

HODGEŮV OPERÁTOR A JEHO PRAKTICKÉ UŽITÍ

1. ČÁST: ALGEBRAICKÝ ZÁKLAD

Petr BULUŠEK, Pavla MUSILOVÁ, Jana MUSILOVÁ

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity,
Kotlářská 2, 611 37 Brno, 180031@mail.muni.cz, pavla@physics.muni.cz,
janam@physics.muni.cz

Abstrakt

Příspěvek, skládající se ze tří částí, je zaměřen na korektní výklad problematiky tzv. Hodgeova operátoru a na jeho praktické využití v geometrii a ve fyzice. Spadá do oblasti vysokoškolské didaktiky matematiky a fyziky. Těžiště využití Hodgeova operátoru ve fyzice tkví ve skutečnosti, že matematický popis řady fyzikálních veličin se děje pomocí skalárních, vektorových, či tenzorových polí – a pro řadu operací s nimi je Hodgeův mimořádně vhodným doplňkem běžného aparátu. První část příspěvku je algebraická, neboť samo zavedení operátoru je záležitostí lineární algebry. V druhé, analytické části, jsou definovány potřebné analytické pojmy a uvedeny příklady geometrických aplikací. Třetí část je věnována fyzikálním aplikacím Hodgeova operátoru ve fyzice, konkrétně v klasické elektrodynamice.

Úvod

Běžným matematickým aparátem v matematické a teoretické fyzice jsou diferenciální formy. Zjednodušeně řečeno, jsou to (kovariantní) antisymetrická tenzorová pole, tj. zobrazení, standardně diferencovatelná, která bodům v euklidovských prostorech přiřazují antisymetrické tenzory různých řádů. Typickou fyzikální ukázkou je tenzor elektromagnetického pole v klasické elektrodynamice. Podstata práce s tenzory spočívá v lineární algebře. Základními analytickými operacemi s diferenciálními formami jsou pak už „jen“ derivování a integrování.

V oblasti lineární algebry fungují na podkladových vektorových prostorech různá aplikačně užitečná lineární zobrazení. Jedním z nich je tzv. Hodgeův operátor „ $*$ “, využívající fakt, že vektorové prostory stejné konečné dimenze jsou izomorfní. Předepsaným způsobem přiřazuje antisymetrickým tenzorům ω k -tého řádu definovaným na n -rozměrném vektorovém prostoru V_n antisymetrické tenzory $(n - k)$ -tého řádu $*\omega$. Z matematického hlediska je pak takřka „jedno“, zda pracujeme s ω , nebo s $*\omega$. Při praktickém počítání to však jedno být nemusí. Ukazuje se totiž, že Hodgeův operátor může být při ryze praktických výpočtech užitečný. Například při převodech diferenciálních operátorů do křivočarých souřadnic umožňuje efektivní zjednodušení výpočtů. Ve fyzice často potřebujeme aplikovat operátory gradientu (na skalární pole), rotace a divergence (na vektorová pole) – např. Maxwellovy rovnice, rovnice pro proudění tekutin, apod. V kartézských souřadnicích jsou jejich definice i práce s nimi jednoduché a pro případ obvyklých souřadnic v $\mathbf{R}^3$, jako jsou třeba válcové či kulové, najdeme jejich vyjádření v každé učebnici analýzy. Přepočty do jiných, obecně neortogonálních souřadnic, ač vyžadují v podstatě pouze derivování složených funkcí, jsou pracné a často se v nich chybí. Všechny zmíněné operátory však lze jednoduše vyjádřit skládáním invariantních (na bázích nezávislých) zobrazení operujících na skalárních, vektorových a tenzorových polích: snížení a zvýšení indexu, vnější derivace, Hodgeův operátor.

Pojem Hodgeova operátoru není samozřejmě nějaká „novinka“. Jeho definici a vlastnosti najdeme buď v matematické literatuře, formulované na vysoce abstraktní úrovni (a na obecných podkladových strukturách, např. diferencovatelných varietách), avšak bez praktických aplikací (viz např. [1]), nebo i na internetových stránkách ve zjednodušené faktografické podobě s omezením na ortonormální báze, opět bez potřebných praktických aplikací (např. [2]). Vlastní autorský přínos spatřujeme ve snaze o vyplnění této „mezery“ postupně budovaným výkladem na přiměřeně „čtivé“ úrovni. Hodgeův operátor jako algebraický objekt zavádíme sice korektně, ale pouze pomocí známých pojmů lineární algebry univerzitního studia (v první části příspěvku), jeho využití v analytických výpočtech a geometrických a fyzikálních aplikacích – diferenciální operátory v obecných křivočarých souřadnicích, zápisy fyzikálních rovnic – pak v části druhé (zde s omezením na trojrozměrný euklidovský prostor či čtyřrozměrný Minkowského prostor). Třetí část je věnována fyzikálním aplikacím. V tomto smyslu tedy příspěvek spadá do oblasti pokročilého fyzikálního vzdělávání.

1. Algebraická průprava

Předpokládáme, že čtenář je obeznámen se základy lineární algebry, zejména:

- vektorové prostory a podprostory – budeme je potřebovat jen nad polem reálných skalárů,
- lineární zobrazení vektorových prostorů, lineární operátory ve vektorovém prostoru, skalární součin ve vektorovém prostoru, vše včetně reprezentace v bázích, přechody mezi bázemi pro případ vektorů i lineárních zobrazení,
- tvrzení, že *každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy bází* v příslušných vektorových prostorech – tato skutečnost znamená, že jakékoli vlastnosti lineárních zobrazení stačí dokazovat pro prvky báze,
- duální prostor a indukovaná duální báze.

Jakkoli zní výše uvedený výčet možná náročně, vše spadá do základní problematiky předmětu Lineární algebra vyučovaného v nějaké formě na všech univerzitách přírodovědného (zejm. matematického a fyzikálního) a technického zaměření, a to v prvotních fázích studia. Zjednodušeně řečeno, je potřeba hlubší pochopení jediné věci – linearity (chcete-li, úměry). Stručně zopakujeme pojem duální prostor a duální báze, zobecníme skalární součin a pokusíme se o co nejstručnější uvedení do poněkud pokročilejší problematiky tenzorů.

1.1 Metrický tenzor

Obecný (kovariantní) *metrický tenzor* ve vektorovém prostoru V_n (dimenze n nad $\mathbf{R}$) je oproti standardnímu skalárnímu součinu (indukujícímu *metriku*) obecnější pouze v tom smyslu, že není požadována jeho pozitivní definitnost, ale pouze regularita. Jedná se tedy o zobrazení, označované symbolem g , přiřazující uspořádané dvojici vektorů reálné číslo, s vlastnostmi:

$$g : V_n \times V_n \ni [a, b] \rightarrow g(a, b) \in \mathbf{R}$$

$$g(a, b) = g(b, a) \quad \dots \text{symetrie}$$

$$g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) = \alpha_1 g(a_1, b) + \alpha_2 g(a_2, b) \quad \dots \text{linearita}$$

$$\text{je-li } g(a, b) = 0 \text{ pro libovolné } b, \text{ pak } a = 0_{V_n} \text{ (nulový vektor)} \quad \dots \text{regularita}$$

$$(g(a, a) \geq 0, \text{ rovnost} \Leftrightarrow a = 0_{V_n} \quad \dots \text{pozitivní definitnost})$$

$$\text{pro libovolné } a, b, a_1, a_2 \in V_n, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$$

Pozitivní definitnost je silnější než regularita a pozitivně definitní metrický tenzor se nazývá *skalární součin*. (Například Minkowského metrický tenzor¹ je indefinitní.) V libovolně zvolené bázi $(e_1, \dots, e_n)$ prostoru V_n je metrický tenzor reprezentován symetrickou regulární maticí $G = (g_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$. Při přechodech mezi bázemi s maticí přechodu $T = (\tau_i^j)$, $T: (e_1, \dots, e_n) \rightarrow (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$, kde $\bar{e}_i = \tau_i^j e_j$, $e_i = \sigma_i^j \bar{e}_j$ (je užita Einsteinova sčítací symbolika a označení $T^{-1} = (\sigma_i^j)$), pak platí $\bar{G} = TGT^t$, kde horní index t značí transpozici. Prvky matice G jsou hodnoty $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. V případě skalárního součinu, tj. pozitivně definitního metrického tenzoru, jsou to skalární součiny prvků báze. Jestliže platí $g_{ij} = \pm \delta_{ij}$, jedná se o tzv. „ortonormální“ bázi (vzhledem k danému metrickému tenzoru g). Je-li matice G jednotková v dané (a tedy i libovolné) ortonormální bázi, jedná se o tzv. *euklidovský vektorový prostor*. Nebo třeba v případě $\text{diag } G = (1, -1, -1, -1)$, resp. $\text{diag } G = (-1, 1, 1, 1)$ (dle konvence), jde o Minkowského prostor. Vektorový prostor opatřený metrickým tenzorem budeme označovat E_n .

Uvedeme nyní (snadno dokazatelnou a také náležející do elementárního základu lineární algebry) klíčovou větu, která později umožní jednoduše zavést Hodgeův operátor jako algebraický pojem. ($\mathbf{R}$ v ní značí jednorozměrný vektorový prostor reálných čísel.)

Věta 1: *Nechť $\varphi: E_n \ni a \rightarrow \varphi(a) \in \mathbf{R}$ je libovolné lineární zobrazení. Pak existuje právě jeden vektor $\xi \in E_n$ tak, že platí $\varphi(a) = g(\xi, a)$, pro každé $a \in E_n$. Označujeme jej ξ_φ .*

Naopak, pro libovolně zvolený vektor $\xi \in E_n$ existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi_\xi: E_n \ni a \rightarrow \varphi_\xi(a) \in \mathbf{R}$ takové, že platí výše uvedená rovnost.

Důkaz této věty je velmi snadný: V dané (obecné, ne nutně ortonormální) bázi $(e_1, \dots, e_n)$ запиšme složky obecného vektoru a a hledaného vektoru ξ do řádkových matic, $a \sim (\alpha^1 \dots \alpha^n) = (\alpha)$, $\xi \sim (\xi^1 \dots \xi^n) = (\xi)$. Vzhledem k vlastnostem linearitě stačí podmínku $\varphi(a) = g(\xi, a)$, lib. $a \in E_n$, řešit místo pro obecný vektor a pro obecný vektor báze. Označme $(\gamma) = (\gamma_1 \dots \gamma_n)$, $\gamma_i = \varphi(e_i)$, a hledejme ξ tak, aby platilo $\varphi(e_i) = g(\xi, e_i) = \xi^j g(e_j, e_i)$. Pak $(\gamma) = (\xi)G \Rightarrow (\xi) = (\gamma)G^{-1}$ (matice G je regulární). Věta je dokázána.

Později ji použijeme pro případ specifických tenzorových prostorů, vzhledem k tomu, že je platná pro libovolný vektorový prostor opatřený metrickým tenzorem (vždyť jsme prostor V_n blíže nespecifikovali).

1.2 Duální prostor a indukovaný metrický tenzor

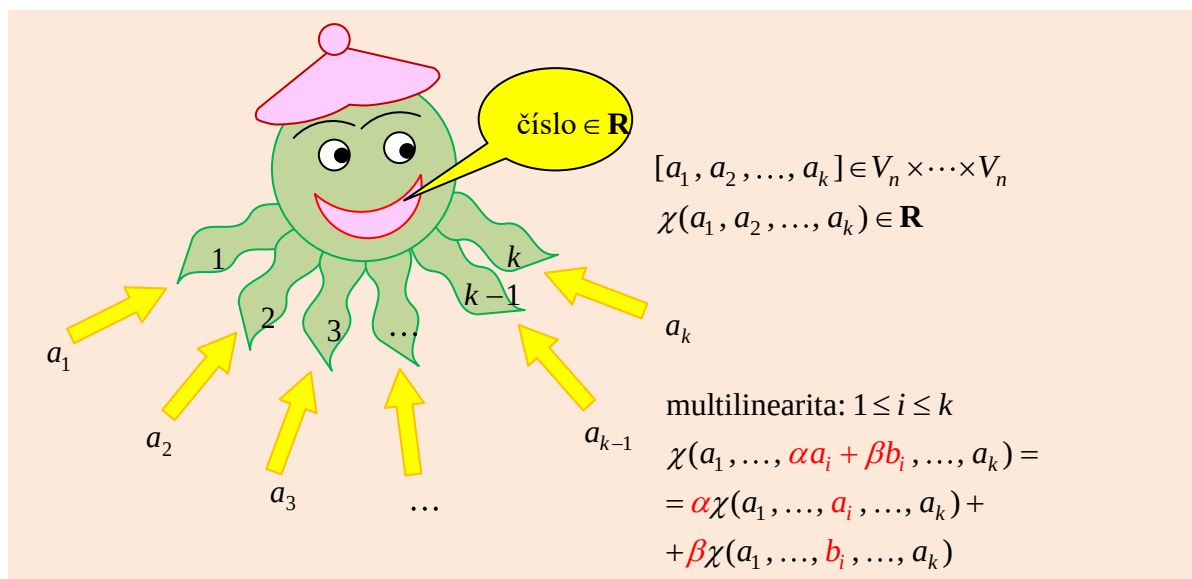
Duálním prostorem k vektorovému prostoru V_n rozumíme množinu V_n^* všech lineárních zobrazení $V_n \rightarrow \mathbf{R}$ opatřenou strukturou vektorového prostoru takto: Pro libovolná

¹ Minkowského metrický tenzor je ve fyzikálních textech většinou nazýván Minkowského „metrika“, což však s ohledem na definici metriky není nejen terminologicky, ale ani věcně v pořádku. *Metrika* μ je zobrazení přiřazující uspořádané dvojici prvků nosné množiny, např. vektorů, reálné číslo s vlastnostmi symetrie, pozitivní definitnosti a trojúhelníkové nerovnosti. Pomocí *skalárního součinu* lze definovat v daném vektorovém prostoru *metriku* vztahem $\mu(a, b) = g(a, b)$ a získat tak *metrický prostor*. Pomocí metriky lze rovněž jednoduše zavést na daném metrickém prostoru indukovanou topologii. (Podrobněji se těmito otázkami v tomto příspěvku nezabýváme.) Dále budeme pojem „skalární součin“ (pozitivně definitní metrický tenzor) důsledně odlišovat od obecnějšího pojmu „metrický tenzor“, jehož je skalární součin speciálním případem.

zobrazení $\varphi, \psi \in V_n^*$ a libovolné skaláry $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ definujeme $\chi(a) = \alpha\varphi(a) + \beta\psi(a)$ pro každý vektor $a \in V_n$. Čtenář, který se alespoň okrajově setkal s lineární algebrou, jistě snadno dokáže, že nově definované zobrazení $\chi : V_n \rightarrow \mathbf{R}$ je lineární. Tím jsme na množině V_n^* zavedli operace sčítání lineárních zobrazení a násobení lineárního zobrazení skalárem (číslem). Množina V_n^* s těmito operacemi je vektorovým prostorem dimenze n nad $\mathbf{R}$ (axiomy prověříte snadno) a nazývá se duální prostor k V_n . Báze $(e^1, \dots, e^n)$ je v něm *indukována* bází $(e_1, \dots, e_n)$ prostoru V_n prostřednictvím vztahů $e^i(e_j) = \delta_j^i$. Je-li prostor V_n opatřen metrickým tenzorem g , zavádíme na V_n^* přirozeným způsobem *indukovaný metrický tenzor* $\tilde{g}$ vztahem $\tilde{g}(\varphi, \psi) = g(\xi_\varphi, \xi_\psi)$, kde ξ_φ, ξ_ψ jsou vektory příslušející lineárním zobrazením φ, ψ podle Věty 1. Důkaz, že takto zavedené zobrazení $\tilde{g} : V_n^* \times V_n^* \ni [\varphi, \psi] \rightarrow \tilde{g}(\varphi, \psi) \in \mathbf{R}$ je (kontravariantní) metrický tenzor na V_n^* , spadá opět do základní verze lineární algebry. V duální bázi $(e^1, \dots, e^n)$ je reprezentován maticí $\tilde{G} = G^{-1}$. Duální prostor k prostoru E_n , s indukovaným metrickým tenzorem, značíme E_n^* .

2.3 Tenzorové prostory

Uvažujme o vektorovém prostoru V_n . Zobrazení $\omega : \times_k V_n \ni [a_1, \dots, a_k] \rightarrow \omega(a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}$ přiřazující uspořádanému souboru k vektorových argumentů reálné číslo, a to lineárně v každém vektorovém argumentu, nazýváme (*kovariantním*) *k*-tenzorem na vektorovém prostoru V_n . Na množině $T_k(V_n)$ všech takových zobrazení vytvoříme strukturu vektorového prostoru zavedením vhodných operací sčítání tenzorů a násobení tenzoru číslem. Myšlenka je stejná jako při zavádění vektorového prostoru na V_n^* : Pro libovolné prvky $\omega, \eta \in T_k(V_n)$ a libovolné skaláry $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ definujeme nové zobrazení $\chi : \times_k V_n \ni [a_1, \dots, a_k] \rightarrow \chi(a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}$ takto: $\chi(a_1, \dots, a_k) = \alpha\omega(a_1, \dots, a_k) + \beta\eta(a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}$ pro libovolný soubor vektorů $(a_1, \dots, a_k)$. Důkaz, že také χ je *k*-tenzorem a že jsme na množině *k*-tenzorů vytvořili strukturu vektorového prostoru, je skutečně jednoduchý. Využívá definice zobrazení χ a (multi)linearity zobrazení ω a η .



Obr. 1: Jak funguje k -tenzor.

Tenzory mohou mít některé specifické vlastnosti – konkrétně symetrii a antisymetrii. O ty se může jednat třeba jen ve vztahu k některým argumentům, my však potřebujeme zejména tenzory úplně symetrické, nebo úplně antisymetrické. Definice je opět velice jednoduchá a přirozená: Tenzor $\chi \in T_k(V_n)$ se nazývá *úplně symetrický*, jestliže se jeho hodnota nezmění při libovolné záměně pořadí jakéhokoli souboru argumentů, tj. $\chi(a_1, \dots, a_k) = \chi(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))$, kde $(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))$ je libovolná permutace argumentů. Tenzor $\chi \in T_k(V_n)$ se nazývá *úplně antisymetrický*, jestliže hodnota změní při libovolné záměně pořadí jakéhokoli souboru argumentů pouze znaménko, a to podle signatury permutace, která tuto záměnu realizuje, tj. $\chi(a_1, \dots, a_k) = \text{sgn } \sigma \cdot \chi(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))$, kde $(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))$ je opět libovolná permutace argumentů (každá záměna dvojice argumentů změní znaménko výsledku). Značíme $S_k(V_n)$, resp. $\Lambda_k(V_n)$ prostor všech úplně symetrických, resp. úplně antisymetrických k -tenzorů. Jsou to vektorové podprostory prostoru $T_k(V_n)$. (Zkuste dokázat, že libovolná lineární kombinace úplně symetrických, resp. úplně antisymetrických k -tenzorů je úplně symetrický, resp. úplně antisymetrický k -tenzor. Je to skutečně jednoduché.) Dodefinování: 0-tenzorem na vektorovém prostoru V_n budeme rozumět skalár (prvek vektorového prostoru $T_0(V_n) = \mathbf{R}$). 1-tenzory považujeme z praktického hlediska za symetrické, ale také za antisymetrické, tedy $T_1(V_n) = S_1(V_n) = \Lambda_1(V_n)$.

2.4 Tenzorové součiny

K tomu, abychom mohli s tenzory pracovat z hlediska aplikací „trochu lépe“ než na úrovni základních operací, zavádíme tenzorový součin (libovolných tenzorů) a vnější součin (antisymetrických tenzorů). Tenzorový součin je věc opět velmi jednoduchá. Zvolme tenzory $\omega \in T_k(V_n)$ a $\eta \in T_\ell(V_n)$. Pomocí nich zavedeme nové zobrazení, které bude operovat, opět lineárně ve všech argumentech, na uspořádaných souborech tentokrát $(k + \ell)$ vektorů.

$$\chi = \omega \otimes \eta(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+\ell}) = \omega(a_1, \dots, a_k) \cdot \eta(a_{k+1}, \dots, a_{k+\ell}).$$

Díky linearitě činitelů a struktuře prostoru reálných čísel je opět zřejmá multilinearita nového zobrazení, tedy skutečnost, že $\chi \in T_{k+\ell}(V_n)$, a jeho vlastnosti: Platí

$$\begin{aligned} (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \otimes \eta &= \alpha(\omega_1 \otimes \eta) + \beta(\omega_2 \otimes \eta) \dots \text{linearita,} \\ \omega \otimes (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) &= \alpha(\omega \otimes \eta_1) + \beta(\omega \otimes \eta_2) \dots \text{linearita,} \\ \omega \otimes (\eta \otimes \chi) &= (\omega \otimes \eta) \otimes \chi = \omega \otimes \eta \otimes \chi \dots \text{asociativita.} \end{aligned}$$

pro libovolné tenzory, pro něž operace odpovídají definicím, a pro libovolné skaláry.

Operace $\otimes$ se nazývá *tenzorový součin*.

V tuto chvíli už věci začnou být zajímavé. Čtenáře jistě napadne otázka, jaká je dimenze prostoru $T_k(V_n)$. K jejímu zjištění poslouží indukovaná báze. Zvolme libovolnou bázi $(e_1, \dots, e_n)$ v prostoru V_n . Jí odpovídá indukovaná duální báze $(e^1, \dots, e^n)$ v prostoru duálním. Vytvořme nyní pro pevně dané k všechny tenzorové součiny $(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k})$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$. Tento soubor představuje indukovanou bázi v prostoru $T_k(V_n)$. Počet jeho prvků, který je současně dimenzí prostoru $T_k(V_n)$, je n^k (variace k -té třídy z n prvků s

opakováním– jednoduchá kombinatorická úloha). Uvedme několik příkladů vyčíslení, ať to není jen abstraktní.

Příklad 1 Zvolme

$$a \in V_n, a = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n = \alpha^j e_j, \text{ pak}$$

$$e^i(a) = e^i(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n) = e^i(\alpha^j e_j) = \alpha^j e^i(e_j) = \alpha^j \delta_j^i = \alpha^i.$$

To je důležitý praktický výsledek: i -tý prvek duální báze přiřadí vektoru a jeho i -tou složku (v bázi prostoru V_n , již je duální báze indukována). A teď vypočtěme nějaký tenzorový součin:

$$a = \alpha^p e_p, b = \beta^q e_q, c = \gamma^s e_s, e^i \otimes e^j \otimes e^\ell(a, b, c) = e^i(a) e^j(b) e^\ell(c) = \alpha^i \beta^j \gamma^\ell.$$

Příklad 2 Symetrický tenzor druhého řádu. Typickým příkladem symetrického 2-tenzoru, tedy kovariantního tenzoru druhého řádu, je metrický tenzor v prostoru V_n , jak jsme jej zavedli v odstavci 2.1. Jeho pozitivně definitní verzí je skalární součin. V bázi platí

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j, g_{ij} = g_{ji}, g(a, b) = g_{ij} \alpha^i \beta^j.$$

Tak třeba v případě Minkowského metrického tenzoru v ortonormálních bázích to znamená, při standardním indexování ve fyzice, že platí $g(a, b) = \alpha^0 \beta^0 - \alpha^1 \beta^1 - \alpha^2 \beta^2 - \alpha^3 \beta^3$. Že to připomíná kvadrát časoprostorového intervalu? Správně.

Příklad 3 Antisymetrický tenzor druhého řádu. Zvolme nejprve obecný tenzor $\omega \in T_2(V_n)$ a запиšme jej v bázi: $\omega = \omega_{ij} e^i \otimes e^j$. Požadujeme, aby byl antisymetrický. To jistě povede k nějaké podmínce pro složky ω_{ij} . Platí

$$\omega(a, b) = \omega_{ij} e^i \otimes e^j(\alpha^p e_p, \beta^q e_q) = \omega_{ij} \alpha^i \beta^j, \omega(b, a) = \omega_{ij} e^i \otimes e^j(\beta^q e_q, \alpha^p e_p) = \omega_{ij} \alpha^j \beta^i$$

Z požadavku $\omega(a, b) = -\omega(b, a)$ plyne $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Ale to jsme jistě čekali.

Soustředme se nyní na definici vnějšího součinu, operaci, která je pro další výklad klíčová – půjde nám totiž především o antisymetrické tenzory. Položme si otázku, zda a jak je možné z libovolného k -tenzoru „vyrobit“ k -tenzor antisymetrický. Děje se tak pomocí zobrazení alternace. Zvolíme $\eta \in T_k(V_n)$ a libovolný soubor vektorových argumentů $(a_1, \dots, a_k)$.

Provedeme v něm všechny možné záměny (permutace) pořadí argumentů, vyčíslíme hodnoty $\eta(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))$ a opatříme je znaménkem permutace σ . Nakonec označíme

$$\text{Alt} \eta(a_1, \dots, a_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in P_k} \text{sgn } \sigma \cdot \eta(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k)}).$$

Je zřejmé, že $\text{Alt} \eta$ je úplně antisymetrický k -tenzor.

Zobrazení $\text{Alt}: T_k(V_n) \ni \eta \rightarrow \text{Alt} \eta \in \Lambda_k(V_n)$ se nazývá *alternace*. K definici vnějšího součinu tenzorů je jen krok. Zvolme tenzory $\omega \in \Lambda_k(V_n)$, $\eta \in \Lambda_\ell(V_n)$. Jejich tenzorový součin obecně není úplně antisymetrický. Antisymetrie je částečná, pouze v prvních k vektorových argumentech a zbývajících ℓ vektorových argumentech. Alternace však umožní získat úplně antisymetrický $(k + \ell)$ -tenzor takto:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k + \ell)!}{k! \ell!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Zobrazení $\wedge : \Lambda_k(V_n) \times \Lambda_\ell(V_n) \ni [\omega, \eta] \rightarrow \omega \wedge \eta \in \Lambda_{k+\ell}(V_n)$ se nazývá *vnější součin*.

Podobně jako u tenzorového součinu shrneme vlastnosti vnějšího součinu. Opět je ve hře linearita a asociativita, a navíc jakýsi typ „antikomutativního“ zákona:

Pro libovolné objekty $\omega_1, \omega_2, \omega \in \Lambda_k(V_n), \eta \in \Lambda_\ell(V_n), \chi \in \Lambda_m(V_n), \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ platí
 $(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \wedge \eta = \alpha(\omega_1 \wedge \eta) + \beta(\omega_2 \wedge \eta) \dots$ linearita,
 $(\omega \wedge \eta) \wedge \chi = \omega \wedge (\eta \wedge \chi) = \omega \wedge \eta \wedge \chi \dots$ asociativita, $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega \dots$ antikomutativita.

Jak vypadá indukovaná báze ve vektorovém podprostoru $\Lambda_k(V_n)$? Je to soubor

$(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}), 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Počet jeho prvků je $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (kombinace k -té třídy z n

prvků bez opakování – opět jednoduchá kombinatorická úloha): vnější součin stejných prvků duální báze je nulový a záměna prvků ve vnějším součinu nanejvýš změni znaménko.

Příklad 4 Úmyslně jednoduchý příklad. Zvolme libovolně $\omega, \eta \in T_1(V_n)$ a počítejme jejich vnější součin. Zvolme v prostoru V_n bázi $(e_1, \dots, e_n)$ a indukovanou duální bázi $(e^1, \dots, e^n)$ v prostoru $T_1(V_n) = \Lambda_1(V_n) = V_n^*$. Pak $\omega \wedge \eta \in \Lambda_2(V_n)$. Pro úplnou názornost počítejme $e^1 \wedge e^2(a, b)$ pro vektory $a = \alpha^i e_i, b = \beta^j e_j \in V_n$. Můžeme provést dvojí výpočet:

$$e^1 \wedge e^2(a, b) = \frac{(1+1)!}{1!1!} \text{Alt } e^1 \otimes e^2(a, b) = \frac{(1+1)!}{1!1!} \frac{1}{2!} [e^1(a)e^2(b) - e^2(a)e^1(b)] = \alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1,$$

$$[e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1](a, b) = [e^1(a)e^2(b) - e^2(a)e^1(b)] = \alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1.$$

Souvislost je zřejmá a dvě možnosti volby báze prostoru $\Lambda_2(V_n)$ rovněž. První zápis je však standardní.

Pomocí příkladu 4 se můžeme seznámit s dvěma ekvivalentními zápisy antisymetrického k -tenzoru v bázi:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \text{ nebo } \omega = \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k},$$

přičemž v druhé verzi je použita Einsteinova symbolika (sčítací indexy nejsou omezeny vzestupným řazením a složky $\tilde{\omega}_{j_1 \dots j_k}$ jsou antisymetrické ve všech indexech. Převod mezi složkami prvního a druhého vyjádření je jednoduchý, totiž $\omega_{j_1 \dots j_k} = k! \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_k}$.

Příklad 5 Všimněme si ještě situace $k = n$, tj. prostoru $\Lambda_n(V_n)$. Tento prostor je jednorozměrný, a tedy izomorfní (algebraicky ekvivalentní) s prostorem $\Lambda_1(V_n)$. Jeho indukovaná báze má jediný prvek $e^1 \wedge \dots \wedge e^n$, jehož vyčíslení na vektorech $a_1, \dots, a_n \in (V_n)$, $a_i = \alpha_i^j e_j$ vede k výsledku

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^n(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn } \sigma \cdot e^1(a_{\sigma(1)}) \dots e^n(a_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn } \sigma \cdot \alpha_{\sigma(1)}^1 \dots \alpha_{\sigma(n)}^n = \det(\alpha_i^j).$$

2.5 Kontrakce k -tenzoru vektorem

Jeden z typů operace *kontrakce*, neboli *úžení* tenzorů, budeme potřebovat v následujícím odstavci. Připomeňme v rychlosti obvyklou definici kontrakce k -tenzoru, tj. kovariantního tenzoru k -tého řádu, vektorem $a \in V_n$ jako zobrazení

$$i_a : T_k(V_n) \ni \omega \rightarrow i_a(\omega) \in T_{k-1}(V_n), \text{ kde } i_a \omega(a_1, \dots, a_{k-1}) = \omega(a, a_1, \dots, a_{k-1}).$$

Vektory $a_1, \dots, a_{k-1}$ jsou libovolné argumenty kontrahovaného k -tenzoru, kontrahující vektor $a \in V_n$ je zvolen libovolně, ale pevně. Výsledkem je $(k-1)$ -tenzor.

Příklad 6 Vyjádříme kontrakci v indukovaných bázích. Například tenzorem vzniklým kontrakcí k -tenzoru $\omega = e^i \otimes \dots \otimes e^k$ vektorem $u \in V_n$ je $(k-1)$ -tenzor $i_u \omega = i_u(e^i \otimes \dots \otimes e^k)$

$$i_u \omega(a_1, \dots, a_{k-1}) = i_u e^i \otimes \dots \otimes e^k(a_1, \dots, a_{k-1}) = e^i \otimes \dots \otimes e^k(u, a_1, \dots, a_{k-1}) = u^i a_1^{i_2} \dots a_{k-1}^{i_k}.$$

Definice kontrakce kovektorem je obdobná. K tomu bychom však museli zavádět prostory kontravariantních tenzorů a operace na nich, což k dalšímu výkladu nebudeme potřebovat s výjimkou kontrakce indukovaného metrického tenzoru kovektorem (1-tenzorem). S ní se setkáme v této konkrétní podobě hned v následujícím odstavci.

2.5 Snížování a zvyšování indexů metrickým tenzorem

Tento pojem je zcela běžný v teorii relativity i v klasické elektrodynamice prezentované ve čtyřrozměrné notaci. Věc se má tak, že pomocí kovariantního metrického tenzoru g v prostoru E_n zobrazujeme vektory (prvky prostoru E_n) na „kovektory“ (prvky prostoru E_n^*) a pomocí kontravariantního metrického tenzoru $\tilde{g}$ zase naopak. *Snížením*, resp. *zvýšením indexu* rozumíme zobrazení

$$b : E_n \ni a \rightarrow b(a) = i_a(g) \in E_n^* \text{ resp. } \# : E_n^* \ni \omega \rightarrow \#(\omega) = i_\omega(\tilde{g}) \in E_n, \text{ kde}$$

$$i_a(g) : E_n \ni \xi \rightarrow g(a, \xi) \in \mathbf{R}, \quad i_\omega(\tilde{g}) : E_n^* \ni \eta \rightarrow \tilde{g}(\omega, \eta) \in \mathbf{R}$$

představují *operace úžení (kontrakce)* kovariantního metrického tenzoru vektorem, resp. kontravariantního metrického tenzoru kovektorem. Značíme $b(a) = a^b$, $\#(\omega) = \omega^\#$.

V bázích má snížení a zvýšení indexu tvar:

$$\begin{aligned} \text{pro } a = \alpha^\ell e_\ell, \quad g = g_{ij} e^i \otimes e^j, \text{ je } a^b = g_{ij} e^i(a) e^j = (g_{ij} \alpha^i) e^j \Rightarrow a_j^b = g_{ij} \alpha^i, \\ \text{pro } \omega = \omega_\ell e^\ell, \quad \tilde{g} = \tilde{g}^{ij} e_i \otimes e_j, \text{ je } \omega^\# = \tilde{g}^{ij} e_i(\omega) e_j = (\tilde{g}^{ij} \omega_i) e_j \Rightarrow \omega^{\#,j} = \tilde{g}^{ij} \omega_i. \end{aligned}$$

Prověření transformačních vlastností objektů $a^b \in E_n^*$, $\omega^\# \in E_n$ je rutinní záležitostí lineární algebry základního (bakalářského) kurzu matematiky².

2.6 Objemový element

V případě prostorů opatřených metrickým tenzorem (v E_n tenzor $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$, resp.

v E_n^* tenzor $\tilde{g} = \tilde{g}^{ij} e_i \otimes e_j$, $\tilde{G} = G^{-1}$) můžeme pracovat v ortonormálních bázích. Na prostoru

² Snížování a zvedání indexů lze zobecnit i na případ tenzorových prostorů s využitím indukovaného metrického tenzoru (viz odst. 2.8). V našem příspěvku to však nebudeme potřebovat.

E_n lze také zvolit *orientaci* tak, že vybereme kteroukoli ze tříd ekvivalence bází, přičemž dvě báze definujeme jako ekvivalentní, má-li matice přechodu mezi nimi kladný determinant (v trojrozměrném prostoru jde o báze pravotočivé, resp. levotočivé).

Objemovým elementem rozumíme tenzor $\omega_0 \in \Lambda_n(V_n)$, pro nějž existuje ortonormální báze $(e_1, \dots, e_n)$ náležející zvolené orientaci taková, že $\omega_0(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Takový tenzor existuje a je určen jednoznačně. Konkrétně je $\omega_0 = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ pro jakoukoli ortonormální bázi náležející zvolené orientaci. Skutečně, vyčíslíme-li $\omega_0 = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ na vektorech $a_1, \dots, a_n \in E_n$, dostaneme, jak je uvedeno výše, determinant matice utvořené ze složek těchto vektorů vyjádřených ve zmíněné ortonormální bázi. Ten bude ovšem stejný v kterékoli jiné ortonormální bázi náležející zvolené orientaci (jednoduchá úloha maticového počtu). Od této chvíle bude označení ω_0 představovat objemový element. Odvodíme ještě vyjádření objemového elementu v obecné bázi. Bude to potřeba pro budoucí výpočty.

Označme $(b_1, \dots, b_n)$ obecnou bázi v prostoru E_n a $(e_1, \dots, e_n)$ ortonormální bázi náležející zvolené orientaci (v E_3 obvykle pravotočivou). Matice přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(b_1, \dots, b_n)$ je $T = (\tau_i^j)$, $1 \leq i, j \leq n$, tj. $b_i = \tau_i^j e_j$, $e^j = \sigma_j^i b^i$. Jak víme, je matice E skalárního součinu, resp. metrického tenzoru, v bázi $(e_1, \dots, e_n)$ jednotková, resp. diagonální s jedničkami a minus jedničkami v diagonále, takže pro matici $G = TET^t$ (viz odst. 2.1) metrického tenzoru v bázi $(b_1, \dots, b_n)$ je $\det G = \pm(\det T)^2$. V případě, že jde o euklidovský vektorový prostor (metrickým tenzorem je skalární součin), platí znaménko „plus“. Objemový element $\omega_0 = e^1 \wedge \dots \wedge e^n = (\tau_{i_1}^1 \dots \tau_{i_n}^n) b^{i_1} \wedge \dots \wedge b^{i_n} = \det T \cdot b^1 \wedge \dots \wedge b^n$, tedy

$$\omega_0 = e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \sqrt{|\det G|} b^1 \wedge \dots \wedge b^n, \text{ resp. } \sqrt{|\det G|} b^1 \wedge \dots \wedge b^n.$$

2.7 Indukovaný metrický tenzor v prostoru antisymetrických tenzorů

Dostali jsme se k zásadnímu místu algebraické průpravy. Tím je zavedení indukovaného metrického tenzoru také na vektorových prostorech $\Lambda_k(E_n)$. Nejjednodušší bude přímo uvést definici, a to rovnou pomocí prvků báze, neboť, jak je z lineární algebry známo, každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báze. Definujme zobrazení $\tilde{g}_k$ vztahem

$$\begin{aligned} \tilde{g}_k : \Lambda_k(E_n) \times \Lambda_k(E_n) &\ni [e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}] \rightarrow \\ &\rightarrow \tilde{g}_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}) = \det \begin{pmatrix} g(e^{i_1}, e^{j_1}) & \dots & g(e^{i_1}, e^{j_k}) \\ \dots & \dots & \dots \\ g(e^{i_k}, e^{j_1}) & \dots & g(e^{i_k}, e^{j_k}) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Požadavek linearitity pak vede k obecnému zápisu ve složkách pro $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ a

$$\eta = \eta_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}, \quad \tilde{g}_k(\omega, \eta) = \omega_{i_1 \dots i_k} \eta_{j_1 \dots j_k} \tilde{g}_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}).$$

Linearita v obou argumentech i symetrie a regularita zobrazení $\tilde{g}_k$ jsou zřejmé z definice a odpovídajících vlastností metrických tenzorů $g, \tilde{g}$.

Příklad 7 Necht' E_n je euklidovský vektorový prostor a $(e_1, \dots, e_n)$ jeho libovolná ortonormální báze. Zvolme $\omega = e^1 \wedge e^2, \eta = e^3 \wedge e^2 \in \Lambda_2(E_n)$. Např. pro $\tilde{g}_2(e^1 \wedge e^2, e^3 \wedge e^2)$ a $\tilde{g}_2(e^1 \wedge e^2, e^2 \wedge e^1)$ dostaneme

$$\begin{aligned}\tilde{g}_2(e^1 \wedge e^2, e^3 \wedge e^2) &= \det \begin{pmatrix} \tilde{g}(e^1, e^3) & \tilde{g}(e^1, e^2) \\ \tilde{g}(e^2, e^3) & \tilde{g}(e^2, e^2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \\ \tilde{g}_2(e^1 \wedge e^2, e^2 \wedge e^1) &= \det \begin{pmatrix} \tilde{g}(e^1, e^2) & \tilde{g}(e^1, e^1) \\ \tilde{g}(e^2, e^2) & \tilde{g}(e^2, e^1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.\end{aligned}$$

3 Hodgeův operátor

Způsob zavedení Hodgeova operátoru je založen, jak již bylo řečeno, na izomorfismu vektorových prostorů $\Lambda_k(E_n)$ a $\Lambda_{n-k}(E_n)$ a přiřazuje opět lineárním způsobem antisymetrickým k -tenzorům antisymetrické $(n-k)$ -tenzory. A to právě pomocí objemového elementu a indukovaného metrického tenzoru.

3.5 Definice Hodgeova operátoru

Základem pro formulaci definice Hodgeova operátoru je následující věta:

Věta 2: Pro $1 \leq k \leq n-1$ je vztahem

$$*: \Lambda_k(E_n) \ni \omega \rightarrow * \omega \in \Lambda_{n-k}(E_n) \Leftrightarrow \omega \wedge \eta = \tilde{g}_{n-k}(*\omega, \eta) \omega_0 \text{ pro každé } \eta \in \Lambda_{n-k}(E_n)$$

definováno zobrazení přiřazující tenzorům $\omega \in \Lambda_k(E_n)$ tenzory $*\omega \in \Lambda_{n-k}(E_n)$. Toto zobrazení je lineární a tenzor $*\omega$ je určen daným předpisem jednoznačně.

K důkazu této věty použijeme obecnou větu 1. V ní jsme sice pracovali s vektorovým prostorem E_n , ale vzhledem k její platnosti pro jakýkoli vektorový prostor konečné dimenze může jeho roli nyní převzít vektorový prostor $\Lambda_k(E_n)$. Zvolme $\omega \in \Lambda_k(E_n)$ a označme jako φ_ω lineární zobrazení $\varphi_\omega: \Lambda_{n-k}(E_n) \ni \eta \rightarrow \varphi_\omega(\eta) = \gamma(\omega, \eta) \in \mathbf{R}$, kde hodnota $\gamma(\omega, \eta)$ je (samozřejmě jednoznačně) určena vztahem $\omega \wedge \eta = \gamma(\omega, \eta) \omega_0$. Tento vztah je zřejmý – platí totiž $\omega \wedge \eta \in \Lambda_n(E_n)$, $\dim \Lambda_n(E_n) = 1 \Rightarrow \omega \wedge \eta = \text{konst} \cdot \omega_0$. Dále: Podle věty 1 k zobrazení φ_ω existuje právě jeden prvek (označíme jej $*\omega$) prostoru $\Lambda_{n-k}(E_n)$ takový, že platí $\varphi_\omega(\eta) = \tilde{g}_{n-k}(*\omega, \eta)$. Ještě je třeba malé dodefinování. Chybí nám totiž význam operátoru $*$ pro $k=0$ a $k=n$. Definujeme $*1 = \omega_0$, $*\omega_0$ pak dostaneme z obecné definice operátoru $*$.

Příklad 8 Uvažujme o nejjednodušším praktickém příkladu, kdy pracujeme v trojrozměrném euklidovském vektorovém prostoru („standard“ v běžných klasických fyzikálních disciplínách). Vzhledem k linearitě opět stačí hledat obrazy vytvořené operátorem $*$ z prvků bází prostorů $\Lambda_1(E_3), \Lambda_2(E_3)$. Položme například $\omega = e^1$ a hledejme $*e^1$ ve tvaru $*e^1 = \alpha e^2 \wedge e^3 + \beta e^3 \wedge e^1 + \gamma e^1 \wedge e^2$. Postupně volme jako η tenzory $e^2 \wedge e^3, e^3 \wedge e^1, e^1 \wedge e^2$. Podle definice je $e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = \tilde{g}_2(*e^1, e^2 \wedge e^3) \omega_0 \Rightarrow \tilde{g}_2(*e^1, e^2 \wedge e^3) = 1$. výpočtem $\tilde{g}_2(*e^1, e^2 \wedge e^3)$ dostaneme pro $\eta = e^2 \wedge e^3$

$$\tilde{g}_2(*e^1, e^2 \wedge e^3) = \alpha \det \begin{pmatrix} \tilde{g}(e^2, e^2) & \tilde{g}(e^2, e^3) \\ \tilde{g}(e^3, e^2) & \tilde{g}(e^3, e^3) \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \tilde{g}(e^3, e^2) & \tilde{g}(e^3, e^3) \\ \tilde{g}(e^1, e^2) & \tilde{g}(e^1, e^3) \end{pmatrix} + \\ + \gamma \det \begin{pmatrix} \tilde{g}(e^1, e^2) & \tilde{g}(e^1, e^3) \\ \tilde{g}(e^2, e^2) & \tilde{g}(e^2, e^3) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{g}_2(*e^1, e^2 \wedge e^3) = \alpha \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 1.$$

Pro $\eta = e^3 \wedge e^1$, $\eta = e^1 \wedge e^2$ pak stejným postupem vychází $\beta = \gamma = 0$ a odtud $*e^1 = e^2 \wedge e^3$. Podobně zjistíme $*e^2 = e^3 \wedge e^1$, $*e^3 = e^1 \wedge e^2$. A vypočteme ještě $*\omega$ pro $\omega = e^2 \wedge e^3$ a postupně $\eta = e^1$, $\eta = e^2$, $\eta = e^3$:

$$(e^2 \wedge e^3) \wedge e^1 = \tilde{g}(*e^2 \wedge e^3, e^1) \omega_0 = \tilde{g}(\alpha e^1 + \beta e^2 + \gamma e^3, e^1) \omega_0, \\ 1 = \alpha \tilde{g}(e^1, e^1) + \beta \tilde{g}(e^2, e^1) + \gamma \tilde{g}(e^3, e^1) \Rightarrow \alpha = 1,$$

A z dalších dvou rovnic pak $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Dostaneme $*(e^2 \wedge e^3) = e^1$. Stejným způsobem pak zjistíme $*(e^3 \wedge e^1) = e^2$, $*(e^1 \wedge e^2) = e^3$.

Snadno se ověří, že v případě skalárního součinu na vektorovém prostoru E_n platí $**\omega = \omega$, tj. $** = \text{id}_{\Lambda_k(E_n)}$ (identita). Obecně však tomu tak není. Stačí vzít v úvahu Minkowského metrický tenzor (odpovídající prostoročasu ve speciální teorii relativity STR):

Příklad 9 Uvažujme o Minkowského metrickém tenzoru g v prostoru $E_4 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, který je v bázích (e_0, e_1, e_2, e_3) (standardní indexování v STR), jež jsou vzhledem k němu ortonormální, reprezentován diagonální maticí například $\text{diag } g = (1, -1, -1, -1)$. Pomocí definice vypočteme pro ukázkou třeba $*\omega = *(e^1 \wedge e^2) \in \Lambda_{4-2}(E_4)$ pro $\omega = e^1 \wedge e^2 \in \Lambda_2(E_4)$. S cílem proniknutí do postupu provedeme výpočet podrobně. Způsob je stejný i v komplikovanějších případech. Předpokládáme $*\omega = *(e^1 \wedge e^2)$ ve tvaru lineární kombinace $\alpha_{pq} e^p \wedge e^q$, $0 \leq p < q \leq 3$, tj.

$*(e^1 \wedge e^2) = \alpha e^0 \wedge e^1 + \beta e^0 \wedge e^2 + \gamma e^0 \wedge e^3 + \delta e^1 \wedge e^2 + \varepsilon e^1 \wedge e^3 + \vartheta e^2 \wedge e^3$ a položíme $\eta = e^i \wedge e^j$, $0 \leq i < j \leq 3$. Pak

$$e^1 \wedge e^2 \wedge e^i \wedge e^j = [\alpha \tilde{g}_2(e^0 \wedge e^1, e^i \wedge e^j) + \beta \tilde{g}_2(e^0 \wedge e^2, e^i \wedge e^j) + \gamma \tilde{g}_2(e^0 \wedge e^3, e^i \wedge e^j) + \\ + \delta \tilde{g}_2(e^1 \wedge e^2, e^i \wedge e^j) + \varepsilon \tilde{g}_2(e^1 \wedge e^3, e^i \wedge e^j) + \vartheta \tilde{g}_2(e^2 \wedge e^3, e^i \wedge e^j)] e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{sgn}\{1, 2, i, j\} = \alpha \det \begin{pmatrix} g^{0i} & g^{0j} \\ g^{1i} & g^{1j} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} g^{0i} & g^{0j} \\ g^{2i} & g^{2j} \end{pmatrix} + \gamma \det \begin{pmatrix} g^{0i} & g^{0j} \\ g^{3i} & g^{3j} \end{pmatrix} + \\ + \delta \det \begin{pmatrix} g^{1i} & g^{1j} \\ g^{2i} & g^{2j} \end{pmatrix} + \varepsilon \det \begin{pmatrix} g^{1i} & g^{1j} \\ g^{3i} & g^{3j} \end{pmatrix} + \vartheta \det \begin{pmatrix} g^{2i} & g^{2j} \\ g^{3i} & g^{3j} \end{pmatrix}.$$

Na pravé straně tohoto vztahu jsou (při volbě $i < j$) nenulové jen determinanty obsahující část hlavní diagonály determinantu matice $\tilde{G}$. Postupně tak získáme rovnice pro koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \vartheta$, na základě jejichž řešení (tabulka) dostaneme $*(e^1 \wedge e^2) = -e^0 \wedge e^3$.

i	j	rovnice	i	j	rovnice	i	j	rovnice	i	j	rovnice	i	j	rovnice	i	j	rovnice
0	1	$0 = -\alpha$	0	2	$0 = -\beta$	0	3	$1 = -\gamma$	1	2	$0 = \delta$	1	3	$0 = \varepsilon$	2	3	$0 = \vartheta$

Stejný postup pak vede k následujícím výsledkům:

ω	$e^0 \wedge e^1$	$e^0 \wedge e^2$	$e^0 \wedge e^3$	$e^1 \wedge e^2$	$e^1 \wedge e^3$	$e^2 \wedge e^3$
$*\omega$	$e^2 \wedge e^3$	$-e^1 \wedge e^3$	$e^1 \wedge e^2$	$-e^0 \wedge e^3$	$e^0 \wedge e^2$	$-e^0 \wedge e^1$

Z tabulky také hned vidíme, že kompozice $* \circ *$ není obecně identita, například

$$**(e^1 \wedge e^2) = *(-e^0 \wedge e^3) = -e^1 \wedge e^2.$$

V praktických situacích je třeba často pracovat v obecných bázích. V takových případech není vyjádření působení Hodgeova operátoru na prvky báze a jejich vnější součiny zdaleka tak jednoduché, jako tomu bylo v příkladech 8 a 9, kde byly báze vzhledem k danému metrickému tenzoru (příklad 9), resp. vzhledem k danému skalárnímu součinu (příklad 8) ortonormální. Subdeterminanty matice $\tilde{G}$ reprezentující metrický tenzor v obecné bázi totiž budou obecně nenulové, na rozdíl od situace v příkladech 8 a 9, v nichž byly nenulové pouze subdeterminanty obsahující v diagonále část diagonály determinantu matice $\tilde{G}$. Ukážeme to v následujícím podrobném příkladu, který pak s výhodou využijeme v druhé (analytické) části příspěvku.

Příklad 10 Pro jednoduchost explicitních výpočtů a za účelem pozdějšího využití při analytických aplikacích pracujme opět pouze v trojrozměrném prostoru se skalárním součinem, tj. s pozitivně definitním metrickým tenzorem g , avšak s obecnou bází (b_1, b_2, b_3) . Duální báze je (b^1, b^2, b^3) , $b^i(b_j) = \delta_j^i$, a platí $G = (g_{ij})$, $g_{ij} = g(b_i, b_j)$, $1 \leq i, j \leq 3$. (V případě, že metrický tenzor není pozitivně definitní, objeví se ve výrazech místo determinantu matice G jeho absolutní hodnota.) Jako ukázkou uvedeme výpočet tenzoru $*b^1 \in \Lambda_2(E_3)$, který budeme opět hledat obecně ve tvaru lineární kombinace $*b^1 = \alpha(b^2 \wedge b^3) + \beta(b^3 \wedge b^1) + \gamma(b^1 \wedge b^2)$. Přímým použitím definice pak dostáváme

$$b^1 \wedge \eta = g_2(\alpha(b^2 \wedge b^3) + \beta(b^3 \wedge b^1) + \gamma(b^1 \wedge b^2), \eta) \sqrt{\det G} b^1 \wedge b^2 \wedge b^3$$

pro libovolné $\eta \in \Lambda_2(E_3)$. Postupně pro $\eta \in b^2 \wedge b^3$, $\eta \in b^3 \wedge b^1$, $\eta \in b^1 \wedge b^2$ pak získáme soustavu rovnic pro koeficienty α, β, γ

$$\begin{aligned} 1 &= \left[\alpha \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{22} & \tilde{g}^{23} \\ \tilde{g}^{32} & \tilde{g}^{33} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{32} & \tilde{g}^{33} \\ \tilde{g}^{12} & \tilde{g}^{13} \end{pmatrix} + \gamma \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{12} & \tilde{g}^{13} \\ \tilde{g}^{22} & \tilde{g}^{23} \end{pmatrix} \right] \sqrt{\det G}, \\ 0 &= \left[\alpha \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{23} & \tilde{g}^{21} \\ \tilde{g}^{33} & \tilde{g}^{31} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{33} & \tilde{g}^{31} \\ \tilde{g}^{13} & \tilde{g}^{11} \end{pmatrix} + \gamma \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{13} & \tilde{g}^{11} \\ \tilde{g}^{23} & \tilde{g}^{21} \end{pmatrix} \right] \sqrt{\det G}, \\ 0 &= \left[\alpha \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{21} & \tilde{g}^{22} \\ \tilde{g}^{31} & \tilde{g}^{32} \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{31} & \tilde{g}^{32} \\ \tilde{g}^{11} & \tilde{g}^{12} \end{pmatrix} + \gamma \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{11} & \tilde{g}^{12} \\ \tilde{g}^{21} & \tilde{g}^{22} \end{pmatrix} \right] \sqrt{\det G}. \end{aligned}$$

Zápis této soustavy lze zjednodušit, uvědomíme-li si, že subdeterminanty druhého řádu jsou algebraickými doplňky prvků (symetrické) matice $\tilde{G} = G^{-1}$, tj. prvky adjungované matice $\text{adj } \tilde{G} = \tilde{G}^{-1} \det \tilde{G} = \frac{G}{\det G}$. Odtud $(\alpha \ \beta \ \gamma) = (\sqrt{\det G} \ 0 \ 0) \tilde{G}$, tj. (analogicky $*b^2$ a $*b^3$)

$$*b^1 = (\tilde{g}^{11}b^2 \wedge b^3 + \tilde{g}^{12}b^3 \wedge b^1 + \tilde{g}^{13}b^1 \wedge b^2) \sqrt{\det G},$$

$$*b^2 = (\tilde{g}^{21}b^2 \wedge b^3 + \tilde{g}^{22}b^3 \wedge b^1 + \tilde{g}^{23}b^1 \wedge b^2) \sqrt{\det G},$$

$$*b^3 = (\tilde{g}^{31}b^2 \wedge b^3 + \tilde{g}^{32}b^3 \wedge b^1 + \tilde{g}^{33}b^1 \wedge b^2) \sqrt{\det G}.$$

Vypočteme ještě výsledek působení operátoru $*$ na součiny typu $b^i \wedge b^j$, konkrétně na příkladu $\omega = b^2 \wedge b^3 \in \Lambda_2(E_3)$. Předpokládejme $*\omega = \alpha b^1 + \beta b^2 + \gamma b^3 \in \Lambda_{3-2}(E_3)$ a postupně volme $\eta = b^1, b^2, b^3$. Dostaneme

$$(b^2 \wedge b^3) \wedge \eta = \tilde{g}(\alpha b^1 + \beta b^2 + \gamma b^3, \eta) \sqrt{\det G} b^1 \wedge b^2 \wedge b^3,$$

$$1 = (\alpha \tilde{g}^{11} + \beta \tilde{g}^{21} + \gamma \tilde{g}^{31}) \sqrt{\det G}, \quad 0 = (\alpha \tilde{g}^{12} + \beta \tilde{g}^{22} + \gamma \tilde{g}^{32}) \sqrt{\det G},$$

$$0 = (\alpha \tilde{g}^{13} + \beta \tilde{g}^{23} + \gamma \tilde{g}^{33}) \sqrt{\det G},$$

$$(\alpha \ \beta \ \gamma) \tilde{G} \sqrt{\det G} = (1 \ 0 \ 0) \Rightarrow (\alpha \ \beta \ \gamma) = (1 \ 0 \ 0) \frac{G}{\sqrt{\det G}},$$

$$\alpha = g_{11} \frac{G}{\sqrt{\det G}}, \quad \beta = g_{12} \frac{G}{\sqrt{\det G}}, \quad \gamma = g_{13} \frac{G}{\sqrt{\det G}}.$$

Obdobně pro $\omega = b^3 \wedge b^1, \omega = b^1 \wedge b^2$. Nakonec dostaneme

$$*b^2 \wedge b^3 = \frac{g_{11}b^1 + g_{12}b^2 + g_{13}b^3}{\sqrt{\det G}}, \quad *b^3 \wedge b^1 = \frac{g_{21}b^1 + g_{22}b^2 + g_{23}b^3}{\sqrt{\det G}}, \quad *b^1 \wedge b^2 = \frac{g_{31}b^1 + g_{32}b^2 + g_{33}b^3}{\sqrt{\det G}}.$$

Zobecněním postupu z příkladu 10 lze získat obecný výraz pro $*(b^{i_1} \wedge \dots \wedge b^{i_k}) \in \Lambda_{n-k}(E_n)$.

Ten už zde s ohledem na specifické aplikace uváděné v druhé části příspěvku odvozovat nebudeme.

3.2 Kompozice snížení indexu a Hodgeova operátoru

Ukážeme nyní obecný postup, jak získat působení operátoru $*$ na „souřadnicové“ k -tenzory typu $b^{j_1} \wedge \dots \wedge b^{j_k}, 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, pro případ obecné výchozí báze $(b_1, \dots, b_n)$ v prostoru E_n . V praktických úlohách v E_3 pak bude jeho použití snadné. Někdy, jak se ukáže, nebude dokonce ani vyčíslení $*b^1, \dots, *b^n$ třeba, konkrétně např. při obecném výpočtu působení

operátoru $*$ na 1-tenzor $F^b \in E_n^*$, vzniklý operací snížení indexu vektoru $F \in E_n$, tj.

kompozice $(* \circ b)$. (Označení F jsme použili jednak pro snazší odlišení od značení bází, jednak je budeme v dalších odstavcích používat častěji, konkrétně v druhé části příspěvku pro vektorová pole.) Matice skalárního součinu v obecné bázi $(b_1, \dots, b_n)$ je $G = (g_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$.

Pro vektor $F = F^i b_i$ platí $F^b = g_{ij} F^j b^i$ a $*F^b = (g_{ij} F^j) *b^i$. Působení operátoru $*$ na 1-

tenzory duální báze $\omega = b^i \in \Lambda_1(E_n)$ určíme z definice, tj. $b^i \wedge \eta = \tilde{g}_{n-1}(*b^i, \eta) \omega_0$, přičemž

$$*b^i \in \Lambda_{n-1}(E_n) \text{ vyjádříme ve tvaru } *b^i = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_{n-1}}^i b^{i_1} \wedge \dots \wedge b^{i_{n-1}}. \text{ Dostaneme}$$

$$b^i \wedge \eta = \tilde{g}_{n-1}(*b^i, \eta) \omega_0 = \tilde{g}_{n-1}(*b^i, \eta) b^1 \wedge \dots \wedge b^n \sqrt{\det G} \text{ a postupně volíme } \eta = b^{j_1} \wedge \dots \wedge b^{j_{n-1}}$$

pro $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq n$. Pro zvolené i dostaneme soustavu rovnic pro koeficienty $\alpha_{i_1 \dots i_{n-1}}^i$:

$$b^i \wedge b^{j_1} \wedge \dots \wedge b^{j_{n-1}} = \tilde{g}_{n-1}(*b^i, b^{j_1} \wedge \dots \wedge b^{j_{n-1}}) b^1 \wedge \dots \wedge b^n \sqrt{\det G} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn} \sigma(ij_1 \dots j_{n-1}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1}} \alpha_{i_1 \dots i_{n-1}}^i \det \begin{pmatrix} \tilde{g}^{i_1 j_1} & \dots & \tilde{g}^{i_1 j_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{g}^{i_{n-1} j_1} & \dots & \tilde{g}^{i_{n-1} j_{n-1}} \end{pmatrix} \sqrt{\det G}.$$

Pro snazší pochopení a průhlednost výpočtu nebudeme nyní pokračovat v obecném postupu, ale ukážeme jej na příkladu trojrozměrného prostoru E_3 . Prvky $*b^1, *b^2, *b^3$ již máme připraveny v příkladu 10.

Příklad 11

Pro $F = F^1 b_1 + F^2 b_2 + F^3 b_3$ je $F^b = g_{ij} F^j b^i$ a $*F^b = (g_{ij} F^j) *b^i$, $1 \leq i, j \leq 3$ (Einsteinova sčítací symbolika). Přímým dosazením $*b^1, *b^2, *b^3$ z příkladu 10 a úpravou, s využitím skutečnosti, že matice $G, \tilde{G}$ jsou navzájem inverzní, a proto $g_{i\ell} \tilde{g}^{ij} = \delta_\ell^j$, dostáváme

$$*F^b = (F^1 b^2 \wedge b^3 + F^2 b^3 \wedge b^1 + F^3 b^1 \wedge b^2) \sqrt{\det G} = i_F \omega_0.$$

Uvědomíme-li si, že v obecném výrazu pro prvky $*b^i$, $1 \leq i \leq n$, pro případ prostoru E_n , jsou subdeterminanty $\det(\tilde{g}^{i_p j_q})$, $i_p \in (i_1, \dots, i_{n-1})$, $j_q \in (j_1, \dots, j_{n-1})$, (až na příslušné znaménko) algebraickými doplňky prvků matice $\tilde{G}$, tj. prvky její adjungované matice $\operatorname{adj} \tilde{G} = \tilde{G}^{-1} \det \tilde{G} = G \cdot (\det G)^{-1}$, a dále pak, že platí $F^j = i_F b^j$ a $\sqrt{\det G} (b^1 \wedge \dots \wedge b^n) = \omega_0$, zjistíme, že vztah

$$*F^b = i_F \omega_0$$

platí obecně. V druhé části, jež bude následovat v některém z příštích čísel časopisu, se budeme věnovat geometrickým aplikacím Hodgeova operátoru.

Literatura

- [1] S. Morita: Geometry of Differential forms. Iwanami series of modern mathematics, Vol. 201. Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island 2001 (abstraktní přístup bez praktických příkladů).
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Hodge_star_operator (pro rychlé seznámení).
- [3] P. Bulušek: Diferenciální formy a variační počet ve fyzikálních výukových textech. Masarykova univerzita, Brno 2024. (Teze disertační práce.)
- [4] J. Musilová, P. Musilová: Matematika pro porozumění i praxi II a III VUTIUM, Brno 2012 a 2017.
- [5] L. Krump, V. Souček, J. A. Těšínský: Matematická analýza na varietách. Univerzita Karlova, Praha 2002.