1(0, \ell) \times H^1(0, \ell)$, resp. $H^1(0, \ell)$ jsme již ověřili při jiných příležitostech v předchozích podkapitolách. Zbývá dokázat V-eliptičnost forem $a(v, w)$, tj. nerovnost (11.179). K tomu poslouží Friedrichsova nerovnost uvedená ve Větách 11.8.1 a 11.8.3; pro naše účely ji zapíšeme ve tvaru:

$$\|v\|_1^2 \leq C|v|_1^2 \quad \forall\, v \in V,$$

kde pro prostor V máme tyto možnosti: $V = V_D$, nebo $V = V_{S1}$, nebo $V = V_{S2}$.

Ze všech předchozích výsledků plyne hlavní věta této podkapitoly:

11.11.2. Věta. *Řešení všech tří slabých formulací této podkapitoly* (*tj. D, S1 a S2*) *existuje a je pouze jedno.*

V následující větě o minimu kvadratického funkcionálu symbol ω znamená buď ω_D, nebo ω_{S1}, nebo ω_{S2}. Je vždy jasné, který ze tří významů funkce $\omega \in H^1(0, \ell)$ má. Stejně je jasné, který ze tří významů V_D, V_{S1} a V_{S2} má v této větě symbol V. Také u číslování (11.176) a (11.177) vynecháváme koncovky D, resp. S1, resp. S2. Konečně u funkcionálu $\Pi(v)$ a forem $a(v, v)$ a $L(v)$ jsou vynechány indexy D, $S1$ a $S2$.

11.11.3. Věta (o minimu kvadratického funkcionálu). *Nechť bilineární forma $a(v, w)$, která vystupuje ve slabé formulaci, je V-eliptická, tj. platí*

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V \quad (\beta = const).$$

Potom funkce $u \in H^1(0, \ell)$ je jediným řešením slabé formulace (11.176), (11.177), *když a jen když ostře minimalizuje funkcionál $\Pi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$ na množině $\omega + V$, tj.*

$$\Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in \omega + V,$$

kde znamení rovnosti platí pouze pro $v = u$.

Důkaz této věty je ve všech třech případech D, S1 a S2 formálně stejný jako důkaz Věty 11.3.1. Proto jej vynechávám. $\square$

(A) Řešme nyní přibližně problém **(D)** pomocí MKP tím, že minimalizujeme funkcionál

$$\Pi(w) = \tfrac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ p(w')^2 + qw^2 \right\} \,\mathrm{d}x - \int_0^\ell wf \,\mathrm{d}x \tag{11.191}$$

na n-rozměrné varietě

$$\widehat{M}_D = \left\{ w(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) + a u_0(x) + b u_{n+1}(x) \right\}.$$

Dosaďme $w \in \widehat{M}_D$ do (11.191); dostaneme

$$\Pi(w) = \tfrac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ p\left(a u_0' + b u_{n+1}' + \sum_{i=1}^n c_i u_i' \right)^2 + q\left(a u_0 + b u_{n+1} + \sum_{i=1}^n c_i u_i \right)^2 \right\} \mathrm{d}x -$$
$$- \int_0^\ell \left(a u_0 + b u_{n+1} + \sum_{i=1}^n c_i u_i \right) f \,\mathrm{d}x. \tag{11.192}$$

Kvadratický funkcionál $\Pi(w)$ daný vztahem (11.192) je kvadratickou funkcí parametrů $c_1, \ldots, c_n$, $\Pi(w) = \widehat{\Pi}(c_1, \ldots, c_n)$, a proto nabývá v právě jedné n-tici $\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n$ svého minima. Tato n-tice splňuje nutnou podmínku extrému

$$\frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_i}(\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11.193}$$

Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_i} &= \int_0^\ell u_i' p \left(a u_0' + b u_{n+1}' + \sum_{j=1}^n c_j u_j' \right) \mathrm{d}x + \\ &+ \int_0^\ell u_i q \left(a u_0 + b u_{n+1} + \sum_{j=1}^n c_j u_j \right) \mathrm{d}x - \int_0^\ell u_i f \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{11.194}$$

Položme

$$\widehat{\mathbf{c}} = (\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n), \quad \mathbf{S} = \{S_{ij}\}_{i,j=1}^n = \{S_{ji}\}_{i,j=1}^n,\ S_{ij} = \int_0^\ell \left(p u_i' u_j' + q u_i u_j \right) \mathrm{d}x,$$

$$\mathbf{g}_D = (g_1, \ldots, g_n), \quad g_i = \int_0^\ell \{ (f + aqu_0 + bqu_{n+1}) u_i + (apu_0' + bpu_{n+1}') u_i' \} \,\mathrm{d}x.$$

Potom ze vztahů (11.193) a (11.194) dostaneme tuto soustavu n lineárních algebraických rovnic pro neznámé $\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n$

$$\widehat{\mathbf{c}}\,\mathbf{S} = \mathbf{g}_D\,.$$

(B) Nyní řešme přibližně problém **(S1)** pomocí MKP tím, že minimalizujeme funkcionál

$$\Pi(w) = \tfrac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ p(w')^2 + qw^2 \right\} \,\mathrm{d}x - \int_0^\ell wf \,\mathrm{d}x - F_\ell w(\ell) \tag{11.195}$$

na $(n+1)$-rozměrné varietě

$$\widehat{M}_{S1} = \left\{ w(x) = au_0(x) + \sum_{i=1}^{n+1} c_i u_i(x) \right\}.$$

Dosaďme $w \in \widehat{M}_{S1}$ do (11.195); dostaneme

$$\begin{aligned} \Pi(w) = \tfrac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ p\Big(au_0' + \sum_{i=1}^{n+1} c_i u_i'\Big)^2 + q\Big(au_0 + \sum_{i=1}^{n+1} c_i u_i\Big)^2 \right\} \mathrm{d}x - \\ - \int_0^\ell \Big(au_0 + \sum_{i=1}^{n+1} c_i u_i\Big) f \; \mathrm{d}x - F_\ell \sum_{i=1}^{n+1} c_i u_i(x_{n+1}) - aF_\ell u_0(x_{n+1}). \end{aligned} \tag{11.196}$$

Přitom je

$$F_\ell \sum_{i=1}^{n+1} c_i u_i(x_{n+1}) = F_\ell c_{n+1}, \quad aF_\ell u_0(x_{n+1}) = 0.$$

Abychom našli hodnoty parametrů $\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n, \widehat{c}_{n+1}$, při kterých nabývá funkcionál (11.196) minima, vyjdeme opět z nutné podmínky extrému

$$\frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_i}(\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n, \widehat{c}_{n+1}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n, n+1), \tag{11.197}$$

která tentokrát vede na soustavu $n+1$ lineárních algebraických rovnic. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_i} &= \int_0^\ell \Big(u_i' p \sum_{j=1}^{n+1} c_j u_j' + u_i q \sum_{j=1}^{n+1} c_j u_j \Big) \mathrm{d}x - \int_0^\ell u_i f \; \mathrm{d}x \quad (i = 1, \ldots, n), \\ \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_{n+1}} &= \int_0^\ell \Big(u_{n+1}' p \sum_{j=1}^{n+1} c_j u_j' + u_{n+1} q \sum_{j=1}^{n+1} c_j u_j \Big) \mathrm{d}x - \int_0^\ell u_{n+1} f \; \mathrm{d}x + F_\ell. \end{aligned} \tag{11.198}$$

Položme

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbf{c}} = (\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n, \widehat{c}_{n+1}), \quad \mathbf{S} = \{S_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1} = \{S_{ji}\}_{i,j=1}^{n+1}, \\ &S_{ij} = \int_0^\ell \big(pu_i' u_j' + qu_i u_j\big) \, \mathrm{d}x, \quad \mathbf{g}_{S1} = (g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}), \\ &g_i = \int_0^\ell u_i f \, \mathrm{d}x \ (i = 1, \ldots, n), \ g_{n+1} = \int_0^\ell u_{n+1} f \, \mathrm{d}x + F_\ell. \end{aligned}$$

Potom ze vztahů (11.197) a (11.198) dostaneme tuto soustavu $n+1$ lineárních algebraických rovnic pro neznámé $\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n, \widehat{c}_{n+1}$

$$\widehat{\mathbf{c}}\, \mathbf{S} = \mathbf{g}_{S1}\,.$$

(C) Konečně řešme přibližně problém **(S2)** pomocí MKP tím, že minimalizujeme funkcionál

$$\Pi(w) = \tfrac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ p(w')^2 + qw^2 \right\} \, \mathrm{d}x - \int_0^\ell wf \; \mathrm{d}x + F_0 w(0) \tag{11.199}$$

na $(n+1)$-rozměrné varietě

$$\widehat{M}_{S2} = \Big\{ w(x) = bu_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x) \Big\}.$$

Dosaďme $w \in \widehat{M}_{S2}$ do (11.199); dostaneme

$$\begin{aligned} \Pi(w) = \tfrac{1}{2} \int_0^\ell \Big\{ p\Big(bu'_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} c_i u'_i \Big)^2 + q\Big(bu_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} c_i u_i \Big)^2 \Big\} \, \mathrm{d}x - \\ - \int_0^\ell \Big(bu_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} c_i u_i \Big) f \, \mathrm{d}x + F_0 \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x_0) + bF_0 u_{n+1}(x_0). \end{aligned} \tag{11.200}$$

Přitom je

$$F_0 \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x_0) = F_0 c_0, \quad bF_0 u_{n+1}(x_0) = 0.$$

Abychom našli hodnoty parametrů $\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n$, při kterých nabývá funkcionál (11.200) minima, vyjdeme opět z nutné podmínky extrému, která má nyní tvar

$$\frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_i}(\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{11.201}$$

takže vede na soustavu $n+1$ lineárních algebraických rovnic. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_i} &= \int_0^\ell \Big(u'_i p \sum_{j=0}^{n} c_j u'_j + u_i q \sum_{j=0}^{n} c_j u_j \Big) \, \mathrm{d}x - \int_0^\ell u_i f \, \mathrm{d}x \quad (i = 1, \ldots, n), \\ \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial c_0} &= \int_0^\ell \Big(u'_0 p \sum_{j=0}^{n} c_j u'_j + u_0 q \sum_{j=0}^{n} c_j u_j \Big) \, \mathrm{d}x - \int_0^\ell u_0 f \, \mathrm{d}x + F_0. \end{aligned} \tag{11.202}$$

Položme

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{c}} &= (\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n), \quad \mathbf{S} = \{S_{ij}\}_{i,j=0}^{n} = \{S_{ji}\}_{i,j=0}^{n}, \\ S_{ij} &= \int_0^\ell \big(pu'_i u'_j + qu_i u_j \big) \, \mathrm{d}x, \quad \mathbf{g}_{S2} = (g_0, g_1, \ldots, g_n), \\ g_0 &= \int_0^\ell u_0 f \, \mathrm{d}x + F_0, \quad g_i = \int_0^\ell u_i f \, \mathrm{d}x \ (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Potom ze vztahů (11.201) a (11.202) dostaneme tuto soustavu $n+1$ lineárních algebraických rovnic pro neznámé $\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n$

$$\widehat{\mathbf{c}}\,\mathbf{S} = \mathbf{g}_{S2}\,.$$

Poznamenejme, že Dirichletovy okrajové podmínky se nazývají *hlavní* (nebo *stabilní*); jejich pravá strana (a, resp. b) se vyskytuje v definici variety $\widehat{M}_D$ (resp. $\widehat{M}_{S1}$, resp. $\widehat{M}_{S2}$), na které minimalizujeme příslušný funkcionál $\widehat{\Pi}$. Neumannovy okrajové podmínky se nazývají *přirozené* (nebo *nestabilní*); jejich pravá strana (F_0, resp. F_ℓ) se vyskytuje v definici funkcionálu, který minimalizujeme, a příslušné parametry $\widehat{c}_0$, $\widehat{c}_\ell$ se získají při řešení rezultující soustavy lineárních algebraických rovnic.

11.11.4. Věta (o formální ekvivalenci okrajového problému a slabé formulace). *a) Nechť okrajový problém* (11.172) – (11.174) *má klasické řešení u. Potom je řešením slabé formulace* (11.176), (11.177).

b) Nechť slabá formulace (11.176), (11.177) *má řešení u. Jestliže* $u \in H^2(0,\ell)$ *a* $p \in C^1(\overline{I})$ *(nebo pouze* $(pu')' \in L_2(I)$*), potom u splňuje rovnici* (11.172) *téměř všude v I a Neumannovu okrajovou podmínku* (11.174) *v bodě* $x = 0$*, resp.* $x = \ell$*, jde-li o problém* $(S1)$*, resp.* $(S2)$*. Vzhledem k inkluzi* $u - \omega \in V$ *je tedy u řešením problému* (11.172) – (11.174).

Důkaz. Omezíme se na případ **S1**. a) Od okrajového problému k slabé formulaci přejdeme opět standardním způsobem.

b) Pro větší jednoduchost zápisu předpokládejme, že $q(x) \equiv 0$. Protože $(pu')' \in L_2(I)$, můžeme výraz pro $a(u,v)$ upravit pomocí integrace per partes takto:

$$a(u,v) \equiv \int_0^\ell p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x =$$

$$= v(\ell)p(\ell)u'(\ell) - v(0)p(0)u'(0) - \int_0^\ell \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)v\ \mathrm{d}x. \qquad (11.203)$$

Podle definice V_{S1} je $v(0) = 0\ \forall v \in V_{S1}$, takže ze vztahů (11.176S1) a (11.203) plyne

$$-\int_0^\ell \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + f\right\}v\ \mathrm{d}x + \left\{p(\ell)u'(\ell) - F_\ell\right\}v(\ell) = 0 \quad \forall v \in V_{S1}. \qquad (11.204)$$

Protože $H_0^1(0,\ell) \subset V_{S1}$, můžeme uvažovat (11.204) pouze pro funkce $v \in H_0^1(0,\ell)$. Potom dostaneme

$$\int_0^\ell \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + f\right\}v\ \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0,\ell). \qquad (11.205)$$

Prostor $H_0^1(0,\ell)$ je hustý v $L_2(0,\ell)$. (Plyne to z věty 11.7.11 a toho, že $C_0^\infty(0,\ell) \subset H_0^1(0,\ell)$.) Tedy podle věty 11.7.13 vztah (11.205) implikuje platnost rovnice (11.172) téměř všude v $I = (0,\ell)$.

Protože rovnice (11.172) platí téměř všude v $(0,\ell)$, redukuje se vztah (11.204) na tvar

$$\left\{p(\ell)u'(\ell) - F_\ell\right\}v(\ell) = 0 \quad \forall v \in V_{S1}. \qquad (11.206)$$

Vztah (11.206) lze přepsat takto:

$$\left\{p(\ell)u'(\ell) - F_\ell\right\}v(\ell) = 0 \quad \forall v(\ell) \in \mathbb{R}^1, \qquad (11.207)$$

protože podle Sobolevovy věty o vnoření je každá funkce $v \in H^1(0,\ell)$ spojitá na $\langle 0,\ell\rangle$. Z (11.207) tedy plyne $p(\ell)u'(\ell) = F_\ell$. $\square$

Pomocí dvojice implikací "Věta 11.11.3 implikuje Větu 11.11.4, která implikuje okrajový problém (11.172) – (11.174)" jsme získali Eulerovy rovnice kvadratického funkcionálu $\Pi(v)$ nestandardním způsobem.

11.12. Důkaz Sobolevovy věty o vnoření

11.12.1. Věta (Sobolev). *Nechť $u \in H^1(I)$. Potom je funkce u spojitá na intervalu $\overline{I}$ (tj. $u \in C^0(\overline{I})$), přičemž platí*

$$\|u\|_{C^0(\overline{I})} \le C\|u\|_{H^1(I)} \quad \forall u \in H^1(I). \tag{11.208}$$

Platí dokonce více: Funkce u je hölderovsky spojitá na $\overline{I}$ s kvocientem $\lambda = \frac{1}{2}$ (tj. $u \in C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})$), přičemž platí

$$\|u\|_{C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})} = \|u\|_{C^0(\overline{I})} + \sup_{x,y\in I,\ x\ne y} \frac{|u(x)-u(y)|}{\sqrt{|x-y|}} \le C\|u\|_{H^1(I)} \quad \forall u \in H^1(I). \tag{11.209}$$

kde v obou případech kladná konstanta C nezávisí na funkci u.

Důkaz. **(A)** V této části důkazu dokážeme nerovnosti (11.208), (11.209) pro libovolnou funkci $u \in C^\infty(\overline{I})$, kde $\overline{I} = \langle a, b\rangle$, přičemž $-\infty < a < b < +\infty$.

Uvažujme otevřený interval $I = (a, b)$ a v něm dva *libovolné od sebe různé* body $y_1, y_2 \in I$, $y_1 < y_2$. Položme

$$\varrho = y_2 - y_1, \quad I_\varrho = \langle y_1, y_2\rangle,$$

$$z(t) = y_1 + t(y - y_1), \quad y \in I_\varrho. \tag{11.210}$$

Potom

$$u\big(z(0)\big) = u(y_1), \quad u\big(z(1)\big) = u(y),$$

takže

$$u(y) - u(y_1) = \int_0^1 \mathrm{d}u\big(z(t)\big) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\big(y_1 + t(y-y_1)\big)(y-y_1)\,\mathrm{d}t$$

a odtud

$$|u(y) - u(y_1)| \le \varrho \int_0^1 \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\big(y_1 + t(y-y_1)\big)\right| \mathrm{d}t. \tag{11.211}$$

Utvořme nyní absolutní hodnotu rozdílu výrazu $\frac{1}{\varrho}\int_{y_1}^{y_2} u(y)\,\mathrm{d}y$, který má význam střední hodnoty funkce u na intervalu I_ϱ, a funkční hodnoty $u(y_1)$:

$$\left|\frac{1}{\varrho}\int_{y_1}^{y_2} u(y)\,\mathrm{d}y - u(y_1)\right| = \left|\frac{1}{\varrho}\int_{y_1}^{y_2} \big(u(y) - u(y_1)\big)\,\mathrm{d}y\right| \le$$
$$\le \frac{1}{\varrho}\int_{y_1}^{y_2} \Big|u(y) - u(y_1)\Big|\,\mathrm{d}y\,. \tag{11.212}$$

Pravou stranu (11.212) odhadneme pomocí (11.211):

$$\frac{1}{\varrho}\int_{y_1}^{y_2} \Big|u(y) - u(y_1)\Big|\,\mathrm{d}y \le \int_{y_1}^{y_2} \left\{\int_0^1 \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\big(y_1 + t(y-y_1)\big)\right| \mathrm{d}t\right\} \mathrm{d}y = I^*. \tag{11.213}$$

Integrál označený symbolem I^* nyní odhadneme. Předně podle Fubiniovy věty (o záměně pořadí integrace)

$$I^* = \int_0^1 \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\big(y_1 + t(y - y_1)\big) \right| \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}t. \tag{11.214}$$

Pro vnitřní integrál na pravé straně vztahu (11.214) je t pevné číslo; $t \in \langle 0, 1 \rangle$. S tímto pevným t definujme transformaci

$$\zeta = F_t(y) = y_1 + t(y - y_1); \tag{11.215}$$

k ní je inverzní transformace

$$y = F_t^{-1}(\zeta) = y_1 + t^{-1}(\zeta - y_1). \tag{11.216}$$

Vnitřní integrál na pravé straně vztahu (11.214) transformujme pomocí substituce (11.215). Podle (11.216) platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\zeta} = t^{-1};$$

podle (11.215) dostáváme pro meze ζ_1 a ζ_2 výrazy

$$\zeta_1 = \zeta(y_1) = y_1, \quad \zeta_2 = \zeta(y_2) = y_1 + t(y_2 - y_1) = y_1 + t\varrho$$

takže

$$\int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\big(y_1 + t(y - y_1)\big) \right| \mathrm{d}y = \frac{1}{t} \int_{y_1}^{y_1 + t\varrho} \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(\zeta) \right| \mathrm{d}\zeta.$$

Pro integrál I^* tedy platí

$$I^* = \int_0^1 t^{-1} \left\{ \int_{y_1}^{y_1 + t\varrho} \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(\zeta) \right| \mathrm{d}\zeta \right\} \mathrm{d}t. \tag{11.217}$$

Vnitřní integrál v (11.217) odhadneme pomocí Schwarz-Buňakovského nerovnosti

$$\int_{y_1}^{y_1 + t\varrho} \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(\zeta) \right| \mathrm{d}\zeta \le \sqrt{t\varrho} \sqrt{\int_{y_1}^{y_1 + t\varrho} \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(\zeta) \right|^2 \mathrm{d}\zeta} \le \sqrt{\varrho}\, \|u\|_{H^1(I)}. \tag{11.218}$$

Vztahy (11.217) a (11.218) implikují

$$I^* \le \sqrt{\varrho} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t\, \|u\|_{H^1(I)} = 2\sqrt{\varrho}\, \|u\|_{H^1(I)}. \tag{11.219}$$

Ze vztahů (11.212) – (11.214) a (11.219) dále plyne

$$\left| \frac{1}{\varrho} \int_{y_1}^{y_2} u(y)\, \mathrm{d}y - u(y_1) \right| \le 2\sqrt{\varrho}\, \|u\|_{H^1(I)}. \tag{11.220}$$

Stejně dostaneme

$$\left| \frac{1}{\varrho} \int_{y_1}^{y_2} u(y)\, \mathrm{d}y - u(y_2) \right| \le 2\sqrt{\varrho}\, \|u\|_{H^1(I)}. \tag{11.220*}$$

Vztahy (11.220), (11.220*) a $\varrho = y_2 - y_1$ dávají tento dílčí výsledek:

$$\begin{aligned}\big|u(y_1) - u(y_2)\big| &\le \left|\frac{1}{\varrho}\int_{y_1}^{y_2} u(y)\,\mathrm{d}y - u(y_1)\right| + \\ +\left|\frac{1}{\varrho}\int_{y_1}^{y_2} u(y)\,\mathrm{d}y - u(y_2)\right| &\le 4\sqrt{y_2 - y_1}\,\|u\|_{H^1(I)}.\end{aligned} \tag{11.221}$$

Podle předpokladu vysloveného na začátku důkazu platí vztah (11.221) pro libovolnou dvojici různých bodů $y_1, y_2 \in I$. Nechť nyní $x \ne y$, $x, y \in I$. Protože

$$|u(x)| \le |u(y)| + |u(x) - u(y)|, \quad |x - y| \le b - a,$$

podle (11.221) platí

$$|u(x)| \le |u(y)| + 4\sqrt{|x-y|}\,\|u\|_{H^1(I)} \le |u(y)| + 4\sqrt{b-a}\,\|u\|_{H^1(I)}. \tag{11.222}$$

Integrujeme-li nerovnost (11.222) přes I vzhledem k y, najdeme

$$|u(x)|(b-a) \le \|u\|_{L_1(I)} + 4(b-a)^{3/2}\|u\|_{H^1(I)}. \tag{11.223}$$

Protože

$$\|u\|_{L_1(I)} = \int_a^b |u(y)|\,\mathrm{d}y \le \sqrt{b-a}\,\|u\|_{H^1(I)},$$

nerovnost (11.223) implikuje

$$|u(x)| \le C_1\|u\|_{H^1(I)}, \tag{11.224}$$

kde $C_1 > 0$ nezávisí na $u \in C^\infty(\overline{I})$. Z nerovnosti (11.224) plyne

$$\|u\|_{C^0(\overline{I})} = \max_{x\in\overline{I}} |u(x)| \le C_1\|u\|_{H^1(I)}, \tag{11.225}$$

Protože

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{I})} = \|u\|_{C^0(\overline{I})} + \sup_{x,y\in\overline{I},\, x\ne y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda},$$

dostáváme podle (11.225) a (11.221)

$$\|u\|_{C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})} \le C\|u\|_{H^1(I)} \quad \forall u \in C^\infty(\overline{I}). \tag{11.226}$$

(B) Nyní dokážeme nerovnost (11.226) pro libovolnou funkci $u \in H^1(I)$. Nejprve připomeneme některé věty o konvergencích posloupností funkcí:

(a) (Rieszova věta) Konverguje-li posloupnost $\big\{u_n(x)\big\}_{n=1}^\infty$ na intervalu I k funkci $u(x)$ podle míry, potom existuje podposloupnost $\big\{u_{n_k}(x)\big\} \subset \big\{u_n(x)\big\}$, která konverguje k funkci $u(x)$ téměř všude (tj. pro téměř všechny body $x \in I$).

(b) Konverguje-li posloupnost $\big\{u_n(x)\big\}_{n=1}^\infty$ k funkci $u(x)$ v $L_2(I)$, potom konverguje na intervalu I k funkci $u(x)$ podle míry.

(c) Konverguje-li posloupnost $\big\{u_n(x)\big\}_{n=1}^\infty$ k funkci $u(x)$ na intervalu I stejnoměrně, potom konverguje na intervalu I k funkci $u(x)$ podle míry.

(d) Konverguje-li posloupnost $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci $u(x)$ v prostoru $C^0(\overline{I})$, potom konverguje na intervalu $\overline{I}$ k funkci $u(x)$ stejnoměrně.

Přikročme k samotnému důkazu nerovnosti (11.226) pro libovolnou funkci $u \in H^1(I)$. Zvolme $u \in H^1(I)$. Podle Věty 11.7.21 o hustotě $C^\infty(\overline{I})$ ve $W^k(I)$ a podle Věty 11.7.27 ($W = H$) existuje taková posloupnost $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C^\infty(\overline{I})$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1(I)} = 0. \tag{11.227}$$

Podle (11.226) a (11.227)

$$\|u_n - u_m\|_{C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})} \le C\|u_n - u_m\|_{H^1(I)} \to 0 \quad \text{pro } m, n \to \infty.$$

Tedy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost v $C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})$. Úplnost prostoru $C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})$ implikuje existenci takové funkce $\omega \in C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - \omega\|_{C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})} = 0. \tag{11.228}$$

Vztah (11.227) implikuje podle **(b)** a **(a)** existenci podposloupnosti $\{u_{n_k}\}$, která konverguje k u téměř všude v I. Podle (11.228)

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{n_k} - \omega\|_{C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})} = 0;$$

tedy vzhledem k **(d)**, **(c)** a **(a)** existuje podposloupnost $\{u_{n_{k_j}}\}$, která konverguje k ω téměř všude v I. Avšak tatáž podposloupnost konverguje v I téměř všude k u. Tedy

$$\omega(x) = u(x) \quad \text{pro téměř všechny body } x \in I. \tag{11.229}$$

Podle (11.226)

$$\|u_n\|_{C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})} \le C\|u_n\|_{H^1(I)}. \tag{11.230}$$

Přejdeme-li v (11.230) k limitě pro $n \to \infty$ a užijeme-li (11.229), dostaneme

$$\|\omega\|_{C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})} = \|u\|_{C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{I})} \le C\|u\|_{H^1(I)},$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

11.12.2. Poznámka. V případě $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 2$), kdy se dokazuje vnoření prostoru $H^2(\Omega)$ do prostoru spojitých funkcí, je část **(A)** důkazu velmi podobná; úvahy se však provádějí na krychli $(-1,1)^N$. Před část **(B)** je nutné vložit část, ve které se výsledky získané na $(-1,1)^N$ transformují na jednotlivé části pokrytí zadané oblasti Ω, což je dosti komplikované. Samotná část **(B)** je pak již beze změny.

11.13. Důkazy vět 11.7.22, 11.7.23 a 11.7.24

11.7.22. Věta. *Množina $W^k(I) \equiv H^k(I)$ je lineární prostor.*

Důkaz. a) Nechť $u, v \in H^k(I)$. Dokážeme, že $u + v \in H^k(I)$. Podle věty 11.7.26 (o hustotě $C^\infty(\overline{I})$ ve $W^k(I)$) každé funkci $z \in H^k(I) \equiv W^k(I)$ koresponduje třída $Z \subset H^k(I)$ cauchyovských posloupností, které konvergují k prvku $z \in H^k(I)$ v normě $\|\cdot\|_{k,I}$. (Pokud $z \in S^k(I)$, potom tato třída sestává z jedné stacionární posloupnosti $\{z, z, \ldots, z, \ldots\}$.) Nechť nyní $\{u_n\} \subset S^k(I)$, resp. $\{v_n\} \subset S^k(I)$ jsou cauchyovské posloupnosti konvergující k prvkům u, resp. v. Definujme posloupnost $\{z_n\} = \{u_n + v_n\}$ a ukažme, že je to cauchyovská posloupnost v $S^k(I)$:

$$\|z_m - z_n\|_{H^k(I)} = \|u_m + v_m - (u_n + v_n)\|_{H^k(I)} \leq$$

$$\leq \|u_m - u_n\|_{H^k(I)} + \|v_m - v_n)\|_{H^k(I)} \to 0 \quad \text{pro } m, n \to \infty.$$

Tato cauchyovská posloupnost splňuje

$$\|u + v - z_n\|_{H^k(I)} = \|u + v - (u_n + v_n)\|_{H^k(I)} \leq$$

$$\leq \|u - u_n\|_{H^k(I)} + \|v - v_n)\|_{H^k(I)} \to 0 \quad \text{pro } m, n \to \infty;$$

tedy $u + v \in H^k(I)$.

b) Nechť $u \in H^k(I)$, $a \in \mathbb{R}^1$. Dokážeme, že $au \in H^k(I)$. Nechť $\{u_n\} \subset S^k(I)$ je cachyovská posloupnost, která koresponduje prvku u. Potom $\{au_n\} \subset S^k(I)$ je také cauchyovská posloupnost:

$$\|au_n - au_m\|_{H^k(I)} = \|a(u_n - u_m)\|_{H^k(I)} = |a| \cdot \|u_n - u_m\|_{H^k(I)} \to 0 \quad \text{pro } m, n \to \infty.$$

Tato cauchyovská posloupnost splňuje

$$\|au_n - au\|_{H^k(I)} = \|a(u_n - u)\|_{H^k(I)} = |a| \cdot \|u_n - u\|_{H^k(I)} \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Tedy $au \in H^k(I)$.

c) Je zřejmé, že obě tyto operace splňují všech osm axiomů lineárního prostoru. □

V důkazu Věty 11.7.23 o skalárním součinu užijeme toto lemma:

11.13.1. Lemma. *Zobecněné derivace prvků prostoru $W^k(I) \equiv H^k(I)$ splňují*

$$D^j(au + bv) = aD^j u + bD^j v \quad \forall u, v \in H^k(I),\ \forall a, b \in \mathbb{R}^1,\ j = 1, \ldots, k.$$

Důkaz. Podle Věty 11.7.18 (vztah (11.86) na str. 75) a podle vlastností integrálu platí

$$\int_I \varphi D^j(au + bv)\,\mathrm{d}x = (-1)^j \int_I (au + bv) D^j \varphi\,\mathrm{d}x =$$

$$= a(-1)^j \int_I u D^j \varphi\,\mathrm{d}x + b(-1)^j \int_I v D^j \varphi\,\mathrm{d}x =$$

$$= a \int_I \varphi D^j u\,\mathrm{d}x + b \int_I \varphi D^j v\,\mathrm{d}x = \int_I (aD^j u + bD^j v)\varphi\,\mathrm{d}x,$$

což jsme měli dokázat. □

11.7.23. Věta. *Výraz*

$$(u,v)_{k,I} = \sum_{j=0}^{k} \int_I D^j u(x) D^j v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall u,v \in W^k(I) \equiv H^k(I) \tag{11.231}$$

je skalárním součinem v lineárním prostoru $W^k(I) = H^k(I)$.

Důkaz. a) Užitím zřejmého vztahu

$$\int_I (D^j u)(D^j v)\,\mathrm{d}x = \int_I (D^j v)(D^j u)\,\mathrm{d}x$$

dostáváme z (11.231) komutativní zákon

$$(u,v)_{k,I} = (v,u)_{k,I} \quad \forall u,v \in H^k(I).$$

b) Užitím Lemmatu 11.13.1 můžeme psát pro všechna $a,b \in \mathbb{R}^1$ a všechny funkce $u_1, u_2, v \in H^k(I)$

$$\int_I D^j(au_1 + bu_2) D^j v\,\mathrm{d}x = a \int_I D^j u_1 D^j v\,\mathrm{d}x + b \int_I D^j u_2 D^j v\,\mathrm{d}x.$$

Odtud a z (11.231) plyne linearita skalárního součinu:

$$(au_1 + bu_2, v)_{k,I} = a(u_1,v)_{k,I} + b(u_2,v)_{k,I}.$$

c) Vztah (11.231) implikuje

$$(u,u)_{k,I} = \sum_{j=0}^{k} \int_I (D^j u(x))^2\,\mathrm{d}x \ge 0 \quad \forall u \in H^k(I), \tag{11.232}$$

což je třetí vlastnost skalárního součinu.

d) Nechť $u \equiv 0$. Potom z (11.232) plyne $(u,u)_{k,I} = 0$. // Nechť nyní naopak $(u,u)_{k,I} = 0$. Potom všechny integrály na pravé straně (11.232) jsou rovny nule, protože jsou nezáporné. Odtud také plyne

$$\int_I u^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

což dává $u(x) = 0$ v $L_2(I)$. To je čtvrtá a poslední vlastnost skalárního součinu. □

11.7.24. Věta. $W^k(I) \equiv H^k(I)$ *je Hilbertův prostor.*

Důkaz. Protože Hilbertův prostor je úplný unitární prostor, stačí dokázat, že prostor $W^k(I) \equiv H^k(I)$ je úplný. (Na str. 78 jsem celkem stručně dokázal, že prostor $H^k(I)$ je úplný. Nyní dokážeme úplnost $W^k(I)$, tj. že *libovolná* cauchyovská posloupnost $\{u_n\} \subset W^k(I)$ (tj. ne pouze $\{u_n\} \subset S^k(I)$) je konvergentní v normě $\|\cdot\|_{k,I}$.)

Nechť $\{u_n\} \subset W^k(I)$ je cauchyovská posloupnost, tj.

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_m - u_n\|_{W^k(I)} = 0. \tag{11.233}$$

a) Zvolme libovolnou funkci $v \in W^k(I)$ a libovolné $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že hustota $C^\infty(\overline{I})$ ve $W^k(I)$ umožňuje nalézt $z \in C^\infty(\overline{I})$ tak, že

$$\|v - z\|_{W^k(I)} < \varepsilon. \tag{11.234}$$

Skutečně, protože lineární prostor $C^\infty(\overline{I})$ je hustý ve $W^k(I)$ (viz Větu 11.7.26), existuje taková posloupnost $\{v_n\} \subset C^\infty(\overline{I})$, že

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{W^k(I)} = 0. \tag{11.235}$$

(Pokud $v \in C^\infty(\overline{I})$, tak posloupnost $\{v_n\}$ je stacionární, tj. $v_n = v$.) Vztah (11.235) znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový index $N = N(\varepsilon) > 0$, že

$$\|v_n - v\|_{W^k(I)} < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon). \tag{11.236}$$

Jako prvek $z \in C^\infty(\overline{I})$, který splňuje (11.234), můžeme zvolit kteroukoliv funkci $v_n \in C^\infty(\overline{I})$, která vystupuje v (11.236).

b) Z části a) plyne, že ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje taková funkce $z_n \in C^\infty(\overline{I})$, že

$$\|u_n - z_n\|_{W^k(I)} < \tfrac{1}{n}. \tag{11.237}$$

Pomocí vztahů (11.233), (11.237) a trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\begin{gathered}\|z_m - z_n\|_{W^k(I)} = \|z_m - z_n + (u_n - u_n) + (u_m - u_m)\|_{W^k(I)} = \\ = \|(z_m - u_m) + (u_m - u_n) + (u_n - z_n)\|_{W^k(I)} \leq \\ \leq \|z_m - u_m\|_{W^k(I)} + \|u_m - u_n\|_{W^k(I)} + \|u_n - z_n\|_{W^k(I)} \leq \\ \leq \tfrac{1}{m} + \|u_m - u_n\|_{W^k(I)} + \tfrac{1}{n} \to 0 \quad \text{pro } m, n \to \infty.\end{gathered}$$

Tedy posloupnost $\{z_n\} \subset S^k(I)$ (tj. v $C^\infty(\overline{I})$ s normou $\|\cdot\|_{W^k(I)}$) je cauchyovská posloupnost v $S^k(I)$. Konstrukce prostoru $W^k(I)$ zaručuje existenci funkce $z \in W^k(I)$, pro kterou

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - z\|_{W^k(I)} = 0. \tag{11.238}$$

Vztahy (11.237), (11.238) a trojúhelníková nerovnost implikují

$$\|u_n - z\|_{W^k(I)} \leq \|u_n - z_n\|_{W^k(I)} + \|z_n - z\|_{W^k(I)} \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Tedy prostor $W^k(I)$ je úplný, protože cauchyovská posloupnost $\{u_n\}$ má limitu. $\square$

Všechny tři dokázané věty a jejich důkazy nezávisejí na dimenzi prostoru $\mathbb{R}^N$, takže jsme místo symbolu I mohli psát symbol Ω, který se užívá v případě N-rozměrných oblastí.

11.14. Regularizace. Hustota $\mathbf{C_0^\infty(I)}$ v prostoru $\mathbf{L_2(I)}$

Tato podkapitola je výjimečně provedena v $\mathbb{R}^N$, protože rozdíly mezi $\mathbb{R}^1$ a $\mathbb{R}^N$ nejsou v tomto případě velké. Na začátku uvádím pět pomocných vět, které jsou označeny $\mathcal{P}.1 - \mathcal{P}.5$. První dvě jsou převzaty z Natansonovy knihy [Na], takže důkazy neuvádím. Důkazy vět $\mathcal{P}.3$ a $\mathcal{P}.4$ jsou uvedeny v Dodatku A. Věta $\mathcal{P}.5$ je převzata z [Ja].

$\mathcal{P}$.1. Věta (o absolutní spojitosti integrálu). $[Na, kap. VI, \S 2, Th. 8]$ *Nechť $E \subset \mathbb{R}^N$ je ohraničená měřitelná množina a $f(X)$ integrace schopná funkce na E. Potom ke každému $\eta > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každou podmnožinu $e \subset E$ s mírou menší než δ platí*

$$\int_e |f(X)| \, \mathrm{d}X < \eta.$$

$\mathcal{P}$.2. Věta (Lebesgueova věta o limitním přechodu za integračním znamením). $[Na, kap. VI, \S 3, Th. 1]$ *Nechť $\{f_n(X)\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a nechť tato posloupnost konverguje pro téměř všechna $X \in \Omega$ k měřitelné funkci $F(X)$:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(X) = F(X) \quad \text{\textit{téměř všude v} } \Omega.$$

Existuje-li taková funkce g s konečným Lebesgueovým integrálem přes Ω, že

$$|f_n(X)| \le g(X) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall X \in \Omega,$$

potom f_n $(n = 1, 2, \dots)$ a F mají konečné Lebesgueovy integrály a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(X) \, \mathrm{d}X = \int_\Omega F(X) \, \mathrm{d}X = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(X) \, \mathrm{d}X.$$

$\mathcal{P}$.3. Věta. *Funkce $f(X)$ má v bodě X_0 limitu A, když a jen když posloupnost $\{f(X_n)\}$ konverguje k číslu A v případě každé posloupnosti $\{X_n\}$, která konverguje k bodu X_0 ($\|\cdot\|$ značí euklidovskou normu v $\mathbb{R}^N$):*

$$\lim_{n\to 0} \|X_n - X_0\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(X_n) = A\,. \quad \square$$

• Nechť funkce f je definovaná téměř všude v oblasti Ω. Pokud bude nutné, prodloužíme funkci f nulou vně Ω, tj. zavedeme novou funkci $\overline{f}$ definovanou pro téměř všechny body $X \in \mathbb{R}^N$ vztahem

$$\overline{f}(X) = \begin{cases} f(X), & \text{když } X \in \Omega, \\ 0, & \text{když } X \notin \Omega. \end{cases}$$

Namísto $\overline{f}(X)$ budeme často jednoduše psát $f(X)$ pro $X \notin \Omega$.

Definice. Nechť $f \in L_2(\Omega)$. O funkci f říkáme, že je *spojitá podle středu*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že

$$\left(\int_\Omega [f(X+h) - f(X)]^2 \, \mathrm{d}X \right)^{1/2} < \varepsilon$$

za předpokladu $\|h\| < \delta$, kde $h = [h_1, \dots, h_N] \in \mathbb{R}^N$. Zde a všude jinde symbol $\|\cdot\|$ značí euklidovskou normu v $\mathbb{R}^N$, tj.

$$\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_N^2}.$$

$\mathcal{P}$**.4. Věta.** *Nechť* Ω *je ohraničená oblast v* $\mathbb{R}^N$ *(která může být vícenásobně souvislá). Potom každá funkce* $f \in L_2(\Omega)$ *je spojitá podle středu.*

Definice. Nechť zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je definováno vztahy

$$x_1 = f_1(\xi_1, \ldots, \xi_N), \ldots, x_1 = f_N(\xi_1, \ldots, \xi_N).$$

Říkáme, že zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ je *regulární* na množině $G \subset \mathbb{R}^N$, když
a) G je otevřená množina;
b) derivace $\partial f_i / \partial \xi_j$ $(i, j = 1, \ldots, N)$ jsou konečné a spojité v G;
c) $J(\xi) = D(f_1 \ldots, f_N)/D(\xi_1, \ldots, \xi_N) \neq 0$ $\forall \xi \in G$, kde J značí jakobián.

$\mathcal{P}$**.5. Věta (o substituci v Lebesgueově integrálu).** [*Ja, kap. VI*] *Nechť zobrazení* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ *je injektivní* (*tj. jednoduché a do*) *a regulární na množině* $G \subset \mathbb{R}^N$. *Nechť* $D = \mathbf{f}(G)$ *a* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *je libovolná funkce měřitelná na* D. *Potom*

$$\int_D F(X)\,\mathrm{d}X = \int_G F(\mathbf{f}(\xi))|J(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$$

za předpokladu, že alespoň jeden z těchto integrálů existuje.

11.14.1. Funkce φ_0**.** Nechť symbol S značí množinu všech funkcí φ_0, které splňují

$$\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\,, \tag{11.239a}$$

$$\varphi_0(X) \geq 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^N\,, \tag{11.239b}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_0(X)\,\mathrm{d}X = 1\,, \tag{11.239c}$$

$$\operatorname{supp}\varphi_0 = \{X \in \mathbb{R}^N \colon\ \|X\| \leq 1\}\,. \tag{11.239d}$$

Nejprve ukážeme, že množina S není prázdná: Klasickým příkladem funkce, která náleží do $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ je funkce (podrobně viz Dodatek B)

$$\varphi(X) = f(\|X\|^2 - 1),$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{1/t}, & \text{když } t < 0, \\ 0, & \text{když } t \geq 0. \end{cases}$$

Zřejmě $\varphi \geq 0$ a navíc φ je rovna nule i se svými všemi derivacemi pro $\|X\| \geq 1$ (viz opět Dodatek B). Násobíme-li funkci φ konstantou

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(X)\,\mathrm{d}X \right)^{-1},$$

dostaneme prvek množiny S, takže množina S není prázdná.

11.14.2. Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je ohraničená oblast, jejíž hranice sestává z konečného počtu hladkých částí.[20] Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť φ_0 je funkce splňující vztahy (11.239a) – (11.239d). Položme pro $u \in L_1(\Omega)$

$$(R_\varepsilon u)(X) = \varepsilon^{-N} \int_\Omega \varphi_0\left(\frac{X - Y}{\varepsilon}\right) u(Y)\,\mathrm{d}Y\,, \tag{11.240}$$

Zobrazení R_ε dané vztahem (11.240) nazýváme *regularizace* (nebo *mollifier*) a funkce $\varphi_0((X - Y)/\varepsilon)$ je její *regularizující jádro* (někdy též *zhlazující jádro* – anglicky *smoothing kernel*).

[20] To znamená, že řezy a body vratu jsou povoleny.

11.14.3. Věta. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je ohraničená oblast, jejíž hranice sestává z konečného počtu hladkých částí. Nechť* $u \in L_1(\Omega)$. *Potom*

$$R_\varepsilon u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\,, \tag{11.241}$$

$$(D^\alpha R_\varepsilon u)(X) = \varepsilon^{-N} \int_\Omega D_X^\alpha \varphi_0\Big(\frac{X-Y}{\varepsilon}\Big) u(Y)\,\mathrm{d}Y\,, \tag{11.242}$$

kde $D_X^\alpha \varphi_0((X-Y)/\varepsilon)$, *resp.* $D_Y^\alpha \varphi_0((X-Y)/\varepsilon)$ *označuje derivaci vzhledem k* X, *resp. vzhledem k* Y.

Důkaz. **(A)** V této části dokážeme spojitost funkce $R_\varepsilon u$. Nechť $X^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ je libovolný, ale pevně zvolený bod. Podle definice spojitosti je funkce $(R_\varepsilon u)(X)$ spojitá v bodě $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, \dots, x_N^{(0)}]$, když

$$\lim_{X \to X^{(0)}} (R_\varepsilon u)(X) = (R_\varepsilon u)(X^{(0)}).$$

Podle Věty $\mathcal{P}$.3 je funkce $(R_\varepsilon u)(X)$ spojitá v bodě $X^{(0)}$, když a jen když

$$\lim_{n\to\infty} (R_\varepsilon u)(X^{(n)}) = (R_\varepsilon u)(X^{(0)})$$

pro *každou* posloupnost $\{X^{(n)}\}$, která konverguje k bodu $X^{(0)}$, když $n \to \infty$ (tj. splňuje $\lim\limits_{n\to\infty} \|X^{(n)} - X^{(0)}\| = 0$); to znamená, když a jen když

$$(R_\varepsilon u)(X^{(0)}) = \varepsilon^{-N} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_0\Big(\frac{X^{(n)}-Y}{\varepsilon}\Big) u(Y)\,\mathrm{d}Y$$

pro *každou* posloupnost $\{X^{(n)}\}$ konvergující k bodu $X^{(0)}$, když $n \to \infty$.

Položme

$$f_n(Y) := \varphi_0\Big(\frac{X^{(n)}-Y}{\varepsilon}\Big), \quad F(Y) := \varphi_0\Big(\frac{X^{(0)}-Y}{\varepsilon}\Big).$$

Potom skutečnost $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ implikuje

$$\lim_{n\to\infty} f_n(Y) = F(Y) \quad \forall Y \in \Omega\,.$$

Dále,

$$|f_n(Y)u(Y)| \le C(\varphi_0)|u(Y)| \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall Y \in \Omega,$$

kde konstanta $C(\varphi_0) > 0$ záleží pouze na φ_0. Jsou tedy splněny předpoklady Věty $\mathcal{P}$.2 (což je Lebesgueova věta o limitním přechodu za integračním znamením; anglicky: Lebesgue dominated convergence theorem); odtud plyne

$$\varepsilon^{-N} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_0\Big(\frac{X^{(n)}-Y}{\varepsilon}\Big) u(Y)\,\mathrm{d}Y =$$
$$= \varepsilon^{-N} \int_\Omega \varphi_0\Big(\frac{X^{(0)}-Y}{\varepsilon}\Big) u(Y)\,\mathrm{d}Y \equiv (R_\varepsilon u)(X^{(0)})$$

pro *každou* posloupnost $X^{(n)} \to X^{(0)}$. Podle postačující podmínky Věty $\mathcal{P}.3$ je funkce $(R_\varepsilon u)(X)$ spojitá v bodě $X^{(0)}$.

(B) Pro větší jednoduchost se omezme na případ $N = 2$. Nechť $X^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ je libovolný, ale pevně zvolený bod. Označme

$$
\begin{aligned}
A &:= \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_0\Big(\frac{X-Y}{\varepsilon}\Big)\Big|_{X=X^{(0)}} = \\
&= \lim_{x_1\to x_1^{(0)}} \frac{\varphi_0\big(\frac{1}{\varepsilon}[x_1-y_1, x_2^{(0)}-y_2]\big) - \varphi_0\big(\frac{1}{\varepsilon}[x_1^{(0)}-y_1, x_2^{(0)}-y_2]\big)}{x_1-x_1^{(0)}}\,.
\end{aligned}
\tag{11.243}
$$

Z existence derivace plyne (užíváme *nutnou* podmínku Věty $\mathcal{P}.3$)

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_0\big(\frac{1}{\varepsilon}[x_1^{(n)}-y_1, x_2^{(0)}-y_2]\big) - \varphi_0\big[\frac{1}{\varepsilon}(x_1^{(0)}-y_1, x_2^{(0)}-y_2]\big)}{x_1^{(n)}-x_1^{(0)}} = A \tag{11.244}
$$

pro *každou* posloupnost $\{x_1^{(n)}\}$ splňující $x_1^{(n)} \to x_1^{(0)}$. Pro stručnost položme

$$
f_n(y_1,y_2) := \frac{\varphi_0\big(\frac{1}{\varepsilon}[x_1^{(n)}-y_1, x_2^{(0)}-y_2]\big) - \varphi_0\big(\frac{1}{\varepsilon}[x_1^{(0)}-y_1, x_2^{(0)}-y_2]\big)}{x_1^{(n)}-x_1^{(0)}}\,. \tag{11.245}
$$

Podle (11.245) a (11.243), (11.244) platí

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(Y) = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\Big(\frac{X^{(0)}-Y}{\varepsilon}\Big) \quad \forall Y \in \mathbb{R}^2\,; \tag{11.246}
$$

odtud

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(Y)u(Y) = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\Big(\frac{X^{(0)}-Y}{\varepsilon}\Big)u(Y) \quad \text{téměř všude v } \Omega. \tag{11.247}
$$

Protože $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, ze vztahu (11.246) plyne

$$
|f_n(Y)| \le C;
$$

odtud

$$
|f_n(Y)u(Y)| \le C|u(Y)| \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall Y \in \Omega\ (u \in L_1(\Omega)). \tag{11.248}
$$

Podle Věty $\mathcal{P}.2$ vztahy (11.247) a (11.248) implikují

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{(R_\varepsilon u)(x_1^{(n)}, x_2^{(0)}) - (R_\varepsilon u)(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{x_1^{(n)}-x_1^{(0)}} = \varepsilon^{-N}\int_\Omega \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\Big(\frac{X^{(0)}-Y}{\varepsilon}\Big)u(Y)\,\mathrm{d}Y
$$

pro *každou* posloupnost $\{x_1^{(n)}\}$ splňující $x_1^{(n)} \to x_1^{(0)}$. Užijeme-li postačující podmínku Věty $\mathcal{P}.3$, dostaneme odtud[21]

$$
\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}R_\varepsilon u\Big)(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = \varepsilon^{-N}\int_\Omega \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\Big(\frac{X^{(0)}-Y}{\varepsilon}\Big)u(Y)\,\mathrm{d}Y.
$$

[21] Poznamenejme, že pro větší stručnost klademe

$$
\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\Big(\frac{X^{(0)}-Y}{\varepsilon}\Big) := \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_0\Big(\frac{X-Y}{\varepsilon}\Big)\Big|_{X=X^{(0)}}.
$$

Tím je důkaz vztahu (11.242), kde $\alpha = (1,0)$, dokončen a spojitost derivace $D^{(1,0)}R_\varepsilon u$ dokázána. V případě $\alpha = (0,1)$ je důkaz analogický. (V případě $N > 2$ může být spojitost derivace $D^{(1,0,\ldots,0)}R_\varepsilon u$ dokázána stejným způsobem.)

(C) V případě derivací vyšších řádů můžeme postupovat analogicky a dokončit důkaz věty matematickou indukcí.

(D) V případě $\operatorname{dist}(X,\Omega) > \varepsilon$ podle (11.239d) platí $(R_\varepsilon u)(X) = 0$. Odtud plyne vztah (11.241). $\square$

11.14.4. Lemma. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je ohraničená oblast, jejíž hranice sestává z konečného počtu hladkých částí. Položíme-li $u(X) = 0$ pro $X \notin \Omega$, potom můžeme psát*

$$(R_\varepsilon u)(X) = \int_{B(O,1)} u(X - \varepsilon Y)\varphi_0(Y)\,\mathrm{d}Y\,, \tag{11.249}$$

kde $B(O,1) = \{Y \in \mathbb{R}^N : \|Y\| < 1\}$. ($B(O,1)$ je otevřená koule v $\mathbb{R}^N$ se středem v počátku $O = [0,\ldots,0]$ a poloměrem rovným jedné.)

Důkaz. Pro libovolný, ale pevně zvolený bod $X \in \mathbb{R}^N$ položme

$$I := \int_{B(O,1)} u(X - \varepsilon Y)\varphi_0(Y)\,\mathrm{d}Y\,. \tag{11.250}$$

Označme

$$Z = X - \varepsilon Y \quad \text{čili} \quad Y = \frac{X - Z}{\varepsilon}\,. \tag{11.251}$$

Protože jsme zvolili $X \in \mathbb{R}^N$ pevně, ze vztahu (11.251) plyne

$$Y \in B(O,1) \quad \Leftrightarrow \quad Z \in B(X,\varepsilon)\,,$$

kde $B(X,\varepsilon) = \{Z \in \mathbb{R}^N : \|X - Z\| < \varepsilon\}$. Jakobián transformace $(11.251)_2$ splňuje $|J(Z)| = \varepsilon^{-N}$, takže podle Věty $\mathcal{P}.5$ (o substituci v Lebesgueově integrálu) dostaneme z (11.250)

$$I = \varepsilon^{-N} \int_{B(X,\varepsilon)} \varphi_0\Big(\frac{X - Z}{\varepsilon}\Big) u(Z)\,\mathrm{d}Z\,. \tag{11.252}$$

Protože jsme položili $u(Z) = 0$ pro $Z \notin \Omega$, můžeme vztah (11.252) přepsat na tvar

$$I = \varepsilon^{-N} \int_{B(X,\varepsilon)\cap\Omega} \varphi_0\Big(\frac{X - Z}{\varepsilon}\Big) u(Z)\,\mathrm{d}Z\,. \tag{11.253}$$

Konečně, protože $\operatorname{supp}\varphi_0 = \{Y \in \mathbb{R}^N : \|Y\| \le 1\} = \overline{B(O,1)}$, platí

$$\varphi_0\Big(\frac{X - Z}{\varepsilon}\Big) = 0 \quad \forall Z \notin B(X,\varepsilon)\,.$$

Tedy vztah (11.253) může být přepsán takto:

$$I = \varepsilon^{-N} \int_\Omega \varphi_0\Big(\frac{X - Z}{\varepsilon}\Big) u(Z)\,\mathrm{d}Z\,,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

11.14.5. Věta. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je ohraničená oblast, jejíž hranice sestává z konečného počtu hladkých částí, a nechť $u \in L_2(\Omega)$. Potom*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \|R_\varepsilon u - u\|_{L_2(\Omega)} = 0\,. \tag{11.254}$$

Důkaz. Podle vztahu (11.249), který vystupuje v Lemmatu 11.14.4, můžeme psát

$$\begin{aligned}(R_\varepsilon u)(X) - u(X) &= \int_{B(O,1)} u(X - \varepsilon Y)\varphi_0(Y)\,\mathrm{d}Y - u(X) = \\ &= \int_{B(O,1)} [u(X - \varepsilon Y) - u(X)]\varphi_0(Y)\,\mathrm{d}Y\,.\end{aligned}$$

Pomocí Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}[(R_\varepsilon u)(X) - u(X)]^2 &= \left(\int_{B(O,1)} [u(X - \varepsilon Y) - u(X)]\varphi_0(Y)\,\mathrm{d}Y\right)^2 \le \\ &\le \int_{B(O,1)} [\varphi_0(Y)]^2\,\mathrm{d}Y \int_{B(O,1)} [u(X - \varepsilon Y) - u(X)]^2\,\mathrm{d}Y\,.\end{aligned} \tag{11.255}$$

Když položíme

$$C = \int_{B(O,1)} [\varphi_0(Y)]^2\,\mathrm{d}Y$$

a integrujem nerovnost (11.255) přes oblast Ω, dostaneme

$$\begin{aligned}\|R_\varepsilon u - u\|^2_{L_2(\Omega)} &\le C \int_\Omega \int_{B(O,1)} [u(X - \varepsilon Y) - u(X)]^2\,\mathrm{d}Y\ \mathrm{d}X = \\ &= C \int_{B(O,1)} \int_\Omega [u(X - \varepsilon Y) - u(X)]^2\ \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,,\end{aligned} \tag{11.256}$$

kde rovnost v (11.256) je důsledkem Fubiniovy věty. Tvrzení věty 11.14.6 nyní dostaneme, když užijeme na vnitřní integrál na pravé straně vztahu (11.256) větu $\mathcal{P}.4$ (o spojitosti v průměru (či podle středu)) funkcí $f \in L_2(\Omega)$). □

11.14.6. Lemma. *Nechť $u \in L_1(\Omega)$, $D^\alpha u \in L_1(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je ohraničená oblast, jejíž hranice sestává z konečného počtu hladkých částí. Zvolíme-li $\varepsilon > 0$, potom za předpokladu*

$$X \in \Omega, \quad \operatorname{dist}(X, \partial\Omega) > \varepsilon \tag{11.257}$$

platí

$$(D^\alpha R_\varepsilon u)(X) = (R_\varepsilon D^\alpha u)(X)\,. \tag{11.258}$$

Důkaz. Vztah (11.242), Věta 11.14.3 a fakt, že

$$D^\alpha_X \varphi_0\left(\frac{X - Y}{\varepsilon}\right) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha_Y \varphi_0\left(\frac{X - Y}{\varepsilon}\right),$$

dávají

$$(D^\alpha R_\varepsilon u)(X) = \varepsilon^{-N}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha_Y \varphi_0\left(\frac{X-Y}{\varepsilon}\right)u(Y)\,\mathrm{d}Y\,. \tag{11.259}$$

Abychom transformovali vztah (11.259) na tvar vhodný pro důkaz Lemmatu 11.14.6, uvědomme si, že (11.257) v případě funkce

$$\psi_X(Y) := \varphi_0\left(\frac{X-Y}{\varepsilon}\right)$$

implikuje inkluzi $\operatorname{supp}\psi_X \subset \Omega$: Skutečně, nechť $\overline{Y} \in \partial\Omega$; potom

$$\operatorname{dist}(X,\overline{Y}) = \|X-\overline{Y}\| > \varepsilon \quad \text{a} \quad \frac{\|X-\overline{Y}\|}{\varepsilon} > 1.$$

Avšak, $\varphi_0(Z) = 0$ pro $\|Z\| > 1$, takže $\varphi_0(\frac{X-\overline{Y}}{\varepsilon}) = 0$.

Tedy můžeme užít vztah, který vystupuje v definici zobecněné derivace, podle něhož

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-N}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha_Y\varphi_0\left(\frac{X-Y}{\varepsilon}\right)u(Y)\,\mathrm{d}Y =\\ = \varepsilon^{-N}\int_\Omega \varphi_0\left(\frac{X-Y}{\varepsilon}\right)D^\alpha u(Y)\,\mathrm{d}Y = (R_\varepsilon D^\alpha u)(X)\,.\end{aligned} \tag{11.260}$$

Kombinací vztahů (11.259), (11.260) dostaneme tvrzení Lemmatu 11.14.6. □

Tedy (volně řečeno) ve vnitřku oblasti Ω v dostatečné vzdálenosti od hranice $\partial\Omega$ je regularizace $R_\varepsilon u$ funkce $u \in L_1(\Omega)$ hladkou funkcí (ve smyslu spojitosti klasických derivací).

11.14.7. Věta. *Nechť Ω, Ω^* jsou N-rozměrné ohraničené oblasti v $\mathbb{R}^N$, jejichž hranice sestávají z konečného počtu hladkých částí, a nechť uzávěr oblasti Ω^* splňuje $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$. Nechť $u \in L_2(\Omega)$ a $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$. Potom*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\|D^\alpha(R_\varepsilon u) - D^\alpha u\|_{L_2(\Omega^*)} = 0\,. \tag{11.261}$$

Důkaz. Z Lemmatu 11.14.6 plyne, že regularizace $R_\varepsilon u$ funkce u je dobře definovaná v oblasti Ω^* pro dostatečně malá $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon > 0$ musí být tak malé, že $\operatorname{dist}(\overline{\Omega^*},\partial\Omega) > \varepsilon$); zbývá tedy dokázat, že platí vztah (11.261). To je však okamžitým důsledkem Lemmatu 11.14.6 a Věty 11.14.5, protože pro dostatečně malá $\varepsilon > 0$ platí

$$\|D^\alpha(R_\varepsilon u) - D^\alpha u\|_{L_2(\Omega^*)} = \|R_\varepsilon(D^\alpha u) - D^\alpha u\|_{L_2(\Omega^*)}\,. \quad \square$$

V závěru této kapitoly dokážeme, že lineární prostor $C_0^\infty(\Omega)$ je hustý v $L_2(\Omega)$ (slíbili jsme to v textu, který je uveden za Větou 11.7.11). Za tím účelem potřebujeme dokázat toto lemma:

11.14.8. Lemma. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je ohraničená oblast, jejíž hranice sestává z konečného počtu hladkých částí. Je-li nosič funkce $u \in L_1(\Omega)$ obsažen v kompatní podmnožině K oblasti Ω a je-li $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$, potom $R_\varepsilon u \in C_0^\infty(\Omega)$.*

Důkaz. Musíme dokázat, že $\operatorname{supp} R_\varepsilon u$ je kompaktní podmnožinou oblasti Ω. Nechť $X \in \operatorname{supp} R_\varepsilon u$ je libovolný, ale pevný bod; potom $(R_\varepsilon u)(X) \neq 0$. Podle (11.249), $X - \varepsilon Y \in K$ pro nejaký bod $Y \in B(O, 1)$, což znamená pro Y splňující $\|Y\| < 1$. Tedy

$$\operatorname{dist}(X, K) = \inf_{Z \in K} \|X - Z\| \leq \|X - (X - \varepsilon Y)\| = \varepsilon \|Y\| < \varepsilon .$$

Protože předpokládáme, že $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$, bod X nemůže ležet vně oblasti Ω; tedy $X \in \Omega$. Dokázali jsme, že $\operatorname{supp} R_\varepsilon u \subset \Omega$.

Podle Definice 11.7.7 nosič je uzavřená ohraničená množina; tedy $\operatorname{supp} R_\varepsilon u$ je kompaktní podmnožinou[22] oblasti Ω, takže $R_\varepsilon u \in C_0^\infty(\Omega)$. $\square$

11.14.9. Věta. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je ohraničená oblast, jejíž hranice sestává z konečného počtu hladkých částí. Potom množina $C_0^\infty(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_2(\Omega)$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Věty $\mathcal{P}$.1 (o absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu) můžeme najít $\delta > 0$ a kompaktní množinu $K_\delta \subset \Omega$ tak, že $\operatorname{meas}(\Omega \backslash K_\delta) < \delta$, přičemž

$$\int_{\Omega \backslash K_\delta} [u(X)]^2 \, \mathrm{d}X < \tfrac{1}{6}\varepsilon^2 . \tag{11.262}$$

Protože K_δ je kompaktní množina, platí $\operatorname{dist}(K_\delta, \partial\Omega) > 0$. Položme $w = u\big|_{K_\delta}$. Podle Lemmatu 11.14.8 platí $R_\eta w \in C_0^\infty(\Omega)$ $\forall \eta < \operatorname{dist}(K_\delta, \partial\Omega)$. Nalezněme $\eta > 0$ tak malé, že současně platí

$$\|R_\eta w - w\|^2_{L_2(K_\delta)} < \tfrac{1}{3}\varepsilon^2 , \tag{11.263}$$

$$\int_{\Omega \backslash K_\delta} [(R_\eta w)(X)]^2 \, \mathrm{d}X < \tfrac{1}{6}\varepsilon^2 . \tag{11.264}$$

Vztah (11.263) platí podle Věty 11.14.5 a vztah (11.264) plyne z vlastností funkce $R_\eta w \in C_0^\infty(\Omega)$ (funkce $R_\eta w$ je spojitá a pro $X \in \partial\Omega$ platí $(R_\eta w)(X) = 0$). Vztahy (11.262) – (11.264) spolu s identitou

$$\|R_\eta w - u\|^2_{L_2(\Omega)} = \|R_\eta w - u\|^2_{L_2(\Omega \backslash K_\delta)} + \|R_\eta w - w\|^2_{L_2(K_\delta)}$$

implikují[23]

$$\|R_\eta w - u\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon ;$$

protože $R_\eta w \in C_0^\infty(\Omega)$, je důkaz dokončen. $\square$

[22]Tj. ohraničenou a uzavřenou podmnožinou, protože Ω je N-rozměrnou oblastí, takže můžeme užít známou větu o ekvivalenci ohraničenosti a kompaktnosti množin v prostorech konečné dimenze.

[23]Výraz $\|R_\eta w - u\|^2_{L_2(\Omega \backslash K_\delta)}$ odhadneme takto: $\|R_\eta w - u\|^2_{L_2(\Omega \backslash K_\delta)} = \int_{\Omega \backslash K_\delta} (R_\eta w - u)^2 \, \mathrm{d}X \leq \int (R_\eta w)^2 \, \mathrm{d}X + \int u^2 \, \mathrm{d}X + 2 \left| \int (R_\eta w) u \, \mathrm{d}X \right| \leq 2 \int (R_\eta w)^2 \, \mathrm{d}X + 2 \int u^2 \, \mathrm{d}X \leq \frac{2}{3}\varepsilon^2$ podle (11.262) a (11.264).

Poznámka. Užitím (11.240) a (11.239d) lze Lemma 11.14.8 dokázat takto: Nechť $X \in \operatorname{supp} R_\varepsilon u$ je libovolný, ale takový pevný bod, že platí $(R_\varepsilon u)(X) \neq 0$. Potom podle (11.240) existuje $Y \in K$ tak, že $\|X - Y\| < \varepsilon$. Tedy

$$\operatorname{dist}(X, K) = \inf_{Z \in K} \|X - Z\| \leq \|X - Y\| < \varepsilon\,.$$

Zbytek důkazu probíhá stejně jako v 11.14.8.

11.15. Poincaréova nerovnost. Bramble–Hilbertovo lemma. Interpolace. Konvergence MKP

11.15.1. Věta (Poincaréova nerovnost). *Nechť $u \in H^k(I)$, kde $I = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$. Potom*

$$\|u\|_k^2 \leq C\left\{|u|_k^2 + \sum_{j=0}^{k-1}\left(\int_I u^{(j)}(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\right\}, \tag{11.265}$$

kde konstanta $C > 0$ nezávisí na u.

Důkaz. **(A)** Nechť $u \in C^\infty(\overline{I})$ a $\xi, \eta \in I$. Potom

$$u(\eta) - u(\xi) = \int_\xi^\eta u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Povyšme tento vztah na druhou

$$u^2(\eta) + u^2(\xi) - 2u(\xi)u(\eta) = \left(\int_\xi^\eta u'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

a pravou stranu upravme pomocí Schwarz-Buňakovského nerovnosti:

$$\left(\int_\xi^\eta u'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left|\int_\xi^\eta 1^2\,\mathrm{d}x\right| \cdot \left|\int_\xi^\eta \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right|,$$

přičemž znaky absolutních hodnot jsou zbytečné, je-li $\xi < \eta$. Z posledních dvou vztahů plyne

$$u^2(\eta) + u^2(\xi) - 2u(\xi)u(\eta) \leq (b - a)\int_a^b \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrujeme-li tuto nerovnost v intervalu $\langle a, b\rangle$ nejprve podle ξ při konstantním η a potom podle η, dostaneme

$$(b - a)\int_a^b \big(u(\eta)\big)^2\,\mathrm{d}\eta + (b - a)\int_a^b \big(u(\xi)\big)^2\,\mathrm{d}\xi - 2\int_a^b u(\eta)\,\mathrm{d}\eta \int_a^b u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leq$$
$$\leq (b - a)^3 \int_a^b \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

čili
$$\|u\|_0^2 \le \tfrac{1}{2}(b-a)^2|u|_1^2 + \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{11.266}$$
Podle věty o hustotě $C^\infty(\overline{I})$ v $H^1(I)$ vztah (11.266) platí pro všechna $u \in H^1(I)$, Přičteme-li k oběma stranám (11.266) výraz $|u|_1^2$, dostaneme vztah (11.265), kde $C = \max\big(1 + \frac{1}{2}(b-a), 1/(b-a)\big)$.

(B) Stejným způsobem jako jsme dostali (11.266) odvodíme
$$\|u'\|_0^2 \le \tfrac{1}{2}(b-a)^2|u'|_1^2 + \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b u'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \tag{11.267}$$
čili
$$|u|_1^2 \le c_1|u|_2^2 + c_2\left(\int_a^b \big(u'(x)\big)\,\mathrm{d}x\right)^2, \tag{11.267*}$$
kde jsme pro stručnost položili $c_1 = \frac{1}{2}(b-a)^2$, $c_2 = 1/(b-a)$. Dosadíme-li (11.267*) do pravé strany vztahu
$$\|u\|_0^2 \le (1+c_1)|u|_1^2 + c_2\left(\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\right)^2, \tag{11.266*}$$
který jsme získali v závěru části **(A)**, dostaneme
$$\|u\|_1^2 \le (1+c_2)\left\{c_1|u|_2^2 + c_2\left(\int_I u'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\right\} + c_2\left(\int_I u(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$
Přičteme-li k oběma stranám tohoto vztahu $|u|_2^2$, dostaneme (11.265) pro případ $k = 2$. Matematickou indukcí zobecníme tento postup pro libovolné $k \in \mathbb{N}$. (Pochopitelně při každém kroku užijeme větu o hustotě lineárního prostoru $C^\infty(\overline{I})$ v Sobolevově prostoru $H^k(I)$.) $\square$

Lemma, které uvádím ve větě 11.15.2, je jednoduchou aplikací Poincaréovy nerovnosti; má však významné postavení v analýze metody konečných prvků.

11.15.2. Věta (Bramble-Hilbertovo lemma). *Nechť $I = (a,b)$, kde $-\infty < a < b < +\infty$. Nechť F je lineární ohraničený funkcionál na $H^k(I)$,*
$$|F(v)| \le C_1\|v\|_{k,I} \quad \forall v \in H^k(I), \tag{11.268}$$
a nechť
$$F(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_1(k-1)\,, \tag{11.269}$$
kde $\mathcal{P}_1(k-1)$ je množina všech polynomů v $\mathbb{R}^1$ stupně nanejvýš $k-1$. Potom
$$|F(v)| \le C_1C_2|v|_{k,I} \quad \forall v \in H^k(I), \tag{11.270}$$
kde konstanta C_1 nezávisí na funkci v a konstanta C_2 závisí pouze na k a na intervalu I.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že existuje právě jeden polynom $q \in \mathcal{P}_1(k-1)$, který splňuje vztahy
$$\int_I \big(v(x) + q(x)\big)^{(j)}\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad j = 0,1,\ldots,k-1\,. \tag{11.271}$$

To je snadné: Je-li

$$q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1} x^{k-1}, \tag{11.272}$$

potom pro $j = k-1$ z (11.271) dostáváme

$$c_{k-1} = -\frac{1}{(k-1)!(b-a)} \int_I v^{(j)}(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Tento výraz dosadíme do (11.272); odtud vypočteme $q^{(k-2)}(x)$ a dosadíme do (11.271), kde $j = k-2$. Tím dostaneme rovnici pro c_{k-2}, atd.

Z věty 11.15.1 potom plyne, že

$$\|v+q\|_{k,I} \le C_2 |v+q|_{k,I} = C_2 |v|_{k,I}\,.$$

Pomocí vztahu (11.269), linearity funkcionálu F a vztahu (11.268) dále dostaneme

$$|F(v)| = |F(v) + F(q)| = |F(v+q)| \le C_1 \|v+q\|_{k,I}\,.$$

Odhadneme-li pravou stranu předchozím výsledkem, dostaneme nerovnost (11.270), což jsme chtěli dokázat. □

11.15.3. Věta (Interpolační teorém). *Nechť $I = (a,b)$, $-\infty < a < b < +\infty$. Nechť $u_{\mathrm{int}} \in \mathcal{P}_1(n)$ je interpolační polynom funkce u jednoznačně definovaný vztahy*

$$u_{\mathrm{int}}(x_i) = u(x_i), \quad x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{11.273}$$

přičemž body $x_1 < \cdots < x_{n-1}$ dělí interval I na $n-1$ stejně velkých částí. Nechť $u \in H^k(I)$, přičemž

$$2 \le k \le n+1. \tag{11.274}$$

Potom pro $0 \le s \le k$ platí

$$\|u - u_{\mathrm{int}}\|_{s,I} \le C h_I^{k-s} |u|_{k,I}\,, \tag{11.275}$$

kde konstanta $C > 0$ nezávisí na funkci u a kde $h_I = b - a$.

Důkaz. Poznamenejme, že předpoklad $k \ge 2$ zaručuje podle Sobolevovy věty o vnoření, že $u \in C^0\langle a,b\rangle$, takže polynom u_{int} může být definován vztahy (11.273).[24]

Důkaz jednoznačnosti určení polynomu $u_{\mathrm{int}}(x)$ provedeme pro větší jednoduchost v případě $n = 3$: Stačí dokázat, že ze vztahů $u_{\mathrm{int}}(x_i) = 0$ $(i = 0,1,2,3)$ plyne $u_{\mathrm{int}}(x) \equiv 0$. Podle Rolleovy věty existují body ξ_i splňující $x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$, ve kterých $u_{\mathrm{int}}(\xi_i) = 0$. Dalším užitím Rolleovy věty zjistíme existenci bodů η_i splňujících $\xi_0 < \eta_0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2$, ve kterých $u''_{\mathrm{int}}(\eta_0) = u''_{\mathrm{int}}(\eta_1) = 0$. Tedy existuje bod ζ_0 tak, že $u'''_{\mathrm{int}}(\zeta_0) = 0$. Odtud $u_{\mathrm{int}} \in \mathcal{P}(2)$. Protože $u''_{\mathrm{int}}(\eta_0) = 0$, je $u_{\mathrm{int}} \in \mathcal{P}(1)$. Dále $u'_{\mathrm{int}}(\xi_0) = 0$ dává $u_{\mathrm{int}} \in \mathcal{P}(0)$ a protože $u_{\mathrm{int}}(x_0) = 0$, tak platí $u_{\mathrm{int}}(x) \equiv 0$.

(A) Nechť $I_0 = (0,1)$. Položme

$$u^*(\xi) = u(x^*(\xi)), \tag{11.276}$$

kde transformace

$$x^*(\xi) = a + h_I \xi = a + (b-a)\xi, \quad \xi \in I_0 = (0,1), \tag{11.277}$$

zobrazuje vzájemně jednoznačně interval I_0 na interval I. Přitom

$$x_j = x^*(j/n) \quad (j = 0,1,\ldots,n). \tag{11.278}$$

[24] V $\mathbb{R}^1$ dokonce stačí $k \ge 1$.

Zvolme funkci $v \in H^s(I_0)$ libovolně, ale pevně, a definujme lineární funkcionál $F(u^*)$ na $H^k(I_0)$ vztahem

$$F(u^*) = (u^* - (u_{\text{int}})^*, v)_{s,I_0}\,, \tag{11.279}$$

kde polynom $(u_{\text{int}})^*$ je dán vztahem

$$(u_{\text{int}})^*(\xi) = u_{\text{int}}(x^*(\xi)) \tag{11.280}$$

a $(w, v)_{s,I_0}$ je skalární součin v prostoru $H^s(I_0)$:

$$(w, v)_{s,I_0} = \sum_{j=0}^{s} \int_{I_0} D^j w D^j v \;\mathrm{d}\xi\,. \tag{11.281}$$

Ověřme především, že F je lineární funkcionál: Nechť c_1, c_2 jsou dvě libovolná reálná čísla a w^*, $z^* \in H^k(I_0)$ dvě funkce korespondující s funkcemi w, $z \in H^k(I)$ podle vztahu (11.276). Potom

$$F(c_1 w^* + c_2 z^*) = F((c_1 w + c_2 z)^*) = ((c_1 w + c_2 z)^* - ((c_1 w + c_2 z)_{\text{int}})^*, v)_{s,I_0} =$$

$$= (c_1 w^* + c_2 z^* - (c_1 w_{\text{int}} + c_2 z_{\text{int}})^*, v)_{s,I_0} = (c_1 w^* + c_2 z^* - c_1 (w_{\text{int}})^* + c_2 (z_{\text{int}})^*, v)_{s,I_0} =$$

$$= c_1 (w^* - (w_{\text{int}})^*, v)_{s,I_0} + c_2 (z^* - (z_{\text{int}})^*, v)_{s,I_0} = c_1 F(w^*) + c_2 F(z^*)\,.$$

(B) Nyní dokážeme, že

$$|F(u^*)| \le C_1 \|v\|_{s,I_0} \|u^*\|_{k,I_0}\,, \tag{11.282}$$

kde konstanta C_1 nezávisí na v a u^*. Vztah (11.279) implikuje

$$|F(u^*)| \le \|u^* - (u_{\text{int}})^*\|_{s,I_0} \|v\|_{s,I_0} \le \|v\|_{s,I_0} \big(\|u^*\|_{k,I_0} + \|(u_{\text{int}})^*\|_{k,I_0} \big)\,. \tag{11.283}$$

Abychom dokázali (11.282), musíme odhadnout $\|(u_{\text{int}})^*\|_{k,I_0}$ pomocí $\|u^*\|_{k,I_0}$: Podle (11.276), (11.278) a (11.280) platí

$$u^*(j/n) = u(x_j), \quad (u_{\text{int}})^*(j/n) = u_{\text{int}}(x_j) \quad (j = 0, 1, \ldots, n), \tag{11.284}$$

Vztahy (11.284) spolu se vztahy (11.273) dávají

$$(u_{\text{int}})^*(j/n) = u^*(j/n), \quad (j = 0, 1, \ldots, n). \tag{11.285}$$

Lineárnost transformace (11.277) a vztah (11.280) zaručují, že $(u_{\text{int}})^* \in \mathcal{P}_1(n)$. Podle (11.273) je tedy $(u_{\text{int}})^*$ interpolačním polynomem funkce $u^* \in H^k(I_0)$. Odtud

$$(u_{\text{int}})^*(\xi) = \sum_{j=0}^{n} u^*(j/n) \varphi_j^*(\xi), \tag{11.286}$$

kde bázové polynomy $\varphi_j^* \in \mathcal{P}_1(n)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ jsou jednoznačně určeny vztahy

$$\varphi_j^*(i/n) = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n).$$

Platí
$$\|\varphi_j^*\|_{k,I_0} \le \widetilde{K} \quad (j = 0, 1, \dots, n). \tag{11.287}$$

Konstanta $\widetilde{K}$ závisí pouze na pevných veličinách k, n, $\varphi_0^*, \dots, \varphi_n^*$ a může být (po jistém úsilí) vypočtena, což však v tomto důkazu není nutné. Odhad (11.287) a vztah (11.286) implikují

$$\|(u_{\mathrm{int}})^*\|_{k,I_0} \le \sum_{j=0}^{n} |u^*(j/n)| \cdot \|\varphi_j^*\|_{k,I_0} \le \widetilde{K} \sum_{j=0}^{n} |u^*(j/n)| \,.$$

Protože $k \ge 2$ (v $\mathbb{R}^1$ přitom stačí $k \ge 1$), ze Sobolevovy věty o vnoření (viz větu 11.7.29) plyne
$$|u^*(j/n)| \le \max_{\overline{I}_0} |u^*(\xi)| \le K(\overline{I}_0)\|u^*\|_{k,I_0} \,,$$

kde konstanta $K(\overline{I}_0)$ závisí pouze na $\overline{I}_0$. Kombinací posledních dvou odhadů se vztahem (11.283) dostaneme odhad (11.282), kde $C_1 = 1 + n\widetilde{K}K(\overline{I}_0)$.

(C) Nyní dokážeme, že

$$F(u^*) = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{P}_1(n)\,. \tag{11.288}$$

Podle (11.286) je polynom $(u_{\mathrm{int}})^* \in \mathcal{P}_1(n)$ interpolačním polynomem polynomu $u^* \in \mathcal{P}_1(n)$; odtud je $(u_{\mathrm{int}})^* \equiv u^*$. Tento výsledek a vztah (11.279) dávají (11.288).

(D) Podle (11.282) je $F(u^*)$ lineární ohraničený funkcionál na prostoru $H^k(I_0)$ s normou, která není větší než $C_1\|v\|_{s,I_0}$. Protože podle (11.274) je $k - 1 \le n$, vztah (11.288) dává
$$F(u^*) = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{P}_1(k-1). \tag{11.289}$$

Z (11.282) a (11.289) plyne, že oba předpoklady Bramble-Hilbertova lemmatu (viz větu 11.15.2) jsou splněny, takže platí

$$|F(u^*)| \le C_1 C_2 \|v\|_{s,I_0} |u^*|_{k,I_0} \quad \forall u^* \in H^k(I_0), \tag{11.290}$$

kde (jak už bylo zmíněno) $C_1 = 1 + n\widetilde{K}K(\overline{I}_0)$ a konstanta C_2 závisí podle věty 11.15.2 pouze na k a $\overline{I}_0$.

Protože funkce v byla zvolena v $H^s(I_0)$ libovolně, vztahy (11.279) a (11.290) dohromady dávají

$$|(u^* - (u_{\mathrm{int}})^*, v)_{s,I_0}| \le C_1 C_2 \|v\|_{s,I_0} |u^*|_{k,I_0} \quad \forall u^* \in H^k(I_0), \quad \forall v \in H^s(I_0).$$

Položíme-li $v = u^* - (u_{\mathrm{int}})^*$, dostaneme odtud

$$\|u^* - (u_{\mathrm{int}})^*\|_{s,I_0} \le C_1 C_2 |u^*|_{k,I_0} \quad \forall u^* \in H^k(I_0). \tag{11.291}$$

(E) V závěrečné části důkazu přejdeme od nerovnosti (11.291) k odhadu výrazu $\|u - u_{\mathrm{int}}\|_{s,I}$ na intervalu I. K tomu užijeme větu 11.15.4: Položíme-li $w = u - u_{\mathrm{int}}$, dostaneme ze vztahu (11.296) (viz větu 11.15.4 na str. 127) pro $0 \le s \le k$

$$\|u - u_{\mathrm{int}}\|_{s,I} \le \sqrt{h_I}\, h_I^{-s} \|u^* - (u_{\mathrm{int}})^*\|_{s,I}. \tag{11.292}$$

Položíme-li $w = u$, dostaneme ze vztahu (11.297) (viz opět větu 11.15.4)

$$|u^*|_{k,I_0} \le C(k) h_I^k (h_I)^{-1/2} |u|_{k,I}. \tag{11.293}$$

Závěr důkazu je nyní jednoduchý: Násobme (11.291) výrazem

$$\sqrt{h_I} h_I^{-s}$$

a odhadněme levou stranu zdola pomocí (11.292) a pravou stranu shora pomocí (11.293). Dostaneme

$$\|u - u_{\mathrm{int}}\|_{s,I} \le \widetilde{C}(k) h_I^{k-s} |u|_{k,I}\,,$$

což je odhad vyjádřený vztahem (11.275). $\square$

Ve větě 11.15.4 odvodíme vztahy (11.296) a (11.297). K tomu ještě potřebujeme inverzní transformaci k transformaci (11.277), tj.

$$\xi^*(x) = h_I^{-1}(x - a), \quad x \in I = (a, b), \tag{11.294}$$

a vyjádření funkce $w^*(\xi)$ pomocí funkce $w(x)$ (je to opakování vztahu (11.276)):

$$w^*(\xi) = w(x^*(\xi)). \tag{11.295}$$

11.15.4. Věta. *a) Nechť $I = (a, b)$, kde $b - a < 1$, a $I_0 = (0, 1)$. Je-li $w \in C^\infty(\overline{I})$, potom $w^* \in C^\infty(\overline{I}_0)$ a pro libovolná celá čísla s, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ platí tyto vztahy, ve kterých značíme $h_I := b - a$:*

$$\|w\|_{s,I} \le \sqrt{h_I} h_I^{-s} \|w^*\|_{s,I_0}\,, \tag{11.296}$$

$$|w^*|_{k,I_0} = h_I^k (h_I)^{-1/2} |w|_{k,I}\,. \tag{11.297}$$

b) Jestliže $w \in H^k(I)$, potom $w^* \in H^k(I_0)$ a platí vztahy (11.296), (11.297), *přičemž v* (11.296) *je $0 \le s \le k$.*

Důkaz. a) Protože $x^*(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, z předpokladu $w \in C^\infty(\overline{I})$ a vztahu (11.295) plyne (podle věty o derivování složené funkce), že $w^* \in C^\infty(\overline{I}_0)$. Nyní dokážeme (11.296). Podle věty o transformaci integrálu platí

$$\|w\|_{s,I}^2 = \sum_{j=0}^{s} \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}^j w}{\mathrm{d}x^j}\right)^2 \mathrm{d}x = h_I \sum_{j=0}^{s} \int_0^1 \left[\left(w^{(j)}\right)^*(\xi)\right]^2 \mathrm{d}\xi, \tag{11.298}$$

kde

$$(w^{(j)})^*(\xi) = w^{(j)}(x^*(\xi)).$$

Abychom vyjádřili $(w^{(j)})^*$ ve vhodném tvaru, pišme

$$w(x) = w^*(\xi^*(x)). \tag{11.299}$$

Protože $\xi^*(x)$ je lineární funkce, dostaneme z (11.299) derivováním

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}w^*}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi^*}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}w^*}{\mathrm{d}\xi}\frac{1}{h_I}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}w^*}{\mathrm{d}\xi}\right)\frac{1}{h_I} = \frac{\mathrm{d}^2 w^*}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{1}{h_I^2}$$

a obecně

$$\frac{\mathrm{d}^j w}{\mathrm{d}x^j} = \frac{\mathrm{d}^j w^*}{\mathrm{d}\xi^j}\frac{1}{h_I^j}. \tag{11.300}$$

Pravá strana (11.300) je funkcí pouze ξ, takže vyjadřuje $(w^{(j)})^*$:

$$\left(w^{(j)}\right)^* = \left(\frac{\mathrm{d}^j w}{\mathrm{d}x^j}\right)^* = \frac{\mathrm{d}^j w^*}{\mathrm{d}\xi^j}\frac{1}{h_I^j}. \tag{11.301}$$

Dosazením (11.301) do (11.298) a dále užitím vztahu $h_I < 1$ dostaneme

$$\|w\|^2_{s,I} = h_I \sum_{j=0}^{s} |w^*|^2_{j,I_0}\frac{1}{h_I^{2j}} \le h_I h_I^{-2s}\|w^*\|^2_{s,I_0},$$

takže po odmocnění dostaneme nerovnost (11.296).

• Nyní dokážeme (11.297). Protože $x^*(\xi)$ je lineární funkce, dostaneme z (11.295) a (11.277) derivováním

$$\frac{\mathrm{d}^j w^*}{\mathrm{d}\xi^j}(\xi) = \frac{\mathrm{d}^j w}{\mathrm{d}x^j}(x)h_I^j. \tag{11.302}$$

Pravá strana vztahu (11,288) je funkcí pouze x, takže vyjadřuje funkci $(w^*)^{(j)}$ transformovanou z I_0 na I; můžeme ji označit symbolem $((w^*)^{(j)})^\bullet$. Tedy

$$|w^*|^2_{k,I_0} = \int_0^1 \left[\frac{\mathrm{d}^k w^*}{\mathrm{d}\xi^k}(\xi)\right]^2 \mathrm{d}\xi = \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}^k w}{\mathrm{d}x^k}(x)h_I^k\right]^2 \left|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right| \mathrm{d}x = h_I^{2k}h_I^{-1}|w|^2_{k,I}. \tag{11.303}$$

Odmocněním (11.303) dostaneme rovnost (11.297).

b) Nejprve dokážeme, že $w^* \in H^k(I_0)$, jestliže $w \in H^k(I)$. Můžeme užít větu 11.7.21 (resp. 11.7.26) o hustotě lineálu $C^\infty(\overline{I})$ v Sobolevově prostoru $H^k(I)$ a ke každé funkci $w \in H^k(I)$ nalézt posloupnost $\{v_i\} \subset C^\infty(\overline{I})$ takovou, že

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i - w\|_{k,I} = 0. \tag{11.304}$$

Položme

$$v_i^*(\xi) = v_i(x^*(\xi))\,.$$

Stejně jako na začátku části a) platí, že $v_i^* \in C^\infty(I_0)$. Nyní dokážeme, že

$$\|v_j^* - v_i^*\|_{k,I_0} \le (h_I)^{-1/2}\|v_j - v_i\|_{k,I}\,. \tag{11.305}$$

V rovnosti (11.303) položme $u^* = v_j^* - v_i^*$, zaměňme symbol k symbolem m a sečtěme (11.303) od $m = 0$ do $m = k$; dostaneme

$$\|v_j^* - v_i^*\|^2_{k,I_0} = \sum_{m=0}^{k} |v_j^* - v_i^*|^2_{m,I_0} = h_I^{-1}\sum_{m=0}^{k} h_I^{2m}|v_j - v_i|^2_{m,I} \le h_I^{-1}\|v_j - v_i\|^2_{k,I};$$

nerovnost plyne z předpokladu $h_I \le 1$. Odmocněním této nerovnosti dostaneme vztah (11.305).

Podle (11.304) jde pravá strana (11.305) k nule, když $i, j \to \infty$. Tedy $\{v_i^*\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $H^k(I_0)$. Tento výsledek spolu s úplností prostoru $H^k(I_0)$ implikují existenci funkce $\omega \in H^k(I_0)$, pro kterou platí

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i^* - \omega\|_{k,I_0} = 0. \tag{11.306}$$

Protože $k \geq 1$, podle Sobolevovy věty o vnoření platí, že $w \in C^0(\overline{I})$. Odtud a podle (11.295) je (vzhledem k linearitě funkce $x^*(\xi)$) $w^* \in C^0(\overline{I}_0)$. Nyní

$$\|v_i^* - w^*\|_{0,I_0} = \sqrt{\int_0^1 (v_i^*(\xi) - w^*(\xi))^2 \,\mathrm{d}\xi} = \tag{11.307}$$

$$= (h_I)^{-1/2} \sqrt{\int_a^b (v_i(x) - w(x))^2 \,\mathrm{d}\xi} = (h_I)^{-1/2} \|v_i - w\|_{0,I_0} \to 0.$$

Vztahy (11.306), (11.307) a jednoznačnost limity v $L_2(I_0)$ implikují $\omega = w^*$; odtud $w^* \in H^k(I_0)$, což jsme chtěli dokázat. Přitom (dosadíme-li $\omega = w^*$ do (11.306))

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i^* - w^*\|_{k,I_0} = 0. \tag{11.308}$$

Ze vztahů (11.304) a (11.308) plyne

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i\|_{s,I} = \|w\|_{s,I}\,, \quad \lim_{i\to\infty} \|v_i^*\|_{s,I_0} = \|w^*\|_{s,I_0}\,, \tag{11.309}$$

$$\lim_{i\to\infty} |v_i|_{s,I} = |w|_{s,I}\,, \quad \lim_{i\to\infty} |v_i^*|_{s,I_0} = |w^*|_{s,I_0}\,. \tag{11.310}$$

Skutečně, podle trojúhelníkové nerovnosti a vztahu (11.304) platí

$$\|v_i\|_{s,I} = \|v_i + w - w\|_{s,I} \leq \|w\|_{s,I} + \|v_i - w\|_{s,I} \to \|w\|_{s,I}\,.$$

Stejně lze dokázat zbývající tři vztahy vystupující v (11.309) a (11.310).

Zbytek důkazu je jednoduchý: Protože $\{v_i\} \subset C^\infty(\overline{I})$, platí podle již dokázané části a) této věty 11.15.4

$$\|v_i\|_{s,I} \leq \sqrt{h_I}\, h_I^{-s} \|v_i^*\|_{s,I_0}\,, \tag{11.311}$$

$$|v_i^*|_{k,I_0} = h_I^k (h_I)^{-1/2} |v_i|_{k,I}\,. \tag{11.312}$$

Přejdeme-li k limitě pro $i \to \infty$ v (11.311) a (11.312), dostaneme pro funkci $w \in H^k(I)$ odhady (11.296) a (11.297). □

• Zbývá probrat poslední téma této podkapitoly: konvergenci MKP. Zopakujme si věty 11.6.1, 11.6.2 a 11.6.3, které zde uvádím pod čísly 11.15.5, 11.15.6 a 11.15.7, a proveďme důkazy posledních dvou vět, které nebyly v podkap. 11.6 dokázány:

11.15.5. Věta (abstraktní odhad chyby). *Nechť $u \in H^1$ je řešení slabé formulace, ve které vystupuje V-eliptická a ohraničená bilineární forma $a(v, w)$. Potom platí*

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \inf_{v\in W_h} \|u - v\|_1, \tag{11.313}$$

kde C je konstanta nezávislá na h, u a v.

11.15.6. Věta (o maximální rychlosti konvergence). *Nechť bilineární forma $a(v,w)$ je V-eliptická a ohraničená a nechť $u \in H^2(0,\ell)$, kde u je řešení slabé formulace a $H^2(0,\ell) \subset L_2(0,\ell)$ je podprostor funkcí s kvadraticky integrovatelnými prvními a druhými derivacemi. Potom*

$$\|u - u_h\|_1 \le Ch|u|_2 \quad \forall h \in (0;1), \tag{11.314}$$

kde konstanta C nezávisí na h a u a kde seminorma $|u|_2$ je definovaná vztahem

$$|u|_2 = \sqrt{\int_0^\ell (u'')^2 \,\mathrm{d}x}.$$

Důkaz. Nechť $I_h^1 u$ je interpolace funkce $u \in H^2(0,\ell)$ spojitou funkcí, která je po prvcích dělení $\mathcal{D}_h$ (viz (11.6)) lineární. Protože $I_h^1 \in W_h$, vztah (11.313) implikuje

$$\|u - u_h\|_1 \le C\|u - I_h^1 u\|_1.$$

Vztah (11.314) nyní plyne z interpolačního teorému pro jednorozměrné konečné prvky s lineární násadou: viz větu 11.15.3, kde $n = 1$:

$$\|u - I_h^1 u\|_1 \le Ch|u|_2. \tag{11.315}$$

Tím je důkaz věty 11.15.5 dokončen. $\square$

11.15.7. Věta (obecná věta o konvergenci metody konečných prvků). *Nechť jsou splněny předpoklady věty* 11.4.2 *o existenci a jednoznačnosti řešení slabé formulace. Potom*

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_1 = 0, \tag{11.316}$$

kde $u \in H^1(0,\ell)$ je řešení slabé formulace.

Na základní ideu důkazu obecné věty o konvergenci metody konečných prvků jsem přišel v r. 1969 a publikoval o tom s M. Zlámalem článek [ŽZ]. Po vydání tohoto článku příslušný trik nezávisle publikovali v různých časových intervalech mnozí další matematici pracující v MKP. Tento trik spočívá na užití věty o hustotě množiny $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$ v testovacím prostoru V. (V případě $N = 1$ jde o množinu $C^\infty\langle 0,\ell\rangle \cap V$.) Solidní důkaz této věty o hustotě je v případě oblastí $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2,3$) komplikovaný a dlouhý a příslušná věta má tento tvar (viz [Že2, kap. 26, str. 272 – 296] nebo [DŽ]):

11.15.8. Věta (o hustotě $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$ ve V). *Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť*

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \ \mathfrak{T}v = 0 \text{ na } \Gamma_1, \text{ kde } \Gamma_1 \subset \partial\Omega,$$
$$\text{meas}_{N-1}\Gamma_1 > 0 \ (N = 2 \text{ nebo } N = 3)\},$$

kde $\mathfrak{T}v$ je stopa funkce $v \in H^1(\Omega)$ na Γ_1. Potom množina $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$ je hustá v prostoru $V \subset H^1(\Omega)$ testovacích funkcí.

Prostor $H_0^1(0,\ell)$ je $\mathbb{R}^1$-analogií prostoru V z věty 11.15.8, když $\Gamma_1 = \partial\Omega$. Oba prostory V_{S1} a V_{S2} testovacích funkcí jsou analogiemi prostoru V z věty 11.15.8, když Γ_1 je pouze částí hranice $\partial\Omega$. Je přitom

$$C^\infty\langle 0,\ell\rangle \cap H_0^1(0,\ell) = \{v \in C^\infty\langle 0,\ell\rangle : \ v(0) = v(\ell) = 0\}, \tag{11.317}$$

$$C^\infty\langle 0,\ell\rangle \cap V_{S1} = \big\{w \in C^\infty\langle 0,\ell\rangle : \ w(0) = 0\big\}, \tag{11.318}$$

$$C^\infty\langle 0,\ell\rangle \cap V_{S2} = \big\{w \in C^\infty\langle 0,\ell\rangle : \ w(\ell) = 0\big\}. \tag{11.319}$$

11.15.9. Věta.
(a) *$H_0^1(0,\ell)$ je uzávěr množiny $\{C^\infty\langle 0,\ell\rangle : v(0) = v(\ell) = 0\}$ v normě prostoru $H^1(0,\ell)$:*

$$H_0^1(0,\ell) = \big[v \in C^\infty\langle 0,\ell\rangle : v(0) = v(\ell) = 0\big]_1. \tag{11.320}$$

(b) *V_{S1} je uzávěr množiny $\{C^\infty\langle 0,\ell\rangle : v(0) = 0\}$ v normě prostoru $H^1(0,\ell)$:*

$$V_{S1} = \big[v \in C^\infty\langle 0,\ell\rangle : v(0) = 0\big]_1. \tag{11.321}$$

(c) *V_{S2} je uzávěr množiny $\{C^\infty\langle 0,\ell\rangle : v(\ell) = 0\}$ v normě prostoru $H^1(0,\ell)$:*

$$V_{S2} = \big[v \in C^\infty\langle 0,\ell\rangle : v(\ell) = 0\big]_1. \tag{11.322}$$

Důkaz. Operacemi uzávěru vyjádřenými na pravých stranách vztahů (11.320), (11.321) a (11.322) vzniknou uzavřené podprostory úplného prostoru $H^1(0,\ell)$, což znamená, že vzniknou úplné podprostory Sobolevova prostoru $H^1(0,\ell)$. Přitom v hranatých závorkách $[\cdot]_1$ na pravých stranách (11.320) – (11.322) jsou množiny (11.317), (11.318) a (11.319); dokazujeme tedy hustotu množin (11.317), (11.318) a (11.319) v příslušných testovacích prostorech $H_0^1(0,\ell)$, V_{S1} a V_{S2}.

Uzávěr definovaný pravou stranou (11.320) není nic jiného než podprostor prostoru $W^1(0,\ell)$:

$$\big[v \in C^\infty\langle 0,\ell\rangle : v(0) = v(\ell) = 0\big]_1 = W_0^1(0,\ell)\,, \tag{11.323}$$

kde $W_0^1(0,\ell)$ je množina těch funkcí z $W^1(0,\ell)$, které jsou rovny nule v koncových bodech intervalu $\langle 0,\ell\rangle$. (Již víme, že prvky prostoru $W^1(0,\ell)$ jsou absolutně spojité funkce na intervalu $\langle 0,\ell\rangle$, takže má smysl hovořit o funkčních hodnotách v koncových bodech intervalu $\langle 0,\ell\rangle$.) Protože podle Věty 11.7.27 je $H^1(0,\ell) = W^1(0,\ell)$, musí být $H_0^1(0,\ell) = W_0^1(0,\ell)$. // Stejně se dokáže:

$$V_{S1} = W_{S1}^1(0,\ell) = H_{S1}^1(0,\ell), \quad V_{S2} = W_{S2}^1(0,\ell) = H_{S2}^1(0,\ell),$$

kde význam symbolů je jasný. $\square$

Větu 11.15.9 užijeme nyní v důkazu Lemmatu 11.15.10.

11.15.10. Lemma. *Nechť $I = (0,\ell)$. Jsou-li předepsány okrajové podmínky*

$$u(0) = a, \quad u(\ell) = b, \tag{11.324}$$

potom klademe

$$\omega(x) = a + \frac{b-a}{\ell}x, \quad x \in \langle 0,\ell\rangle. \tag{11.324*}$$

Je-li předepsána jediná okrajová podmínka

$$u(0) = a, \quad \text{resp.} \quad u(\ell) = b, \tag{11.325}$$

klademe

$$\omega(x) = a, \quad \text{resp.} \quad \omega(x) = b \quad \forall x \in \langle 0,\ell\rangle. \tag{11.325*}$$

Potom pro každou funkci $v \in H^1(0,\ell)$, která splňuje dané okrajové podmínky (11.324) nebo (11.325), a pro každé $\delta > 0$ můžeme nalézt $v_\delta \in H^2(0,\ell)$ tak, že v_δ splňuje dané okrajové podmínky a platí

$$\|v - I_h^{(n)} v_\delta\|_{1,I} < \delta \quad \forall h \in (0, h_{v,\delta}) \tag{11.326}$$

kdee $I_h^{(n)} v_\delta \in W_h^{(n)}$ je interpolant funkce v_δ při užití interpolačního polynomu n-tého stupně na prvcích $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$.

Důkaz. A) Položme

$$w = v - \omega. \tag{11.327}$$

Potom $w \in V$ a podle věty o hustotě množiny $C^\infty\langle 0,\ell\rangle \cap V$ v testovacím prostoru V (tj. podle Věty 11.15.9) existuje pro každé $\delta > 0$ taková funkce $w_\delta \in C^\infty\langle 0,\ell\rangle \cap V$, že

$$\|w - w_\delta\|_{1,\Omega} < \tfrac{\delta}{2}. \tag{11.328}$$

Pomocí interpolačního teorému 11.15.3 snadno zjistíme, že

$$\|w_\delta - I_h^{(n)} w_\delta\|_{1,I} \le Ch^n |w_\delta|_{n+1,I}.$$

Tedy můžeme najít takové $h_{w,\delta}$, že

$$\|w_\delta - I_h^{(n)} w_\delta\|_{1,\Omega} < \tfrac{\delta}{2} \quad \forall h \in (0, h_{w,\delta}). \tag{11.329}$$

Nerovnosti (11.328), (11.329) implikují

$$\|w - I_h^{(n)} w_\delta\|_{1,\Omega} < \delta \quad \forall h \in (0, h_{w,\delta}). \tag{11.330}$$

B) Položme

$$v_\delta = w_\delta + \omega. \tag{11.331}$$

Platí

$$\|\omega - I_h^{(n)} \omega\|_{1,I} = 0. \tag{11.332}$$

Označíme-li $h_{v,\delta} = h_{w,\delta}$, potom (11.326) plyne z (11.327), (11.330) – (11.332) a z linearity operátoru $I_h^{(n)}$. Protože funkce v_δ splňuje dané okrajové podmínky, důkaz je kompletní. $\square$

Důkaz věty 11.15.7. Podle Lemmatu 11.15.10 můžeme ke každému $\delta > 0$ najít takovou funkci $u_\delta \in H^2(I)$ a takové $h_{u,\delta} > 0$, že u_δ splňuje dané okrajové podmínky (11.324), resp. (11.325), a platí

$$\|u - I_h^{(n)} u_\delta\|_{1,I} < \delta \quad \forall h \in (0, h_{u,\delta}). \tag{11.333}$$

Protože $I_h^{(n)} u_\delta \in W_h^{(n)}$, máme

$$\inf_{v \in W_h^{(n)}} \|u - v\|_{1,I} \le \|u - I_h^{(n)} u_\delta\|_{1,I}. \tag{11.334}$$

Věta 11.15.5 o abstraktním odhadu chyby a nerovnosti (11.333) a (11.334) implikují (11.316). $\square$

Věta 11.15.7 zaručuje konvergenci metody konečných prvků za podmínek, které stačí k existenci a jednoznačnosti přesného řešení $u \in H^1(0,\ell)$ slabé formulace. Je-li navíc přesné řešení dostatečně hladké, tj. $u \in H^2(0,\ell)$, potom věta 11.15.6 zaručuje rychlost konvergence $O(h)$, za předpokladu lineární konečněprvkové násady. Je-li tato násada po prvcích kvadratická a $u \in H^3(0,\ell)$, potom rychlost konvergence je $O(h^2)$, atd.

11.15.11. Friedrichsovy nerovnosti jinak. Friedrichsovy nerovnosti lze také odvodit pomocí Věty 11.15.9: Uvažujme $w \in H_0^1(0,\ell)$. Potom podle Věty 11.7.36ℓ

$$w(x) = \int_0^x w'(t)\ \mathrm{d}t,$$

takže je

$$w^2(t) = \left(\int_0^x w'(t)\ \mathrm{d}t\right)^2.$$

Užijeme-li na pravou stranu tohoto vztahu Schwarzovu nerovnost, dostaneme

$$w^2(x) \le \int_0^x 1^2\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^x (w')^2(t)\ \mathrm{d}t.$$

Protože $(w')^2(t)$ je v intervalu $\langle 0,\ell\rangle$ nezáporná, je tím spíše

$$w^2(x) \le \int_0^x 1^2\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^\ell (w')^2(t)\ \mathrm{d}t = x\int_0^\ell (w')^2(t)\ \mathrm{d}t.$$

Integrujeme-li tuto nerovnost od nuly do ℓ a přejdeme-li k označení x místo t pro integrační proměnnou, dostaneme

$$\int_0^\ell w^2(x)\ \mathrm{d}x \le \tfrac{1}{2}\ell^2 \int_0^\ell (w')^2(x)\ \mathrm{d}x$$

čili

$$\|w\|_0^2 \le \tfrac{1}{2}\ell^2 |w|_1^2.$$

Přičtěme k oběma stranám $|w|_1^2$:

$$\|w\|_1^2 \le \left(1 + \tfrac{1}{2}\ell^2\right)|w|_1^2 \quad \forall w \in C^\infty(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell). \tag{11.335}$$

Užijeme nyní větu o hustotě množiny $C^\infty\langle 0,\ell\rangle \cap H_0^1(0,\ell)$ v $H_0^1(0,\ell)$. Zvolme $v \in H_0^1(0,\ell)$ libovolně, ale pevně. Nechť $\{w_n\} \subset C^\infty\langle 0,\ell\rangle \cap H_0^1(0,\ell)$ je posloupnost, pro kterou

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n - v\|_1 = 0. \tag{11.336}$$

Protože podle (11.335) platí

$$\|w_n\|_1^2 \le \left(1 + \tfrac{1}{2}\ell^2\right)|w_n|_1^2 \quad \forall w_n \in C^\infty\langle 0,\ell\rangle \cap H_0^1(0,\ell), \tag{11.337}$$

limitním přechodem v (11.337) pro $n \to \infty$ dostaneme vzhledem k (11.336) vztah (11.116). $\square$

Analogickou argumentaci můžeme použít při důkazech těchto Friedrichsových nerovností

$$\|v\|_1^2 \le \beta|v|_1^2 \quad \forall v \in V_{S1} \quad (\beta = \text{const} > 0),$$
$$\|v\|_1^2 \le \beta|v|_1^2 \quad \forall v \in V_{S2} \quad (\beta = \text{const} > 0),$$

kde

$$V_{S1} = \left\{w \in H^1(0,\ell):\ w(0) = 0\right\}, \tag{11.175S1}$$

$$V_{S2} = \left\{w \in H^1(0,\ell):\ w(\ell) = 0\right\}. \tag{11.175S2}$$

11.16. Dodatek A (Spojitost podle středu)

$\mathcal{P}$**.3. Věta.** *Funkce $f(X)$ má v bodě X_0 limitu A, když a jen když posloupnost $\{f(X_n)\}$ konverguje k číslu A v případě každé posloupnosti $\{X_n\}$, která konverguje k bodu X_0:*

$$\lim_{n\to 0} \|X_n - X_0\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(X_n) = A\,. \quad \square \tag{*}$$

Pro důkaz Věty $\mathcal{P}$.3 je vhodné formulovat definici limity funkce takto:

Definice. Říkáme, že číslo A je limitou funkce $f(X)$ ($X \in \mathbb{R}^N$) v bodě X_0, přičemž píšeme

$$\lim_{X\to X_0} f(X) = A\,, \tag{**}$$

jestliže ke každému okolí $O_\varepsilon(A)$ bodu A existuje takové okolí $O_\delta(X_0)$ bodu X_0, že

$$f(O_\delta(X_0) \setminus \{X_0\}) \subset O_\varepsilon(A).$$

Důkaz věty $\mathcal{P}$.3. Nutnost podmínky je zřejmá. Dokážeme její dostatečnost (budeme přitom užívat pro ryzí okolí značení $\widetilde{O}(X_0) := O(X_0) \setminus \{X_0\}$): Pokud vztah (**) neplatí, potom existuje takové okolí $O_\varepsilon(A)$ čísla A, že v libovolném ryzím okolí $\widetilde{O}_\delta(X_0)$ můžeme nalézt body, jejichž obrazy neleží v $O_\varepsilon(A)$. Položme $\delta_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) a zvolme v každém ryzím okolí $\widetilde{O}_{\frac{1}{n}}(X_0)$ bod X_n takovým způsobem, že $f(X_n) \notin O_\varepsilon(A)$. Potom posloupnost $\{X_n\}$ konverguje k X_0, ale vztah (*) neplatí, což jsme chtěli dokázat. (Negace právě získané implikace zní: Když platí (*), potom má funkce $f(X)$ v bodě X_0 limitu A.) Poznamenejme, že jsme v tomto důkazu užili axiom výběru. $\square$

$\mathcal{P}$**.6. Věta (Luzin).** *Nechť $f = f(X)$, kde $X = [x_1, \dots, x_n]$, je měřitelná a téměř všude konečná funkce zadaná na ohraničené a měřitelné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Potom k libovolnému $\delta > 0$ existuje taková uzavřená množina F_δ, že restrikce funkce $f(X)$ na F_δ je spojitá na množině F_δ a $\mathrm{meas}_N(\Omega \setminus F_\delta) < \delta$. (Důkaz viz* [Ja].)

$\mathcal{P}$**.4. Věta.** *Nechť Ω je ohraničená oblast v $\mathbb{R}^N$ (může být vícenásobně souvislá). Potom každá funkce $f \in L_2(\Omega)$ je spojitá podle středu, tj. pro $\|h\| < \delta$ platí (kde $\|\cdot\|$ je euklidovská norma)*

$$\left(\int_\Omega [f(X+h) - f(X)]^2 \,\mathrm{d}X\right)^{1/2} < \varepsilon. \tag{A.1}$$

Důkaz. A) Nechť $\varepsilon > 0$. Podle věty $\mathcal{P}$.1 o absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu (viz podkap. 11.14) existuje takové $\eta > 0$, že pro každou měřitelnou množinu $G \in \Omega$, jejíž míra splňuje nerovnost $\mathrm{meas}_N G < 4\eta$, platí

$$\left(\int_G [f(X)]^2 \,\mathrm{d}X\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{A.2}$$

Množinu G vhodnou pro tento důkaz zkonstruujeme v části B).

B) Ke každému η z části A) existuje takové $\varrho > 0$, že

$$\mathrm{meas}_N H_\varrho < \eta, \tag{A.3}$$

kde

$$H_\varrho = \{X \in \Omega : \mathrm{dist}\,(X, \partial\Omega) \le \varrho\}. \tag{A.4}$$

Položme

$$\Omega_\varrho = \Omega \setminus H_\varrho. \tag{A.5}$$

Funkce f je evidentně měřitelná na množině Ω_ϱ; tedy existuje podle Luzinovy věty (viz $\mathcal{P}$.6) taková uzavřená množina $F_\eta^1 \subset \Omega_\varrho$, že restrikce funkce f na F_η^1 je spojitou funkcí, přičemž (pro větší stručnost budeme v tomto důkazu místo symbolu meas_N užívat pouze symbol meas)

$$\operatorname{meas}(\Omega_\varrho \setminus F_\eta^1) < \eta. \tag{A.6}$$

Podle (A.3), (A.5) a (A.6) platí

$$\operatorname{meas}(\Omega \setminus F_\eta^1) = \operatorname{meas}((H_\varrho \cup \Omega_\varrho) \setminus F_\eta^1) = \operatorname{meas}(H_\varrho) + \operatorname{meas}(\Omega_\varrho \setminus F_\eta^1) < 2\eta. \tag{A.7}$$

Protože množina F_η^1 je uzavřená a ohraničená, je funkce f stejnoměrně spojitá[25] na F_η^1. Tedy existuje takové $\delta \in (0, \varrho)$, že

$$|f(X+h) - f(X)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\operatorname{meas}\Omega}} \tag{A.8}$$

pro všechny dvojice bodů X, $X+h \in F_\eta^1$, kde h je libovolné, ale pevné číslo splňující nerovnost $\|h\| < \delta$. (Je to ono h, které se vyskytuje ve formulaci Věty $\mathcal{P}$.4, přičemž $\|h\|$ je euklidovská norma $h \in \mathbb{R}^N$; viz str. 114 dole.)

S užitím h, které souvisí se vztahem (A.8) (tj. takové, že $\|h\| < \delta < \varrho$), definujme translaci T^h pomocí

$$X = [x_1, \dots, x_n] = T^h(Y) = [T_1^h(y_1), \dots, T_N^h(y_N)] = [y_1 - h_1, \dots, y_N - h_N].$$

Položme

$$F_\eta^2 = T^h(F_\eta^1) = \{X = T^h(Y) : Y \in F_\eta^1). \tag{A.9}$$

Protože $F_\eta^1 \subset \Omega_\varrho$, vztahy (A.4) a (A.5) implikují $F_\eta^2 \subset \Omega$. (Tato inkluze je důvodem, že jsme definovali množinu H_ϱ a aplikovali Luzinovu větu na množině Ω_ϱ.) // Tedy vztah (A.9) může být zapsán ve tvaru

$$F_\eta^2 = \{X \in \Omega : X + h \in F_\eta^1\}. \tag{A.10}$$

Položme

$$F_\eta = F_\eta^1 \cap F_\eta^2. \tag{A.11}$$

Množina F_η je uzavřená (protože je průnikem dvou uzavřených množin). Protože

$$\operatorname{meas} F_\eta^1 = \operatorname{meas} F_\eta^2$$

(důsledek invariance Lebesgueovy míry vzhledem k translaci), vztahq (A.7) implikuje $\operatorname{meas}(\Omega \setminus F_\eta^2) < 2\eta$. Užijeme-li nyní druhé de Morganovo pravidlo, nalezneme

$$\operatorname{meas}(\Omega \setminus F_\eta) = \operatorname{meas}((\Omega \setminus F_\eta^1) \cup (\Omega \setminus F_\eta^2)) \le \operatorname{meas}(\Omega \setminus F_\eta^1) + \operatorname{meas}(\Omega \setminus F_\eta^2) < 4\eta.$$

Tedy položíme-li $G = \Omega \setminus F_\eta$, dostaneme z části A)

$$\left(\int_{\Omega \setminus F_\eta} [f(X+h)]^2 \, \mathrm{d}X \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega \setminus F_\eta} [f(X)]^2 \, \mathrm{d}X \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A.12}$$

[25] Říkáme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na množině M, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že $|f(X) - f(Y)| < \varepsilon$ pro všechny dvojice bodů X, $Y \in M$, které splňují $\|X - Y\| < \delta$.

C) Z (A.10) je vidět, že $X + h \in F_\eta^1$ pro $X \in F_\eta$. Tedy vztah (A.8) platí pro všechny body $X \in F_\eta$, takže povýšením nerovnosti (A.8) na druhou a integrací přes F_η dostaneme

$$\left(\int_{F_\eta} [f(X+h) - f(X))]^2 \, \mathrm{d}X \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A.13}$$

Kvůli stručnosti položme

$$\begin{aligned} A &:= \int_{\Omega \setminus F_\eta} [f(X+h) - f(X)]^2 \, \mathrm{d}X \,, \\ B &:= \int_{F_\eta} [f(X+h) - f(X)]^2 \, \mathrm{d}X \,. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Protože $A + B \leq A + B + 2\sqrt{AB} = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$, platí

$$\sqrt{A+B} \leq \sqrt{A} + \sqrt{B} \,. \tag{A.15}$$

Podle (A.14)

$$A + B = \int_\Omega [f(X+h) - f(X))]^2 \, \mathrm{d}X \,. \tag{A.16}$$

Pomocí $(A.14)_1$, trojúhelníkové nerovnosti v $L_2(\Omega)$ a (A.12) dostaneme

$$\sqrt{A} < \tfrac{\varepsilon}{2} \,. \tag{A.17}$$

Konečně, vztahy (A.13) a $(A.14)_2$ implikují

$$\sqrt{B} < \tfrac{\varepsilon}{2} \,. \tag{A.18}$$

Dosadíme-li (A.16) do levé strany vztahu (A.15) a odhadneme-li pravou stranu vztahu (A.15) pomocí (A.17) a (A.18), dostaneme

$$\sqrt{\int_\Omega [f(X+h) - f(X)]^2 \, \mathrm{d}X} < \varepsilon \,,$$

což zakončuje důkaz. □

11.17. Dodatek B (Příklad funkce z $C_0^\infty(\Omega)$)

V tomto dodatku dokážeme, že funkce

$$u(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2-y^2)} & \text{pro } x^2 + y^2 < 1, \\ 0 & \text{jinde v } \Omega \end{cases} \tag{B.1}$$

náleží do lineárního prostoru $C_0^\infty(\Omega)$.

Stačí dokázat tuto skutečnost: Je-li $A = [x_A, y_A] \subset \partial(\operatorname{supp} u)$ libovolný bod a blížíme-li se k A z vnitřku D nosiče $\operatorname{supp} u$ po libovolné cestě, tj.

$$[x, y] \to [x_A, y_A], \quad [x, y] \in D,$$

potom limita jak funkce $u(x, y)$, tak všech jejích parciálních derivací libovolného řádu jsou nuly.

Přímým výpočtem najdeme, že pro $[x, y] \in D$ platí

$$u(x, y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \tag{B.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} \cdot \frac{-2x}{(1-x^2-y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} \cdot \frac{-2y}{(1-x^2-y^2)^2}. \tag{B.3}$$

Abychom našli výrazy pro m-té parciální derivace funkce $u(x, y)$, pišme jak $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$, tak $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ ve tvaru součinu tří funkcí

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) f_2(x, y) f_3(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f_1(x, y) f_2(x, y) f_3(y), \tag{B.4}$$

kde

$$f_1(x, y) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \quad f_2(x, y) = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2}, \quad f_3(\xi) = -2\xi\,. \tag{B.5}$$

Užijeme-li pravidlo pro derivaci složené funkce, dostaneme odtud

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = {} & \frac{4x^2}{(1-x^2-y^2)^4} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \frac{8x^2}{(1-x^2-y^2)^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \\ & - \frac{2}{(1-x^2-y^2)^2} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}},\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^4} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \frac{8xy}{(1-x^2-y^2)^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}, \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = {} & \frac{4y^2}{(1-x^2-y^2)^4} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \frac{8y^2}{(1-x^2-y^2)^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}} - \\ & - \frac{2}{(1-x^2-y^2)^2} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/(1-x^2-y^2)}}.\end{aligned} \tag{B.8}$$

Z (B.2), (B.3), (B.6) – (B.8) vidíme, že každá parciální derivace (doposud pouze do druhého řádu včetně) je součtem konečného počtu výrazů tvaru

$$P(x, y) f_1(x, y) G_m(x, y), \tag{B.9}$$

kde

$$P(x, y) = k x^i y^j \quad (i, j, k \in \mathbb{N}_0), \quad G_m(x, y) = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^m} \quad (m \in \mathbb{N}), \tag{B.10}$$

a že funkce $f_1(x, y)$ je dána vztahem $(B.5)_1$. Snadno vidíme, že každá parciální derivace je součtem konečného počtu výrazů tvaru (B.9). Tedy stačí dokázat, že

$$\lim_{[x,y] \to [x_A, y_A]} P(x, y) f_1(x, y) G_m(x, y) = 0 \quad ([x, y] \in D). \tag{B.11}$$

Abychom dokázali (B.11), zaveďme polární souřadnice

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi, \tag{B.12}$$

které nám umožní zapsat pravou stranu vztahu (B.11) ve tvaru

$$\lim_{[x,y] \to [x_A, y_A]} P(x, y) f_1(x, y) G_m(x, y) = \lim_{\substack{r \to 1- \\ \varphi \to \varphi_A}} \left\{ P(r\cos\varphi, r\sin\varphi) F_m(r) \right\}, \tag{B.13}$$

kde

$$F_m(r) = \frac{\frac{1}{(1-r^2)^m}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-r^2}}}\,. \tag{B.14}$$

Podle (B.13), (B.14) platí

$$\lim_{\substack{r\to 1-\\ \varphi\to\varphi_A}} \left\{P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)F_m(r)\right\} = P(\cos\varphi_A, \sin\varphi_A) \lim_{r\to 1-} \frac{\frac{1}{(1-r^2)^m}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-r^2}}}\,. \tag{B.15}$$

Limita vystupující na pravé straně vztahu (B.15) může být vypočtena pomocí l'Hospitalova pravidla a matematické indukce. Nalezneme, že

$$\lim_{r\to 1-} \frac{\frac{1}{(1-r^2)^m}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-r^2}}} = 0\,. \tag{B.16}$$

Vztahy (B.13) – (B.16) dávají

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[x_A,y_A]\\ [x,y]\in D}} D^\alpha u(x,y) = 0 \quad \forall|\alpha| \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,.$$

Tím je důkaz, že funkce ($\mathcal{P}$.40) náleží do $C_0^\infty(\Omega)$ dokončen. Získaný výsledek lze zobecnit na případ $N = 3$ užitím sférických souřadnic. V $\mathbb{R}^1$ je naopak výpočet jednodušší. $\square$

Poznámka. Stejným způsobem můžeme dokázat, že funkce

$$u(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{(x^2+y^2)/(x^2+y^2-1)} & \text{pro } x^2+y^2 < 1,\\ 0 & \text{jinde v } \overline{\Omega} \end{cases}$$

náleží do $C_0^\infty(\Omega)$. Funkce tohoto typu jsou často užívány. Bývají psány ve tvaru (N značí počet proměnných)

$$\omega_h(Z) = \begin{cases} \varkappa h^{-N} \exp\left(\frac{\|Z\|^2}{\|Z\|^2-h^2}\right) & \text{pro } \|Z\| < h,\\ 0 & \text{pro } \|Z\| \ge h; \end{cases}$$

symbol $\|\cdot\|$ označuje euklidovskou normu a konstanta $\varkappa$ je definována vztahem

$$\int_{\mathbb{R}^N} \omega_1(Z)\,\mathrm{d}Z = \int_{\mathbb{R}^N} \omega_h(Z)\,\mathrm{d}Z = 1$$

z kterého dostaneme

$$\varkappa = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(\frac{\|Z\|^2}{\|Z\|^2-1}\right)\mathrm{d}Z\right)^{-1}.$$

První rovnost plyne ze skutečnosti, že

$$\|Z\|^2/(\|Z\|^2-h^2) = \|Z/h\|^2/(\|Z/h\|^2-1),$$

a pomocí substituce $Z = hX = [hx_1,\ldots,hx_N]$, která implikuje $\mathrm{d}Z = h^N\,\mathrm{d}X$.

11.18. Dodatek C (Hustota $C^\infty(\bar{I})$ v $H^k(I)$)

11.18.1. Věta (o rozkladu jedničky na intervalu). *Nechť $I = (a,b) \subset \mathbb{R}^1$ je konečný interval. Nechť ohraničené intervaly U_0, U_1, U_2 pokrývají $\overline{I}$ tak, že $\overline{U}_0 \subset I$. Potom existují takové funkce $\varphi_i \in C_0^\infty(U_i)$ $(i = 0,1,2)$, že*

$$0 \le \varphi_i(x) \le 1 \ \forall x \in \overline{I}, \quad \varphi_1(a) = \varphi_2(b) = 1, \quad \sum_{i=0}^{2} \varphi_i(x) = 1 \ \forall x \in \overline{I}.$$

Důkaz. Nechť intervaly G_0, G_1, G_2 splňující $G_i \subset U_i$ $(i = 0,1,2)$ také pokrývají $\overline{I}$, přičemž

$$\operatorname{dist}(G_i, \partial U_i) > h > 0 \quad (i = 0,1,2), \tag{C.1}$$

kde $h > 0$ je dostatečně malé. Uvažujme funkci

$$\omega(h,x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{1/(|x|^2 - h^2)} & \text{pro } |x| < h, \\ 0 & \text{pro } |x| \ge h. \end{cases} \tag{C.2}$$

Podle Dodatku B platí $\omega(h,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$. Každá kompaktní množina $\overline{G}_i$ může být pokryta intervaly K_{ij}^h o poloměru h a se středy y_{ij} $(j = 1,2,\dots,n_i)$ tak, že středy y_{ij} intervalů pokrývajících ∂G_i leží na ∂G_i. Položme

$$\psi_i(x) := \sum_{j=1}^{n_i} \omega(h, x - y_{ij}). \tag{C.3}$$

Vztahy (C.1) a (C.2) implikují

$$\omega(h, x - y_{ij}) \in C_0^\infty(U_i);$$

tedy podle (C.3)

$$\psi_i(x) \in C_0^\infty(U_i). \tag{C.4}$$

Protože $\overline{G}_i \subset \bigcup_{j=1}^{n_i} K_{ij}^h$ a $\omega(h, x - y_{ij}) > 0$, když $x \in K_{ij}^h$ (tato skutečnost plyne z (C.2)), dostáváme

$$\psi_i(x) > 0, \quad x \in \overline{G}_i. \tag{C.5}$$

Každý bod $x \in \overline{I}$ náleží alespoň do jednoho intervalu G_i; tudíž (C.5) implikuje

$$\sum_{i=0}^{2} \psi_i(x) > 0 \quad \forall x \in \overline{I}. \tag{C.6}$$

Podobně

$$\sum_{i=1}^{2} \psi_i(x) > 0, \ \psi_0(x) = 0 \quad \forall x \in \{a,b\}. \tag{C.7}$$

Položme

$$\varphi_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{\sum\limits_{i=0}^{2} \psi_i(x)} \quad (i = 0,1,2). \tag{C.8}$$

Vztahy (C.4), (C.6) a (C.7) implikují, že funkce (C.8) splňuje tvrzení Věty 11.18.1. □

11.18.2. Věta (o hustotě $C^\infty(\overline{I})$ v $H^k(I)$). *Lineární prostor $C^\infty(\overline{I})$ je hustý v $H^k(I)$.*

Důkaz. A) Nechť $u \in H^k(I)$, kde $I = (a, b)$, je libovolná, ale pevná funkce. Nechť U_1 a U_2 jsou disjunktní intervaly z Věty 11.18.1, které jsou okolími koncových bodů a, b. Nechť dále U_0 je takový interval, že

$$\overline{U}_0 \subset I, \quad \bigcup_{r=0}^{2} U_r \supset \overline{I}\,. \tag{C.9}$$

Potom věta o rozkladu jedničky na intervalu (viz větu 11.18.1) implikuje existenci takových funkcí $\varphi_r \in C_0^\infty(I)$ $(r = 0, 1, 2)$, že $\operatorname{supp} \varphi_r \subset U_r$, $0 \le \varphi_r(x) \le 1$, přičemž

$$\sum_{r=0}^{2} \varphi_r(x) = 1, \quad x \in \overline{I}\,. \tag{C.10}$$

Definujme $u(x) = 0$ pro $x \notin I$ (tento obrat užijeme v důkazu několikrát; je třeba zdůraznit, že takto prodloužená funkce u zůstává prvkem $H^k(I)$) a položme

$$u_r(x) := \varphi_r(x) u(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (r = 0, 1, 2). \tag{C.11}$$

Je zřejmé, že

$$u_r \in H^k(I), \quad \operatorname{supp} u_r \subset U_r, \quad \operatorname{supp} u_r \setminus \{a, b\} \subset I\,. \tag{C.12}$$

Abychom dokázali, že $C^\infty(\overline{I})$ je hustá podmnožina normovaného prostoru $H^k(I)$, stačí dokázat následující tvrzení:

(*) Existuje posloupnost takových funkcí $\psi_{rn} \in C_0^\infty(I)$ $(n = 1, 2, \dots)$ že $\operatorname{supp} \psi_{rn} \subset U_r$ $(r = 0, 1, 2)$, přičemž

$$\lim_{n\to\infty} \|u_r - \psi_{rn}\|_{k,I} = 0 \quad (r = 0, 1, 2).$$

Skutečně, vztahy (C.10), (C.11) implikují

$$u(x) = \sum_{r=0}^{2} u_r(x), \quad x \in I,$$

takže když položíme

$$\psi_n(x) := \sum_{r=0}^{2} \psi_{rn}(x),$$

dostaneme z (*) pomocí trojúhelníkové nerovnosti

$$\|u - \psi_n\|_{k,I} = \Big\| \sum_{r=0}^{2} (u_r - \psi_{rn}) \Big\|_{k,I} \le \sum_{r=0}^{2} \|u_r - \psi_{rn}\|_{k,I} \to 0, \text{ když } n \to \infty.$$

Zvolme $\xi \in (0, \frac{1}{3}(b - a))$ a definujme interval

$$I_\xi = (a - \xi, b + \xi). \tag{C.13}$$

Dále položme

$$u_{r\xi}(x) := u_r(x + h_r) \quad (1 \le r \le 2;\ \ h_1 = \xi,\ \ h_2 = -\xi)\,. \tag{C.14}$$

Graf funkce $u_{1\xi}$, resp. $u_{2\xi}$, získáme translací grafu funkce u_1, resp. u_2, v záporném, resp. kladném směru osy x o délku ξ. Obě translace můžeme vyjádřit takto:

$$x = T_r(y) = y - h_r, \quad y \in U_r\,. \tag{C.15}$$

Inverzní transformace k (C.15) má tvar

$$y = T_r^{-1}(x) = x + h_r, \quad x \in T_r(U_r)\,. \tag{C.16}$$

Užitím (C.16) můžeme psát vztahy (C.14) ve taru

$$u_{r\xi}(x) = u_r(T_r^{-1}(x)), \quad x \in T_r(U_r)\,. \tag{C.17}$$

Konečně, budeme potřebovat vztahy

$$\operatorname{supp} u_{r\xi} = T_r(\operatorname{supp} u_r), \quad \operatorname{supp} u_r = T_r^{-1}(\operatorname{supp} u_{r\xi})\,. \tag{C.18}$$

Nyní můžeme užít větu $\mathcal{P}.5$ o substituci v Lebesgueově integrálu (viz začátek podkap. 11.14). Protože pro jakobián $J(y)$ transformace (C.15) platí $J(y) = 1$ a protože zobecněné derivace funkcí $u_{r\xi}$ a u_r splňují zřejmé vztahy

$$D^j u_{r\xi}(x) = D^j u_r(y), \quad 0 \le j \le k,$$

můžeme podle Věty $\mathcal{P}.5$ psát

$$\begin{aligned} \|u_{r\xi}\|^2_{k,\operatorname{supp} u_{r\xi}} &\equiv \sum_{j=0}^{k} \int_{\operatorname{supp} u_{r\xi}} \left(D^{(j)} u_{r\xi}(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \\ &= \sum_{j=0}^{k} \int_{\operatorname{supp} u} \left(D^{(j)} u_r(y)\right)^2 \mathrm{d}y \equiv \|u_r\|^2_{k,\operatorname{supp} u_r}. \end{aligned} \tag{C.19}$$

Vztah (C.19) dává

$$\|u_{r\xi}\|_{k,\operatorname{supp} u_{r\xi}} = \|u_r\|_{k,\operatorname{supp} u_r}, \tag{C.20}$$

tj.

$$u_{r\xi} \in H^k(\operatorname{supp} u_{r\xi}). \tag{C.21}$$

Protože $\operatorname{supp} u_{r\xi} \subset I_\xi$, kde $I_\xi = (a - \xi, b + \xi)$ (viz (C.13)), platí (připomínám, že $u(x) = 0$ pro $X \notin I$; dále připomínám definici (C.14) funkce $u_{r\xi}$ a (konečně) vlastnosti nosiče funkce)

$$u_{r\xi} \in H^k(I_\xi); \tag{C.22}$$

odtud (protože $\overline{I} \subset I_\xi$)

$$u_{r\xi} \in H^k(I)\,. \tag{C.23}$$

(Vztah (C.23) znamená, že restrikce funkce $u_{r\xi}$ na interval I náleží do $H^k(I)$.)

• Po tomto zdlouhavějším úvodu přikročíme k samotnému jádru důkazu, ve kterém budeme aplikovat větu o spojitosti funkcí z L_2 podle středu (touto aplikací získáme odhad (C.25) rozdílu $u_r - u_{r\xi}$) a Větu 11.14.9 z teorie regularizace, pomocí níž získáme odhad (C.26) rozdílu posunutí $u_{r\xi}$ a jeho zhlazení $R_\eta(u_{r\xi})$. Užitím trojúhelníkové nerovnosti potom dostaneme odhad (C.28). // K detailům důkazu: Podle (C.14)

$$D^j u_r(x) - D^j u_{r\xi}(x) = D^j(u_r(x) - u_r(x+h_r)) \quad (1 \le r \le 2;\ h_1 = \xi,\ h_2 = -\xi). \tag{C.24}$$

Protože $u_r \in H^k(I)$ a $u_{r\xi} \in H^k(I)$, lze levou stranu (C.24) (a tedy i pravou) kvadraticky integrovat přes $\operatorname{supp} u_r$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom podle věty o spojitosti funkcí $u \in L_2(I)$ (či obecně funkcí $u \in L_2(\Omega)$) *podle středu* (viz větu $\mathcal{P}$.4 z Dodatku A) a podle vztahů (C.24) můžeme nalézt tak malé $\xi = \xi(\varepsilon)$, že

$$\|u_r - u_{r\xi}\|_{k,I} = \Big\{\sum_{j=0}^{k} \int_I [D^j(u_r(x) - u_r(x+h_r))]^2 \,\mathrm{d}X\Big\}^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{C.25}$$

kde $1 \le r \le 2$, přičemž $h_1 = \xi, \quad h_2 = -\xi$. Dále (vzhledem k (C.13), (C.22), (C.23)) existuje podle Věty 11.14.9 takové $\eta_0 > 0$, že pro $0 < \eta < \eta_0$ platí

$$\|R_\eta(u_{r\xi}) - u_{r\xi}\|_{k,I} < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{C.26}$$

Pro dostatečně velké n (takové, že $\frac{1}{n} < \eta$) položme

$$\psi_{rn}(x) = R_{\frac{1}{n}}(u_{r\xi})(x), \quad x \in I\,. \tag{C.27}$$

Podle (C.25), (C.26) a trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\|R_{\frac{1}{n}}(u_{r\xi}) - u_r\|_{k,I} \le \|R_{\frac{1}{n}}(u_{r\xi}) - u_{r\xi}\|_{k,I} + \|u_{r\xi} - u_r\|_{k,I} < \varepsilon\,. \tag{C.28}$$

Protože podle (C.27) máme

$$(u_r - \psi_{rn})(x) = u_r(x) - R_{\frac{1}{n}}(u_{r\xi})(x),$$

vidíme podle (C.28)

$$\|\psi_{rn} - u_r\|_{k,I} = \|R_{\frac{1}{n}}(u_{r\xi}) - u_r\|_{k,I} < \varepsilon \quad (1 \le r \le 2). \tag{C.29}$$

Zbývá dokázat, že $\psi_{rn} \subset C_0^\infty(I)$, přičemž

$$\operatorname{supp}\psi_{rn} \subset U_r \quad (1 \le r \le 2)\,.$$

To však plyne z Věty 11.14.3, zejména z (11.241) a z části D důkazu této věty (vztah (11.255)), která v našem případě zní: pokud $\operatorname{dist}(x, I) > \frac{1}{n}$, potom $R_{\frac{1}{n}}(u_{r\xi})(x) = 0$ podle (11.239d) (a také: jestliže $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} u_{r\xi}) > \frac{1}{n}$, potom $R_{\frac{1}{n}}(u_{r\xi})(x_r) = 0$ podle (11.239d)).

Prozatím jsme dokázali tvrzení (*) pro $1 \le r \le 2$. V případě $r = 0$ platí podle Věty 11.14.9,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_0 - R_{\frac{1}{n}}(u_0)\|_{k,I} = \lim_{n\to\infty} \|u_0 - R_{\frac{1}{n}}(u_0)\|_{k,U_0} = 0\,,$$

což je opět tvrzení (*). Důkaz Věty 11.18.2 je dokončen. $\square$

11.18.3. Poznámka. Protože oba hlavní nástroje důkazu Věty 11.18.2 (tj. věta o spojitosti funkcí $u \in L_2(\Omega)$ podle středu a teorie regularizace) jsou v této knížce dokázány v $\mathbb{R}^N$ bez ohledu na dimenzi N, lze uvedený důkaz snadno modifikovat pro libovolné N. Je třeba jenom zobecnit úvodní část důkazu, která předchází značce •. Místo symbolu I budeme psát Ω, definice I_ξ bude zaměněna vztahem

$$\Omega_\xi = \{y \in \mathbb{R}^N : \ \mathrm{dist}\,(y, \Omega) < \xi\} .$$

a hranici $\partial\Omega$ oblasti Ω je třeba pokrýt m oblastmi U_r, přičemž s každou oblastí U_r je spojen lokální souřadnicový systém $(x_1 \ldots, x_N)$ (podrobnosti viz [Že2, kap. 4]).

11.19. Závěry ke kapitole 11

Struktura Sobolevova prostoru $H^1(I)$, kde $I = (a, b)$ je konečný interval, je velmi jednoduchá, protože každá funkce $v \in H^1(I)$ je absolutně spojitá (důkaz viz v 11.7.31). To má za následek (viz krátký důkaz věty 11..7.36h, kterému však předchází teorie monotonních funkcí, jejíž výsledky jsou pouze citovány a obtížné důkazy vynechány), že funkce $v \in H^1(I)$ mají konečnou variaci, takže můžeme (vzhledem k Větě 11.7.36e) aplikovat Větu 11.7.34, ze které vyplývá, že absolutně spojité funkce mají téměř ve všech bodech $x \in \langle a, b\rangle$ konečnou derivaci $v'(x)$, což je hlavní tvrzení Věty 11.7.36h. (Důkaz fundamentální věty 11.7.34 je velmi dlouhý a zabírá více než pět stran; viz [Na, kap. VIII, §1].)

Zobecněná derivace absolutně spojité funkce $u \in H^1(I)$ je rovna klasické derivaci této funkce ($D^1 u = u'$) a pro absolutně spojité funkce platí zobecnění Newton-Leibnizova vzorce

$$\int_a^x u'(t)\ \mathrm{d}t = u(x) - u(a) \quad \forall u \in H^1(a, b)\,. \tag{11.113}$$

V případě funkcí $u \in H^1(I)$ je toto zobecnění dokázáno ve Větě 11.7.30. Tato věta umožňuje dokázat Friedrichsovy nerovnosti v případě různých okrajových podmínek. Tyto nerovnosti potom implikují V-eliptičnost forem $a(w, v)$ vystupujících v slabých formulacích různých okrajových problémů lineárních ODR 2. řádu. V-eliptičnost zaručuje s dalšími snadno dokazatelnými postačujícími podmínkami existenci a jednoznačnost řešení příslušné slabé formulace. Důkaz se přitom provádí pomocí Lax-Milgramovy věty.

Protože hranice ∂I konečného intervalu I je dvoubodová, $\partial I = \{a, b\}$, platnost fundamentální Věty 11.7.27 s názvem $W^k = H^k$ je univerzální. Analogická věta v $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) platí za předpokladu, že hranice $\partial\Omega$ vícerozměrné oblasti Ω je spojitá podle Nečase.

Vzhledem k relativně jednoduché struktuře prostoru $H^1(I)$ neexistuje v $\mathbb{R}^1$ samostatné tvrzení, které by se dalo nazvat *větou o stopách.* Nerovnost, která má formálně stejnou strukturu jako věta o stopách v $\mathbb{R}^N$, je pouze speciálním případem nerovnosti ze Sobolevovy věty o vnoření (viz 11.7.35).

Z hlediska délky a obtížnosti důkazů vystupuje v této knížce do popředí šest výsledků: (1) důkaz Sobolevovy věty o vnoření v podkap. 11.12; (2) důkaz hustoty lineárního prostoru $C_0^\infty(I)$ (resp. $C_0^\infty(\Omega)$) v prostoru $L_2(I)$ (resp. v prostoru $L_2(\Omega)$) (tato věta spolu se svým důkazem je nedílnou součástí teorie regularizace, která je probírána přímo v $\mathbb{R}^N$ a které je věnována podkap. 11.14); (3) důkaz interpolačního teorému vysloveného ve Větě 11.15.3; (4) důkaz spojitosti funkcí $u \in L_2(\Omega)$ podle středu v podkap. 11.16; (5) dvojrozměrný příklad funkce z $C_0^\infty(\Omega)$ uvedený v podkap. 11.17; (6) důkaz hustoty $C^\infty(\overline{I})$ v $H^k(I)$.

Položky (2) a (4) jsou přímo probírány v $\mathbb{R}^N$, položka (5) v $\mathbb{R}^2$. Interpolační teorém 11.15.3 lze snadno zobecnit do $\mathbb{R}^2$, když máme k dispozici větu o vzájemně jednoznačném zobrazení jednotkového trojúhelníka T_0 (který leží v rovině ξ, η a má vrcholy $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$ a $R_3(0,1)$) na obecný trojúhelník, který leží v rovině x, y, a máme-li k dispozici zobecnění věty 11.15.4 do $\mathbb{R}^2$.

Co se týče položky (1), již jsem se zmínil v podkap. 11.12, že mezi části **(A)** a **(B)** je v $\mathbb{R}^N$ nutné vložit část transformující výsledek získaný na $(-1,1)^N$ na oblast, která je součástí pokrytí hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω. Konečně, co se týče položky (6), v Poznámce 11.18.3 jsem již uvedl, jak se liší příslušný důkaz v $\mathbb{R}^N$ od případu v $\mathbb{R}^1$. (Důkaz Věty 11.18.1 o rozkladu jedničky v $\mathbb{R}^1$ je nepatrnou obdobou N-rozměrného případu.)

Z tohoto rozboru plyne užitečný závěr: Dříve než se pustíme do studia Sobolevových prostorů v $\mathbb{R}^N$, je vhodné začít s jejich studiem v $\mathbb{R}^1$. Nikdo to nedělá, protože příslušná literatura není k dispozici.

12. Banachův princip pevného bodu v teorii ODR

12.1. Definice. Nechť X je metrický prostor. Zobrazení $A : X \to X$ prostoru X do prostoru X se nazývá *kontraktivní* (nebo *kontrakce*), existuje-li takové číslo $0 < \alpha < 1$, že pro libovolné dva body $x, y \in X$ platí nerovnost

$$\varrho(Ax, Ay) \le \alpha\varrho(x, y). \tag{12.1}$$

Bod x se nazývá *pevný bod zobrazení* A, jestliže $Ax = x$. Jinak řečeno, pevné body jsou řešeními rovnice $Ax = x$.

12.2. Věta. *Každé kontraktivní zobrazení je spojité.*

Důkaz. Jestliže $x_n \to x$, potom podle (12.1) také platí $Ax_n \to Ax$. Tvrzení Věty 12.2 nyní plyne z Věty $\mathcal{P}$.3 uvedené na str. 134, resp. 114. $\square$

12.3. Věta (BPPB). *Každé kontraktivní zobrazení definované v úplném metrickém prostoru má právě jeden pevný bod.*

Důkaz. Nechť $x_0 \in X$ je libovolný bod. Položme $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$, atd.; obecně je $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$.

1. Ukážeme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská: Předpokládáme-li pro určitost, že $m \ge n$, dostaneme podle (12.1)

$$\varrho(x_n, x_m) = \varrho(A^n x_0, A^m x_0) \le \alpha^n \varrho(x_0, A^{m-n}x_0) = \alpha^n \varrho(x_0, x_{m-n}) \le$$

$$\le \alpha^n \Big[\varrho(x_0, x_1) + \varrho(x_1, x_n) + \cdots + \varrho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\Big] \le$$

$$\le \alpha^n \varrho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}) = \alpha^n \varrho(x_0, x_1)\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \le \alpha^n \varrho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}\,.$$

Protože $\alpha < 1$, je tento výraz pro dostatečně velká přirozená čísla libovolně malý. Tedy posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská.

2. Vzhledem k úplnosti prostoru X má posloupnost, která je cauchyovská, v tomto prostoru limitu. Položme

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ v } X, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0\,.$$

Potom vzhledem k větám 12.2 a $\mathcal{P}$.3 platí

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x\,.$$

Tím jsme dokázali *existenci* pevného bodu. K důkazu jeho *jednoznačnosti* předpokládejme, že existují dva body x, y, pro které

$$Ax = x, \quad Ay = y\,.$$

Z nerovnosti (12.1) potom plyne nerovnost

$$\varrho(x, y) \le \alpha\varrho(x, y)\,,$$

odkud vzhledem k tomu, že $\alpha < 1$, plyne $\varrho(x, y) = 0$, tj. $x = y$. □

12.4. Věta (Picard). *Mějme diferenciální rovnici*

$$y' = f(x, y) \tag{12.2}$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0, \tag{12.3}$$

přičemž funkce f je definovaná a spojitá v nějaké rovinné oblasti G,[26] *která obsahuje bod $[x_0, y_0]$ a splňuje v této oblasti Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné y:*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall\,(x, y_1), (x, y_2).$$

Potom v nějakém intervalu $|x - x_0| \le \delta$ existuje právě jedno řešení $y = \varphi(x)$ rovnice (12.2)*, které splňuje počáteční podmínku* (12.3)*.*

Důkaz. Rovnici (12.2) přepíšeme v tomto důkazu na tvar

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \tag{12.4}$$

zintegrujeme ji v intervalu $\langle x_0, x\rangle$ a užijeme počáteční podmínku (12.3) napsanou pro funkci $\varphi(t)$, tj. $\varphi(x_0) = y_0$. Dostaneme integrální rovnici

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t(\varphi(t))\;\mathrm{d}t. \tag{12.5}$$

Užijeme-li větu o derivaci integrálu jako funkce horní meze, dostaneme z (12.5) rovnici (12.4); položíme-li v (12.5) $x = x_0$, dostaneme $\varphi(x_0) = y_0$. Tedy integrální rovnice (12.5) je ekvivalentní s počátečním problémem (12.2), 12.3).

Nechť G^* je taková ohraničená oblast obsahující bod $[x_0, y_0]$, že $\overline{G^*} \subset G$. Vzhledem ke spojitosti funkce f existuje taková konstanta $K > 0$, že platí

$$|f(x, y)| \le K \quad \forall\,[x, y] \in G^*. \tag{12.6}$$

---

[26] *Oblast v metrickém prostoru $\mathcal{X}$* znamená *otevřenou* souvislou množinu v tomto prostoru. *Rovinnou oblastí* rozumíme oblast v prostoru R^2.

Zvolme nyní takové číslo $\delta > 0$, aby platily tyto dvě podmínky:

1. Jestliže $|x - x_0| \le \delta$, $|y - y_0| \le K\delta$, potom $[x, y] \in G^*$.

2. $L\delta < 1$.

Označme symbolem C^* metrický prostor spojitých funkcí $\psi(x)$ definovaných na intervalu $|x - x_0| \le \delta$ (tj. na intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$) a takových, že

$$|\psi(x) - y_0| \le K\delta; \tag{12.7}$$

metriku na prostoru C^* definujeme vztahem

$$\varrho(\psi_1, \psi_2) = \max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|.$$

Platí $C^* \subset C^0\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$. Dokážeme, že prostor C^* je uzavřený v prostoru $C^0\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$. Nechť posloupnost $\{\psi_n\} \subset C^*$ je konvergentní v $C^0\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, tj. existuje funkce $\psi \in C^0\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ tak, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové $N(\varepsilon)$, že

$$\max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

Protože $\{\psi_n\} \subset C^*$, pro každou funkci ψ_n platí

$$|\psi_n(x) - \delta| \le K\delta \quad \forall\, x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle.$$

Tedy

$$\max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} |\psi(x) - \delta| \le \max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} |\psi_n(x) - \psi(x)| + \\ + \max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} |\psi_n(x) - \delta| < \varepsilon + K\delta.$$

Odtud plyne

$$\max_{x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle} |\psi(x) - \delta| \le K\delta,$$

což znamená podle (12.7), že $\psi(x) \in C^*$. Protože prostor $C^0\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ je úplný, získaný výsledek znamená, že C^* je úplný metrický prostor.[27] // Nechť $\psi = A\varphi$ je zobrazení definované vztahem

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t,$$

kde $|x - x_0| \le \delta$. Dokážeme, že toto zobrazení (1) zobrazuje úplný prostor C^* do prostoru C^* a (2) je v něm kontraktivní: Nechť $\varphi \in C^*$, $|x - x_0| \le \delta$. Potom podle (12.6)

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t \right| \le K\delta$$

[27] Nechť $\mathcal{X}$ je libovolný metrický prostor. Říkáme, že množina $M \subset \mathcal{X}$ je uzavřená, jestliže limita x každé posloupnosti $\{x_n\} \subset M$, která je konvergentní v $\mathcal{X}$, náleží do M, tj. $x \in M$. Z této definice plyne, že každý metrický prostor je uzavřený (v sobě) a že každá uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru tvoří úplný metrický prostor. (Z toho totiž plyne, že každá posloupnost, která je cauchyovská v M, má limitu v M.) To jsme také dokázali v případě prostoru C^*: ukázali jsme, že C^* je uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru $C^0\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, takže C^* je úplný metrický prostor.

a tedy $\psi - A\varphi \in C^*$ (vlastnost (1)). Kromě toho je

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \le \in_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))| \, \mathrm{d}t \le$$

$$\le L\delta \max_{x \in \left\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \right\rangle} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = L\delta\varrho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Protože $L\delta < 1$ (předpoklad **2** na str. 146 nahoře), plyne odtud, že zobrazení A je kontraktivní. // Tedy jsou splněny obě podmínky BPPB. Podle tohoto principu má rovnice $\varphi = A\varphi$, tj. rovnice (12.5), v prostoru C^* právě jedno řešení. $\square$

Pokud je informace v [DM, str. 93] správná, vznikl BPPB třicet let po prvním důkazu Picardovy věty. S. Banach žil v letech 1892 – 1945, takže BPPB byl pravděpodobně dokázán v období 1915 – 1920. // Další Picardova věta se týká počátečního problému soustavy ODR prvního řádu. Důkaz jsem převzal z [DM, str. 93].

12.5. Věta (Picard). *Nechť $\mathcal{G}$ je otevřená množina v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ a nechť*

$$f : (t, x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$$

je spojitá funkce, která splňuje Lipschitzovu podmínku

$$|f(t, x_1, \ldots, x_N) - f(t, x_1^*, \ldots, x_N^*)| \le L \max_{k=1,\ldots,N} |x_k - x_k^*|.$$

Potom pro jakýkoliv bod $(t_0, \xi_0) \in \mathcal{G}$ existuje takové $\delta > 0$, že rovnice

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{12.8}$$

má v intervalu $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ právě jedno řešení, které splňuje počáteční podmínku

$$x(t_0) = \xi_0 \,. \tag{12.9}$$

Důkaz. Nejprve přepišme počáteční problém (12.8), (12.9) na ekvivalentní problém pevného bodu pro integrální operátor, který je definovaný vztahem

$$F(x) : \;\; t \to \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \, \mathrm{d}s, \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \,. \tag{12.10}$$

Ekvivalence obou problémů se opět snadno ověří. Abychom užili BPPB, chceme řešit rovnici

$$F(x) = x$$

v nějakém úplném metrickém prostoru M. Za M zvolíme uzavřenou podmnožinu Banachova prostoru $C^0\left\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \right\rangle$ pro jisté malé $\delta > 0$.

Potřebujeme, aby platilo: **(1)** F zobrazuje M do M; **(2)** F je kontrakce na M. Zvolme nejprve $\delta_1 > 0$, $\Delta_1 > 0$ tak, že

$$\mathcal{R}_1 := \left\langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \right\rangle \times \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - \xi_0\|_{\mathbb{R}^N} \le \Delta_1\} \subset \mathcal{G}.$$

Množina $\mathcal{R}_1$ je kompaktní, takže funkce f je na ní ohraničená a stejnoměrně lipschitzovsky spojitá; to znamená, že existují takové konstanty K, L, že

$$\|f(s,x)\|_{\mathbb{R}^N} \le K, \quad \|f(s,x)-f(s,y)\|_{\mathbb{R}^N} \le \|x-y\|_{\mathbb{R}^N}$$

pro všechny body $(s,x),(s,y)\in\mathcal{R}_1$. Položme pro nějaké $\delta \le \delta_1$

$$M = \{x \in C^0\langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle : \|x(t)-\xi_0\|_{\mathbb{R}^N} \le \Delta_1 \;\; \forall t \in \langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle\}\,.$$

Potom

$$\sup_{t\in\mathcal{I}_\delta} \|F(x(t))-\xi_0\|_{\mathbb{R}^N} \le \delta K,$$
$$\sup_{t\in\mathcal{I}_\delta} \|F(x(t))-F(y(t))\|_{\mathbb{R}^N} \le \delta L \sup_{t\in\mathcal{I}_\delta} \|x(t)-y(t)\|_{\mathbb{R}^N},$$

kde $\mathcal{I}_\delta = \langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle$. Zvolíme-li $\delta > 0$ tak malé, že $\delta K \le \Delta_1$ a $\delta L \le \frac{1}{2}$, potom F zobrazí M do sebe (podmínka **(1)**) a bude kontrakcí s $\alpha = \frac{1}{2}$ (podmínka **(2)**). Podle BPPB má operátor F právě jeden pevný bod, který je řešením počátečního problému (12.8), (12.9) na intervalu $\langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle$. $\square$

12.6. Poznámka. Aplikovat BPPB na počáteční problém soustavy lineárních ODR

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(t)x + g(t)$$

kde $\mathbf{A}(t)$ a $g(t)$ jsou spojité na $\langle a,b\rangle$, není vhodné, protože v tomto případě řešení existuje na celém intervalu $\langle a,b\rangle$, přičemž BPPB dá pouze lokální řešení.

13. Eulerovy rovnice kvadratického funkcionálu nestandardně i standardně

V závěru podkap. 11.11 jsme získali Eulerovy rovnice kvadratického funkcionálu v $\mathbb{R}^1$ nestandardním způsobem, tj. bez užití variačního počtu. Hlavní roli přitom hrály dvě věty: Věta 11.3.1 o minimu kvadratického funkcionálu a Věta 11.14.9 o hustotě $C_0^\infty(\Omega)$ v $L_2(\Omega)$ (kterou jsme aplikovali pro $\Omega = I$). Protože obě věty jsme dokázali v $\mathbb{R}^N$, zobecníme uvedený postup pro $N > 1$; konkrétně v případě $N = 2$. V případě $N = 3$ lze postupovat analogicky; pouze místo Greenovy věty užijeme Ostrogradského větu. Nejprve uvedeme všechny výsledky a potom vše dokážeme.

13.1. Definice. Říkáme, že ohraničená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$, jestliže v téměř všech bodech $\partial\Omega$ existuje *vnější* normála k Ω a jestliže $\partial\Omega$ je sjednocením konečného počtu hladkých částí.

Poznámka. V případě hranice $\partial\Omega$ z definice 13.1 jsou vyloučeny řezy do oblasti; nejsou však vyloučeny body vratu. Oblast Ω může také být vícenásobně souvislá.

Nechť oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ bez bodů vratu. Uvažujme tento okrajový problém:

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{v } \Omega, \tag{13.1}$$

$$u = \overline{u} \quad \text{na } \Gamma_1 \subset \partial\Omega, \tag{13.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j = q \quad \text{na } \Gamma_2 \subset \partial\Omega, \tag{13.3}$$

kde (n_1, n_2) je jednotkový vektor vnější normály ke $\Gamma_2 \subset \partial\Omega$ a Γ_1, Γ_2 jsou dvě (relativně otevřené) podmnožiny $\partial\Omega$ takové, že

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \text{meas}_1\Gamma_1 + \text{meas}_1\Gamma_2 = \text{meas}_1\partial\Omega, \quad \text{meas}_1\Gamma_1 > 0. \tag{13.4}$$

Navíc předpokládáme, že Γ_1 sestává z konečného počtu navzájem disjunktních oblouků. Nejjednodušší možný případ: Ω je jednoduše souvislá oblast, Γ_1 je jeden oblouk a Γ_2 také. Jejich koncové body A, $B \in \partial\Omega$ nepatří ani do Γ_1, ani do Γ_2, takže $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{A, B\}$.

Kvůli snadnějšímu vyjadřování zaveďme tyto tři označení:

$$V = \{v \in H^1(\Omega)\colon\ \mathfrak{T}v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}. \tag{13.5}$$

kde $\mathfrak{T}v$ značí stopu funkce v (tento pojem je osvětlen v 13.13 a 13.14),

$$a(w, v) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, \mathrm{d}X\,, \tag{13.6}$$

$$L(v) = \int_\Omega vf\, \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_2} vq\, \mathrm{d}s\,. \tag{13.7}$$

Nyní můžeme definovat slabou formulaci okrajového problému (13.1) – (13.3):

13.2. Slabá formulace. Nechť oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ bez bodů vratu. Nechť $\overline{u} \in L_2(\Gamma_1)$ je taková funkce, že existuje funkce $z \in H^1(\Omega)$, pro kterou $\mathfrak{T}z = \overline{u}$ na Γ_1. Nechť $k_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, 2)$, kde k_{ij} jsou funkce, které vystupují v (13.6). Nechť $f \in L_2(\Omega)$ a $q \in L_2(\Gamma_2)$, kde f, q jsou funkce, které vystupují v (13.7). Problém zní takto: Nalezněte funkci $u \in H^1(\Omega)$ takovou, že

$$u - z \in V, \tag{13.8}$$

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \tag{13.9}$$

kde prostor V je definován vztahem (13.5) a formy $a(u, v)$ a $L(v)$ jsou definovány vztahy (13.6) a (13.7).

13.3. Poznámka. a) Předpoklady slabé formulace 13.2, které se týkají funkcí k_{ij}, f a q zaručují, že Lebesgueovy integrály definující $a(w, v)$ a $L(v)$ jsou konečné pro všechny funkce $v, w \in H^1(\Omega)$.

b) Vztah (13.8) implikuje

$$\mathfrak{T}u = \overline{u} \quad \text{téměř všude na } \Gamma_1, \tag{13.10}$$

což je okrajová podmínka (13.2) psaná pro funkci $u \in H^1(\Omega)$.

13.4. Věta (o formální ekvivalenci okrajového problému a slabé formulace). *a) Nechť problém* (13.1) – (13.3) *má klasické řešení u. Potom je řešením slabé formulace* 13.2.

b) Nechť slabá formulace 13.2 *má řešení* u. *Jestliže* $u \in H^2(\Omega)$ *a* $k_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, *potom řešení* u *splňuje rovnici* (13.1) *téměř všude v* Ω *a okrajovou podmínku* (13.3) *téměř všude na* Γ_2. *Vzhledem k* (13.10) *je tedy* u *řešením okrajového problému* (13.1) – (13.3).

Věta 11.3.1 o minimu kvadratického funkcionálu zní v $\mathbb{R}^2$ takto:

13.5. Věta (o minimu kvadratického funkcionálu). *Nechť bilineární forma* $a(v, w)$, *která vystupuje ve slabé formulaci, je symetrická, tj. platí* $k_{12} = k_{21}$. *Je-li dále* V*-eliptická, tj. platí*

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V, \tag{13.11}$$

potom funkce $u \in H^1(\Omega)$ *je jediným řešením slabé formulace* 13.2, *když a jen když ostře minimalizuje funkcionál*

$$\Pi(v) = \tfrac{1}{2} a(v, v) - L(v), \tag{13.12}$$

na množině $z + V$, *tj.*

$$\Pi(u) \leq \Pi(v) \quad \forall v \in z + V, \tag{13.13}$$

kde znamení rovnosti platí pouze pro $v = u$.

Z vět 13.4 a 13.5 plyne hlavní výsledek této kapitoly:

Věta 13.6. *Funkce* $u \in H^2(\Omega)$, *která na množině* $z + V$ *minimalizuje kvadratický funkcionál* (13.12) *se symetrickou a V-eliptickou bilineární formou* $a(w, v)$, *je řešením smíšeného okrajového problému* (13.1) – (13.3). *Tedy* (13.1) – (13.3) *jsou Eulerovy rovnice kvadratického funkcionálu* (13.12). *Získali jsme je bez užití variačního počtu.*

• Nyní dokážeme a uvedeme vše, co je třeba dokázat a uvést. Greenovu větu uvádím bez důkazu.

13.7. Věta (Green). *Nechť ohraničená dvojrozměrná oblast* Ω *má po částech hladkou hranici* $\partial\Omega$ *bez bodů vratu. Nechť* P, Q *jsou funkce spojité na* $\overline{\Omega}$, *které mají spojité a ohraničené první derivace v* Ω. *Nechť hranice* $\partial\Omega$ *je orientována tak, že při jejím probíhání ve směru orientace máme oblast* Ω *po levé ruce. Potom*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y, \tag{13.14}$$

kde integrály jsou brány v Riemannově smyslu.

13.8. Věta (divergenční tvar Greenovy věty). *Nechť jsou splněny předpoklady věty* 13.7. *Položíme-li* $P = -P_2$, $Q = P_1$, *potom*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (P_1 n_1 + P_2 n_2) \,\mathrm{d}s, \tag{13.15}$$

kde (n_1, n_2) *je jednotkový vektor vnější normály k* $\partial\Omega$.

Náčrt důkazu. Platí (zhruba řečeno v první rovnosti)

$$\int_{\partial\Omega} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \left(P \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + Q \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} (P \cos\alpha + Q \sin\alpha) \,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (P_1 \sin\alpha - P_2 \cos\alpha)\,\mathrm{d}s, \tag{13.16}$$

kde α je úhel, který svírá tečna k $\partial\Omega$ (orientovaná shodně s $\partial\Omega$) s kladným směrem osy x. Nechť ω je úhel, který svírá vnější normála k $\partial\Omega$ s kladným směrem osy x. Potom v bodě $[x, y]$ platí

$$\alpha = \omega + \frac{\pi}{2},$$

takže

$$\cos\alpha = -\sin\omega = -n_2, \quad \sin\alpha = \cos\omega = n_1\,. \tag{13.17}$$

Dosazením (13.17) do (13.16) a kombinací získaného vztahu s (13.14), kde v levé straně užijeme značení $P = -P_2$, $Q = P_1$, dostaneme vztah (13.15). □

13.9. Označení. V dalším budeme též značit

$$x_1 := x, \quad x_2 := y \quad (\text{resp. } x_3 = z).$$

Místo $\iint_\Omega$ budeme psát $\int_\Omega$ a místo $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ jenom $\mathrm{d}X\,(\equiv\ \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2)$. Vztah (13.15) má potom tvar

$$\sum_{k=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial P_k}{\partial x_k}\,\mathrm{d}X = \sum_{k=1}^{2} \int_{\partial\Omega} P_k n_k\,\mathrm{d}s\,. \tag{13.18}$$

13.10. Věta (důsledek Greenovy věty). *Nechť jsou splněny předpoklady věty* 13.7. *Potom platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi\,\mathrm{d}X = \int_{\partial\Omega} u\varphi n_j\,\mathrm{d}s - \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}X\,. \tag{13.19}$$

Důkaz. Položme v (13.18) $P_j = u\varphi$ a $P_i = 0$, kde $i \neq j$, a užijme pravidlo pro derivování součinu. (Je třeba poznamenat, že vztah (13.19) platí i v případě Lebesgueových integrálů.) □

13.11. Poznámka. Vztah (13.19) se dá také dokázat v případě trojrozměrné oblasti Ω. V tomto případě pak symbol $\int_{\partial\Omega} u\varphi n_j\,\mathrm{d}s$ znamená plošný integrál přes plošnou hranici $\partial\Omega$.

13.12. Definice. a) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$, která nemá body vratu. Nechť $S_1, \dots, S_m$ jsou hladké části hranice $\partial\Omega$, přičemž

$$x_1 = \varphi_j(t), \quad x_2 = \psi_j(t), \quad t \in \langle a_j, b_j \rangle$$

je parametrické vyjádření části S_j. Je-li na S_j dána funkce $v(\varphi_j(t), \psi_j(t))$ měřitelná na $\langle a_j, b_j \rangle$, definujeme

$$\int_{S_j} v(x_1, x_2)\,\mathrm{d}s := \int_{a_j}^{b_j} v(\varphi_j(t), \psi_j(t))\sqrt{[\dot\varphi_j(t)]^2 + [\dot\psi_j(t)]^2}\,\mathrm{d}t\,, \tag{13.20}$$

kde integrál na pravé straně (13.20) bereme v Lebesgueově smyslu. (Pro spojité a ohraničené funkce $v(x_1, x_2)$ je tato definice shodná s běžnou definicí křivkového integrálu prvního druhu v Riemannově smyslu.)

b) Je-li kromě toho integrál

$$\int_{S_j} [v(x_1, x_2)]^2 \, \mathrm{d}s \equiv \int_{a_j}^{b_j} [v(\varphi_j(t), \psi_j(t))]^2 \sqrt{[\dot{\varphi}_j(t)]^2 + [\dot{\psi}_j(t)]^2} \, \mathrm{d}t$$

konečný, řekneme, že funkce $v(x_1, x_2)$ je na S_j integrovatelná s kvadrátem (v Lebesgueově smyslu). Je-li funkce $v(x_1, x_2)$ integrovatelná s kvadrátem na S_j pro všechna $j = 1, \ldots, m$, řekneme, že je integrovatelná s kvadrátem na hranici $\partial\Omega$ a klademe

$$\int_{\partial\Omega} v^2 \, \mathrm{d}s := \sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} v^2 \, \mathrm{d}s \,. \tag{13.21}$$

c) Definujeme-li pro všechny funkce u, v integrovatelné s kvadrátem na hranici $\partial\Omega$ skalární součin

$$(u, v)_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} uv \, \mathrm{d}s \,, \tag{13.22}$$

dostaneme (jak lze bez obtíží dokázat) Hilbertův prostor, který označíme $L_2(\partial\Omega)$. Norma je v tomto prostoru definována standardně vztahem

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} := \sqrt{(u, u)_{\partial\Omega}} \quad \forall u \in L_2(\partial\Omega) \,. \tag{13.23}$$

d) Je třeba zdůraznit, že křivkový integrál $\int_{\partial\Omega} F(x_1, x_2) \, \mathrm{d}s$ nezávisí na orientaci hranice $\partial\Omega$ (je to křivkový integrál 1. druhu), kdežto křivkové integrály 2. druhu $\int_{\partial\Omega} F(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1$ a $\int_{\partial\Omega} F(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_2$ na orientaci hranice $\partial\Omega$ závisejí.

13.13. Věta (o stopách). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast s po částech hladkou hranicí, která nemá body vratu. Potom existuje právě jeden lineární ohraničený operátor*

$$\mathfrak{T} \colon H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega) \,, \tag{13.24}$$

který zobrazuje prostor $H^1(\Omega)$ do prostoru $L_2(\partial\Omega)$ tak, že platí

$$(\mathfrak{T}v)(x) = v(x) \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \forall x \in \partial\Omega \,. \tag{13.25}$$

Důkaz věty 13.13 je uveden v [Ne, str. 15-16], resp. v [Že2, důkaz věty 11.6].

13.14. Poznámka. a) Linearita operátoru (13.24) znamená

$$\mathfrak{T}(c_1 u + c_2 v) = c_1 \mathfrak{T}u + c_2 \mathfrak{T}v \,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1, \quad u, v \in H^1(\Omega) \,. \tag{13.26}$$

Ohraničenost operátoru (13.24) znamená

$$\|\mathfrak{T}v\|_{L_2(\partial\Omega)} \le C \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega) \,, \tag{13.27}$$

kde konstanta C je závislá pouze na oblasti Ω.

b) Funkce $\mathfrak{T}u \in L_2(\partial\Omega)$ se obvykle nazývá *stopa* funkce $u \in H^1(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega$. Pokud nemůže dojít k nedorozumění, místo $\mathfrak{T}u$ píšeme stručně u.

c) Z vlastnosti (13.25) plyne, že stopa funkce $u \in H^1(\Omega)$ je rozšířením pojmu “hodnota funkce u na hranici $\partial\Omega$”, který má smysl v případě funkce spojité na $\overline{\Omega}$ (a tím spíše v případě $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$).

13.15. Věta (o hustotě stop). *Množina* $\mathfrak{T}(H^1(\Omega)) := \{\mathfrak{T}u : u \in H^1(\Omega)\}$ *není identická s celým prostorem* $L_2(\partial\Omega)$*, je však v* $L_2(\partial\Omega)$ *hustá.*

Co se týče důkazu věty 13.15, viz např. [KJF, důkaz věty 6.6.3], resp. [Že2, důkaz věty 11.7].

13.16. Důkaz Věty 13.4. a) Násobme rovnici (13.1) libovolnou funkcí $v \in V$. Po integraci přes Ω dostaneme

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}X = \int_\Omega vf \ \mathrm{d}X. \tag{13.28}$$

Uijeme-li větu 13.10 (důsledek Greenovy věty), přejde levá strana (13.28) na tvar

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}X = -\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} v k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \,\mathrm{d}s + \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \ \mathrm{d}X.$$

Podle (13.3) a (13.5) platí

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} v k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_2} vq \,\mathrm{d}s.$$

Tedy vztah (13.28) může být psán ve tvaru

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \ \mathrm{d}X = \int_\Omega vf \ \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_2} vq \,\mathrm{d}s \tag{13.29}$$

čili podle (13.6), (13.7)

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V,$$

což jsme potřebovali dokázat.

b) Protože $u \in H^2(\Omega)$ a $k_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, můžeme výraz pro $a(u,v)$ upravit pomocí Věty 13.10 takto:

$$a(u,v) \equiv \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \ \mathrm{d}X =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} v k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \,\mathrm{d}s - \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) v \ \mathrm{d}X\,. \tag{13.30}$$

Protože $\mathfrak{T}v = 0$ téměř všude na Γ_1 (viz (13.5)), dostáváme z (13.9) pomocí (13.6), (13.7) a (13.30) vztah

$$-\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + f \right\} v \ \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} n_j - q \right\} v \,\mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in V. \tag{13.31}$$

Protože $H_0^1(\Omega) \subset V$, můžeme uvažovat (13.31) pouze pro funkce $v \in H_0^1(\Omega)$, kde

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \mathfrak{T}v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}.$$

Potom dostaneme

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + f \right\} v \ \mathrm{d}X = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{13.32}$$

Prostor $H_0^1(\Omega)$ je hustý v $L_2(\Omega)$. (Plyne to z hustoty $C_0^\infty(\Omega)$ v $L_2(\Omega)$ a toho, že $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.) Tedy podle Věty 11.7.13 (kde místo intervalu I vystupuje oblast Ω) vztah (13.32) implikuje platnost rovnice (13.1) téměř všude v Ω.

Protože rovnice (13.1) platí téměř všude v Ω, redukuje se (13.31) na tvar

$$\int_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j - q \right\} v \, \mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in V. \tag{13.33}$$

Vztah (13.33) lze přepsat takto:

$$\int_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j - q \right\} v \, \mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in \mathfrak{T}(V), \tag{13.34}$$

kde $\mathfrak{T}(V) \subset L_2(\Gamma_2)$ je množina stop všech funkcí z V na Γ_2. Podle Věty 13.15 je množina $\mathfrak{T}(V)$ hustá v $L_2(\Gamma_2)$, takže z (13.34) podle Věty 11.7.13 (kde místo I vystupuje Γ_2) plyne, že okrajová podmínka (13.3) je splněna téměř všude na Γ_2. $\square$

13.17. Poznámka. Je třeba zdůraznit, že důkaz Věty 13.4 je podstatným zobecněním důkazu Věty 11.11.4 z $\mathbb{R}^1$ do $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$). // Tím je nestandardní odvození Rulerových rovnic kvadratického funkcionálu dokončeno.

A. Eulerovy rovnice kvadratického funkcionálu v $\mathbb{R}^1$ standardně

V závěru podkap. 11.11 jsem na str. 106 dole stručně poznamenal: Pomocí dvojice implikací "Věta 11.11.3 implikuje Větu 11.11.4, která implikuje okrajový problém (11.172) – (11.174)" jsme získali Eulerovy rovnice kvadratického funkcionálu $\Pi(v)$ nestandardním způsobem.

Nyní odvodím Eulerovy rovnice v $\mathbb{R}^1$ standardním způsobem. Kvadratický funkcionál Π korespondující slabé $S1$-formulaci uvedené na str. 100 má tvar (místo q píšeme nyní r):

$$\Pi = \Pi(w(x)) = \tfrac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ p(w')^2 + rw^2 \right\} \,\mathrm{d}x - \int_0^\ell wf \,\mathrm{d}x - w(\ell)F_\ell, \tag{13.35}$$

kde $p = p(x), r = r(x), f = f(x), w = w(x), w' = w'(x)$. Funkcionál (13.35) je minimalizovnán na varietě

$$\omega_{S1} + V_{S1},$$

kde funkce $\omega_{S1} \in H^1(0,\ell)$ splňuje podmínku $\omega_{S1}(0) = a$ a prostor V_{S1} testovacích funkcí má tvar (viz (11.175S1))

$$V \equiv V_{S1} = \left\{ w \in H^1(0,\ell) : \; w(0) = 0 \right\}. \tag{13.36}$$

Označme

$$L = L(x,u,u') \equiv \tfrac{1}{2} \left\{ p(x)[u'(x)]^2 + r(x)[u(x)]^2 \right\} - u(x)f(x) \tag{13.37}$$

a definujme funkci parametru α vztahem

$$\Pi(\alpha) = \int_0^\ell \left\{ L(x, u(x) + \alpha\eta(x), u'(x) + \alpha\eta'(x) \right\} \mathrm{d}x - \big(u(\ell) + \alpha\eta(\ell)\big) F_\ell, \tag{13.38}$$

kde $u \in C^2\langle 0,\ell\rangle$ minimalizuje funkcionál (13.35) a $\eta \in C^1\langle 0,\ell\rangle$ splňuje $\eta(0)=0$. Podle pravidla o derivaci složené funkce platí

$$\Pi'(0) = \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial L}{\partial u}(x,u,u')\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial u'}(x,u,u')\eta'(x) \right\} \mathrm{d}x - \eta(\ell)F_\ell.$$

Pomocí integrace per partes a výpočtem $\frac{\partial L}{\partial u'}$ podle (13.37) odtud dostaneme

$$\begin{aligned}\Pi'(0) &= \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right)\right\}\eta(x)\,\mathrm{d}x + \left[\frac{\partial L}{\partial u'}\eta(x)\right]_{x=0}^{x=\ell} - \eta(\ell)F_\ell = \\ &= \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right)\right\}\eta(x)\,\mathrm{d}x + \bigl\{p(\ell)u'(\ell) - F_\ell\bigr\}\eta(\ell). \qquad (13.39)\end{aligned}$$

Vztahem

$$\delta\Pi := \Pi'(0)\varepsilon \qquad (13.40)$$

definujeme *variaci* funkcionálu Π. (Je to analogie diferenciálu funkce.) Požadujeme-li

$$\delta\Pi = 0,$$

potom z (13.39) plyne

$$\int_0^\ell \left\{ \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right)\right\}\eta(x)\,\mathrm{d}x + \bigl\{p(\ell)u'(\ell) - F_\ell\bigr\}\eta(\ell) = 0 \quad \forall \eta \in C^1\langle 0,\ell\rangle. \qquad (13.41)$$

Protože

$$C_0^\infty(0,\ell) \subset C^1\langle 0,\ell\rangle,$$

podle (13.41) platí

$$\int_0^\ell \left\{ \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right)\right\}\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(0,\ell). \qquad (13.42)$$

Podle Věty 11.7.13 z (13.42) plyne

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right) = 0 \quad \text{v } L_2(0,\ell), \qquad (13.43)$$

čili podle (13.37)

$$-\bigl(p(x)u'(x)\bigr)' + r(x)u(x) - f(x) = 0. \qquad (13.43^*)$$

Užitím (13.43) se (13.41) redukuje na vztah

$$\bigl\{p(\ell)u'(\ell) - F_\ell\bigr\}\eta(\ell) = 0 \quad \forall \eta \in C^1\langle 0,\ell\rangle,$$

z kterého plyne

$$\bigl\{p(\ell)u'(\ell) - F_\ell\bigr\}\eta(\ell) = 0 \quad \forall \eta(\ell) \in \mathbb{R}^1.$$

Odtud
$$p(\ell)u'(\ell) = F_\ell. \tag{13.44}$$
Vztahy (13.43*) a (13.44) jsou hledané Eulerovy rovnice kvadratického funkcionálu $\Pi(w)$ definovaného vztahem (13.35). Vztah (13.43*) je ODR 2. řádu a (13.44) nehomogenní přirozená okrajová podmínka Neumannova typu. Protože funkcionál $\Pi(u(x))$ minimalizujeme na varietě $\omega_{S1} + V_{S1}$, je třeba připojit k (13.43*), (13.44) hlavní okrajovou podmínku $u(0) = a$, $a \in \mathbb{R}^1$.

• V případě, že jde o problém minima kvadratického funkcionálu (11.150) na str. 95, analogickým postupem dostaneme opět rovnici (13.43*), ale místo (13.44) dvě přirozené (Neumannovy) okrajové podmínky (a žádnou hlavní okrajovou podmínku)
$$p(0)u'(0) = F_0, \quad p(\ell)u'(\ell) = F_\ell. \tag{13.45}$$

B. Eulerovy rovnice kvadratického funkcionálu v $\mathbb{R}^2$ standardně

Na závěr odvodíme standardním způsobem Eulerovy rovnice kvadratického funkcionálu v $\mathbb{R}^2$, který má obecně tvar:
$$\begin{aligned}\Pi(w) = \int_\Omega \Big\{ \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} + \tfrac{1}{2} r(X)(w(X))^2 - f(X)w(X) \Big\} \,\mathrm{d}X - \\ - \int_{\Gamma_2} w(X)q(X)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}\tag{13.46}$$
kde $\Gamma_2 \subset \partial\Omega$. Kvadratický funkcionál (13.46) minimalizujeme na varietě
$$z + V,$$
kde $\mathfrak{T}z = \overline{u}$ na $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}_2$ a $V = \{v \in H^1(\Omega) \colon \mathfrak{T}v\big|_{\Gamma_1} = 0\}$. Nechť $u(X) \in z + V$ je minimalizující funkce a $u(X) + \alpha\eta(X) \in z + V$ blízká funkce, kde $\eta \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}^1$ je libovolně malé číslo. Položme
$$\Pi(\alpha) = I_1(\alpha) + I_2(\alpha) + I_3(\alpha), \tag{13.47}$$
kde
$$I_1(\alpha) = \int_\Omega \Big\{ \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\Big) \Big\} \,\mathrm{d}X,$$
$$I_2(\alpha) = \int_\Omega \big\{ \tfrac{1}{2}(u + \alpha\eta)^2 r - (u+\alpha\eta) f \big\} \,\mathrm{d}X, \quad I_3(\alpha) = -\int_{\Gamma_2} (u+\alpha\eta) q \,\mathrm{d}s.$$
Pišme pro stručnost
$$\Pi'(0) = \Big[\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha)\Big]_{\alpha=0}, \quad I_k'(0) = \Big[\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha)\Big]_{\alpha=0}.$$
Za předpokladu $k_{12}(X) = k_{21}(X)$ $\forall X \in \Omega$ pro $I_1'(0)$ platí (poslední rovnítko získáme pomocí Věty 13.10):
$$\begin{aligned} I_1'(0) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \Big(\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \Big) \mathrm{d}X = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \,\mathrm{d}X = \\ = \sum_{i,j=1}^{2} \Big\{ \int_{\partial\Omega} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \eta \,\mathrm{d}s - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) \eta \,\mathrm{d}X \Big\}. \end{aligned}\tag{13.48}$$

Výpočet $I_2'(0)$ a $I_3'(0)$ je snadný:

$$I_2'(0) = \int_\Omega (ru - f)\eta \,\mathrm{d}X, \quad I_3'(0) = -\int_{\partial\Omega} q\eta \,\mathrm{d}s. \tag{13.49}$$

Z (13.47) – (13.49) plyne:

$$\Pi'(0) = \int_\Omega \Big\{ -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(k_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\Big) + r(X)u(X) - f(X)\Big\}\eta(X)\,\mathrm{d}X +$$
$$+ \int_{\Gamma_2} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)n_j(X)\eta(X)\,\mathrm{d}s - q(X)\eta(X)\Big\}\,\mathrm{d}s \quad \forall \eta \in V. \tag{13.50}$$

Pro první variaci funkcionálu Π platí $\delta\Pi = \Pi'(0)\varepsilon$. Položíme-li $\delta\Pi = 0$, z (13.50) plyne

$$\int_\Omega \Big\{ -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(k_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\Big) + r(X)u(X) - f(X)\Big\}\eta(X)\,\mathrm{d}X +$$
$$+ \int_{\Gamma_2} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)n_j(X) - q(X)\Big\}\eta(X)\,\mathrm{d}s = 0 \quad \forall \eta \in V. \tag{13.51}$$

Protože $C_0^\infty(\Omega) \subset V$, ze vztahu (13.51) plyne

$$\int_\Omega \Big\{ -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(k_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\Big) + r(X)u(X) - f(X)\Big\}\eta(X)\,\mathrm{d}X = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Podle Věty 11.7.13 (kde místo intervalu I vystupuje oblast Ω) tedy v $L_2(\Omega)$ platí tato Eulerova rovnice

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(k_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\Big) + r(X)u(X) = f(X). \tag{13.52}$$

Dosadíme-li (13.52) do (13.51), dostaneme

$$\int_{\Gamma_2} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)n_j(X) - q(X)\Big\}\eta(X)\,\mathrm{d}s = 0 \quad \forall \eta \in V.$$

Z tohoto vztahu plyne

$$\int_{\Gamma_2} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)n_j(X) - q(X)\Big\}v(X)\,\mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in \mathfrak{T}(V), \tag{13.53}$$

kde $\mathfrak{T}(V) \subset L_2(\Gamma_2)$ je množina stop všech funkcí z V na Γ_2. Podle Věty 13.15 je množina $\mathfrak{T}(V)$ hustá v $L_2(\Gamma_2)$, takže z (13.53) podle Věty 11.7.13 (kde místo intervalu I vystupuje oblouk Γ_2) plyne tato přirozená (Neumannova) okrajová podmínka

$$\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)n_j(X)\Big|_{\Gamma_2} = q(X). \tag{13.54}$$

14. Vztahy mezi Sobolevovými prostory $\mathbf{W^1}(\Omega)$ a $\mathbf{H^1}(\Omega)$ v případě dvojrozměrné oblasti Ω. Prostor $\mathbf{BL_2}(\Omega)$

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená oblast s po částech hladkou hranicí (body vratu nejsou vyloučeny). Podobně jako v Definici 11.7.15 zavedeme v lineálu $C^\infty(\overline{\Omega})$ skalární součin $(u,v)_{k,\Omega}$ a získaný unitární prostor označíme $S^k(\Omega)$. Normu v $S^k(\Omega)$ (kde $\Omega = \operatorname{int}\overline{\Omega})$) definujeme obvyklým způsobem

$$\|u\|_{k,\Omega} := \sqrt{(u,u)_{k,\Omega}} \quad \forall u \in S^k(\Omega),$$

kde

$$(u,v)_{k,\Omega} = \sum_{||\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha u(X) D^\alpha v(X)\,\mathrm{d}X.$$

V multiindexovém značení platí

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

kde

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N.$$

Symbolem $W^k(\Omega)$ budeme značit uzávěr lineárního normovaného prostoru $S^k(\Omega)$ v jeho normě $\|\cdot\|_{k,\Omega}$:

$$W^k(\Omega) = \left[S^k(\Omega)\right]_k \tag{14.1}$$

a nazývat opět *Sobolevův prostor*. Platí analogie Věty 11.7.18, podle které

$$\int_\Omega u^{(\alpha)} \varphi\,\mathrm{d}X = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi\,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ |\alpha| \leq k. \tag{14.2}$$

Funkce $u^{(\alpha)} \in L_2(\Omega)$ ($|\alpha| \leq k$) vystupující na levé straně (14.2) se nazývají *zobecněnými derivacemi* funkce $u \in L_2(\Omega)$, která je v integrandu na pravé straně (14.2). Budeme je také značit symboly $D^\alpha u$. Vztah (14.2) dokážeme v části **14.3**.

Nyní zobecníme definici Sobolevova prostoru $H^k(I)$ v případě $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$):

14.1. Definice. Nechť Ω je ohraničená dvojrozměrná oblast, jejíž hranice sestává z konečného počtu hladkých částí.[28] Symbolem $H^k(\Omega)$ budeme značit lineární normovaný prostor funkcí $u \in L_2(\Omega)$, které mají zobecněné derivace $u^{(\alpha)} = D^\alpha u \in L_2(\Omega)$ splňující pro všechna $|\alpha| \leq k$ vztah (14.2); norma $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ je v $H^k(\Omega)$ dána opět vztahem $\|u\|_{k,\Omega}^2 = (u,u)_{k,\Omega}$. Tento prostor také nazýváme *Sobolevovým prostorem.*

Je třeba zdůraznit, že zatímco v případě prostorů $W^k(\Omega)$ je vztah (14.2) tvrzením dávajícím do vzájemných souvislostí limitní funkce, které vznikly v důsledku uzávěru (14.1), je v případě prostorů $H^k(\Omega)$ vztah (14.2) výchozím vztahem, kterým definujeme zobecněné derivace.

[28] Tedy nepožadujeme, aby $\partial\Omega$ byla po částech hladká, tj. připouštíme řezy do Ω.

V případě oblasti Ω s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$ platí jako v $\mathbb{R}^1$

$$W^k(\Omega) = H^k(\Omega).$$

Důkaz je stejný jako důkaz Věty 11.7.27 (viz str. 78 a potom Dodatek C).

V $\mathbb{R}^2$ mohou však být v důsledku rozmanitých hranic $\partial\Omega$ mezi prostory $W^1(\Omega)$ a $H^1(\Omega)$ velké rozdíly, jak ukazuje následující příklad:

14.2. Příklad. Uvažujme otevřený čtverec se svislým řezem

$$\Omega = (-1,1) \times (-1,1) \setminus \{[0,y] \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le y < 1\}. \tag{14.3}$$

Uzávěrem $\overline{\Omega}$ oblasti (14.3) uzavřený čtverec $\big\langle -1,1\big\rangle \times \big\langle -1,1\big\rangle$. Nechť Ω_1 je z jedné strany uzavřený obdélník $(-1,1) \times (-1,0\rangle$, Ω_2 otevřený čtverec $(-1,0) \times (0,1)$ a Ω_2 otevřený čtverec $(0,1) \times (0,1)$. V oblasti Ω definujme funkci

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & \text{pro } X \in \Omega_1, \\ -x_2 & \text{pro } X \in \Omega_2, \\ x_2 & \text{pro } X \in \Omega_3. \end{cases} \tag{14.4}$$

(a) Předně dokážeme, že funkce u má zobecněné derivace $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$ pro $|\alpha| \le 1$, takže $u \in H^1(\Omega)$: Zvolme $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ libovolně, ale pevně a označme

$$G_2(\varphi) := \operatorname{supp}\varphi \cup \Omega_2, \quad G_3(\varphi) := \operatorname{supp}\varphi \cup \Omega_3.$$

Podle (14.4) a vlastností nosiče $\operatorname{supp}\varphi$ platí

$$u(X)\varphi(X) \neq 0 \quad \forall X \in G_2(\varphi) \cup G_3(\varphi); \quad u(X)\varphi(X) = 0 \quad \forall X \notin G_2(\varphi) \cup G_3(\varphi).$$

Tedy

$$u(X)\varphi(X) = 0 \quad \forall X \in \partial G_2(\varphi), \quad u(X)\varphi(X) = 0 \quad \forall X \in \partial G_3(\varphi). \tag{14.5}$$

S pomocí (14.5) a Věty 13.10 zjistíme, že

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}X = -\int_\Omega \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}X \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (i = 1,2), \tag{14.6}$$

což zaručuje inkluzi $u \in H^1(\Omega)$: Je totiž

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}X = \int_{G_2(\varphi)} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}X + \int_{G_3(\varphi)} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}X =$$

$$= \sum_{j=2}^{3} \left\{ \int_{\partial G_j(\varphi)} u(X)\varphi(X) n_i(X)\,\mathrm{d}s - \int_{G_j(\varphi)} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}X \right\} = -\int_\Omega \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}X,$$

což je vztah (14.6).

(b) V literatuře se často chybně píše, že $u \notin W^1(\Omega)$, kde funkce u je dána vztahy (14.4) (viz např. [Že2, str. 50 -51], nebo podobně nesprávně [KJF, Example 5.5.3]). Místo toho má být

$$u \notin \{v\colon v = w\big|_{\Omega},\ w \in W^1(\operatorname{int}\overline{\Omega})\}, \tag{14.7}$$

kde $\operatorname{int}\overline{\Omega}$ značí vnitřek uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$. V našem případě totiž je $\operatorname{int}\overline{\Omega} \supset \Omega$. Tato inkluze se skutečností, že řez $\{[0,y] \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le y < 1\}$ musí být disjunktní s nosiči funkcí $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, implikuje

$$C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\operatorname{int}\overline{\Omega}).$$

Tudíž lze očekávat, že prostor $H^1(\Omega)$ obsahuje více funkcí než prostor $W^1(\operatorname{int}\overline{\Omega})$, což skutečně v našem příkladu nastává (viz (14.7)). Dokažme (14.7): Nechť $\Omega_0 = \operatorname{int}\overline{\Omega}_0$, kde $\overline{\Omega}_0 = \overline{\Omega}_2 \cup \overline{\Omega}_3$, a nechť $\varphi \in C_0^\infty(\operatorname{int}\overline{\Omega})$ je taková funkce, že $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_0$. Potom

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X &= \int_{\Omega_2} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X + \int_{\Omega_3} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X = \\ &= -\int_{\Omega_2} x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X + \int_{\Omega_3} x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X,\end{aligned}$$

přičemž podle Věty 13.10 (důsledek Greenovy věty)

$$-\int_{\Omega_2} x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X = -\int_L x_2\varphi\cdot 1\,\mathrm{d}s + \int_{\Omega_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\varphi\,\mathrm{d}X = -\int_L x_2\varphi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}s,$$

kde $L = \operatorname{supp}\varphi \cap \{[0,y] \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le y < 1\}$. Podobně

$$\int_{\Omega_3} x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X = \int_L x_2\varphi\cdot(-1)\,\mathrm{d}s + 0 = -\int_L x_2\varphi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}s.$$

Odtud

$$\int_{\Omega_0} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X = -2\int_L x_2\varphi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}s \neq 0,$$

takže definiční vztah pro zobecněnou derivaci

$$\int_{\Omega_0}\varphi\frac{\partial u}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X = -\int_{\Omega_0} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}X \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$$

v tomto případě neplatí, protože $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0$ v $L_2(\Omega)$. Tím jsme dokázali (14.7). $\square$

14.3. Důkaz vztahu (14.2) za předpokladu $\mathbf{u} \in \mathbf{W^k}(\Omega)$. Předně poznamenejme, že nekonečná podmnožina M normovaného prostoru X se nazývá *kompaktní* (*v sobě*), když každá posloupnost $\{x_n\} \subset M$ obsahuje podposloupnost konvergentní v X (jejíž limita náleží do M). Dokazuje se, že množina $M \subset X$ je kompaktní, když a jen když *každé* pokrytí množiny M *otevřenými* možinami obsahuje *konečné podpokrytí.*[29] Podle této nutné a postačující podmínky každá kompaktní množina

[29]Tato podmínka je často brána za definici kompaktní množiny. Taková definice kompaktní množiny je axiomatizací Heine-Borelovy věty.

$\operatorname{supp}\varphi$, kde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, může být pokryta konečným počtem otevřených kruhů pokud $\dim\Omega = 2$ (nebo otevřených koulí, když $\dim\Omega = 3$) $K_1, \dots, K_m$, jejichž uzávěry leží v Ω, $\overline{K}_j \subset \Omega$ $(j = 1, \dots, m)$.[30] Označme

$$\operatorname{cover}_K \varphi := \bigcup_{j=1}^{m} \overline{K}_j\,. \tag{14.8}$$

Zřejmě $\operatorname{supp}\varphi \subset \operatorname{cover}_K \varphi$. Definice nosiče $\operatorname{supp}\varphi$ funkce φ implikuje, že

$$\varphi(X) = 0 \quad \text{pro } X \in \operatorname{cover}_K \varphi \setminus \operatorname{supp}\varphi\,.$$

Navíc hranice $\partial(\operatorname{cover}_K \varphi)$ množiny $\operatorname{cover}_K \varphi$ je *po částech hladká a neobsahuje body vratu.* Tato skutečnost nám umožní dokázat vztah (14.2) pomocí Věty 13.10 (důsledek Greenovy věty) i v případě, že hranice $\partial\Omega$ má body vratu.

Podle vlastností nosiče platí

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u \,\mathrm{d}X = \int_{\operatorname{cover}_K \varphi} \varphi D^\alpha u \,\mathrm{d}X\,,$$

kde $\operatorname{cover}_K \varphi \subset \Omega$ je uzavřená oblast definovaná vztahem (14.8); její hranice $\partial(\operatorname{cover}_K \varphi)$ je po částech hladká a neobsahuje body vratu. Tedy podle Věty 13.10 v případě $N = 2$ platí pro každé j, kde $1 \le j \le N$ (zde $N = 2$)

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\varphi \,\mathrm{d}X = \int_{\operatorname{cover}_K \varphi} \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\varphi \,\mathrm{d}X =$$
$$= \int_{\partial(\operatorname{cover}_K \varphi)} u_n \varphi n_j \,\mathrm{d}s - \int_{\operatorname{cover}_K \varphi} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \,\mathrm{d}X = -\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \,\mathrm{d}X\,,$$

protože $\varphi = 0$ na $\partial(\operatorname{cover}_K \varphi)$. Stejně jako v důkazu 11.7.18 je $\{u_n\} \subset S^k(\Omega)$ cuchyovská posloupnost, takže limitním přechodem pro $n \to \infty$ odtud dostaneme vztah (14.2) v případě $|\alpha| = 1$ a $N = 2$. // V případě $N = 3$ můžeme užít důsledek Ostrogradského věty; jinak je důkaz obdobný.

Protože $D^\alpha \varphi = 0$ na $\partial(\operatorname{cover}_K \varphi)$ pro $|\alpha| \ge 0$, získáme vztah (14.2) v obecném případě opakováním uvedeného postupu. Např., když $\alpha = (1, 1)$,

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1 \partial x_2}\varphi \,\mathrm{d}X = \int_{\partial(\operatorname{cover}_K \varphi)} \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\varphi n_2 \,\mathrm{d}s - \int_{\operatorname{cover}_K \varphi} \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \,\mathrm{d}X =$$
$$= -\int_{\operatorname{cover}_K \varphi} \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \,\mathrm{d}X =$$
$$= -\int_{\partial(\operatorname{cover}_K \varphi)} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_1 \,\mathrm{d}s + \int_{\operatorname{cover}_K \varphi} u_n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \,\mathrm{d}X = \int_\Omega u_n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \,\mathrm{d}X\,,$$

což po limitním přechodu pro $n \to \infty$ je vztah (14.2) pro $\alpha = (1, 1)$. Obecný postup je evidentní. $\square$

[30] Protože pokrytí otevřenými množinami je *libovolné*, můžeme zvolit pokrytí otevřenými kruhy (koulemi), jejichž průměry jsou menší než $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \operatorname{supp}\varphi)$; tato skutečnost implikuje, že $\overline{K}_j \subset \Omega$.

14.4. Prostor Beppo Leviho $\mathbf{BL_2}(\Omega)$. V případě $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ existuje vedle prostorů $W^1(\Omega)$ a $H^1(\Omega)$ ještě třetí možnost, jak definovat prostor Sobolevova typu. V tomto případě velkou roli hrají absolutně spojité funkce jedné proměnné, které se užívají se v konstrukci množin $AC_i(\Omega)$ $(i = 1, \dots, N)$ (viz 14.5b), s jejichž pomocí jsou Beppo Leviho prostory $BL_2(\Omega)$ (a obecně $BL_p(\Omega)$) definovány.

14.5. Definice. a) Říkáme, že funkce $f(X)$ N proměnných je absolutně spojitá na otevřené množině M, která je podmnožinou dané *přímky,* je-li absolutně spojitá na každém kompaktním podintervalu množiny M.

b) Říkáme, že funkce $f(X)$ N proměnných, která je definována pro $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, náleží do množiny $AC_i(\Omega)$, je-li absolutně spojitá na téměř všech množinách $I_p = p \cap \Omega$, kde p je libovolná přímka, která je rovnoběžná s osou x_i a má neprázdný průnik s oblastí Ω. $\square$

Vysvětleme podrobněji výraz "na téměř všech množinách I_p" v případě $x_i = x_1$. Uvažujme přímky p, které jsou rovnoběžné s osou x_1 a mají neprázdný průnik s oblastí Ω. Tento průnik $I_p = p \cap \Omega$ je otevřenou množinou na přímce; označme její projekci na rovinu $x_1 = 0$ symbolem $\overline{x}$ (je to bod). Zajímá nás $(N-1)$-rozměrná míra těchto projekcí. Funkce $f(X)$ náleží do $AC_1(\Omega)$, jestliže míra množiny všech projekcí $\overline{x}$ množin I_p, na kterých funkce $f(X)$ *není* absolutně spojitá, má svou $(N-1)$-rozměrnou míru rovnu *nule.*

Pokud funkce $f(X)$ náleží do $AC_1(\Omega)$, potom má podle Věty 11.7.36h *téměř všude* v Ω klasickou parciální derivaci podle x_1. Tuto klasickou parciální derivaci budeme značit symbolem $[\partial f / \partial x_1]$. Jestliže funkce $f(X)$ náleží do množiny

$$\bigcap_{i=1}^{N} AC_i(\Omega) = AC_1(\Omega) \cap AC_2(\Omega) \cap \dots AC_N(\Omega)$$

potom má téměř všude v Ω všechny první klasické parciální derivace

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right], \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right], \dots, \left[\frac{\partial f}{\partial x_N}\right]. \tag{14.9}$$

Protože klasické derivace (14.9) existují téměř všude v Ω, můžeme se pokusit integrovat p-té mocniny jejich absolutních hodnot přes Ω. Pokud derivace (14.9) náležejí do $L_p(\Omega)$, vede to k následující definici:

14.6. Definice. Nechť $1 \leq p < \infty$. Symbol $BL_p(\Omega)$ bude značit množinu všech funkcí $u \in L_p(\Omega)$ takových, že k nim existují funkce $\widetilde{u} \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} AC_i(\Omega)$ splňující rovnost $\widetilde{u} = u$ téměř všude v Ω, přičemž $[\partial \widetilde{u} / \partial x_i] \in L_p(\Omega)$ $(i = 1, \dots, N)$. Výraz

$$\|u\|_{BL_p(\Omega)} := \|u\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \left[\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i}\right] \right\|_{L_p(\Omega)} \tag{14.10}$$

definuje normu v lineárním prostoru $BL_p(\Omega)$, který nazýváme prostorem Beppo Leviho.

14.6a. Poznámka. Stručně a jednoduše: Beppo Leviho prostor $BL_p(\Omega)$ je lineární prostor všech funkcí

$$u \in L_p(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{N} AC_i(\Omega),$$

jejichž první "klasické" derivace jsou lebesgueovsky integrovatelné s p-tou mocninou:

$$BL_p(\Omega) = \left\{ u \in L_p(\Omega) \cap \bigcap_{i=1}^{N} AC_i(\Omega) : \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\right], \dots, \left[\frac{\partial u}{\partial x_N}\right] \in L_p(\Omega) \right\}.$$

Norma v tomto prostoru je dána vztahem (14.10). □

V [Že2, kap. 5] je dokázáno, že

$$W^1(\Omega) = BL_2(\Omega) \quad \text{či obecněji} \quad W^{1,p}(\Omega) = BL_p(\Omega). \tag{14.11}$$

Když $\Omega \in \mathcal{C}^{0,0}$ (tj. v případě po částech hladké hranice $\partial\Omega$), potom $W = H$ a vztahy (14.11) mohou být psány ve tvaru

$$H^1(\Omega) = BL_2(\Omega) \quad \text{či obecněji} \quad H^{1,p}(\Omega) = BL_p(\Omega). \tag{14.12}$$

Vztahy (14.11) a (14.12) mají tento význam: Struktura "energetických" prostorů $W^{1,p}(\Omega)$ nebo $H^{1,p}(\Omega)$ je identická se strukturou prostorů $BL_p(\Omega)$. Tato struktura je podle Definic 14.4 a 14.5 velmi jasná. (Důkaz (14.11), resp. (14.12) je však dlouhý a hodně komplikovaný.)

14.7. Příklad. Vraťme se k Příkladu 11.7.38 v případě $N = 2$. Vidíme, že

$$\ln \frac{1}{r} \in AC_1(\mathcal{K}_R) \cap AC_2(\mathcal{K}_R), \tag{14.13}$$

ale $\ln \frac{1}{r} \notin H^1(\mathcal{K}_R)$, protože

$$\sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\ln \frac{1}{r} \Big) \right\|_{0,\mathcal{K}_R}^2 = 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{\varrho} \, \mathrm{d}\varrho \to \infty. \tag{14.14}$$

Vlastnost (14.13) je nutnou, ale ne postačující podmínkou pro to, aby $\ln \frac{1}{r} \in H^1(\mathcal{K}_R)$. (Stejný výsledek jsme dostali v $\mathbb{R}^1$ v Příkladu 11.7.34: Daná funkce $u(x)$ je tam absolutně spojitá, ale nepatří do $H^1(I)$, protože $u' \notin L_2(I)$.) Je třeba poznamenat, že ve shodě s větou o stopách nemůžeme očekávat výsledek různý od $(11.114)_1$ a $(11.114)_2$.

14.8. Poznámka k Příkladu 14.2. Výsledek tohoto příkladu lze snadněji získat pomocí vztahu $W^1(K) = BL_2(K)$. Prostor $BL_2(K)$ je tvořen funkcemi, které jsou absolutně spojité na téměř všech přímkách rovnoběžných se souřadnými osami (zde x_1 a x_2). Avšak funkce $u(x_1, x_2)$ je nespojitá na *všech* přímkách rovnoběžných s osou x_1 a majících neprázdný průnik s úsečkou $\{[0, y] \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y < 1\}$.

15. Přibližná řešení počátečních a počátečních-okrajových problémů ODR a PDR

První čtyři podkapitoly jsou věnovány Eulerově explicitní a Eulerově implicitní formuli pro řešení počátečních problémů ODR. V páté podkapitole odvozuji úplné diskrétní schéma pro přibližné řešení počátečního-okrajového problému rovnice pro vedení tepla a šestá (poslední) podkapitola je věnována úplnému diskrétnímu schématu vlnové rovnice.

15.1. Eulerova explicitní formule

Uvažujme počáteční problém

$$y' = f(x, y), \tag{15.1}$$

$$y(a) = y_0, \tag{15.2}$$

kde y_0 je daná hodnota, a hledejme jeho přibližné diskrétní řešení na intervalu $\langle a, b\rangle$, který rozdělíme na N stejně velkých dílů o délce $h = (b-a)/N$ body

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b, \tag{15.3}$$

kde $x_k = a + kh$. O funkci $f(x, y)$ předpokládádáme (stejně jako v Picardově větě), že je spojitá a splňuje Lipschitzovu podmínku

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall x, y_1, y_2 \in \langle a, b\rangle. \tag{15.4}$$

Rovnici (15.1) zintegrujme v intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x,$$

takže

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x. \tag{15.5}$$

Integrál na pravé straně (15.5) vypočtěme přibližně jednobodovou kvadraturní formulí s uzlovým bodem x_i:

$$y(x_{i+1}) \doteq y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)). \tag{15.6}$$

Tento vztah je však nepoužitelný, protože hodnoty $y(x_i), y(x_{i+1})$ neznáme, ani je nemůžeme nijak vypočítat. Navíc se v tomto vztahu vyskytuje znaménko přibližné rovnosti. Proto zaměníme výrazy $y(x_i), y(x_{i+1})$ ve vztahu (15.6) jejich přibližnými hodnotami u_i, u_{i+1} a znaménko přibližné rovnosti nahradíme *definitoricky* znaménkem rovnosti. Z (15.6) tak dostaneme *Eulerovu dopřednou čili explicitní formuli*

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i), \tag{15.7}$$

kde podle (15.2) klademe

$$u_0 = y_0. \tag{15.8}$$

Postupným užitím rekurentní formule (15.7) dostaneme

$$u_1 = y_0 + hf(a, y_0), u_2 = u_1 + hf(x_1, u_1), \ldots, u_N = u_{N-1} + hf(x_{N-1}, u_{N-1}).$$

Nyní dokážeme, že po k krocích bude *naakumulovaná* chyba metody

$$y_k - u_k = k\,O(h^2) \quad (k = 1, \dots, N), \tag{15.9}$$

kde pro stručnost klademe

$$y_k = y(x_k) \quad (k = 1, \dots, N). \tag{15.10}$$

Podle Taylorova rozvoje

$$y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + \tfrac{1}{2}h^2 y''(x_k) + \dots$$

a podle (15.1) a (15.10)

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + \tfrac{1}{2}h^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x))\Big|_{x=x_k} + \dots \tag{15.11}$$

Protože platí (za dodatečného předpokladu ohraničenosti parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x))\Big|_{x=x_k} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + f(x, y(x))\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\right]_{x=x_k} \le C,$$

můžeme přepsat (15.11) na tvar

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + O(h^2). \tag{15.12}$$

Pro $k = 0$ odtud plyne

$$y_1 = y_0 + hf(a, y_0) + O(h^2)$$

čili podle (15.7), (15.8)

$$y_1 - u_1 = O(h^2). \tag{15.13}$$

Pro $k = 1$ z (15.12) plyne

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) + O(h^2) = \\ &= u_1 + hf(x_1, u_1) + (y_1 - u_1) + h[f(x_1, y_1) - f(x_1, u_1)] + O(h^2). \end{aligned} \tag{15.14}$$

Podle Lipschitzovy podmínky (15.4) a vztahu (15.13) platí

$$h\big|f(x_1, y_1) - f(x_1, u_1)\big| \le hL|y_1 - u_1| = O(h^3). \tag{15.15}$$

Dosadíme-li (15.15) společně s (15.13) do (15.14), dostaneme

$$y_2 - u_2 = O(h^2) + O(h^3) + O(h^2) = 2\,O(h^2), \tag{15.16}$$

protože výraz $O(h^3)$ můžeme zanedbat. V třetím kroku dostaneme (stejným způsobem jako vztah (15.14))

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) + O(h^2) = \\ &= u_2 + hf(x_2, u_2) + (y_2 - u_2) + h[f(x_2, y_2) - f(x_2, u_2)] + O(h^2). \end{aligned} \tag{15.17}$$

Pomocí Lipschitzovy podmínky (15.4) a vztahu (15.16) zjistíme, že

$$h[f(x_2, y_2) - f(x_2, u_2)] = 2\,O(h^3),$$

což dosazeno spolu s (15.16) do (15.17) dává

$$y_3 - u_3 = 2\,O(h^2) + 2\,O(h^3) + O(h^2) = 3\,O(h^2).$$

Předpokládejme nyní, že po k krocích dostaneme odhad

$$y_k - u_k = k\,O(h^2). \tag{15.18}$$

Vyjdeme nyní ze vztahu

$$\begin{aligned} y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + O(h^2) = \\ = u_k + hf(x_k, u_k) + (y_k - u_k) + h[f(x_k, y_k) - f(x_k, u_k)] + O(h^2). \end{aligned} \tag{15.19}$$

Pomocí Lipschitzovy podmínky (15.4) a vztahu (15.18) nyní zjistíme, že

$$h[f(x_k, y_k) - f(x_k, u_k)] = k\,O(h^3),$$

což dosazeno spolu s (15.18) do (15.19) dává

$$y_{k+1} - u_{k+1} = kO(h^2) + k\,O(h^3) + O(h^2) = (k+1)\,O(h^2), \tag{15.20}$$

což jsme chtěli dokázat.

Projdeme-li celý interval $\langle a, b\rangle$, výsledná *globální chyba* bude úměrná výrazu

$$NO(h^2) = NKh^2 = NK\frac{b-a}{N}h = K(b-a)h = O(h). \tag{15.21}$$

Poznámka: Místo Taylorova rozvoje a vztahu (15.11) jsme mohli získat vztah (15.12) pomocí odhadu (viz [Re1, odst. 13.13])

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x - hf(x_i, y(x_i)) = O(h^2). \tag{15.22}$$

15.2. Eulerova implicitní formule

Integrál na pravé straně (15.5) vypočtěme nyní přibližně jednobodovou kvadraturní formulí s uzlovým bodem x_{i+1}:

$$y(x_{i+1}) \doteq y(x_i) + hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})). \tag{15.23}$$

Stejně jako v (15.22) platí

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x - hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) = O(h^2), \tag{15.24}$$

takže užijeme-li v (15.5) jednobodovou kvadraturní formuli s uzlovým bodem x_{i+1}, dostaneme

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) + O(h^2),$$

což je výchozí vztah k získání chyby *Eulerovy zpětné* (*čili implicitní*) *formule*, která má podle (15.23) tvar (ze stejných důvodů jako v případě formule (15.7))

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_{i+1}, u_{i+1}). \tag{15.25}$$

V rozsáhlejších monografiích (jako např. [La], [Vi]) se dokazuje, že globální chyba Eulerovy implicitní formule je opět $O(h)$. I když obě Eulerovy formule jsou stejně přesné, implicitní formule má tu velkou přednost, že je stabilní (viz podkap. 15.3).

Zatímco explicitní Eulerova formule (15.7) je dána rekurentním vzorcem, musíme při aplikaci implicitní formule (15.25) na každém kroku řešit rovnici pro u_{i+1} (v případě nelineární rovnice většinou *Newtonovou metodou*).

Pro svou jednoduchost a stabilitu se implicitní Eulerova formule užívá v numerických výpočtech na počítačích. Je ovšem vhodné spočítat několik prvních startovacích hodnot nějakou přesnější jednokrokovou metodou; např. *Runge-Kuttovou metodou* čtvrtého řádu přesnosti, která je dána formulí

$$u_{i+1} = u_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, u_i), \\ k_2 &= f(x_1 + \tfrac{1}{2}h, u_i + \tfrac{1}{2}hk_1), \\ k_3 &= f(x_1 + \tfrac{1}{2}h, u_i + \tfrac{1}{2}hk_2), \\ k_4 &= f(x_1 + h, u_i + hk_3). \end{aligned}$$

15.3. Stabilita implicitní formule

Uvažujme počáteční problém

$$y' = \lambda y \quad (\lambda < 0), \quad y(0) = 1. \tag{15.26}$$

Jeho řešení je tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}. \tag{15.27}$$

Protože $\lambda < 0$, z (15.27) plyne

$$y(x_i) > y(x_{i+1}) > 0 \quad \text{pro } x_i < x_{i+1}.$$

Proto je přirozené požadovat

$$u_i > u_{i+1} > 0. \tag{15.28}$$

Explicitní (dopředná) Eulerova formule dává

$$u_{i+1} = u_i + h\lambda u_i = u_i(1 - |\lambda|h).$$

Z požadavku (15.28) v tomto případě plyne (je totiž $u_0 = 1 > 0$)

$$1 > 1 - |\lambda|h > 0. \tag{15.29}$$

Levá nerovnost (15.29) je splněna vždy; pravá pouze v případech, kdy

$$h < \frac{1}{|\lambda|}. \tag{15.30}$$

Jestliže $|\lambda| \gg 1$, je podmínka (15.30) značným omezením délky kroku h.

V případě implicitní (zpětné) Eulerovy formule platí

$$u_{i+1} = u_i + h\lambda u_{i+1} = u_i - h|\lambda|u_{i+1},$$

takže

$$u_{i+1} = \frac{u_i}{1 + |\lambda|h}.$$

Protože $u_0 = 1$, je tedy požadavek (15.28) splněn bez jakéhokoliv omezení na délku kroku h.

15.4. Příklad: Vyjádření Eulerova čísla e

V této podkapitole trochu odbočíme. V základním kurzu diferenciálního počtu bylo číslo $\mathrm{e} = 2,7182818\ldots$ (základ přirozených logaritmů) definováno vztahem

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{15.31}$$

Ukážeme, že k témuž vyjádření (15.31) dospějeme, řešíme-li numericky počáteční problém

$$y' = y, \tag{15.32}$$
$$y(0) = 1 \tag{15.33}$$

na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ pomocí Eulerových formulí.

Obecné řešení rovnice (15.32) je $y = C\mathrm{e}^x$. Užitím počáteční podmínky (15.33) dostaneme partikulární řešení

$$y(x) = \mathrm{e}^x,$$

takže

$$y(1) = \mathrm{e}. \tag{15.34}$$

Rozdělme interval $\langle 0, 1\rangle$ na n stejných dílků o délce

$$h = \frac{1}{n}.$$

Protože v případě rovnice (15.32) je $f(x, y) = y$, explicitní Eulerova formule (15.7) má tvar

$$u_{i+1} = u_i + hu_i = u_i\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{15.35}$$

Podle (15.33) je $u_0 = 1$, takže (15.35) postupně dává

$$u_1 = 1 + \frac{1}{n},\ u_2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \ldots, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Protože $x_n = 1$, je hodnota u_n přibližným vyjádřením přesné hodnoty $y(1) = \mathrm{e}$. Eulerova metoda konverguje, takže platí

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

což je vztah (15.31).

Vztah (15.31) nyní odvodíme pomocí zpětné (implicitní) formule. Postup je však v tomto případě komplikovanější. Interval $\langle 0, 1\rangle$ rozdělíme na m stejných dílků o délce

$$h = \frac{1}{m}.$$

Zpětná formule (15.26a) v tomto případě dá

$$u_{i+1} = u_i + hu_{i+1} \;\Rightarrow\; u_{i+1} = \frac{u_i}{1 - 1/m} = \frac{u_i m}{m - 1}. \tag{15.36}$$

Protože Eulerova metoda je konvergentní, plyne odtud

$$\mathrm{e} = \lim_{m\to\infty} \frac{u_i m}{m-1} = \lim_{m\to\infty} \frac{u_{i-1} m^2}{(m-1)^2} = \cdots = \lim_{m\to\infty} \frac{m^m}{(m-1)^m}. \tag{15.37}$$

Abychom dostali vztah (15.31), zaveďme substituci

$$m = n + 1.$$

Potom z (15.37) plyne

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

protože $\lim(n+1)/n = 1$. Opět jsme získali vztah (15.31).

15.5. Rovnice pro vedení tepla

Uvažujme tento počáteční-okrajový problém rovnice pro vedení tepla v jedné dimenzi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{15.38}$$

$$u(0,t) = a, \quad u(\ell, t) = b, \quad t > 0, \tag{15.39}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \langle 0, \ell\rangle, \tag{15.40}$$

kde $u_0(x)$ je spojitá funkce s po částech spojitou a ohraničenou derivací na $\langle 0, \ell\rangle$ (tj. $u_0 \in H^1(0,\ell)$). Problém (15.38) – (15.40) budeme diskretizovat kombinací zpětné diference v čase s metodou konečných prvků v $\mathbb{R}^1$.

Podobně jako na str. 58 rovnici (15.38) nejprve násobme libovolnou funkcí $v \in H_0^1(0,\ell)$ a integrujme přes interval $\langle 0,\ell\rangle$:

$$\int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t} v \, \mathrm{d}x = \int_0^\ell \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, \mathrm{d}x.$$

Integrál na pravé straně upravme pomocí integrace per partes a vztahů $v(0) = v(\ell) = 0$, které splňuje každá funkce $v \in H_0^1(0,\ell)$. Dostaneme:

$$\int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t} v \, \mathrm{d}x + \int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0,\ell). \tag{15.41}$$

Stejně jako na str. 66 (viz vztahy (11.49) – (11.51)) zaveďme konečněrozměrný prostor X_h, varietu $W_h \subset X_h$ a podprostor $V_h \subset X_h$ pomocí vztahů

$$X_h = \{w \in H^1(0,\ell): \ w \text{ je spojitá funkce lineární na prvcích dělení } \mathcal{D}_h\}, \tag{15.42}$$

$$W_h = \{w \in X_h: \ w(x_0) = w(0) = a, \ w(x_{n+1}) = w(\ell) = b\}, \tag{15.43}$$

$$V_h = \{w \in X_h: \ w(x_0) = w(0) = 0, \ w(x_{n+1}) = w(\ell) = 0\}, \tag{15.44}$$

kde $\mathcal{D}_h$ je dělení intervalu $\langle 0,\ell\rangle$ na n stejných dílků:

$$\mathcal{D}_h: \quad x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = \ell, \tag{15.45}$$

Nechť $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x)\}$ je báze $(n+2)$-rozměrného prostoru X_h. Potom každá funkce z variety W_h má tvar

$$a\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) + b\varphi_{n+1}(x) \quad (\alpha_k \in \mathbb{R}^1). \tag{15.46}$$

Nahraďme v (15.46) reálná čísla α_k libovolnými funkcemi časové proměnné $\alpha_k(t) \in C^1\langle 0,T\rangle$ a definujme funkci

$$u_h(x,t) = a\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\varphi_k(x) + b\varphi_{n+1}(x). \tag{15.47}$$

Prostorovou semidiskretizaci našeho problému provedeme tak, že ve vztahu (15.41) nahradíme hledanou funkci $u(x,t)$ funkcí $u_h(x,t)$ a testovací funkce $v \in H_0^1(0,\ell)$ testovacími funkcemi $v \in V_h$:

$$\int_0^\ell \frac{\partial u_h}{\partial t} v \, \mathrm{d}x + \int_0^\ell \frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in V_h. \tag{15.48}$$

Od prostorové semidiskretizace (15.48) přejdeme k úplné diskretizaci problému tak, že parciální derivaci $\frac{\partial u_h}{\partial t}$ nahradíme zpětnou diferencí, kterou podělíme časovým krokem Δt:

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(x,t_i) \doteq \frac{u_h(x,t_i) - u_h(x,t_{i-1})}{\Delta t}. \tag{15.49}$$

Pro větší jednoduchost budeme psát $U^i = U^i(x) = u_h(x, t_i)$, takže semidiskrétní vztah (15.48) je nahrazen diskrétním vztahem

$$\int_0^\ell U^i v \,\mathrm{d}x + \Delta t \int_0^\ell \frac{\partial U^i}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \Delta t \int_0^\ell U^{i-1} v \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V_h; \tag{15.50}$$

v případě $i = 1$ je na pravé straně vztahu (15.50) výraz $\int_0^\ell u_0 v \,\mathrm{d}x$, kde $u_0(x)$ je funkce z počáteční podmínky (15.40). Když daný časový interval $\langle 0, T\rangle$, na kterém hledáme přibližné řešení, rozdělíme na m částí, potom časový krok má velikost $\Delta t = T/m$. Je třeba poznamenat, že (15.50) má stejný tvar jako Eulerova implicitní formule. (Stačí zaměnit indexy i na $i+1$.) // Vztah (15.50) dále zjednodušíme: Stačí místo něj napsat n vztahů

$$\int_0^\ell U^i \varphi_j \,\mathrm{d}x + \Delta t \int_0^\ell \frac{\partial U^i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \Delta t \int_0^\ell U^{i-1} \varphi_j \,\mathrm{d}x \quad (j = 1, \dots, n), \tag{15.51}$$

kde $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou bázové funkce n-rozměrného prostoru V_h. Dále: Každá funkce $U^i(x)$ má tvar

$$U^i(x) = a\varphi_0(x) + b\varphi_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k(t_i)\varphi_k(x) \quad (i = 1, \dots, m), \tag{15.52}$$

Dosadíme-li (15.52) do (15.51), dostaneme po snadné úpravě soustavu n lineárních algebraických rovnic pro $\alpha_1(t_i), \dots, \alpha_n(t_i)$, kde $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{k+1}^n \alpha_k(t_i) \int_0^\ell \big\{\varphi_j(x)\varphi_k(x) + \Delta t \varphi_j'(x)\varphi_k'(x)\big\}\,\mathrm{d}x = \tag{15.53}$$

$$= \int_0^\ell \big(\Delta t\, U^{i-1} - a\varphi_0(x) - b\varphi_{n+1}(x) - a\Delta t\varphi_0'(x) - b\Delta t \varphi_{n+1}'(x)\big)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešíme postupně celkem m těchto soustav, protože $i = 1, \dots, m$. Připomínám, že v případě $i = 1$ je $U^{i-1}(x) = u_0(x)$, kde $u_0(x)$ je funkce z počáteční podmínky (15.40). // Numerickou analýzou se nebudu zabývat. Uvádím bez důkazu, že metoda konverguje a že maximální rychlost konvergence tohoto diskrétního problému je $O(\Delta t + h)$; viz [Že1, Ch. 49] nebo podrobněji v [Že3]. (V obou případech je analyzován obecnější problém). • Protože matice soustavy (15.53) je regulární, má tato soustava právě jedno řešení $\alpha_1(t_i), \dots, \alpha_n(t_i)$ při každém $i = 1, \dots, m$.

15.6. Vlnová rovnice

Uvažujme tento počáteční-okrajový problém vlnové rovnice v jedné dimenzi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t) \quad \big((x,t) \in (0,\ell) \times (0, T\rangle\big), \tag{15.54}$$

$$u(0,t) = 0 \quad \forall t \in (0, T\rangle, \tag{15.55}$$

$$p(\ell)\frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \quad \forall t \in (0, T\rangle, \tag{15.56}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \langle 0, \ell\rangle, \tag{15.57}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \quad \forall x \in \langle 0, \ell\rangle, \tag{15.58}$$

kde $p(x) \geq \mu > 0$, $u_0(x) \in H^1(0,\ell)$, $v_0(x) \in H^1(0,\ell)$, $f(x,t) \in L_2((0,\ell)\times(0,T))$. Násobme rovnici (15.54) libovolnou funkcí $w \in H_0^1(0,\ell)$ a integrujme přes interval $\langle 0, \ell\rangle$:

$$\int_0^\ell \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w \, \mathrm{d}x - \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) w \, \mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x,t)w(x) \, \mathrm{d}x.$$

Druhý integrál na levé straně upravme pomocí integrace per partes a vztahů $w(0) = w(\ell) = 0$, které splňuje každá funkce $w \in H_0^1(0,\ell)$. Dostaneme:

$$\int_0^\ell \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w \, \mathrm{d}x + \int_0^\ell p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x,t)w(x) \, \mathrm{d}x. \tag{15.59}$$

Nechť $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ je báze n-rozměrného prostoru V_h (viz (15.44)). Potom každá funkce z V_h má tvar

$$w(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \quad (\alpha_k \in \mathbb{R}^1). \tag{15.60}$$

Definujme funkci

$$u_h(x,t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t)\varphi_k(x), \tag{15.61}$$

kde $\alpha_k(t) \in C^1(0,T\rangle$ jsou hledané funkce. Prostorovou semidiskretizaci našeho problému provedeme tak, že ve vztahu (15.59) nahradíme hledanou funkci $u(x,t)$ funkcí $u_h(x,t)$ a testovací funkce $w \in H_0^1(0,\ell)$ testovacími funkcemi $w \in V_h$:

$$\int_0^\ell \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} w \, \mathrm{d}x + \int_0^\ell p(x)\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = \int_0^\ell f(x,t)w(x) \, \mathrm{d}x \quad \forall w \in V_h. \tag{15.62}$$

Od prostorové semidiskretizace (15.62) přejdeme k úplné diskretizaci problému tak, že druhou parciální derivaci $\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}$ nahradíme druhou zpětnou diferencí, kterou podělíme kvadrátem Δt^2 časového kroku Δt:

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}(x,t_i) \doteq \frac{(u_h(x,t_i) - u_h(x,t_{i-1}) - (u_h(x,t_{i-1}) - u_h(x,t_{i-2}))}{\Delta t^2}. \tag{15.63}$$

Pro větší jednoduchost budeme psát $U^i = U^i(x) = u_h(x,t_i)$, takže

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}(x,t_i) \doteq \frac{\Delta^2 U^i}{\Delta t^2} = \frac{\Delta U^i - \Delta U^{i-1}}{\Delta t^2} = \frac{U^i - 2U^{i-1} + U^{i-2}}{\Delta t^2} \tag{15.64}$$

a semidiskrétní vztah (15.62) je nahrazen diskrétním vztahem

$$\int_0^\ell U^i w \, \mathrm{d}x + \Delta t^2 \int_0^\ell p(x)(U^i)'w' \, \mathrm{d}x = \Delta t^2 \int_0^\ell (2\,U^{i-1} - U^{i-2})\, w \, \mathrm{d}x +$$
$$+ \Delta t^2 \int_0^\ell f(x,t_i)\, w(x) \, \mathrm{d}x \quad \forall w \in V_h.$$

Tento vztah dále zjednodušíme: Stačí místo něj napsat n vztahů

$$\int_0^\ell U^i\varphi_j \,\mathrm{d}x + \Delta t^2 \int_0^\ell p(x)(U^i)'\varphi_j' \,\mathrm{d}x = \Delta t^2 \int_0^\ell (2\,U^{i-1} - U^{i-2})\varphi_j \,\mathrm{d}x +$$
$$+\Delta t^2 \int_0^\ell f(x,t_i)\varphi_j(x) \,\mathrm{d}x \quad (j = 1,\ldots,n), \tag{15.65}$$

kde $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ jsou bázové funkce n-rozměrného prostoru V_h. K (15.65) připojíme dvě počáteční podmínky, které získáme z (15.57) a (15.58):

$$U^0 = u_0 \in V_h, \tag{15.66}$$

$$U^{-1} = u_0 - \Delta t v_0 \in V_h. \tag{15.67}$$

Dále: Každá funkce $U^i(x)$ má tvar

$$U^i(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t_i)\varphi_k(x) \quad (i = 1,\ldots,m), \tag{15.68}$$

Dosadíme-li (15.68) do (15.65), dostaneme po snadné úpravě soustavu n lineárních algebraických rovnic pro $\alpha_1(t_i),\ldots,\alpha_n(t_i)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t_i) \int_0^\ell \left\{\varphi_j(x)\varphi_k(x) + \Delta t^2 p(x)\varphi_j'(x)\varphi_k'(x)\right\} \mathrm{d}x = \tag{15.69}$$
$$= \Delta t^2 \int_0^\ell (2\,U^{i-1} - U^{i-2})\varphi_j \,\mathrm{d}x + \Delta t^2 \int_0^\ell f(x,t_i)\varphi_j(x) \,\mathrm{d}x \quad (j = 1,\ldots,n).$$

Řešíme postupně celkem m těchto soustav, protože $i = 1,\ldots,m$. V případě $i = 1$ užijeme na pravé straně (15.69) obě počáteční podmínky (15.66) a (15.67). Numerickou analýzou se nebudu zabývat. Uvádím bez důkazu, že metoda koverguje a že maximální rychlost konvergence tohoto diskrétního problému je $O(\Delta t + h)$ (viz [Že1, Ch. 50], nebo mnohem podrobněji [KŽ]). // Protože matice soustavy (15.69) je regulární, má tato soustava právě jedno řešení $\alpha_1(t_i),\ldots,\alpha_n(t_i)$ při $i = 1,\ldots,m$.
• I když aproximace druhé parciální derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ podílem $\frac{\Delta^2 U^i}{\Delta t^2}$, kde $\Delta^2 U^i$ je druhá zpětná diference, je korektní a zcela přirozená, nevyskytuje se příliš v literatuře.

Literatura

[Ci] J. A. Cid: On uniqueness criteria for systems of ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* **281** (2003), 264-275.

[ČŽ] J. Čermák, A. Ženíšek: Matematika III. Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2006g (205 stran) (2. vydání, skriptum).

[Če] L. Čermák: Numerické metody II (Diferenciální rovnice). Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2010 (135 stran) (2. vydání, skriptum).

[DŽ] P. Doktor, A. Ženíšek: The density of infinitely differentiable functions in Sobolev spaces with mixed boundary conditions. *Appl. Math.* **51** (2006), 517-547.

[DM] P. Drábek, J. Milota: Lectures on Nonlinear Analysis. Vydavatelský servis, Plzeň 2004 (350 stran).

[Ja] V. Jarník: Integrální počet II. NČSAV, Praha 1955.

[KŽ] J. Kačur, A. Ženíšek: Analysis of approximate solutions of coupled dynamical thermoelasticity and related problems. *Appl. Math.* **31** (1986), 190-223.

[KF1] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: Elementy teorii funkcij i funkcionalnogo analiza. Izdatelstvo Moskovskogo universiteta. Moskva 1954 (154 strany).

[KF2] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy. SNTL, Praha 1975 (580 stran). Český překlad.

[KJF] A. Kufner, O. John, S. Fučík: Function Spaces. Academia, Praha 1977 (454 stran)

[La] J.D. Lambert: Numerical Methods in Ordinary Differential Equations. The Initial Value Problem. J. Wiley & Sons, Chichester 1973 (278 stran).

[Li] R. Lipschitz: Sur le possibilité d'intégrer complétement un systéme donné d'équations différentielles. *Bull. Sci. Math. Astronom.* **10** (1876), 149-159.

[MM] J. Musilová, P. Musilová: Matematika pro porozumění i praxi II. (V tisku.)

[MS] N.G. Meyers, J. Serrin: H = W. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA.* **51** (1964), 1055-1056.

[Na] I.P. Natanson: Tĕorija funkcij vĕščestvĕnnoj peremennoj. Gostechizdat, Moskva 1950.

[Ne] J. Nečas: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, Praha 1967 (351 stran).

[Re1] K. Rektorys a spolupracovníci: Přehled užité matematiky. SNTL, Praha 1981 (1139 stran).

[Re2] K. Rektorys: Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL, Praha 1974 (600 stran).

[Sm] V.I. Smirnov: Kurs vyššej matematiki. Tom IV. Gosfizmatizdat, Moskva 1951.

[St] V. V. Stěpanov: Kurs diferenciálních rovnic. Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1952 (514 stran).

[SB] B. Szabó, I. Babuška: Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc. New York 1991 (368 stran).

[ŠT] J. Škrášek, Z. Tichý: Základy aplikované matematiky, díl II. SNTL Praha 1986 (896 stran).

[Vi] E. Vitásek: Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic. Academia, Praha 1994 (409 stran).

[Že1] A. Ženíšek: Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and their Finite Element Approximations. Academic Press, London 1990 (420 stran).

[Že2] A. Ženíšek: Sobolev Spaces and their Applications in the Finite Element Method. VUTIUM Press, Brno 2005 (522 stran).

[Že3] A. Ženíšek: Finite element vaqriational crimes in parabolic-elliptic problems. I. Nonlinear schemes. *Numer. Math.* **55** (1989), 343-376.

[ŽZ] A. Ženíšek, M. Zlámal: Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problem of the fourth order. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **2** (1970), 367-373.