

# F1031 Matematika o krok napřed

## 7. Křivkový integrál.

### Úloha 1.

V rovině  $xy$  je dáno vektorové pole  $\vec{F} = (\alpha(x^2 - y^2), \beta xy^2)$ , kde  $\alpha, \beta$  jsou konstanty, jejichž číselná hodnota je 1. Určete křivkový integrál druhého druhu z vektorového pole  $\vec{F}$  po následujících křivkách

- parabola  $y = x^2$  z bodu  $A = [-1, 1]$  do bodu  $B = [1, 1]$ ,
- úsečka  $AB$ ,  $A = [-1, 1]$  m,  $B = [1, 1]$  m,
- úsečka  $OB$ , kde  $O$  je počátek soustavy souřadnic.

Pro výpočet zvolte libovolnou vhodnou parametrizaci křivek.

### Úloha 2.

V prostoru je dáno silové pole  $\vec{F} = \alpha(-yz, xz, x^2 + y^2)$  [N], kde hodnota konstanty  $\alpha$  v soustavě SI je 1 (určete fyzikální rozměr této konstanty). Určete práci této síly při působení na částici pohybující se po šroubovici  $\vec{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, bt)$ , kde  $R, b, \omega$  jsou kladné konstanty z bodu  $A = [R, 0, 0]$  do bodu  $B = [R, 0, \frac{2\pi b}{\omega}]$ . (Jednotky veličin jsou v soustavě SI.)

## 8. Parciální derivace, úplný diferenciál.

### Úloha 1.

Je dáno vektorové pole  $\vec{F} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$ . Vypočítejte parciální derivace

každé z jeho složek podle všech proměnných (celkem 9 derivací). Utvořte výrazy

- $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
- $\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$

Dokažte, že platí

- $F_x = \frac{\partial f}{\partial x}, F_y = \frac{\partial f}{\partial y}, F_z = \frac{\partial f}{\partial z}$ , kde  $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

### Úloha 2.

Rozhodněte, zda výraz  $\left( \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy \right)$  je úplným diferenciálem nějaké funkce  $f(x, y)$ .

Pokud ano, určete všechny takové funkce.