

# F1031 Matematika o krok napřed

## 9. Vícenásobný integrál – Fubiniova věta.

### Úloha 1.

Vypočtěte integrál  $\iiint_K r^2 dr d\vartheta d\varphi$ , kde  $K = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ .

### Úloha 2.

Homogenní rovinný útvar o plošné hustotě  $\sigma$  je vymezen omezen funkcemi  $\varphi(x) = 0$ ,  $\psi(x) = x^{-1}$  na intervalu  $[1, 2]$ . Vypočtěte jeho

- hmotnost,
- polohu středu hmotnosti,
- momenty setrvačnosti vzhledem k osám  $x$  a  $y$ .

### Úloha 3.

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního rotačního kužele o hustotě  $\rho$ , poloměru podstavy  $R$  a výšce  $v$  vzhledem k ose jeho symetrie. Návod: Osu kužele zvolte za osu  $z$  soustavy souřadnic, její počátek umístěte do středu podstavy kužele. Vrchol kužele bude tak mít souřadnice  $(0, 0, v)$ . Rovnice kuželové plochy tvořící plášť kužele je dána funkcí  $z = \psi(x, y) = v - \frac{v}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq v$ , rovina podstavy má rovnici  $z = \varphi(x, y) = 0$ . Použijte válcových souřadnic  $(r, \varphi, z)$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . V nich je objemový element vyjádřen vztahem  $dV = r dr d\varphi dz$ .

## 10. Plošný integrál.

### Úloha 1.

Parametrizujte část kulové plochy o rovnici  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  ležící v prvním oktantu soustavy souřadnic pomocí sférických úhlových souřadnic  $\vartheta, \varphi$ . Určete souřadnicové křivky  $C_\vartheta, C_\varphi$  a jejich tečné vektory  $\vec{f}_\vartheta = \left( \frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \right)$ ,  $\vec{f}_\varphi = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)$ . Vyjádřete plošný element této plochy pomocí sférických úhlových souřadnic, tj.  $|\vec{f}_\vartheta \times \vec{f}_\varphi| d\vartheta d\varphi$  a vypočtěte plošný obsah útvaru. Porovnejte výsledek se známým vztahem pro povrch osminy koule.

### Úloha 2.

Uvažujte o homogenním plošném útvaru o rovnici  $z = x^2 + y^2$  (povrch rotačního paraboloidu) omezeném nerovností  $0 \leq z \leq R^2$ . Plošná hustota je  $\sigma$ . Parametrizuje uvedenou plochu pomocí polárních souřadnic  $r, \varphi$ , tj.  $(r, \varphi, z)$ ,  $r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z$  dopočítejte z rovnice plochy. Vyjádřete tečné vektory k souřadnicovým křivkám  $C_r, C_\varphi$  a plošný element. Vypočtěte plošný obsah útvaru a jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose  $z$ .

*Když to nepůjde, přijďte na konzultaci.*