

# F1031 Matematika o krok napřed

## 5. Pohybové rovnice I.

### Úloha 1.

Malá kulička padala volným pádem a spadla do vody. Její rychlost na hladině (v okamžiku  $t = 0$ ) měla velikost  $v_0$ . Odporová síla, již působí voda proti pohybu kuličky, se řídí Stokesovým vztahem

$\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v} = -b\vec{v}$ , kde  $\vec{v}$  je okamžitá rychlost kuličky,  $r$  její poloměr a  $\eta$  dynamická viskozita vody. (Konstantu  $6\pi\eta r$  jsme označili  $b$  a také s ní tak pro zjednodušení počítejte.) Vztakovou sílu, již působí voda na kuličku, zanedbejte (není to příliš dobrá aproximace).

- Zvolte vhodně soustavu souřadnic (stačí jedna osa, pohyb kuličky je svislý).
- Sestavte pohybovou rovnici kuličky.
- Ukažte, že pohybovou rovnici můžete zapsat jako diferenciální rovnici prvního řádu pro rychlost kuličky.
- Rovnici vyřešte (obecné řešení, partikulární řešení pro zadanou počáteční podmínku).
- Na základě nalezeného řešení ukažte, že kulička nemůže překročit jistou *mezní rychlost* a určete ji.

## 6. Pohybové rovnice II.

### Úloha 1.

Elektron (hmotnost  $m$  a náboj  $e$  vyhledejte v tabulkách) vletí do homogenního magnetického pole o indukci  $\vec{B}$  rychlostí  $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ . Velikost této rychlosti je  $v_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$ .

- Zvolte soustavu souřadnic tak, aby vektor  $\vec{B}$  měl směr kladné osy  $z$ . Osu  $x$  zvolte ve směru počáteční rychlosti. Počátek soustavy souřadnic zvolte v místě, kde se částice nachází v okamžiku  $t = 0$ .
- Zapište druhý Newtonův zákon pro částici.
- Rozepište druhý Newtonův zákon do složek a zapište pohybové rovnice částice.
- Integrujte rovnici pro  $z$ , dosaďte počáteční podmínky a najděte závislost  $z(t)$ .
- Ukažte, že zbývající pohybové rovnice lze zapsat jako soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu pro složky rychlosti  $v_x$  a  $v_y$ .
- Vyjáďte z první rovnice  $v_y$  a dosaďte do druhé.
- Řešte získanou rovnici druhého řádu pro  $v_x$ , najděte obecné řešení a partikulární řešení pro počáteční podmínky odpovídající zadání úlohy.
- Získané řešení  $v_x(t)$  dosaďte do vztahu pro  $v_y$  a určete  $v_y(t)$ .
- Po jaké křivce se částice pohybuje? Ukažte, že její pohyb je periodický a určete kruhovou frekvenci  $\omega$  za předpokladu, že velikost indukce magnetického pole je 1T.