Aparát k Variačnímu počtu (JS 2014)

1. Multilineární zobrazení (*k*-tenzory) nad V_n (opakování algebry z 1. r.)

V dalším textu je V_n *n*-rozměrný vektorový prostor nad polem reálných čísel **R**. Text je úsporný, neklade si za úkol dokonalou preciznost definic a věty jsou pouze komentovány.

Kovariantním k-tenzorem na V_n rozumíme zobrazení

$$\tau : V_n \times \cdots \times V_n \ni (\xi_1, \ldots, \xi_k) \to \tau(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbf{R}, \tag{1.1}$$

Které je lineární ve všech vektorových argumentech, tj.

$$\tau(\xi_1, \ldots, \alpha\xi_i + \beta\zeta_i, \ldots, \xi_n) = \alpha\tau(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n) + \beta\tau(\xi_1, \ldots, \zeta_i, \ldots, \xi_n) \tag{1.2}$$

Pro libovolné vektorové argumenty, libovolné skaláry α, β a libovolnou (*i*-tou) pozici.

Příklad 1: Kovariantní 1-tenzor je definován jako zobrazení $\tau : V_n \ni \xi \to \tau(\xi) \in \mathbf{R},\ \tau(\alpha\xi + \beta\zeta) = \alpha\tau(\xi) + \beta\tau(\zeta)$ pro libovolné vektory $\xi, \zeta \in V_n$ a libovolné skaláry $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je báze ve V_n. Definujme lineární zobrazení $e^j : V_n \ni \xi \to e^j(\xi) \in \mathbf{R},\ 1 \le j \le n,$ vztahem $e^j(e_i) = \delta_i^j$, kde δ_i^j je Kroneckerovo delta. Tato lineární zobrazení jsou uvedeným vztahem jednoznačně určena (zdůvodněte). Označme $T_1(V_n) = V_n^*$ množinu všech 1-tenzorů. Zvolme $\omega, \eta \in V_n^*$ libovolně a definujme zobrazení

$$\chi : V_n \times \cdots \times V_n \ni \xi \to \chi(\xi) = \alpha\omega(\xi) + \beta\eta(\xi) \in \mathbf{R},\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Platí $\chi \in V_n^*$, značíme $\chi = \alpha\omega + \beta\eta$. Pro $\alpha = \beta = 1$ je χ *součtem* 1-tenzorů ω a η, pro $\beta = 0$ je α *-násobkem* 1-tenzoru ω. Zavedením těchto operací je na množině V_n^* zavedena struktura vektorového prostoru.

Cvičení 1: Dokažte, že zobrazení χ z Příkladu 1 je skutečně 1-tenzor. Dále dokažte, že soubor $(e^1, \ldots, e^n)$ je báze ve V_n^*. Konečně dokažte, že pro $\xi \in V_n$ platí $e^j(\xi) = \xi^j$, kde $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ jsou složky vektoru ξ v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$, tj. $\xi = \xi^i e_i$.

Prostor V_n^* je *n*-rozměrný. Nazývá se *duální prostor* prostoru V_n a jeho báze $(e^1, \ldots, e^n)$ je *duální báze indukovaná* bází $(e_1, \ldots, e_n)$.

Označme $T_k(V_n)$ množinu všech *k*-tenzorů na V_n a zvolme $\omega, \eta \in T_k(V_n),\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ libovolně, ale pevně. Zobrazení

$$\chi : V_n \times \cdots \times V_n \ni (\xi_1, \ldots, \xi_k) \to \chi(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \alpha\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k) + \beta\eta(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbf{R} \tag{1.3}$$

je rovněž *k*-tenzorem (dokažte). Vztahem (1.3) je na množině *k*-tenzorů zavedena struktura vektorového prostoru. Jeho dimenze je n^k, jak teprve ukážeme.

Nechť $\omega \in T_k(V_n), \eta \in T_l(V_n)$. Zobrazení

$$\tau : V_n \times \cdots \times V_n \ni (\xi_1, \ldots, \xi_{k+l}) \to \tau(\xi_1, \ldots, \xi_{k+l}) = \omega(\xi_1, \ldots, \xi_k)\eta(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_{k+l}) \in \mathbf{R} \qquad (1.4$$

je (k + l)-tenzor (dokažte). Nazývá se tenzorový součin tenzorů ω a η a značí se $\tau = \omega \otimes \eta$.

Věta 1 (vlastnosti tenzorového součinu):
Pro $\omega, \omega_1, \omega_2 \in T_k(V_n)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in T_l(V_n)$, $\chi \in T_s(V_n)$ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, libovolně zvolené, platí (dokažte z definice tenzorového součinu)

$$\begin{aligned} &1)\ (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \otimes \eta = \alpha(\omega_1 \otimes \eta) + \beta(\omega_2 \otimes \eta) \\ &2)\ \omega \otimes (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) = \alpha(\omega \otimes \eta_1) + \beta(\omega \otimes \eta_2) \\ &3)\ (\alpha\omega) \otimes \eta = \omega \otimes (\alpha\eta) = \alpha(\omega \otimes \eta) \\ &4)\ \omega \otimes (\eta \otimes \chi) = (\omega \otimes \eta) \otimes \chi \text{ píšeme } \omega \otimes \eta \otimes \chi. \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Cvičení 2: Dokažte, že soubor $(e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k})$, $1 \le i_1, \ldots, i_k \le n$, je báze prostoru $T_k(V_n)$ a dokažte na základě toho, že dimenze tohoto prostoru je n^k. Proveďte důkaz nejprve pro konkrétní hodnoty k, např. k = 2, k = 3, a potom obecně. Vypište všechny prvky báze prostorů $T_2(V_2), T_2(V_3), T_3(V_2)$.

Cvičení 3: Dokažte, že pro složky tenzoru $\tau \in T_k(V_n)$, $\tau = \tau_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}$, platí $\tau_{i_1 \ldots i_k} = \tau(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$. Návod: Proveďte důkaz nejprve pro k = 2 tak, že tenzor τ zapsaný ve tvaru $\tau = \tau_{rs} e^r \otimes e^s$ vyčíslíte na argumentech e_i, e_j. Pak zobecněte.

Cvičení 4: Vyjádřete hodnotu tenzoru $\tau = \tau_{rs} e^r \otimes e^s \in T_2(V_n)$ na vektorových argumentech $\xi = \xi^i e_i$, $\zeta = \zeta^j e_j$ pomocí jejich složek.

Tenzor $\omega \in T_k(V_n)$ se nazývá *antisymetrický*, jestliže pro libovolné vektorové argumenty platí $\omega(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_k) = -\omega(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k)$, $1 \le i, j \le k$. (Hodnota mění znaménko při výměně libovolných dvou argumentů.)

Cvičení 5: Pro antisymetrický tenzor $\omega \in T_2(V_n)$, $\omega = \omega_{ij} e^i \otimes e^j$, dokažte, že $\omega_{ij} = \omega_{ji}$.

Alternací tenzoru $\omega \in T_k(V_n)$ nazveme zobrazení definované vztahem

$$\mathrm{Alt}\ \omega : V_n \times \ldots \times V_n \ni (\xi_1, \ldots, \xi_k) \to \omega(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in P_k} \mathrm{sgn}\,\sigma\,\omega(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(k)}) \in \mathbf{R} \quad (1.6)$$

Pro libovolné vektory $\xi_1, \ldots, \xi_k \in V_n$. σ probíhá množinu všech permutací indexů 1 až *k*.

Cvičení 6: Dokažte, že pro $\omega \in T_k(V_n)$ je zobrazení $\mathrm{Alt}\ \omega$ antisymetrický *k*-tenzor. Současně ukažte, že množina $\Lambda_k(V_n)$ všech antisymetrických *k*-tenzorů s operacemi sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem je vektorovým podprostorem prostoru $T_k(V_n)$.

Věta 2 (vlastnosti alternace): Pro libovolný tenzor $\omega \in T_k(V_n)$ platí

$$\begin{aligned} &1)\ \text{je-li } \omega \in \Lambda_k(V_n), \text{ pak } \mathrm{Alt}\ \omega = \omega, \\ &2)\ \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\ \omega) = \mathrm{Alt}\ \omega. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Příklad 2: Nechť $\omega \in T_2(V_n)$, $\xi_1, \xi_2 \in V_n$. Platí: $\mathrm{Alt}\ \omega(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2!}\left[\omega(\xi_1, \xi_2) - \omega(\xi_2, \xi_1)\right]$.

Vyjádříme tenzor ω ve složkách a určíme hodnotu jeho alternace na vektorech $\xi_1, \xi_2 \in V_n$.

$$\omega = \omega_{ij} e^i \otimes e^j, \quad \omega(\xi_1, \xi_2) = \omega_{ij} e^i \otimes e^j (\xi_1, \xi_2) = \omega_{ij} \xi_1^i \xi_2^j,$$

$$\mathrm{Alt}\ \omega(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(\omega_{ij} \xi_1^i \xi_2^j - \omega_{ij} \xi_2^i \xi_1^j) = \frac{1}{2}(\omega_{ij} - \omega_{ji}) \xi_1^i \xi_2^j.$$

Cvičení 7: Pro $\omega \in \Lambda_2(V_n)$ platí tvrzení 1) věty 2. Dokažte. Dokažte, že $e^i \wedge e^j = -e^j \wedge e^i$.

Cvičení 8: Dokažte, že pro $\omega \in \Lambda_k(V_n)$ a pro libovolný soubor vektorů $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, z nichž alespoň dva jsou shodné, je $\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k) = 0$.

Nechť $\omega \in \Lambda_k(V_n), \eta \in \Lambda_l(V_n)$. Tenzor $\omega \otimes \eta$ nemusí být antisymetrický (zdůvodněte). Tenzor

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \mathrm{Alt}\ (\omega \otimes \eta) \in \Lambda_k(V_n) \quad (1.8)$$

Nazýváme vnější součin tenzorů ω a η.

Věta 3 (vlastnosti vnějšího součinu):
Pro $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda_k(V_n), \eta, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda_l(V_n)$, $\chi \in \Lambda_s(V_n)$ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, libovolně zvolené, platí (dokažte z definice vnějšího součinu)

$$\begin{aligned} &1)\ (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \wedge \eta = \alpha(\omega_1 \wedge \eta) + \beta(\omega_2 \wedge \eta), \\ &2)\ \omega \wedge (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) = \alpha(\omega \wedge \eta_1) + \beta(\omega \wedge \eta_2), \\ &3)\ (\alpha\omega) \otimes \eta = \omega \otimes (\alpha\eta) = \alpha(\omega \otimes \eta), \\ &4)\ \omega \wedge (\eta \wedge \chi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \chi \text{ píšeme } \omega \wedge \eta \wedge \chi, \\ &5)\ \omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Z vlastností antisymetrických tenzorů a vnějšího součinu je zřejmé, že soubor tenzorů tvaru $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n,$ tvoří bázi prostoru $\Lambda_k(V_n)$. Jeho dimenze je tedy $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Ve speciálním případě $k = n$ je $\dim \Lambda_n(V_n) = 1$. Pozn: Klademe $\Lambda_1(V_n) = T_1(V_n)$.

Příklad 3: Zápis antisymetrických tenzorů ve složkách. Nechť $\omega \in \Lambda_2(V_n)$. Ve složkách platí

$$\omega = \sum_{1 \le i < j \le n} \Omega_{ij}\, e^i \wedge e^j = \Omega_{12}\, e^1 \wedge e^2 + \cdots = \frac{1}{2}\Omega_{12}\, e^1 \wedge e^2 - \frac{1}{2}\Omega_{12}\, e^2 \wedge e^1 + \cdots = \omega_{12}\, e^1 \wedge e^2 + \omega_{21}\, e^2 \wedge e^1 + \cdots$$

Obecně lze tenzor ω zapsat ve tvaru $\omega = \omega_{ij}\, e^i \wedge e^j$, s antisymetrizovanými složkami $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Uvažujme naopak o zápisu $\omega = \bar{\omega}_{ij}\, e^i \wedge e^j$, kde mezi koeficienty $\bar{\omega}_{ij}$ nepředpokládáme předem žádný vztah. Vnější součiny v tomto záznamu nejsou nezávislé, neboť $e^i \wedge e^j = e^j \wedge e^i$. Platí

$\omega = \bar{\omega}_{12}\, e^1 \wedge e^2 + \bar{\omega}_{21}\, e^2 \wedge e^1 + \cdots = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_{12} - \bar{\omega}_{21}) e^1 \wedge e^2 + \frac{1}{2}(\bar{\omega}_{21} - \bar{\omega}_{12}) e^2 \wedge e^1$. Označíme-li $\omega_{12} = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_{12} - \bar{\omega}_{21}),\ \omega_{21} = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_{21} - \bar{\omega}_{12})$, dostaneme $\omega = \omega_{ij}\, e^i \wedge e^j,\ \omega_{ij} = -\omega_{ji}$, přičemž složky ω_{ij} jsou získány antisymetrizace složek $\bar{\omega}_{ij}$. Proces antisymetrizace lze zobecnit na případ libovolného typu antisymetrického tenzoru.

Příklad 4: Nechť $\omega, \eta \in \Lambda_1(V_n), \tau \in \Lambda_2(V_n)$, ve složkách

$\omega = \omega_i e^i,\ \eta = \eta_j e^j,\ \tau = \tau_{ij}\, e^i \wedge e^j$. Platí

$$\omega \wedge \eta = (\omega_i e^i) \wedge (\eta_j e^j) = \omega_i \eta_j (e^i \wedge e^j) = \sum_{1 \le i < j \le n} (\omega_i \eta_j - \omega_j \eta_i) e^i \wedge e^j.$$

Příklad 5: Zvolme $k = n, \omega_0 = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n \in \Lambda_n(V_n)$. Pro vektory $\xi_1, \ldots, \xi_n$ platí

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}\sigma\, e^1(\xi_{\sigma(1)}) \cdots e^n(\xi_{\sigma(n)}) = \det(\xi_i^j) \tag{1.10}$$

Vzhledem k platnosti vztahu (1.10) se tenzor ω_0 často označuje symbolem det.

Cvičení 9: Tenzor $\omega \in \Lambda_3(V_n), \omega = \bar{\omega}_{ijl}\, e^i \wedge e^j \wedge e^l$, v jehož zápisu nepředpokládáme mezi koeficienty $\bar{\omega}_{ijl}$ předem žádné vztahy, zapište pomocí antisymetrizovaných složek ω_{ijl}.

Cvičení 10: Nechť $\tau \in T_k(V_n)$. Zvolme ve V_n dvě báze $(e_1, \ldots, e_n), (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ a matici přechodu od první z nich k druhé označte *T*. Najděte vztah mezi složkami tenzoru τ v odpovídajících indukovaných bázích pro a) k = 1 a b) k = 2.

Cvičení 11: Nechť $\tau \in T_k(V_n)$. Zvolme ve V_n dvě báze $(e_1, \ldots, e_n), (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ a matici přechodu od první z nich k druhé označte *T*. Najděte vztah mezi složkami tenzoru τ v odpovídajících indukovaných bázích pro obecné k = 1.

---

2. Vektorová pole a diferenciální formy na euklidovských prostorech

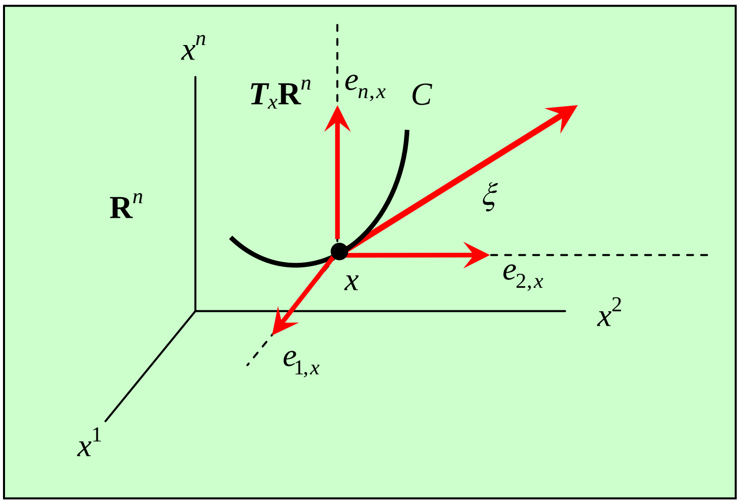
Nechť $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ je n-rozměrný euklidovský prostor (prostor uspořádaných n-tic s euklidovskou topologií. Označme $T_x\mathbf{R}^n$ n-rozměrný vektorový prostor umístěný v bodě $x \in \mathbf{R}^n$ (prostor uspořádaných n-tic se strukturou vektorového prostoru danou standardním sčítáním n-tic a násobením n-tice reálným číslem). $T_x\mathbf{R}^n$ se nazývá tečný prostor k $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ v bodě x.

S vektory v tečném prostoru počítáme podle běžných pravidel a chápeme je jako vázané vektory (v daném bodě x). Jiný způsob, jak zavést vektory v bodě, využívá tzv. *ekvivalentních křivek*.

Křivka C procházející bodem x je zadána parametricky jako (diferencovatelné) zobrazení $(\alpha, \beta) \ni t \to C(t) = (x^1C(t), \dots, x^nC(t)) \in \mathbf{R}^n$ takové, že pro jistou hodnotu parametru je $x = C(t)$. Parametrizaci obvykle volíme tak, aby $x = C(0)$. Křivky C_1, C_2 procházející bodem x se nazývají *ekvivalentní* (v bodě x), mají-li odpovídající zobrazení v bodě $t = 0$ shodnou derivaci (uvědomte si, že jde skutečně o relaci ekvivalence). *Tečným vektorem* k $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ v bodě x nazveme třídu ekvivalence těchto křivek. Tento vektor je jednoznačně určen n souřadnicemi bodu x a n-ticí složek

$$\xi = (x^1, \dots, x^n; \xi^1, \dots, \xi^n) = (x; (\xi^i)), 1 \le i \le n,\ \xi^i = \frac{\mathrm{d}x^iC(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}, \tag{2.1}$$

kde C je libovolná z křivek náležejících do dané třídy ekvivalence (pro všechny tyto křivky je totiž derivace stejná). Množina vektorů ξ, které mají společný bod x, po zavedení sčítání a násobení číslem „po složkách“, tvoří vektorový prostor dimenze n – zmíněný tečný prostor. Zavedení vektorů pomocí křivek je geometricky názorné a bude užitečné v dalších úvahách.



Obr. 1. Tečný prostor v bodě.

Označme $T\mathbf{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbf{R}^n} T_x\mathbf{R}^n$, $\Lambda_k(T\mathbf{R}^n) = \bigcup_{x \in \mathbf{R}^n} \Lambda_k(T_x\mathbf{R}^n)$ a $(e_{1,x}, \dots, e_{n,x})$ standardní bázi tečného prostoru v bodě x. Zobrazení $\xi : \mathbf{R}^n \ni x \to \xi(x) \in T_x\mathbf{R}^n \subset T\mathbf{R}^n$ se nazývá vektorové pole. Zobrazení $\omega : \mathbf{R}^n \ni x \to \omega(x) \in \Lambda_k(T_x\mathbf{R}^n) \subset \Lambda_k(T\mathbf{R}^n)$ se nazývá k-forma.

Zvolme v $T_x\mathbf{R}^n$ bázi, $(e_{1,x},\dots,e_{n,x})$, duální bázi označme $(e_x^1,\dots,e_x^n)$. Vyjádření vektorového pole a k-formy ve složkách:

$$\xi = \xi^i(x)e_{i,x} \quad \omega = \omega_{i_1\dots i_k}(x)e_x^{i_1}\wedge\dots\wedge e_x^{i_k}, \tag{2.2}$$

Složky vektorových polí i forem jsou funkce bodu x, tj. funkce proměnných $(x^1,\dots,x^n)$. V případě, že jsou spojité, resp. diferencovatelné, hovoříme o *spojitém*, resp. *diferencovatelném* vektorovém poli a *spojité*, resp. *diferenciální* k-formě. Funkce $f:\mathbf{R}^n \ni x \to f(x)\in\mathbf{R}$ je chápána jako 0-forma. Předpokládejme dále, že funkce, s nimiž budeme pracovat, mají spojité derivace do potřebného řádu.

Nechť $f:\mathbf{R}^n \ni x \to f(x)\in\mathbf{R}$ je funkce (0-forma) na $\mathbf{R}^n$ (resp. otevřené podmnožině $A\subset\mathbf{R}^n$). Vnější derivací funkce f nazveme 1-formu definovanou vztahem

$$\mathrm{d}f(x)(\xi) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\xi^i(x), \ \ x\in A, \ \ \xi\in T_x\mathbf{R}^n. \tag{2.3}$$

Hodnota formy $\mathrm{d}f$ na vektorovém argumentu ξ je fakticky rovna hodnotě derivace funkce f v bodě x ve směru vektoru ξ.

Příklad 6: Označme $x^i:\mathbf{R}^n \ni x \to x^i(x)\in\mathbf{R}$ i-tou souřadnicovou funkci (bodu x přiřazuje jeho i-tou souřadnici. Platí $\mathrm{d}x^i(x)(\xi) = (\partial x^i(x)/\partial x^j)\xi^j = \delta^i_j\xi^j = \xi^i$. Současně je také $e_x^i(\xi)=\xi^i$. Proto budeme značit $e_x^i = \mathrm{d}x^i$.

Vnější derivací k-formy ω (vyjádřené ve složkách vztahem (1.12)) rozumíme $(k+1)$-formu

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega_{i_1\dots i_k}\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k} = \frac{\partial\omega_{i_1\dots i_k}(x)}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}x^\alpha\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}. \tag{2.4}$$

Vnější derivace je tedy zobrazení (operátor) $\mathrm{d}:\Lambda_k(T\mathbf{R}^n)\ni\omega\to\mathrm{d}\omega\in\Lambda_{k+1}(T\mathbf{R}^n)$.

Věta 4 (vlastnosti vnější derivace): Nechť $\omega,\omega_1,\omega_2\in\Lambda_k T\mathbf{R}^n$, $\eta\in\Lambda_l T\mathbf{R}^n$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$ jsou zvoleny libovolně. Platí

$$\begin{aligned}&1)\ \ \mathrm{d}(\alpha\omega_1+\beta\omega_2) = \alpha\,\mathrm{d}\omega_1+\beta\,\mathrm{d}\omega_2,\\ &2)\ \ \mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta,\\ &3)\ \ \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Důkazy všech tří vlastností přímo z definice jsou jednoduché. První plyne z vlastností tenzorových prostorů a linearity operace derivace funkce, druhý vyžaduje využití antisymetrie vnějšího součinu a pro důkaz třetí vlastnosti je třeba přidat záměnnost parciálních derivací druhého řádu. Pro ilustraci třetí vlastnost dokážeme. Podle (2.4) platí

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega_{i_1\dots i_k}\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k} = \frac{\partial\omega_{i_1\dots i_k}(x)}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}x^\alpha\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.$$

$$d(d\omega)=d\left(\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_k}(x)}{\partial x^\alpha}\right)dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=\left(\frac{\partial^2\omega_{i_1\ldots i_k}(x)}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}dx^\beta\right)\wedge dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2\omega_{i_1\ldots i_k}(x)}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}dx^\beta\wedge dx^\alpha\right)\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2\omega_{i_1\ldots i_k}(x)}{\partial x^1\partial x^2}dx^2\wedge dx^1+\frac{\partial^2\omega_{i_1\ldots i_k}(x)}{\partial x^2\partial x^1}dx^1\wedge dx^2+\cdots\right)\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=0.$$

Vzhledem k tomu, že $dx^1\wedge dx^2=-dx^2\wedge dx^1$ a smíšené parciální derivace jsou shodné, první dva členy v závorce se vyruší. Stejně tomu bude s ostatními podobnými dvojicemi členů.

Příklad 7: Na $\mathbf{R}^3$ Je zadána funkce $f(x^1,x^2,x^3)=f(x,y,z)=x^2y^{-3}z^4$. Pro jednoduchost zápisu jsme označili $x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=z$. Její vnější derivací je 1-forma $df=2xy^{-3}z^4\,dx-3x^2y^{-4}z^4\,dy+4x^2y^{-3}z^3\,dz$. Proveďte operaci $d(df)$ - vyjde nula.

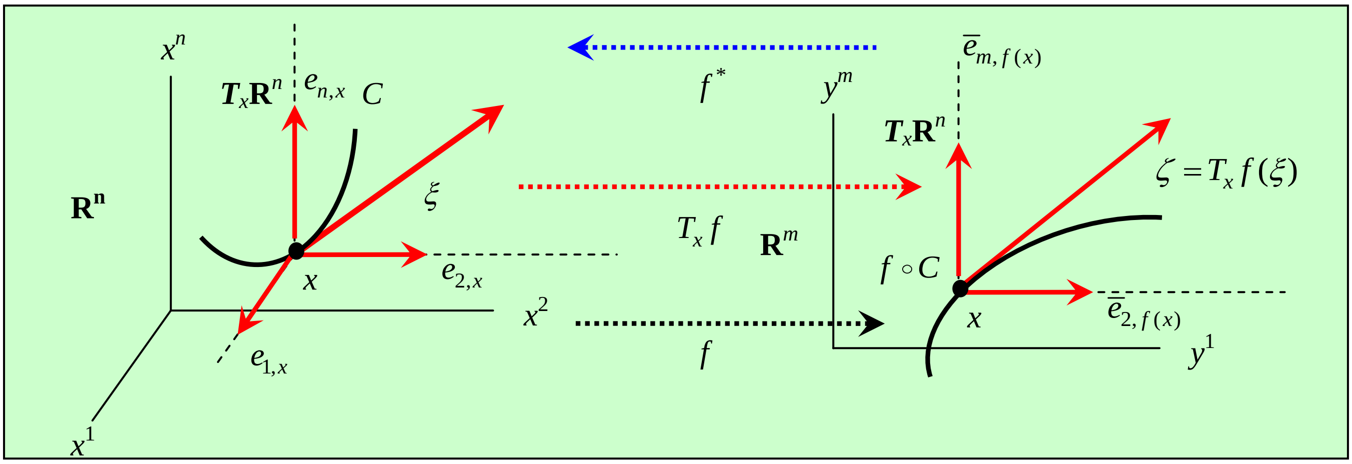
Příklad 8: Vnější derivací 1-formy $\omega=yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$ je $d\omega=z\,dy\wedge dx+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy+x\,dz\wedge dy+y\,dx\wedge dz+x\,dy\wedge dz=0$, neboť $dy\wedge dx=-dx\wedge dy$, atd.

Cvičení 12: Vyčíslete hodnotu formy df z Příkladu 7 a hodnotu formy ω z Příkladu 8 v bodě $(x,y,z)=(2,-1,1)$ na vektoru ξ umístěném v tomto bodě a složkách $(\xi^1,\xi^2,\xi^3)=(-1,2,1)$.

Uvažujme o diferencovatelném zobrazení $f:\mathbf{R}^n\ni x\to f(x)\in\mathbf{R}^m$. Standardní souřadnice bodů v $\mathbf{R}^n$ označme $x=(x^i),1\le i\le n$, standardní souřadnice bodů v $\mathbf{R}^m$ $y=(y^\alpha),1\le\alpha\le m$. Rovnice zobrazení f mají tvar

$$y^1=y^1f(x^1,\ldots,x^n),\ldots,y^m=y^mf(x^1,\ldots,x^n),\ \text{zkráceně}\ y^\alpha=y^\alpha f(x^i)\qquad(2.6)$$

Toto zobrazení indukuje přirozeným způsobem zobrazení tečných prostorů a také prostorů diferenciálních forem operujících na těchto prostorech.



Obr. 2. Zobrazení indukovaná zobrazením $f:\mathbf{R}^n\ni x\to f(x)\in\mathbf{R}^m$.

Nechť $f:\mathbf{R}^n \ni x \to f(x) \in \mathbf{R}^m$ je diferencovatelné zobrazení. *Tečným zobrazením* k zobrazení f rozumíme zobrazení $T_x f : T_x\mathbf{R}^n \ni \xi \to \zeta = T_x f(\xi) \in T_{f(x)}\mathbf{R}^m$ definované takto:

$$\zeta = (f(x), (\zeta^\alpha)), \text{ kde } \zeta^\alpha = \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \xi^i \tag{2.7}$$

Tato definice má přirozený geometrický význam: Je-li vektor ξ tečný ke křivce C, je jeho obraz, vektor $\zeta = T_x f(\xi)$ tečný je křivce $f \circ C$. Podle vztahu (1.11) má tečná vektor ke křivce $f \circ C$ složky

$$\zeta^\alpha = \frac{\mathrm{d}y^\alpha (f \circ C)(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\mathrm{d}x^i C(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \xi^i .$$

K výpočtu jsme potřebovali pouze pravidlo pro derivování složení funkce. Zobrazením f je také indukováno zobrazení prostorů diferenciálních forem. Označení ponechejme jako v předchozím.

Nechť $f:\mathbf{R}^n \ni x \to f(x) \in \mathbf{R}^m$ je diferencovatelné zobrazení a $\omega \in \Lambda_k(T\mathbf{R}^m)$ k-forma. *Pullbackem* (*zpětným obrazem*) formy ω rozumíme k-formu $\eta = f^*\omega \in \Lambda_k(T\mathbf{R}^n)$, definovanou vztahem

$$\eta(x)(\xi_1,\ldots,\xi_k) = (f^*\omega)(x)(\xi_1,\ldots,\xi_k) = \omega(f(x))(T_x f(\xi_1),\ldots,T_x f(\xi_k)), \tag{2.8}$$

pro $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi_1,\ldots,\xi_k \in T_x\mathbf{R}^n$. Pullbackem funkce (0-formy) $F:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ rozumíme funkci (0-formu) $f^*F = F \circ f$. Pullbackem diferenciálních forem pak rozumíme zobrazení $f^* : \Lambda_k(T\mathbf{R}^m) \ni \omega \to f^*\omega \in \Lambda_k(T\mathbf{R}^n)$ definované vztahem (2.8)

Věta 5 (vlastnosti pullbacku): Nechť $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda_k T\mathbf{R}^m$, $\eta \in \Lambda_l T\mathbf{R}^m$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$ jsou zvoleny libovolně. Nechť $f:\mathbf{R}^n \ni x \to f(x) \in \mathbf{R}^m$ je diferencovatelné zobrazení. Platí

$$\begin{aligned} &1)\quad f^*(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha\, f^*\omega_1 + \beta\, f^*\omega_2, \\ &2)\quad f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta, \\ &3)\quad f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Důkazy vlastností 1) a 2) přímo z definice jsou opět velmi jednoduché, provedeme některé později. Zaměříme se nejprve na konkrétní výpočty.

Příklad 9: Vypočteme z definice pullback souřadnicové formy $\mathrm{d}y^\alpha$. Nechť $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in T_x\mathbf{R}^n$.

$$f^*\mathrm{d}y^\alpha(x)(\xi) = \mathrm{d}y^\alpha(f(x))(T_x f(\xi)) = \zeta^\alpha(f(x)) = \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i}\xi^i = \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i(x)(\xi), \text{ kde } \zeta = T_x f(\xi)$$

Bod x a vektor ξ byly zvoleny libovolně, proto získaný vztah platí pro zobrazení jako taková:

$$f^*\mathrm{d}y^\alpha = \frac{\partial y^\alpha f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \qquad (2.10)$$

Dokážeme nyní vlastnost 3) z Věty 5 pro funkci $F:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, tedy 0-formu.

$$f^*\mathrm{d}F = f^*\left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha}\,\mathrm{d}y^\alpha\right) = \frac{\partial F}{\partial y^\alpha}|_{f(x)}\, f^*\mathrm{d}y^\alpha = \frac{\partial F}{\partial y^\alpha}|_{f(x)}\,\frac{\partial y^\alpha f}{\partial x^i}|_x\,\mathrm{d}x^i = \frac{\partial(F\circ f)}{\partial x^i}|_x\,\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}(F\circ f) = \mathrm{d}(f^*F).$$

K důkazu vlastnosti 3) pro libovolnou k-formu již stačí předchozí vztah a vlastnosti 1) a 2).

Cvičení 13: Je dáno zobrazení $f:\mathbf{R}^2 \ni (r,\varphi) \to f(r,\varphi) = (x,y) \in \mathbf{R}^3$, kde $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Pro zjednodušení jsme označili $(x^1,x^2) = (r,\varphi),\ (y^1,y^2) = (x,y)$. Vypočtěte $f^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$.

Cvičení 14: Je dáno zobrazení $f:\mathbf{R}^3 \ni (r,\theta,\varphi) \to f(r,\theta,\varphi) = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, kde $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$. Pro zjednodušení jsme označili $(x^1,x^2,x^3) = (r,\theta,\varphi),\ (y^1,y^2,y^3) = (x,y,z)$. Vypočtěte $f^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)$.

Příklad 10: K procvičení vnější derivace. Předpokládejme, že $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vektorové pole na $\mathbf{R}^3$. Definujme 1-formu, 2-formu a 3-formu takto:

$$\omega_F^{(1)} = F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y + F_3\,\mathrm{d}z$$
$$\omega_F^{(2)} = F_1\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + F_2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + F_3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$\omega_{F_1+F_2+F_3}^{(3)} = (F_1+F_2+F_3)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

Vnější derivace prvních dvou z těchto forem jsou

$$\mathrm{d}\omega_F^{(1)} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \omega_{\mathrm{rot}\,F}^{(2)}$$
$$\mathrm{d}\omega_F^{(2)} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \omega_{\mathrm{div}\,F}^{(3)}$$

Je-li $\vec{F} = \mathrm{grad}\,f$, pak $\mathrm{d}\omega_{\mathrm{grad}\,f}^{(1)} = 0 \Rightarrow \omega_{\mathrm{rot\,grad}\,f}^{(2)} \Rightarrow \mathrm{rot\,grad}\,f = 0$.

Cvičení 15: Pomocí forem z předchozího příkladu a vlastnosti 3) vnější derivace (Věta 4) dokažte, že $\mathrm{div\,rot}\,F = 0$.
