

HODGEŮV OPERÁTOR A JEHO PRAKTICKÉ UŽITÍ

2. ČÁST: ANALYTICKÉ APLIKACE

Petr BULUŠEK, Pavla MUSILOVÁ, Jana MUSILOVÁ

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity,
Kotlářská 2, 611 37 Brno, 180031@mail.muni.cz, pavla@physics.muni.cz,
janam@physics.muni.cz

Abstrakt

Druhá část příspěvku Hodgeův operátor a jeho praktické použití je věnována analytickým aplikacím tohoto důležitého algebraického pojmu. Zaměřuje se zejména na využití Hodgeova operátoru při analytických výpočtech v obecných křivočarých souřadnicích a ukazuje možnost sevřeného a elegantního zápisu fyzikálních rovnic. Úvod této části je věnován analytickému základu – problematice tzv. diferenciálních forem (antisymetrických tenzorových polí). Příspěvek spadá do oblasti univerzitního matematicko-fyzikálního vzdělávání. (1. část: Algebraický základ – viz [1].)

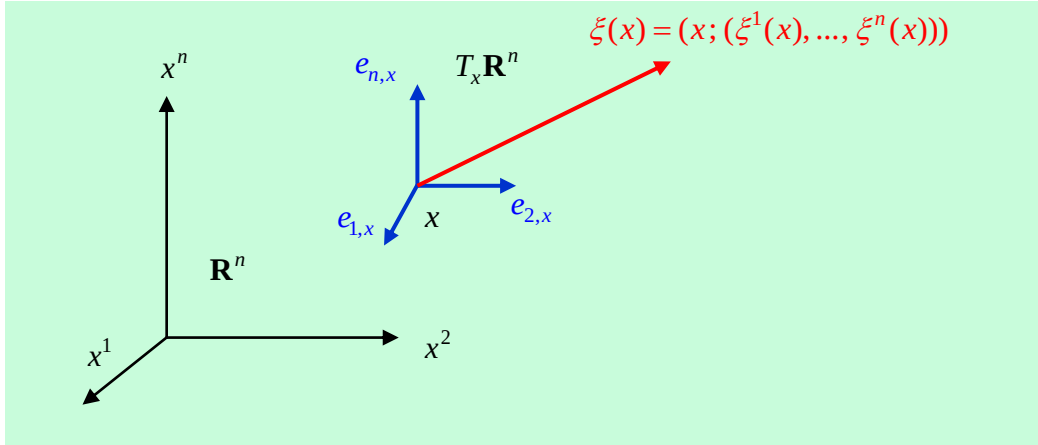
4. Analytická průprava

Pro snadné sledování pojmů a závěrů tohoto odstavce předpokládáme u čtenáře základní znalosti matematické analýzy funkcí více proměnných a dovednosti v oblasti souřadnicových přechodů, tj. nalezení báze tečných vektorů k souřadnicovým křivkám pro případ transformace souřadnic typu $\alpha : \mathbf{R}^3 \supset U \ni (u, v, w) \rightarrow (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ pomocí Jacobiho matice $D = D\alpha$ zobrazení α a odpovídající převod mezi složkami daného vektorového pole F v ortonormální bázi spojené s původními kartézskými souřadnicemi (x, y, z) a v obecné bázi spojené se souřadnicemi (u, v, w) .

Stručně zopakujeme pojem skalárních a vektorových polí a zavedeme diferenciální formy jakožto diferencovatelná pole antisymetrických tenzorů. Také metrický tenzor bude tenzorovým polem, ovšem symetrickým. Omezíme se pouze na ty operace s nimi, které budeme potřebovat pro práci s Hodgeovým operátorem. *Skalární, vektorová a tenzorová pole* jsou obecně zobrazení přiřazující bodům jisté n -rozměrné diferencovatelné variety (nejjednodušším příkladem je n -rozměrný euklidovský topologický prostor $\mathbf{R}^n$, který je v našem příspěvku základem) skaláry, vektory, či tenzory.

4.1 Vektorová a tenzorová pole

Uvažujme tedy o n -rozměrném euklidovském topologickém prostoru $\mathbf{R}^n$ (v praxi nejčastěji $\mathbf{R}^3$). Do každého jeho bodu $x \in \mathbf{R}^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ umístíme n -rozměrný vektorový prostor V_n . Pro naši potřebu jej rovnou opatříme skalárním součinem (pozitivně definitním metrickým tenzorem). Pracujeme tedy s prostorem E_n . Nazveme jej *tečný prostor k $\mathbf{R}^n$ v bodě x* a značíme $T_x \mathbf{R}^n$. Vektorovým polem na $\mathbf{R}^n$ nazveme zobrazení $\xi : \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow \xi(x) \in T_x \mathbf{R}^n$ (schematický obr. 1). (Vektorová pole lze definovat i na podmnožinách $\mathbf{R}^n$, nejlépe otevřených.)



Obr. 2: Tečný prostor (schematické znázornění).

Pro fyziku mají význam vektorová pole, která jsou přinejmenším diferencovatelná, tj. jejich složky $\xi^i(x) = \xi^i(x^1, \dots, x^n)$, $1 \leq i \leq n$, jsou reálné diferencovatelné funkce souřadnic bodu $x \in \mathbf{R}^n$. Do bodů prostoru $\mathbf{R}^n$ můžeme umisťovat i tenzorové prostory a definovat tak *tenzorová pole*. Například zobrazení $g: \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow g(x) \in S_2(T_x \mathbf{R}^n)$, $g(x) = (x; g_{ij}(x))$, kde $g_{ij}(x) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ jsou v každém bodě složky matice skalárního součinu, tj. (kovariantní) metriky, představuje symetrické regulární tenzorové pole druhého řádu – *pole kovariantního pozitivně definitního metrického tenzoru*, tedy *pole skalárního součinu*. Podobně definujeme *pole kontravariantního skalárního součinu* jako (indukované) zobrazení $\tilde{g}: \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow \tilde{g}(x) \in S_2(E_n^*)$, $\tilde{g}(x) = (x; \tilde{g}^{ij}(x))$, $1 \leq i, j \leq n$. Pro náš výklad pak potřebujeme, vedle polí skalárního součinu, pole úplně antisymetrických tenzorů:

Zobrazení $\omega: \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow \omega(x) \in \Lambda_k(T_x \mathbf{R}^n)$, $\omega(x) = (x; \omega_{i_1 \dots i_k}(x))$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, kde $\omega_{i_1 \dots i_k}(x) = \omega_{i_1 \dots i_k}(x^1, \dots, x^n)$ jsou reálné funkce souřadnic, je úplně antisymetrické kovariantní tenzorové pole k -tého řádu. V indukované bázi prostoru $\Lambda_{k,x}(T_x \mathbf{R}^n)$ je $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k}(x) e_x^{i_1} \wedge \dots \wedge e_x^{i_k}$. Jsou-li složky $\omega_{i_1 \dots i_k}(x) = \omega_{i_1 \dots i_k}(x^1, \dots, x^n)$ diferencovatelné, představuje zobrazení ω tzv. *diferenciální k -formu* pro $1 \leq k \leq n$. A nakonec diferencovatelné *skalární pole* $f: \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow \mathbf{R}$ představuje tzv. *diferenciální 0-formu*, příslušný prostor v bodě x značíme $\Lambda_{0,x}(T_x \mathbf{R}^n)$.

Vzhledem k tomu, že definičním oborem všech zmíněných zobrazení je prostor $\mathbf{R}^n$, resp. jeho (otevřené) podmnožiny, značíme jednoduše $\Lambda_k(\mathbf{R}^n) = \bigcup_{x \in \mathbf{R}^n} \Lambda_{k,x}(T_x \mathbf{R}^n)$. A podobně $T(\mathbf{R}^n) = \bigcup_{x \in \mathbf{R}^n} T_x \mathbf{R}^n$.

4.2 Vnější derivace

Jedinou operací s diferenciálními formami dostačující pro naši práci s Hodgeovým operátorem je *vnější derivace*. Je to zobrazení, které diferenciálním k -formám přiřazuje předepsaným způsobem užívaným derivování funkcí diferenciální $(k+1)$ -formy.

Nejjednodušším příkladem vnější derivace je jistá obdoba derivace funkce v daném směru (známá ze základních kursů matematické analýzy). Pro usnadnění nyní opět předpokládejme, že metrický tenzor v prostoru $T_x \mathbf{R}^n$ je pozitivně definitní (skalárním součin). Necht'

$\Lambda_{0,x}(T_x \mathbf{R}^n)$ je diferencovatelné skalární pole, v naší terminologii diferenciální 0-forma.

Označme $s \in T\mathbf{R}^n$, $s = s^j(x)e_{j,x}$, $g(s, s) = 1$, jednotkové vektorové pole. Derivace funkce f ve

směru s je v klasické analýze definována vztahem $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x^i} s^i$ (označení na levé straně je symbolické, i když běžně užívané – podle vektoru se samozřejmě derivovat nedá).

Zobecníme-li uvedený pojem na případ obecného vektorového pole $\xi \in T\mathbf{R}^n$, dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i. \text{ Uvážíme-li, že } \xi^i = e^i(\xi), \text{ můžeme pravou stranu rovnosti napsat jako}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} e^i(\xi), \text{ tj. jako hodnotu jisté diferenciální 1-formy v argumentu } \xi. \text{ Tuto formu označíme}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} e^i \in \Lambda_1(\mathbf{R}^n). \text{ V bodě } x \text{ pak je } df(x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_x e_x^i.$$

Příklad 12 Uvažujme o souřadnicové funkci $x^i : x \in \mathbf{R}^n \rightarrow x^i(x) = x^i \in \mathbf{R}$, přiřazující bodu x jeho i -tou souřadnici. Pak, podle předchozích úvah, platí $dx^i(x) = \left. \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right|_x e_x^j = \delta_j^i e_x^j = e_x^i$.

Od této chvíle tedy budeme používat značení $e_x^i = dx^i(x)$, zkráceně dx^i . A podobně, rovněž na základě „logiky“ zápisu směrové derivace, $e_{i,x} = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x$, zkráceně bez vyznačování bodu x .

Vnější derivaci funkce $f(x)$ pak zapíšeme jako $df(x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_x dx^i(x)$, zkráceně $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Vypadá to formálně jako úplný diferenciál funkce f , ale není. Je to jiný typ objektu. Zápis vektorového pole, resp. diferenciální k -formy bude tedy mít tvar

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \xi^i(x) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x, \text{ resp. } \xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ \omega(x) &= \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(x), \text{ resp. } \omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \\ \text{nebo ekvivalentně } \omega &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \bar{\omega}_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}, \bar{\omega}_{j_1 \dots j_k} = k! \sum_{\sigma \in P_k} \text{sgn } \sigma \cdot \omega_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)}. \end{aligned}$$

Vnější derivaci diferenciální k -formy ω pak jednoduše rozumíme

$$\begin{aligned} d\omega(x) &= d\omega_{i_1 \dots i_k}(x) \wedge dx^{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(x), \text{ resp. } d\omega = d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \\ \text{nebo ekvivalentně } d\omega &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} d\bar{\omega}_{j_1 \dots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}. \end{aligned}$$

Shrňme vlastnosti vnější derivace:

$d(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha d\omega_1 + \beta d\omega_2$ pro všechna $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, ... linearita,
 $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{k\ell} \omega \wedge d\eta$
 pro všechna $\omega \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n)$, $\eta \in \Lambda_\ell(\mathbf{R}^n)$, ... "Leibnizova formule",
 $d(d\omega) = 0$ pro všechna $\omega \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n)$.

První vlastností je linearita, plynoucí přímo z definice vnější derivace. Druhá vlastnost je důsledkem Leibnizova pravidla pro derivaci součinu funkcí a antisymetrie vnějšího součinu forem, třetí pak je kombinací antisymetrie vnějšího součinu a symetrie smíšených parciálních derivací druhého řádu pro funkce.

Příklad 13 Uvažujme o diferenciální formě

$\omega \in \Lambda_1(\mathbf{R}^3)$, $\omega = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$, kde jsme (standardně pro případ $n = 3$) označili $dx^1 = dx$, $dx^2 = dy$, $dx^3 = dz$. Počítejme její vnější derivaci:

$$\begin{aligned}
 d\omega &= dF_1(x, y, z) \wedge dx + dF_2(x, y, z) \wedge dy + dF_3(x, y, z) \wedge dz = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \\
 &+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} dx + \frac{\partial F_3}{\partial y} dy + \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) \wedge dz.
 \end{aligned}$$

Uvážíme-li, že díky antisymetrii vnějšího součinu je $dx \wedge dx = e_x^1 \wedge e_x^1 = 0$ a podobně $dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$, dále pak $dy \wedge dz = -dz \wedge dy$, atd., dostaneme nakonec

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Výrazy v závorkách vypadají jako složky rotace vektorového pole F . Jenže východiskem nebylo vektorové pole, ale diferenciální 1-forma (tzv. kovektorové pole). Abychom tedy mohli korektně použít tento výsledek při výpočtu rotace vektorového pole, musíme jako východisko vzít v úvahu vektorové pole a v závěrečném výsledku mít derivace výchozího vektorového pole. Nemusíme se při tom vzdát jednoduchého výpočtu rotace pomocí vnější derivace 1-formy, stačí tuto formu „vyrobit“ snížením indexu odpovídajícího vektorového pole. Samozřejmě se vyskytne pochybnost, zda má něco takového smysl, když definici rotace přece dobře známe. V tak jednoduchém příkladu, jaký právě řešíme, je taková pochybnost jistě namístě. V obecných (křivočarých a třeba i neortogonálních) souřadnicích smysl postupu za chvíli prokážeme. A další otázka: Co je to „odpovídající“ vektorové pole? A ještě jedna otázka: Výpočtem vnější derivace 1-formy ω jsme dostali 2-formu. Co ta má společného s nějakým vektorovým polem, resp. s jeho rotací? S uvedenými otázkami se vypořádáme v dalším odstavci. Nyní ještě jeden příklad na vnější derivaci a jeden na snížení indexu.

Příklad 14 Pro $\omega \in \Lambda_2(\mathbf{R}^3)$, $\omega = F_1(x, y, z)dy \wedge dz + F_2(x, y, z)dz \wedge dx + F_3(x, y, z)dx \wedge dy$ počítejme vnější derivaci:

$$\begin{aligned}
 d\omega &= dF_1(x, y, z) \wedge dy \wedge dz + dF_2(x, y, z) \wedge dz \wedge dx + dF_3(x, y, z) \wedge dx \wedge dy = \\
 &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx + \\
 &+ \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} dx + \frac{\partial F_3}{\partial y} dy + \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy, \text{ po roznásobení a úpravě}
 \end{aligned}$$

$d\omega = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \omega_0$. Výraz v závorce vypadá jako divergence. Tak by tomu bylo, kdyby šlo o divergenci vektorového pole. Složky naší formy ω však mají charakter kovektorového pole.

Příklad 15 Vyjádření vektorového pole v $\mathbf{R}^3$ má tvar $F = F^1 \frac{\partial}{\partial x} + F^2 \frac{\partial}{\partial y} + F^3 \frac{\partial}{\partial z}$.

Odpovídající 1-formu $\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy + \omega_3 dz$ dostaneme snížením indexu, tj.

$\omega = F^b$, $F_i^b = g_{ij} F^j$. Protože v ortonormálních bázích euklidovského vektorového prostoru je matice $G = (g_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, jednotková, je $F_i^b = F^i$. Ale třeba v případě Minkowského metrického tenzoru $\text{diag } g = (-1, 1, 1, 1)$ dostaneme $F_0^b = -F^0$, $F_i^b = F^i$, $1 \leq i \leq 3$, pro $\text{diag } g = (1, -1, -1, -1)$ naopak $F_0^b = F^0$, $F_i^b = -F^i$, $1 \leq i \leq 3$.

5. K čemu poslouží Hodgeův operátor

Tento odstavec je věnován praktickému použití Hodgeova operátoru zejména ve vektorové analýze v křivočarých souřadnicích.

5.1 Kartézské souřadnice v $\mathbf{R}^3$

Je to jednoduché: Zůstaneme zatím v $\mathbf{R}^3$ a tečnými prostory budou trojrozměrné euklidovské prostory (metrický tenzor je skalární součin). Začneme hned příkladem:

Příklad 16 Zvolme vektorové pole $F^1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + F^2(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + F^3(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$. Pak (viz příklad 15) $F^b = F_1^b(x, y, z) dx + F_2^b(x, y, z) dy + F_3^b(x, y, z) dz$, $F_i^b = F^i$. Vyjádříme vnější derivaci (příklad 13): $dF^b = \left(\frac{\partial F_3^b}{\partial y} - \frac{\partial F_2^b}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F_1^b}{\partial z} - \frac{\partial F_3^b}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial F_2^b}{\partial x} - \frac{\partial F_1^b}{\partial y} \right) dx \wedge dy$.

Dostali jsme 2-formu. A pozor, pomocí Hodgeova operátoru z ní uděláme 1-formu,

$*dF^b = \left(\frac{\partial F_3^b}{\partial y} - \frac{\partial F_2^b}{\partial z} \right) * (dy \wedge dz) + \left(\frac{\partial F_1^b}{\partial z} - \frac{\partial F_3^b}{\partial x} \right) * (dz \wedge dx) + \left(\frac{\partial F_2^b}{\partial x} - \frac{\partial F_1^b}{\partial y} \right) * (dx \wedge dy)$. Nyní stačí

použít výsledky z příkladu 8 a dostáváme 1-formu

$*dF^b = \left(\frac{\partial F_3^b}{\partial y} - \frac{\partial F_2^b}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial F_1^b}{\partial z} - \frac{\partial F_3^b}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial F_2^b}{\partial x} - \frac{\partial F_1^b}{\partial y} \right) dz$. Posledním úkonem je zvednutí

indexu a dostaneme výsledné vektorové pole:

$$(*dF^b)^\# = \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} = \text{rot } F.$$

Dostali jsme důležitý výsledek: operátor rotace, který jsme počítali v kartézských souřadnicích, je složením čtyř jednoduchých operací: snížení indexu, vnější derivace, Hodgeova operátoru a zvýšení indexu. „Nejobtížnější“ je tedy obyčejné derivování. Podobně můžeme pomocí těchto operací vyjádřit divergenci vektorového pole F (použijeme výsledek příkladu 14). Podobně vyjádříme i gradient skalárního pole. V souhrnu dostaneme:

$$\begin{aligned}\text{rot} &= \# \circ * \circ d \circ b, \text{ zkráceně } \text{rot} = \# * db, \\ \text{div} &= * \circ d \circ * \circ b, \text{ zkráceně } \text{div} = * d * b, \\ \text{grad} &= \# \circ d, \text{ zkráceně } \text{grad} = \# d.\end{aligned}$$

Komentář k divergenci: Snížením indexu převedeme vektorové pole na 1-formu. Pomocí Hodgeova operátoru získáme 2-formu, její vnější derivací je 3-forma, pomocí Hodgeova operátoru z ní dostaneme 0-formu (skalární pole). Do výsledku v tomto případě už jen dosadíme $F_i = F^i, 1 \leq i \leq 3$.

Komentář ke gradientu funkce (tedy gradientu 0-formy): vnější derivací funkce f je 1-forma, jejíž složky jsou parciálními derivacemi funkce f podle souřadnic. Operací zvednutí indexu dostaneme vektorové pole gradientu. Velmi snadno také dokážeme odvodit známé vektorové identity – jen skládáním operátorů $b, \#, d, *$:

$$\begin{aligned}\text{rot} &= \# * db \Rightarrow \text{rotrot} = \# * db \# * db = \# * d * db, \text{ neboť } b \# = \text{id}, \\ \text{div} &= * d * b \Rightarrow \text{divrot} = * d * b \# * db = * d * * db = * d^2 b = 0, \text{ neboť } b \# = \text{id}, * * = \text{id}, d^2 = 0, \\ \text{grad} &= \# d \Rightarrow \text{graddiv} = \# d * d * b, \text{ divgrad} = * d * b \# d = * d * d, \\ \text{rotgrad} &= \# * db \# d = \# * d^2 = 0, \\ \text{graddiv} - \text{rotrot} &= \# d * d * b - \# * d * db = \# (d * d * - * d * d) b = \Delta.\end{aligned}$$

5.2 Obecné ortogonální souřadnice v $\mathbf{R}^3$

Typickými ortogonálními (ale nikoli normovanými) souřadnicemi v $\mathbf{R}^3$ jsou třeba kulové, válcové, nebo i parabolické souřadnice. Postup výpočtu operátorů gradientu, rotace, či divergence je stejný jako v případě souřadnic kartézských, tj. uplatňují se operátory $b, \#, d, *$. Nejsou-li ovšem souřadnice normované, není skalární součin v bázi vektorů s nimi spojených reprezentován jednotkovou maticí, v případě ortogonálních souřadnic je však reprezentující matice stále diagonální.

Uvažujme obecně o dvojí možnosti reprezentace vektorového pole v ortogonálních křivočarých souřadnicích, pro jednoduchost v $\mathbf{R}^3$ (zobecnění na $\mathbf{R}^n$ je velmi snadné). Křivočaré souřadnice (u, v, w) jsou s kartézskými spjatý zobrazením (U je otevřená množina)

$$\alpha: \mathbf{R}^3 \supset U \ni (u, v, w) \rightarrow (x\alpha(u, v, w), y\alpha(u, v, w), z\alpha(u, v, w)) \in \mathbf{R}^3,$$

zkráceně $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$. Složky tečných vektorů (f_u, f_v, f_w) k souřadnicovým křivkám v ortonormální bázi spojené s osami x, y, z jsou dány řádky Jacobiho matice $D = D\alpha$. První možnost reprezentace vektorového pole F , v případě ortogonálních souřadnic obvyklá, je reprezentace v pravotočivé ortonormální bázi

(e_u, e_v, e_w) , vzniklé normováním vektorů f_u, f_v, f_w , tj. $F = F^u e_u + F^v e_v + F^w e_w$. Druhou možností je reprezentace přímo v bázi (f_u, f_v, f_w) , tj. $F = \bar{F}^u f_u + \bar{F}^v f_v + \bar{F}^w f_w$ kde vztahy mezi složkami (F^u, F^v, F^w) a $(\bar{F}^u, \bar{F}^v, \bar{F}^w)$ jsou určeny maticí přechodu mezi oběma bázemi. Ta je v tomto případě diagonální, neboť $f_u = |f_u| e_u, f_v = |f_v| e_v, f_w = |f_w| e_w$. Odtud $F^u = \bar{F}^u |f_u|, F^v = \bar{F}^v |f_v|, F^w = \bar{F}^w |f_w|$. Pro duální báze pak platí

$e^u = |f_u| f^u, e^v = |f_v| f^v, e^w = |f_w| f^w$. V případě ortogonálních křivočarých souřadnic je přechod k ortonormální bázi velmi snadný a má dvojí podstatnou výhodu:

- matice skalárního součinu (euklidovského metrického tenzoru) je v ní, stejně jako v každé ortonormální bázi, jednotková, takže složky 1-formy F^b jsou shodné se složkami vektorového pole F ,
- pro aplikace Hodgeova operátoru na prvky báze (e^u, e^v, e^w) a jejich vnější součiny platí stejné vztahy, jaké jsme odvodili v příkladu 8.

V následujícím příkladu pojednáme o převodu do sférických souřadnic.

Příklad 17 Převod je dán zobrazením

$$\alpha : [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \ni (r, \vartheta, \varphi) \rightarrow (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

Tečné vektory k souřadnicovým křivkám tvoří ortogonální bázi, $(f_r, f_\vartheta, f_\varphi)$, která však není normovaná. Složky vektorů této báze tvoří řádky Jacobiho matice $D = D\alpha$ zobrazení α .

$$\frac{\partial}{\partial r} = f_r = \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \quad |f_r| = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = f_\vartheta = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \right) = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, -r \sin \vartheta), \quad |f_\vartheta| = r,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = f_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = (-r \sin \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, 0), \quad |f_\varphi| = r \sin \vartheta.$$

Odpovídající vektory ortonormální báze a vektory duální báze spojené se sférickými souřadnicemi jsou

$$e_r = f_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad e_\vartheta = \frac{1}{r} f_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad e_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} f_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$e^r = dr, \quad e^\vartheta = r d\vartheta, \quad e^\varphi = r \sin \vartheta d\varphi,$$

$$d\vartheta \wedge d\varphi = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} e^\vartheta \wedge e^\varphi, \quad d\varphi \wedge dr = \frac{1}{r \sin \vartheta} e^\varphi \wedge e^r, \quad dr \wedge d\vartheta = \frac{1}{r} e^r \wedge e^\vartheta.$$

$$*(d\vartheta \wedge d\varphi) = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} e^r, \quad *(d\varphi \wedge dr) = \frac{1}{r \sin \vartheta} e^\vartheta, \quad *(dr \wedge d\vartheta) = \frac{1}{r} e^\varphi.$$

Vektorové pole $F = F^1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + F^2(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + F^3(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$ vyjádříme ve tvaru

$F = F^r(r, \vartheta, \varphi) e_r + F^\vartheta(r, \vartheta, \varphi) e_\vartheta + F^\varphi(r, \vartheta, \varphi) e_\varphi$. Diferenciální 1-formu F^b získáme snížením indexu v tomto případě snadno:

$$F^b = F^r(r, \vartheta, \varphi) e^r + F^\vartheta(r, \vartheta, \varphi) e^\vartheta + F^\varphi(r, \vartheta, \varphi) e^\varphi =$$

$$= F^r(r, \vartheta, \varphi) dr + F^\vartheta(r, \vartheta, \varphi) r d\vartheta + F^\varphi(r, \vartheta, \varphi) r \sin \vartheta d\varphi.$$

Nyní už jen výpočetní rutina, samozřejmě s uvážením antisymetrie vnějšího součinu:

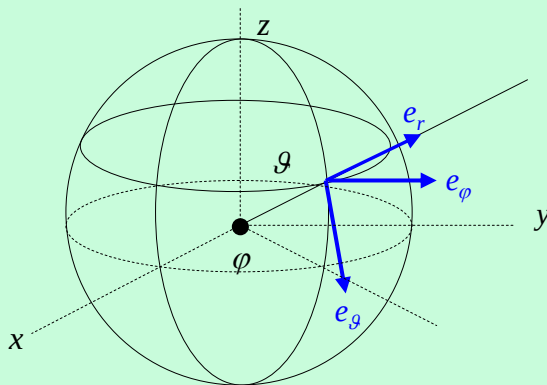
$$dF^b = dF^r \wedge dr + d(F^\vartheta r) \wedge d\vartheta + d(F^\varphi r \sin \vartheta) \wedge d\varphi = \left(\frac{\partial F^\varphi}{\partial \vartheta} r \sin \vartheta + F^\varphi r \cos \vartheta - \frac{\partial F^\vartheta}{\partial \varphi} r \right) d\vartheta \wedge d\varphi +$$

$$+ \left(\frac{\partial F^r}{\partial \varphi} - \frac{\partial F^\varphi}{\partial r} r \sin \vartheta - F^\varphi \sin \vartheta \right) d\varphi \wedge dr + \left(r \frac{\partial F^\vartheta}{\partial r} + F^\vartheta - \frac{\partial F^r}{\partial \vartheta} \right) dr \wedge d\vartheta.$$

$$\begin{aligned}
*dF^b &= \left(\frac{\partial F^\varphi}{\partial \vartheta} r \sin \vartheta + F^\varphi r \cos \vartheta - \frac{\partial F^\vartheta}{\partial \varphi} r \right) \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} e^r + \\
&+ \left(\frac{\partial F^r}{\partial \varphi} - \frac{\partial F^\varphi}{\partial r} r \sin \vartheta - F^\varphi \sin \vartheta \right) \frac{1}{r \sin \vartheta} e^\vartheta + \left(r \frac{\partial F^\vartheta}{\partial r} + F^\vartheta - \frac{\partial F^r}{\partial \vartheta} \right) \frac{1}{r} e^\varphi. \\
\#*dF^b &= \left(\frac{\partial F^\varphi}{\partial \vartheta} r \sin \vartheta + F^\varphi r \cos \vartheta - \frac{\partial F^\vartheta}{\partial \varphi} r \right) \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} e_r + \\
&+ \left(\frac{\partial F^r}{\partial \varphi} - \frac{\partial F^\varphi}{\partial r} r \sin \vartheta - F^\varphi \sin \vartheta \right) \frac{1}{r \sin \vartheta} e_\vartheta + \left(r \frac{\partial F^\vartheta}{\partial r} + F^\vartheta - \frac{\partial F^r}{\partial \vartheta} \right) \frac{1}{r} e_\varphi.
\end{aligned}$$

(Zvýšení indexu bylo opět snadné díky jednotkové matici G i $\tilde{G} = G^{-1}$.) Získali jsme rotaci vektorového pole F ve sférických souřadnicích za předpokladu jeho reprezentace v normované ortogonální bázi odpovídající těmto souřadnicím,

$$\begin{aligned}
\text{rot } F &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F^\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \tan \vartheta} F^\varphi - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F^\vartheta}{\partial \varphi} \right) e_r + \\
&+ \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F^r}{\partial \varphi} - \frac{\partial F^\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} F^\varphi \right) e_\vartheta + \left(\frac{\partial F^\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} F^\vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial F^r}{\partial \vartheta} \right) e_\varphi.
\end{aligned}$$



Obr. 3: Ortonormální báze vektorů tečných k souřadnicovým křivkám ve sférických souřadnicích. (Schematický nákres.)

Příklad se mohl oproti obvyklému přímému výpočtu jevit poněkud dlouhý. Jeho výhodou však je jednoduché derivování nezahrnující na rozdíl od přímého výpočtu složené funkce, v němž právě studenti dost chybují. Rozsáhlost příkladu způsobily i ukázkové podrobné výpočty, které je při troše zkušenosti a praxe jistě možné vynechat. V případě neortogonálních křivočarých souřadnic se však projeví výhody našeho přístupu oproti přímému výpočtu, který zde raději provádět nebudeme.

Důležitá praktická poznámka: Úkoly týkající se přepočtů z kartézských do křivočarých souřadnic (nejčastěji ortogonálních) bývají obvykle formulovány například takto: Vyjádřete operátor divergence (rotace, gradientu, Laplaceův operátor, ...) v kulových (válnových, parabolických, ...) souřadnicích. Tato formulace je nepřesná a její dvě (výše uvedené) odlišné interpretace povedou k odlišným výsledkům. Obvykle je úkolem míněno vyjádření v ortonormální bázi spojené s příslušnými ortogonálními souřadnicemi. Ty jsou dány

zobrazením typu $\alpha : (u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$, jemuž přímo odpovídá báze tvořená tečnými

vektory k souřadnicovým křivkám $(f_u, f_v, f_w) = \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w} \right)$, kde

$$f_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), f_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right), f_w = \left(\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w} \right). \text{ Tato báze je sice v případě}$$

ortogonálních souřadnic ortogonální, ale nemusí být normovaná. Je třeba rozlišit, zda je úkolem míněno působení operátoru na složky vektorového pole F v normované bázi

(e_u, e_v, e_w) , tj. $F = F^u e_u + F^v e_v + F^w e_w$ nebo v bázi (f_u, f_v, f_w) , přirozeně spjaté se

souřadnicemi (u, v, w) , tj. $F = \bar{F}^u f_u + \bar{F}^v f_v + \bar{F}^w f_w$. V obecných souřadnicích, které nejsou

ani ortogonální, tato otázka nemá smysl, vektorové pole vyjadřujeme rovnou v bázi

(f_u, f_v, f_w) .

5.3 Obecné křivočaré souřadnice v $\mathbf{R}^3$

V případě obecných křivočarých souřadnic, které nebudou ani ortogonální, je nutné vektorové

pole F reprezentovat přímo bázi tečných vektorů $(f_u, f_v, f_w) = \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w} \right)$, jejichž složky

v bázi kartézské jsou určeny Jacobiho maticí $D = D\alpha$ zobrazení $\alpha : (u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$,

$$F^1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + F^2(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + F^3(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z} = F^u(u, v, w) \frac{\partial}{\partial u} + F^v(u, v, w) \frac{\partial}{\partial v} + F^w(u, v, w) \frac{\partial}{\partial w}.$$

Náš postup pomocí výpočtu diferenciálních operátorů (rotace, divergence) vyžaduje jako

první krok určení 1-formy $F^b = F_u^b du + F_v^b dv + F_w^b dw$ operací snížení indexu. Metrický tenzor

(skalární součin) bude v bázi $(f^u, f^v, f^w) = (du, dv, dw)$, reprezentován maticí

$$G = DED^t = DD^t \text{ (odst- 2.1). Tj. } F^b = F_u^b du + F_v^b dv + F_w^b dw, \quad (F_u^b \ F_v^b \ F_w^b) = (F^u \ F^v \ F^w)G.$$

Například při výpočtu rotace pak v dalším kroku vypočteme vnější derivaci 1-formy F^b ,

která bude tvaru $dF^b = U(u, v, w) dv \wedge dw + V(u, v, w) dw \wedge du + W(u, v, w) du \wedge dv$. A

předposledním krokem je vyjádření 1-formy $*(dv \wedge dw), *(dw \wedge du), *(du \wedge dv)$ přímo

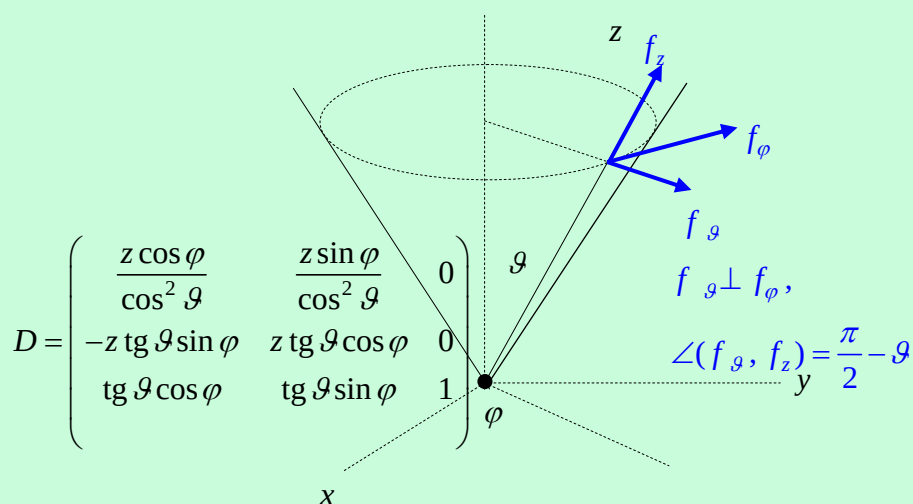
z definice Hodgeova operátoru (prostě to nejde tak jednoduše jako u ortonormálních bází).

Pak už stačí získat vektorové pole $\text{rot } F$ zvednutím indexu pomocí indukovaného metrického

tenzoru, jehož matice je $\tilde{G} = G^{-1}$. Při výpočtu divergence aplikujeme na F^b postupně operátory $*$, d , $*$. Jednotlivé kroky připravíme v příkladech 18 až 21.

Příklad 18 Snížení indexu v tzv. kuželových souřadnicích:

$$[0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \times [0, \infty) \ni (\vartheta, \varphi, z) \rightarrow (z \operatorname{tg} \vartheta \cos \varphi, z \operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi, z) \in \mathbf{R}^3.$$



Obr. 4: Báze tečných vektorů k souřadnicovým křivkám v kuželových souřadnicích. (Schematický nákres.)

Pro matici G kovariantního metrického tenzoru (skalárního součinu v E_3) dostaneme (a rovnou vyjádříme inverzní matici $\tilde{G} = G^{-1}$ reprezentující indukovaný kontravariantní metrický tenzor a objemový element):

$$G = DD^t = \begin{pmatrix} \frac{z^2}{\cos^4 \vartheta} & 0 & \frac{z \operatorname{tg} \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \\ 0 & z^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta & 0 \\ \frac{z \operatorname{tg} \vartheta}{\cos^2 \vartheta} & 0 & 1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \vartheta}{z^2} & 0 & -\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{z} \\ 0 & \frac{\cos^2 \vartheta}{z^2 \sin^2 \vartheta} & 0 \\ -\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{z} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\omega_0 = dx \wedge dy \wedge dz = \sqrt{\det G} d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dz = \frac{z^2 \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dz.$$

Pro vektorové pole $F = F^\vartheta f_\vartheta + F^\varphi f_\varphi + F^z f_z = F^\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + F^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + F^z \frac{\partial}{\partial z}$ dostaneme

$$\begin{aligned} F^b &= \left(F^\vartheta \frac{z^2}{\cos^4 \vartheta} + F^z \frac{z \operatorname{tg} \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \right) d\vartheta + F^\varphi z^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta d\varphi + \left(F^\vartheta \frac{z \operatorname{tg} \vartheta}{\cos^2 \vartheta} + F^z (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta) \right) dz \\ &= \left(F^\vartheta \frac{z^2}{\cos^4 \vartheta} + F^z \frac{z \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} \right) d\vartheta + F^\varphi z^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta d\varphi + \left(F^\vartheta \frac{z \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} + F^z \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \right) dz. \end{aligned}$$

Příklad 19 Hodgeův operátor v kuželových souřadnicích. Vyjádříme působení Hodgeova operátoru na diferenciální formy $d\vartheta, d\varphi, dz$, tj. $*d\vartheta, *d\varphi, *dz$. To však už nebude tak přímočaré jako u kartézských souřadnic. Musíme vyjít z definice. K jejímu použití potřebujeme matici $\tilde{G} = G^{-1} = (\tilde{g}^{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$, uvedenou výše. Formy $*d\vartheta, *d\varphi, *dz$ je nyní třeba hledat v obecném tvaru lineární kombinace 2-forem báze, např.

$*d\vartheta = \alpha d\varphi \wedge dz + \beta dz \wedge d\vartheta + \gamma d\vartheta \wedge d\varphi$. Pak podle definice dostaneme postupně dosazováním $\eta = d\varphi \wedge dz$, $\eta = dz \wedge d\vartheta$, $\eta = d\vartheta \wedge d\varphi$, s uvažováním symetrie matic $G, \tilde{G}$ a antisymetrie vnějšího součinu (značení – např. $\tilde{g}^{\varphi z} = \tilde{g}(d\varphi, dz)$):

$$\begin{aligned} d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dz &= \tilde{g}_2(*d\vartheta, d\varphi \wedge dz) \sqrt{\det G} d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dz = \\ &= \tilde{g}_2(\alpha d\varphi \wedge dz + \beta dz \wedge d\vartheta + \gamma d\vartheta \wedge d\varphi, d\varphi \wedge dz) \sqrt{\det G} d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dz \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 &= \left[\alpha \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{\varphi\varphi} & \tilde{g}^{\varphi z} \\ \tilde{g}^{z\varphi} & \tilde{g}^{zz} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{z\varphi} & \tilde{g}^{zz} \\ \tilde{g}^{\varphi\varphi} & \tilde{g}^{\varphi z} \end{pmatrix} + \gamma \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{\varphi\varphi} & \tilde{g}^{\varphi z} \\ \tilde{g}^{\varphi\varphi} & \tilde{g}^{\varphi z} \end{pmatrix} \right] \sqrt{\det G} \\ d\vartheta \wedge dz \wedge d\vartheta &= \tilde{g}_2(*d\vartheta, dz \wedge d\vartheta) \sqrt{\det G} d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dz = \\ &= \tilde{g}_2(\alpha d\varphi \wedge dz + \beta dz \wedge d\vartheta + \gamma d\vartheta \wedge d\varphi, dz \wedge d\vartheta) \sqrt{\det G} d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dz \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= \left[\alpha \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{\varphi z} & \tilde{g}^{\varphi\vartheta} \\ \tilde{g}^{zz} & \tilde{g}^{z\vartheta} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{zz} & \tilde{g}^{z\vartheta} \\ \tilde{g}^{\varphi z} & \tilde{g}^{\varphi\vartheta} \end{pmatrix} + \gamma \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{\varphi z} & \tilde{g}^{\varphi\vartheta} \\ \tilde{g}^{\varphi z} & \tilde{g}^{\varphi\vartheta} \end{pmatrix} \right] \sqrt{\det G}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\vartheta \wedge dz \wedge d\vartheta &= \tilde{g}_2(*d\vartheta, d\vartheta \wedge d\varphi) \sqrt{\det G} d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dz = \\
&= \tilde{g}_2(\alpha d\varphi \wedge dz + \beta dz \wedge d\vartheta + \gamma d\vartheta \wedge d\varphi, d\vartheta \wedge d\varphi) \sqrt{\det G} d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dz \Rightarrow \\
\Rightarrow 0 &= \left[\alpha \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{\vartheta\vartheta} & \tilde{g}^{\varphi\varphi} \\ \tilde{g}^{z\vartheta} & \tilde{g}^{z\varphi} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{z\vartheta} & \tilde{g}^{z\varphi} \\ \tilde{g}^{\vartheta\vartheta} & \tilde{g}^{\varphi\varphi} \end{pmatrix} + \gamma \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{\vartheta\vartheta} & \tilde{g}^{\varphi\varphi} \\ \tilde{g}^{\vartheta\varphi} & \tilde{g}^{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \right] \sqrt{\det G}.
\end{aligned}$$

Matice G , $\tilde{G} = G^{-1}$ máme připraveny a můžeme provést přímý výpočet pravých stran získaných rovnic pro koeficienty α , β , γ . Pro rychlejší postup si stačí uvědomit, že determinanty druhého řádu, které v nich vystupují, jsou postupně algebraické doplňky prvků matice $\tilde{G}$ (včetně správného znaménka), konkrétně prvků $\tilde{g}^{\vartheta\vartheta}$, $\tilde{g}^{\varphi\vartheta}$, $\tilde{g}^{z\vartheta}$ v první rovnici, $\tilde{g}^{\vartheta\varphi}$, $\tilde{g}^{\varphi\varphi}$, $\tilde{g}^{z\varphi}$ v druhé a $\tilde{g}^{\vartheta z}$, $\tilde{g}^{\varphi z}$, $\tilde{g}^{zz}$ ve třetí rovnici. Uvážíme-li známý vztah mezi algebraickými doplňky prvků matice a příslušnými prvky inverzní matice (základní algebra matic – inverzní matice k matici A je transponovaná adjungovaná matice, tvořená algebraickými doplňky, vydělená determinantem matice A), dostaneme pravé strany rovnic ve velmi jednoduchém tvaru a tyto rovnice pak zní:

$$\begin{aligned}
1 &= (\alpha g_{\vartheta\vartheta} + \beta g_{\varphi\vartheta} + \gamma g_{z\vartheta}) \sqrt{\det \tilde{G}} \Rightarrow 1 = \frac{\alpha}{\sin \vartheta \cos \vartheta} + \frac{\gamma}{z}, \\
0 &= (\alpha g_{\vartheta\varphi} + \beta g_{\varphi\varphi} + \gamma g_{z\varphi}) \sqrt{\det \tilde{G}} \Rightarrow 0 = \beta \sin \vartheta \cos \vartheta \Rightarrow \beta = 0, \\
0 &= (\alpha g_{\vartheta z} + \beta g_{\varphi z} + \gamma g_{zz}) \sqrt{\det \tilde{G}} \Rightarrow \frac{\alpha}{z} + \frac{\gamma \cos \vartheta}{z^2 \sin \vartheta} \Rightarrow \\
\Rightarrow \alpha &= \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -z \operatorname{tg}^2 \vartheta \Rightarrow *d\vartheta = \operatorname{tg} \vartheta d\varphi \wedge dz - z \operatorname{tg}^2 \vartheta d\vartheta \wedge d\varphi.
\end{aligned}$$

Analogickým postupem určíme $*d\varphi$, $*dz$. Dostaneme

$$*d\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} dz \wedge d\vartheta, \quad *dz = -z \operatorname{tg}^2 \vartheta d\varphi \wedge dz + \frac{z^2 \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} d\vartheta \wedge d\varphi.$$

Příklad 20 V příkladech 18 a 19 jsme se připravili na postupnou aplikaci operátorů snížení indexu a Hodgeova operátoru:

$$*F^b = \left(F^{\vartheta} \frac{z^2}{\cos^4 \vartheta} + F^z \frac{z \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} \right) *d\vartheta + F^{\varphi} z^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta *d\varphi + \left(F^{\vartheta} \frac{z \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} + F^z \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \right) *dz.$$

Stačí dosadit $*d\vartheta$, $*d\varphi$, $*dz$ a upravit. Výsledek je (možná překvapivě) jednoduchý:

$$\begin{aligned}
*F^b &= (F^{\vartheta} d\varphi \wedge dz + F^{\varphi} dz \wedge d\vartheta + F^z d\vartheta \wedge d\varphi) \frac{z^2 \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \\
&= (F^{\vartheta} d\varphi \wedge dz + F^{\varphi} dz \wedge d\vartheta + F^z d\vartheta \wedge d\varphi) \sqrt{\det G}.
\end{aligned}$$

Příklad 21 Kuželové souřadnice jsme zavedli v příkladu 18. Nyní je $n = 3$, $u^1 = \vartheta$, $u^2 = \varphi$, $u^3 = z$. Dosazením do obecného vyjádření $*F^b = i_F \omega_0$ (odstavec 3.2) dostaneme shodný výsledek s výsledkem příkladu 20:

$$\begin{aligned}
*F^b &= (F^{\vartheta} d\varphi \wedge dz - F^{\varphi} d\vartheta \wedge dz + F^z d\vartheta \wedge d\varphi) \sqrt{\det G} = \\
&= (F^{\vartheta} d\varphi \wedge dz + F^{\varphi} dz \wedge d\vartheta + F^z d\vartheta \wedge d\varphi) \frac{z^2 \sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta}.
\end{aligned}$$

Výpočet divergence vektorového pole F , $\operatorname{div} F = (*d*b)F = *d*F^b$ je již záležitostí jednoduchého derivování.

Vyjádříme nyní operátor divergence pro $n = 3$ a obecné křivočaré souřadnice (u^1, u^2, u^3) s uvážením vztahu $*F^b = i_F \omega_0$ odvozeného v první (algebraické) části příspěvku. Platí

$$\begin{aligned} d*F^b &= di_F \omega_0 = \left(\frac{\partial F^u}{\partial u} du \wedge dv \wedge dw + \frac{\partial F^v}{\partial v} dv \wedge dw \wedge du + \frac{\partial F^w}{\partial w} dw \wedge du \wedge dv \right) \sqrt{\det G} + \\ &+ (F^u dv \wedge dw + F^v dw \wedge du + F^w du \wedge dv) \cdot d\sqrt{\det G} = \\ &= \left[\left(\frac{\partial F^u}{\partial u} + \frac{\partial F^v}{\partial v} + \frac{\partial F^w}{\partial w} \right) \cdot \sqrt{\det G} + \frac{1}{2\sqrt{\det G}} \left(F^u \frac{\partial \det G}{\partial u} + F^v \frac{\partial \det G}{\partial v} + F^w \frac{\partial \det G}{\partial w} \right) \right] du \wedge dv \wedge dw. \end{aligned}$$

Posledním krokem je aplikace operátoru $*$. To už je jednoduché, neboť

$$dx \wedge dy \wedge dz = \sqrt{\det G} du \wedge dv \wedge dw, * (dx \wedge dy \wedge dz) = 1 \Rightarrow *(du \wedge dv \wedge dw) = \frac{1}{\sqrt{\det G}} = \sqrt{\det \tilde{G}},$$

$$\operatorname{div} F = \left(\frac{\partial F^u}{\partial u} + \frac{\partial F^v}{\partial v} + \frac{\partial F^w}{\partial w} \right) + \frac{1}{2\det G} \left(F^u \frac{\partial \det G}{\partial u} + F^v \frac{\partial \det G}{\partial v} + F^w \frac{\partial \det G}{\partial w} \right).$$

Získali jsme zcela obecný a vcelku jednoduchý vztah pro výpočet divergence vektorového pole v křivočarých souřadnicích v trojrozměrném euklidovském prostoru.

Příklad 22 Dosadit kuželové souřadnice je už snadné:

$$\operatorname{div} F = \left(\frac{\partial F^\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F^z}{\partial z} \right) + \frac{1 + 2 \sin^2 \vartheta}{\sin \vartheta \cos \vartheta} F^\vartheta + \frac{2}{z} F^\varphi.$$

Příklad 23 Ještě jedno užitečné vyjádření: Laplaceův operátor v $\mathbf{R}^3$. Pro k -formu ω značme $\partial\omega = (-1)^k *d*\omega$. Zvolme 1-formu $\eta = \eta_1 dx + \eta_2 dy + \eta_3 dz$ (tj. $k = 1$, $\partial\eta = -*d*\eta$) a počítejme $(d\partial + \partial d)\eta$. Je to jen opakované vnější derivování a aplikace Hodgeova operátoru. Čtenář to může pojmut jako početní „rozcvičku“. Připomeňme, že při aplikaci Hodgeova operátoru na souřadnicové 1-formy a 2-formy pro případ kartézských souřadnic můžeme použít výsledek příkladu 8. Platí

$$(d\partial + \partial d)\eta = -d(*d*\eta) + *d*(d\eta) = -(\Delta\eta_1 dx + \Delta\eta_2 dy + \Delta\eta_3 dz).$$

Dosadíme-li $\eta = F^b$, dostaneme $\#(d*d*-*d*d)F^b = \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \operatorname{rot} \operatorname{rot} F$ a odtud známou identitu $\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \Delta F$.

Zobecnění: Operátor $*d*$ opatřený znaménkem $s(-1)^{n(k+1)+1}$ závislým na n (dimenze prostoru), k (řád formy) a metrickém tenzoru ($s = \operatorname{sgn} \det G = \pm 1$) se nazývá *kodiferenciál*.

6. Shrnutí

V prvních dvou částech příspěvku jsme kromě zavedení Hodgeova operátoru a návodu, jak s ním prakticky pracovat třeba při převodu diferenciálních operátorů do křivočarých souřadnic v euklidovských prostorech, či v prostorech s obecným metrickým tenzorem, prokázali výhodu spočívající v posilování znalostí a dovedností studentů v oblasti lineární algebry.

Zvládnou-li algebraickou průpravu, je zbytek už jen prosté derivování. Takový postup považujeme za efektivnější oproti standardnímu přímému postupu – ten jsme v tomto příspěvku neprováděli jak pro jeho obvyklost, tak pro rozsáhlost a náchylnost k chybám při derivování složených funkcí (podrobný a velmi pěkný výklad přímých postupů výpočtů v křivočarých souřadnicích viz např. v [7]). Výhodou postupu využívajícího převodu vektorových polí na diferenciální formy je pouhé skládání operátorů nezávislých na volbě souřadnic, konkrétně snižování a zvedání indexů metrickým tenzorem, vnější derivace a Hodgeova operátoru.

V třetí části využijeme Hodgeova operátoru k efektivnímu zápisu fyzikálních zákonů, konkrétně klasické elektrodynamiky.

Literatura

- [1] P. Bulušek, P. Musilová, J. Musilová: Hodgeův operátor a jeho praktické užití. 1. část: Algebraický základ. Československý časopis pro fyziku **xx** (2025), x, y-y.
- [2] S. Morita: Geometry of Differential forms. Iwanami series of modern mathematics, Vol. 201. Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island 2001 (abstraktní přístup bez praktických příkladů).
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Hodge_star_operator (pro rychlé orientační seznámení)
- [4] P. Bulušek: Diferenciální formy a variační počet ve fyzikálních výukových textech. Masarykova univerzita, Brno 2024. (Teze disertační práce.)
- [5] J. Musilová, P. Musilová: Matematika pro porozumění i praxi II a III VUTIUM, Brno 2012 a 2017.
- [6] L. Krump, V. Souček, J. A. Těšínský: Matematická analýza na varietách. Univerzita Karlova, Praha 2002.
- [7] P. Kurfürst: Praktické početní metody pro fyziky, 2. vyd., Masarykova univerzita, Brno 2024. Dostupné na [http:// elportal.cz/publikace/pocetni-metody](http://elportal.cz/publikace/pocetni-metody).