

Kapitola 12

Integrace všeho druhu přinese nám ducha vzpruhu

Ještě jste integrování z druhé kapitoly v prvním dílu nezapomněli? To je dobře. Integrovat totiž potřebujeme skoro pořád nejen v matematice a fyzice, ale také v ostatních disciplínách — přírodovědných, technických, v ekonomii, a nějaký ten integrál se vyskytne i v lékařství (třeba výpočet dávky záření při vyšetření počítačovým tomografem). Základ praktického integrování s minimem teorie poskytla právě druhá kapitola. Naučili jsme se počítat neurčité integrály (primitivní funkce) a určité Riemannovy integrály ze spojitých funkcí jedné proměnné. V Dodatku K prvního dílu jsme dokonce nahlédli do kuchyně integrování „mírně“ nespojitých funkcí.

Dokážeme počítat obsahy, hmotnosti, těžiště či momenty setrvačnosti nehomogenních rovinných útvarů. Jenže v praxi se takové „placaté“ útvary příliš nevyskytují. Potřebujeme umět určit obsahy, objemy, hmotnosti, těžiště, momenty setrvačnosti a další charakteristiky obecnějších a vícerozměrných útvarů, například tenzor momentu setrvačnosti prostorového tělesa, obsah plochy, která není rovinná, těžiště, momenty setrvačnosti obecného plošného útvaru, či tok intenzity třeba elektrického pole takovou plochou. Vzpomeňte, že jsme o tocích sice hovořili v druhém dílu v kapitole 9, ale nedali jsme žádný návod, jak je počítat. Možná si také vybavíte, že zmínka o dvojnásobných a trojnásobných integrálech, včetně jednoduchých ukázek, byla také v kapitole 5. Tato „okénka“ avizující budoucí problematiku však nebyla podložena solidním teoretickým základem. Jeho čas přišel nyní. I když existují různé typy integrálů, lišící se definicí a tím samozřejmě i kritérii integrability funkcí, bude základem pro náš výklad stále Riemannův integrál. Zpočátku půjde zase jen o integrál z funkcí. První zobecnění bude spočívat v tom, že to budou funkce n proměnných a jako integrační obory poslouží vhodné podmnožiny n -rozměrného euklidovského prostoru — řadu vlastností podmnožin prostoru \mathbf{R}^n jsme probrali v odstavci 9.1 (druhý díl, strany 436 až 455), pro $n = 1$ již v Dodatku F (první díl, strany 289 až 294). V takových případech mluvíme o *vícenásobném Riemannově integrálu*.

Dalším, zásadním a velmi užitečným zobecněním bude „nová“ definice Riemannova integrálu na obecnějších k -rozměrných útvarech v \mathbf{R}^n pro $1 \leq k \leq n$, v níž budou integrovanými objekty antisymetrická tenzorová pole, zvaná *diferenciální formy*. Tato definice zahrne i standardní typy křivkového integrálu, které jsme zavedli v prvních dvou dílech, a nově také plošný integrál prvního a druhého druhu, jehož integračními obory jsou plochy v \mathbf{R}^3 .

Nových pojmů není třeba se obávat. Nejsou obtížné. Za cenu nepříliš velkého úsilí při jejich vybudování získáme elegantní, velmi praktický a pohodlný postup při integrování. K pohodlnému studiu této kapitoly však bude vhodné zopakovat si pojmy „staré“, hlavně vše o funkcích z kapitol 2 (první díl) a 9 (druhý díl).

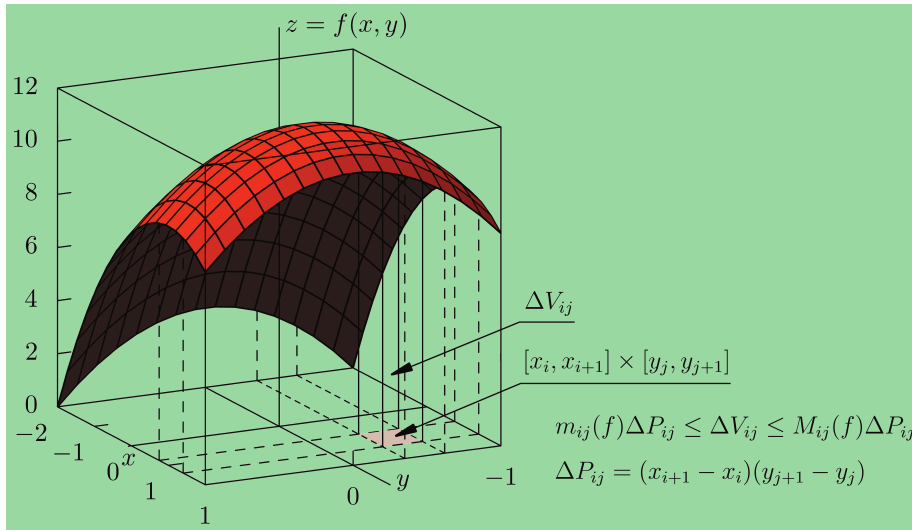
Pokud by se přece jen některý z čtenářů nechtěl ponořit do studia algebry tenzorů a problematiky diferenciálních forem, nemusí. Pojem plošného integrálu v \mathbf{R}^3 zavedeme, definitoricky korektně a způsobem přímo použitelným pro praktické počítání, také v odstavci 12.1.10 bez jejich použití.

12.1 Vícerozměrné integrování

Oč půjde při vícerozměrném (vícenásobném) integrování? Zase o „sčítání malých příspěvků“, jako tomu bylo u integrování jednonásobného. Tyto příspěvky však budou určeny nějakou funkcí dvou, tří, i více (třeba n) proměnných definovanou na dvojrozměrné, trojrozměrné, nebo vícerozměrné podmnožině euklidovského prostoru \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^3 , resp. \mathbf{R}^n . (Ukázka zápisu takového „sčítání příspěvků“ je třeba v druhém dílu na pravé straně vztahu (9.68) na straně 592.) Představme si názornější příklad — nehomogenní těleso \bar{V} , jehož hustota (tj. funkce popisující rozložení jeho hmotnosti) je dána funkcí $s(x, y, z)$. Lze nějak určit jeho hmotnost? Hmotnost malého kvádříku o objemu $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, umístěného v bodě (x, y, z) , je přibližně $\Delta m(x, y, z) = s(x, y, z) \Delta V$. Procedura, která umožní tyto elementární hmotnosti sečíst, je právě vícenásobné integrování.

12.1.1 Objem pod grafem vyzdřený kvádříky

Abychom získali názornou představu o vícenásobném integrálu a připomněli si potřebné pojmy z prvního dílu, začneme příkladem spojitě a nezáporně funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ definované na množině $\bar{K} = [a, b] \times [c, d]$ (obrázek 12.1). Definičním oborem funkce $f(x, y)$ je tedy, podle terminologie zavedené v odstavci 9.1.1, uzavřený dvojrozměrný kvádr v \mathbf{R}^2 . Klidně mu můžeme říkat *uzavřený obdélník*. (Připomeňme ještě, že definici spojitosti funkce více proměnných na uzavřené množině, speciálně v bodech její hranice, jsme diskutovali v odstavci 9.2.1 (druhý díl) na stranách 471 až 474.) Dejme tomu, že naším úkolem je spočítat objem tělesa V omezeného obdélníkovým definičním oborem $K = [a, b] \times [c, d]$, grafem funkce a svislými stěnami o rovnicích $x = a$, $x = b$, $y = c$ a $y = d$. Použijeme stejný postup jako v odstavci 2.3.1, kdy jsme počítali plochu pod grafem funkce jedné proměnné $y = f(x)$. Tehdy jsme si ji přibližně „vydláždili“ úzkými obdélníčky o základnách $[x_i, x_{i+1}]$, kde index i čísloval intervaly dělení definičního oboru funkce $f(x)$, výška i -tého obdélníčku byla dána minimem, maximem, či reprezentativní hodnotou funkce na i -tém intervalu. Přibližnou hodnotu obsahu plochy jsme získali tak, že jsme obsahy všech obdélníčků sečetli. Výsledek byl tím přesnějším, čím bylo dělení definičního intervalu jemnější. Tento postup můžeme přesně sledovat i při výpočtu objemu

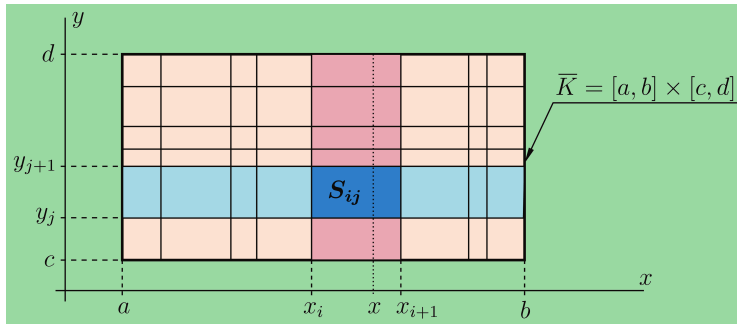


Obrázek 12.1 Výpočet objemu pomocí kvádříků.

tělesa pod grafem funkce dvou proměnných. Označme

$$D_1 = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = b\}, \quad D_2 = \{c = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = d\}$$

dělení intervalů $[a, b]$ a $[c, d]$. Označme $S_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, kde $i \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ a $j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Obdélník $[a, b] \times [c, d]$ je přesně „poskládaný“ z obdélníčků S_{ij} — nic nechybí ani nepřebývá (obrázek 12.2). Vzniká tak dělení kvádrů \bar{K} , které definujeme jako dvojici $D = (D_1, D_2)$, Každý obdélník S_{ij} je kompaktní množinou. Z věty 9.3 (druhý díl,



Obrázek 12.2 Dělení obdélníka.

strana 473), víme že na něm spojitá funkce nabývá své nejmenší i největší hodnoty. Označme je $m_{ij}(f)$ a $M_{ij}(f)$. Podobně jako jsme obrazci pod grafem funkce jedné proměnné v odstavci 2.3.1 vepisovali a opisovali obdélníky, vepíšeme a opíšeme nyní tělesu \bar{V} kvádry s podstavami S_{ij} o obsahích

$$\Delta P_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

a výškách $m_{ij}(f)$, resp. $M_{ij}(f)$. Pro objem V tělesa \bar{V} pak dostaneme

$$L(f, D) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} m_{ij}(f) \Delta P_{ij} \leq V \leq \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij}(f) \Delta P_{ij} = U(f, D). \quad (12.1)$$

Stejně jako v odstavci 2.3.1 nazveme dolní odhad tohoto objemu pro dané dělení *dolním součtem příslušným funkci f a dělení D* a horní odhad *horním součtem příslušným funkci f a dělení D* . Jsou-li D'_1 a D'_2 zjemnění dělení D_1 a D_2 , je $D' = (D'_1, D'_2)$ zjemněním dělení D a platí „dvojměrná obdoba“ vztahu (2.50) na straně 165 prvního dílu,

$$L(f, D) \leq L(f, D') \leq V \leq U(f, D') \leq U(f, D).$$

Pro funkci jedné proměnné spojitou na uzavřeném intervalu (a tedy na tomto intervalu také stejnoměrně spojitou) jsme v odstavci 2.3.1 dokázali, že horní i dolní součty pro danou funkci mají stejnou limitu, blíží-li se norma dělení nule. Totéž platí i v případě funkce dvou proměnných na uzavřeném obdélníku, tj.

$$\lim_{\nu(D_1) \rightarrow 0, \nu(D_2) \rightarrow 0} L(f, D) = \lim_{\nu(D_1) \rightarrow 0, \nu(D_2) \rightarrow 0} U(f, D). \quad (12.2)$$

Shodnou limitu mají i součty

$$S(f, D) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_i, \zeta_j) \Delta P_{ij}, \quad (12.3)$$

kde $(\xi_i, \zeta_j) \in S_{ij}$ je libovolný bod (reprezentant) obdélníka S_{ij} . Tuto společnou limitu nazveme *Riemannovým integrálem* funkce $f(x, y)$ na obdélníku \bar{K} a zapisujeme ji jako

$$\int_{\bar{K}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy.$$

Důkaz právě uvedených tvrzení je založen na předpokladu spojitosti funkce $f(x, y)$ na uzavřeném obdélníku \bar{K} . (Uzavřenost obdélníka \bar{K} zaručuje, že ze spojitosti funkce vyplývá spojitost stejnoměrná — strana 165 v prvním dílu.) Označme $P_{\bar{K}} = (b-a)(d-c)$ obsah obdélníka \bar{K} . Zvolme libovolně číslo $\varepsilon > 0$. Pak existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro každou dvojici bodů $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \bar{K}$, pro kterou je $|x_2 - x_1| < \delta$ a $|y_2 - y_1| < \delta$, platí $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \frac{\varepsilon}{P_{\bar{K}}}$. Dělení D lze volit tak, aby $\nu(D_1) < \delta$ a $\nu(D_2) < \delta$. Pak platí $M_{ij}(f) - m_{ij}(f) < \frac{\varepsilon}{P_{\bar{K}}}$ a pro rozdíl horního a dolního součtu dostaneme

$$U(f, D) - L(f, D) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} [M_{ij}(f) - m_{ij}(f)] \Delta P_{ij} < \frac{\varepsilon}{P_{\bar{K}}} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta P_{ij} = \varepsilon.$$

Zjemňováním dělení dokážeme rozdíl $U(f, D) - L(f, D)$ zmenšit pod libovolně malou předem zvolenou hodnotu. To už zaručuje platnost vztahu (12.2).

Pozn.: Před chvílí jsme opět narazili na pojem stejnoměrné spojitosti, o němž jsme diskutovali v prvním dílu na straně 165, také v souvislosti s integrálem. Šlo o funkci jedné proměnné. Nyní je ve hře funkce dvou proměnných. Pojem stejnoměrné spojitosti je však definován zcela analogicky: Funkce $f(x, y)$ definovaná na množině $M \subset \mathbf{R}^2$ se nazývá na M *stejněměrně spojitá*, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dva body $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$, pro něž je $|x_2 - x_1| < \delta$, $|y_2 - y_1| < \delta$, platí $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon$. Je-li $M = \bar{K}$ uzavřený obdélník jako v našem případě, jsou pojmy „obyčejné“ a stejnoměrné spojitosti ekvivalentní. (Zkuste si poslední tvrzení dokázat.)

Definici integrálu ze spojitě funkce na uzavřeném obdélníku máme. Jak ale integrál spočítat, tj. jak skutečně určit objem tělesa pod grafem funkce? Pro spojitou funkci je věc velmi jednoduchá — integraci provedeme postupně:

$$\int_{\bar{K}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy. \quad (12.4)$$

Integrál v hranaté závorce počítáme v obou případech tak, že s proměnnou, která v něm není proměnnou integrační, zacházíme jako s konstantou. V prvním vyjádření postupně integrace je to proměnná x , v druhém y . Po provedení integrace v hranaté závorce dostaneme funkci již jen jedné proměnné a integraci dokončíme. Vztah (12.4), který nejenže ukazuje praktický postup integrace, ale také skutečnost, že pořadí integrace je možné zaměňovat, je speciálním případem tzv. *Fubiniovy věty*. „Speciálním“ zde rozumíme skutečnost, že jsme tuto větu aplikovali na spojitě funkce dvou proměnných na uzavřeném obdélníku. Ve skutečnosti je Fubiniova věta mnohem obecnější — ale to uvidíme až později, v tomto a zejména v dalších odstavcích.

Příklad 12.1: Objem pod grafem funkce

Kdo chce rovnou integrovat a spočítat objem tělesa pod grafem funkce na obrázku 12.1 může. Jde o funkci

$$f(x, y) = 12 - 3x^2 - (y - 1)^2, \quad \bar{K} = [-1, 1] \times [-2, 2].$$

Platí

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-2}^2 (12 - 3x^2 - (y - 1)^2) \, dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[12y - 3x^2y - \frac{1}{3}(y - 1)^3 \right]_{y=-2}^{y=2} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(-12x^2 + \frac{116}{3} \right) dx = \left[-4x^3 + \frac{116}{3}x \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{208}{3}. \end{aligned}$$

Ověřte, že záměnou pořadí integrace se výsledek nezmění.

Možnost záměny pořadí při integraci je názorně pochopitelná: Objem tělesa pod grafem (obrázek 12.1) dostaneme přibližně tak, že sečteme objemy všech vepsaných, nebo opsaných kvádrů, nebo také kvádrů s výškami $f(\xi_i, \zeta_j)$, podle vzorce (12.3). Výsledek nezávisí na tom, v jakém pořadí budeme objemy kvádrů sčítat — je jich konečně mnoho, takže to můžeme dělat klidně i „na přeskáčku“. Nejjednodušší postup však dostaneme, sečteme-li nejprve pro dané x_i objemy všech kvádrů podél osy y . Dostaneme tak objem vrstvy o podstavě $[x_i, x_{i+1}] \times [c, d]$ (tmavě růžový pruh v obrázku 12.2). Provedeme-li to pro všechna $i = 0, \dots, m-1$ a pak sečteme objemy všech takto vzniklých vrstev, získáme objem tělesa \bar{V} . Je samozřejmé, že vrstvy můžeme tvořit také nejprve z kvádrů rozložených podél osy x (modrý pruh v obrázku 12.2), tj. zaměnit pořadí sčítání.

O tom, že vztah (12.4) skutečně platí, je třeba se přesvědčit důkazem, ať je předchozí vysvětlení jakkoli názorné. Zvolme libovolně $x \in [a, b]$ a definujme funkci

$$g_x : [c, d] \ni y \longrightarrow g_x(y) = f(x, y) \in \mathbf{R}.$$

Pro každé x je tato funkce spojitá na intervalu $[c, d]$, a proto je na tomto intervalu integrabilní, jak jsme dokázali v odstavci 2.3.1. Označme

$$G(x) = \int_c^d g_x(y) \, dy.$$

Funkce $G(x)$ je ovšem spojitá na intervalu $[a, b]$. Ukážeme to. Zvolme libovolný bod $x_0 \in [a, b]$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in [a, b]$, pro něž je $|x - x_0| < \delta$, a libovolné $y \in [c, d]$ platí $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$. Pak

$$\begin{aligned} |G(x) - G(x_0)| &= \left| \int_c^d [g_x(y) - g_{x_0}(y)] \, dy \right| \leq \int_c^d |g_x(y) - g_{x_0}(y)| \, dy = \\ &= \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)| \, dy < \frac{\varepsilon}{d-c} \int_c^d dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tím je spojitost funkce $G(x)$ dokázána. Funkce $G(x)$ je proto integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b G(x) \, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx.$$

Obdobně definujeme spojitou funkci $H(y)$ jako integrál v mezích a a b z funkce

$$h_y : [a, b] \ni x \rightarrow h_y(x) = f(x, y),$$

přičemž

$$\int_c^d H(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Zbývá však ještě dokázat, že integrál z funkce $G(x)$ na intervalu $[a, b]$ je shodný s integrálem z funkce $H(y)$ na intervalu $[c, d]$ a že je jejich společná hodnota rovna integrálu z funkce $f(x, y)$ na obdélníku \bar{K} . K tomu stačí trocha ekvilibristiky s nerovnostmi: označme $m_j(g_x) = \min \{g_x(y) | y \in [y_j, y_{j+1}]\}$ a $M_j(g_x) = \max \{g_x(y) | y \in [y_j, y_{j+1}]\}$. Pro libovolný bod $x \in [x_i, x_{i+1}]$ platí

$$\begin{aligned} m_{ij}(f) &\leq m_j(g_x) \leq M_j(g_x) \leq M_{ij}(f) \implies \\ \implies \sum_{j=0}^{n-1} m_{ij}(f) \Delta y_j &\leq \sum_{j=0}^{n-1} m_j(g_x) \Delta y_j \leq \int_c^d g_x(y) dy \leq \sum_{j=0}^{n-1} M_j(g_x) \Delta y_j \leq \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij}(f) \Delta y_j. \end{aligned}$$

Všimněme si důležité věci: zatímco krajní výrazy těchto řetězených nerovností na volbě bodu x nezávisí, integrál uprostřed, tj. hodnota $G(x)$, se s volbou $x \in [x_i, x_{i+1}]$ mění, ale tak, že nerovnosti stále platí. Funkce $G(x)$ je ovšem na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ spojitá, a tak tam nabývá své nejmenší i největší hodnoty. Označme tyto hodnoty $m_i(G)$ a $M_i(G)$, $m_i(G) \leq G(x) \leq M_i(G)$ pro libovolné $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Protože předchozí nerovnosti platné pro libovolné $x \in [x_i, x_{i+1}]$ musí zůstat zachovány, i když hodnotu $G(x)$ nahradíme minimem, resp. maximem funkce $G(x)$ na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$, můžeme je přepsat takto:

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_{ij}(f) \Delta y_j \leq m_i(G) \leq G(x) \leq M_i(G) \leq \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij}(f) \Delta y_j$$

pro libovolné $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Tyto nerovnosti platí pro všechny hodnoty indexu $i = 0, 1, \dots, m-1$. Vynásobíme-li každou z nich příslušným rozdílem Δx_i a všechny sečteme, dostaneme

$$L(f, D) \leq \sum_{i=0}^{m-1} m_i(G) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{m-1} M_i(G) \Delta x_i \leq U(f, D).$$

Výrazy $\sum_{i=0}^{m-1} m_i(G) \Delta x_i$ a $\sum_{i=0}^{m-1} M_i(G) \Delta x_i$ však představují dolní a horní součet funkce $G(x)$ pro dělení D_1 intervalu $[a, b]$.

$$L(f, D) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} m_{ij}(f) \Delta P_{ij} \leq L(G, D_1) \leq U(G, D_1) \leq \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij}(f) \Delta P_{ij} = U(f, D).$$

Tyto nerovnosti platí pro každé dělení obdélníka \bar{K} . Při zjemňujícím se dělení D se ovšem horní a dolní součty pro funkci $f(x, y)$ sblížují a „stlačují“ mezi sebou horní a dolní součty funkce $G(x)$. Odtud je zřejmé, že

$$\int_a^b G(x) dx = \lim_{\nu(D_1) \rightarrow 0} L(G, D_1) = \lim_{\nu(D_1) \rightarrow 0} U(G, D_1) = \int_{\bar{K}} f(x, y) dx dy.$$

Důkaz pro funkci $H(y)$ je zcela analogický. Dokázali jsme tedy následující větu:

Věta 12.1 (Fubiniova věta pro uzavřené dvojrozměrné kvádry a spojitě funkce dvou proměnných):

Nechť $\bar{K} = [a, b] \times [c, d]$ je dvojrozměrný uzavřený kvádr v \mathbf{R}^2 a $f(x, y)$ funkce spojitá na \bar{K} . Pak platí

$$\int_{\bar{K}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (12.5)$$

Postup, jakým jsme (matematicky korektně) dospěli k Fubiniově větě pro spojitě funkce dvou proměnných na uzavřeném obdélníku, lze v podstatě „opsat“ i pro funkce obecně n proměnných x^1, \dots, x^n spojitě na množině $\bar{K} = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ (v dalším odstavci ji budeme nazývat *uzavřeným n -rozměrným kvádrem v \mathbf{R}^n*). Teď jste si nepochybně všimli, že na rozdíl od kapitoly 9 v druhém dílu jsme nyní očíslovali proměnné horními indexy. Má to svůj dobrý smysl, který ozřejmíme v odstavcích 12.2 a 12.3. Zatím se „logikou“ změny nezabývejme, jednoduše ji přijměme.

Věta 12.2 (Fubiniova věta pro uzavřené n -rozměrné kvádry a spojitě funkce n proměnných):

Nechť $\bar{K} = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ je n -rozměrný uzavřený kvádr v \mathbf{R}^n a $f(x^1, \dots, x^n)$ funkce spojitá na \bar{K} . Pak platí

$$\begin{aligned} \int_{\bar{K}} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n &= \int_{a^1}^{b^1} \left[\dots \left[\int_{a^n}^{b^n} f(x^1, \dots, x^n) dx^n \right] \dots \right] dx^1 = \\ &= \int_{a^{i_1}}^{b^{i_1}} \left[\dots \left[\int_{a^{i_n}}^{b^{i_n}} f(x^1, \dots, x^n) dx^{i_n} \right] \dots \right] dx^{i_1}, \end{aligned} \quad (12.6)$$

kde (i_1, \dots, i_n) je libovolná permutace indexů 1 až n .

Příklad 12.2: Jedna užitečná samozřejmost

Funkce dvou či více proměnných bývá často zadána jako součin několika funkcí závislých pouze na jedné proměnné. Výpočet jejího integrálu na uzavřeném kvádru, kdy se každá z proměnných pohybuje v konstantních mezích, je pak zvláště jednoduchý. Vyzkoušejme to na spojitě funkci dvou proměnných $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ na obdélníku $\bar{K} = [a, b] \times [c, d]$. Počítejme podle Fubiniovy věty:

$$\int_{\bar{K}} f(x, y) dx dy = \int_{\bar{K}} [f_1(x)f_2(y) dy]dx = \int_a^b f_1(x) \left[\int_c^d f_2(y) dy \right] dx = \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \left(\int_a^b f_1(x) dx \right).$$

Postupnou integraci jsme převedli na součin dvou jednoduchých integrálů. Jak se to povedlo? V prvním kroku po dosazení $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ a zápisu postupné integrace jsme před vnitřní integrál podle proměnné y vytkli funkci $f_1(x)$, neboť ta se při integraci podle y chová jako konstanta. Integrál z funkce $f_2(y)$ podle proměnné y v konstantních mezích je ovšem číslo, a to se dá vytknout před integrál z funkce $f_1(x)$, v němž se integruje podle proměnné x . Tím již dostáváme výsledek. Zkuste se přesvědčit, že se výsledek nezmění, zaměníte-li pořadí integrace.

I když ve většině praktických situací potřebujeme integrovat spojité funkce, z principiálních důvodů se nespokojíme s takto speciálním případem. Pojem Riemannova integrálu vybudujeme v následujících odstavcích podstatně obecněji. Čtenáři, kteří se nemohou dočkat praktických výpočtů a aplikací, mohou rovnou přejít k odstavci 12.1.5.

12.1.2 Uzavřené kvádry v \mathbf{R}^n - základní a nejjednodušší integrační obory

V předchozím odstavci byl integračním oborem funkce dvou proměnných uzavřený obdélník $\bar{K} = [a, b] \times [c, d]$. Také jsme jej nazývali uzavřený dvojrozměrný kvádr v \mathbf{R}^2 , podle definice, kterou jsme formulovali v odstavci 9.1 na straně 437 pro n -rozměrný kvádr v \mathbf{R}^n , který jsme v předchozím odstavci rovněž připomněli v souvislosti s větou 12.2.

Uzavřené kvádry v \mathbf{R}^n jsou nejjednoduššími integračními obory pro funkce n proměnných. Poslouží k základní definici Riemannova integrálu, kterou později rozšíříme na obecnější typy integračních oborů v euklidovském prostoru \mathbf{R}^n . Vzpomeňte si, že euklidovským prostorem \mathbf{R}^n rozumíme topologický prostor uspořádaných n -tic reálných čísel s přirozenou, neboli euklidovskou topologií. (Kdo zapomněl, oč se jedná, snadno svou paměť osvěží návratem k odstavci 9.1, strany 436 až 455.) Definici n -rozměrného uzavřeného kvádrů však přece jen připomeňme:

n -rozměrným uzavřeným kvádrem v \mathbf{R}^n rozumíme množinu

$$\bar{K} = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n], \quad \text{kde } a^i, b^i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12.7)$$

Pro pořádek: *n -rozměrný otevřený kvádr v \mathbf{R}^n je množina $K = (a^1, b^1) \times \cdots \times (a^n, b^n)$.*

Znovu upozorňujeme, že umístění indexů nahoře není překlep, ale změna oproti značení v kapitole 9, která se v pozdějších částech této kapitoly ukáže užitečnou a významnou. Ko-neckonců, s významem horního a dolního umístění indexů u indexovaných veličin jsme se již setkali v algebře (např. v kapitole 4 na straně 24 v příkladu 4.18, kde jsme zavedli Einsteinovu

symboliku, ale i na dalších místech v kapitolách 4 a 6). Obecný bod kvádrů \bar{K} má souřadnice $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, kde $a^i \leq x^i \leq b^i$, $i = 1, 2, \dots, n$. K definici integrálu budeme potřebovat pojem dělení kvádrů, který už známe pro případ uzavřeného intervalu, tj. uzavřeného jednorozměrného kvádrů v \mathbf{R}^1 , z odstavce 2.3.1 (první díl, strana 163), a také pro případ uzavřeného obdélníka z předchozího odstavce.

Dělením uzavřeného n -rozměrného kvádrů $\bar{K} = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ v \mathbf{R}^n nazveme uspořádanou n -tici $D = (D_1, \dots, D_n)$, kde D_i , $i = 1, \dots, n$, je dělení intervalu $[a^i, b^i]$, tj.

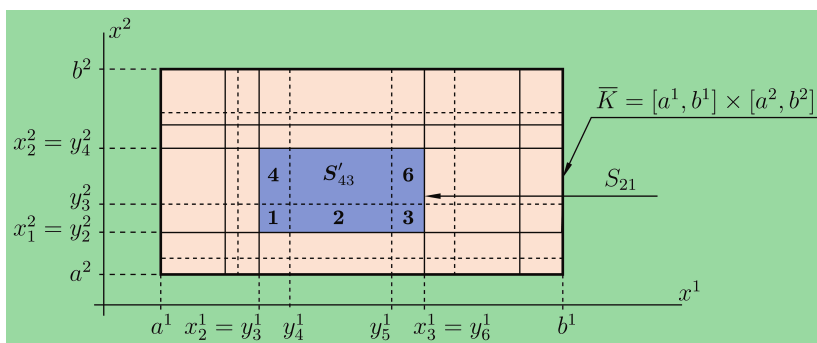
$$D_i = \{a^i = x_0^i, x_1^i, \dots, x_{N_i-1}^i, x_{N_i}^i = b^i\}, \quad x_0^i < x_1^i < \dots < x_{N_i}^i, \quad N_i \in \mathbf{N}. \quad (12.8)$$

Zjemněním dělení $D = (D_1, \dots, D_n)$ rozumíme libovolné dělení $D' = (D'_1, \dots, D'_n)$, v němž je každé dělení D'_i intervalu $[a^i, b^i]$ zjemněním dělení D_i tohoto intervalu.

Číslo $N_i + 1$ je počet bodů dělení D_i včetně bodů krajních, interval $[a^i, b^i]$ je sjednocením N_i na sebe navazujících uzavřených intervalů. Volbou konkrétního dělení D se kvádr \bar{K} „rozřeže“ na menší kvádříky (s výjimkou triviální situace, kdy $D_i = \{a^i, b^i\}$, $i = 1, \dots, n$, která také vyhovuje definici dělení) tvaru

$$S_{k_1 \dots k_n} = [x_{k_1}^1, x_{k_1+1}^1] \times [x_{k_2}^2, x_{k_2+1}^2] \times \dots \times [x_{k_n}^n, x_{k_n+1}^n], \quad k_i = 0, \dots, N_i - 1.$$

„Zjemňování“ dělení se děje tak, že každý kvádr původního dělení musí být přesně vyplněn kvádry dělení jemnějšího. Sousední kvádry mají společné stěny. Situaci ukazuje obrázek 12.3 pro $n = 2$.



Obrázek 12.3 Zjemňování dělení.

V dělení $D = (D_1, D_2)$ na obrázku je $D_1 = \{a^1 = x_0^1, \dots, x_{k_1}^1, x_{k_1+1}^1, \dots, x_{N_1}^1 = b^1\}$, kde jednotlivé body dělení D_1 intervalu $[a^1, b^1]$ čísluje index $k_1 = 0, \dots, N_1 - 1$, a $D_2 = \{a^2 = x_0^2, \dots, x_{k_2}^2, x_{k_2+1}^2, \dots, x_{N_2}^2 = b^2\}$, kde jednotlivé body dělení D_2 intervalu $[a^2, b^2]$ čísluje index

$k_2 = 0, \dots, N_2 - 1$. Zjemněním tohoto dělení je dělení $D' = (D'_1, D'_2)$, přičemž $D'_1 = \{a^1 = y_0^1, \dots, y_{l_1}^1, y_{l_1+1}^1, \dots, y_{N'_1}^1 = b^1\}$, $l_1 = 0, \dots, N'_1 - 1$, a $D'_2 = \{a^2 = y_0^2, \dots, y_{l_2}^2, y_{l_2+1}^2, \dots, y_{N'_2}^2 = b^2\}$, $l_2 = 0, \dots, N'_2 - 1$. Platí $N_1 \leq N'_1$, $N_2 \leq N'_2$ (dělení D'_1 , resp. D'_2 má více, nebo stejně bodů jako dělení D_1 , resp. D_2). Podstatné je, že každý bod dělení D_1 , resp. D_2 je současně prvkem množiny bodů určujících dělení D'_1 , resp. D'_2 . V našem obrázku tak splývají například body $x_{k_1}^1$ a $y_{l_1}^1$ pro jistou hodnotu k_1 a jistou hodnotu l_1 .

Příklad 12.3: Zjemňování dělení

Na obrázku 12.3 vidíme konkrétní dělení $D = (D_1, D_2)$ dvojrozměrného kvádrů $\bar{K} = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2]$ a jeho zjemnění $D' = (D'_1, D'_2)$, kde $D_1 = \{a^1 = x_0^1, x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1 = b^1\}$, tj. $k_1 = 0, 1, 2, 3, 4$, a $D_2 = \{a^2 = x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 = b^2\}$, tj. $k_2 = 0, 1, 2, 3$. Zjemnění dělení D , které jsme označili $D' = (D'_1, D'_2)$, je v obrázku dáno takto: $D'_1 = \{a^1 = y_0^1, y_1^1, y_2^1, \dots, y_9^1 = b^1\}$, tj. $l_1 = 0, 1, 2, \dots, 9$, a $D'_2 = \{a^2 = y_0^2, y_1^2, y_2^2, \dots, y_7^2 = b^2\}$, tj. $l_2 = 0, 1, 2, \dots, 7$. Platí přitom $a^1 = x_0^1 = y_0^1$, $x_1^1 = y_1^1$, $x_2^1 = y_3^1$, $x_3^1 = y_6^1$, $x_4^1 = y_8^1$, $x_5^1 = y_9^1 = b^1$, $a^2 = x_0^2 = y_0^2$, $x_1^2 = y_2^2$, $x_2^2 = y_4^2$, $x_3^2 = y_5^2$, $x_4^2 = y_7^2 = b^2$. Kvádr $S_{21} = [x_2^1, x_3^1] \times [x_1^2, x_2^2]$ původního dělení D je složen ze šesti kvádrů zjemnění D' . Tyto dílčí kvádry jsou v obrázku jen očíslovány, až na pátý, který je „identifikován“ přesně, S'_{43} .

Z příkladu vidíme, že indexování dělení obecně n -rozměrného kvádrů, či dokonce indexování zjemnění dělení, je docela složitá věc. Proto si situaci v dalším zjednodušíme. Dosud jsme o dělení kvádrů uvažovali jako o n -tici dělení jednotlivých intervalů, jejichž kartézským součinem je daný kvádr. Když jsme si však ujasnili, že dělením se uzavřený kvádr „rozporcuje“ na menší, rovněž uzavřené kvádry, které jej celý vyplní (přičemž sousední kvádry mají společné stěny), a každý kvádr zjemnění D' daného dělení D se zase přesně rozporcuje na ještě menší kvádříky, můžeme místo dělení D uvažovat o množině všech uzavřených kvádrů, vzniklých způsobem podrobně popsaným výše, jejichž sjednocením je kvádr \bar{K} . Skutečnost, že kvádr S je prvkem takovéto množiny, zapíšeme jako $S \in D$, resp. $S' \in D'$. Tento zápis samozřejmě není úplně správný s ohledem na to, jak jsme definovali dělení D , je však zcela pochopitelný. Nebudeme proto vymýšlet žádné další značení pro tuto novou interpretaci dělení.

A ještě jednu charakteristiku kvádrů potřebujeme — jeho objem. Jistě lze považovat za přirozené, že „objemem“ uzavřeného intervalu bude jeho délka, „objemem“ uzavřeného obdélníka jeho obsah (součin délek stran), a „objemem“ uzavřeného kvádrů v trojrozměrném euklidovském prostoru, jak ho známe z elementární geometrie, jeho obvyklý objem (součin délek hran). Jistě je všem hned jasné, jak bude definován objem uzavřeného n -rozměrného kvádrů. (Pro pozdější potřebu definujeme zároveň i objem otevřeného n -rozměrného kvádrů.)

Objemem n -rozměrného uzavřeného kvádrů $\bar{K} = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ v \mathbf{R}^n rozumíme

$$v(\bar{K}) = (b^1 - a^1)(b^2 - a^2) \dots (b^n - a^n). \quad (12.9)$$

Stejným výrazem je definován *objem n -rozměrného otevřeného kvádru*

$$K = (a^1, b^1) \times \cdots \times (a^n, b^n)$$

v \mathbf{R}^n .

Divíte se, že je objem uzavřeného kvádru definován stejně jako objem kvádru otevřeného? Možná ani ne, protože intuitivně něco takového čekáte. Uvažujme třeba o intervalech $[a, b]$ a (a, b) . Liší se pouze krajními body. Objem (délka) intervalu $[a, b]$ je $b - a$. Délka otevřeného intervalu, pokud má smysl ji definovat, určitě nebude větší. Mohla by tedy být stejná, nebo menší. Pokud bychom ji ale definovali jako menší, vyvstává otázka, o kolik. Uvědomme si, že uzavřený interval má oproti otevřenému „navíc“ jen dva body. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak jistě $a \in [a - \frac{\varepsilon}{8}, a + \frac{\varepsilon}{8}]$, a podobně $b \in [b - \frac{\varepsilon}{8}, b + \frac{\varepsilon}{8}]$. Body a a b jsme tak „obalili“, neboli pokryli (o pokrývání množin jsme mluvili v prvním dílu v Dodatku F) uzavřenými intervaly celkové délky $\frac{\varepsilon}{2}$, tj. menší než ε . Číslo ε ovšem můžeme libovolně zmenšovat. Vidíme, že délku otevřeného intervalu buď nebude možné definovat, nebo ji bude třeba definovat stejně jako délku intervalu uzavřeného. V dalším odstavci pochopíme, proč má smysl druhá alternativa. Obdobná situace je i v prostorech vyšších dimenzí. Uzavřenému obdélníku „přebývají“ oproti otevřenému jeho strany, které lze pokrýt úzkými uzavřenými obdélníky libovolně malého obsahu, uzavřený kvádr v \mathbf{R}^3 má oproti otevřenému navíc stěny, které zase lze pokrýt placatými kvádříky libovolně malého objemu, atd.

12.1.3 Pokrývání množin a zanedbatelné množiny

Problémem pokrývání množin, konkrétně podmnožin reálné osy \mathbf{R} , jsme se tak trochu zabývali v Dodatku F prvního dílu a nyní tyto úvahy zpřesníme. Co to však znamená, že nějakou množinu lze „zanedbat“? Z praxe víme, že zanedbávat lze něco „malého“ vzhledem k něčemu „podstatně většímu“. K tomu, abychom rozhodli, co je malé a co velké, potřebujeme to nějak změřit. Jak ale měřit množiny — v našem konkrétním případě podmnožiny v \mathbf{R}^n ? Něco málo už víme z předchozího odstavce o „měření“ velikosti n -rozměrných kvádrů v \mathbf{R}^n pomocí jejich objemů. Hned vznikají otázky: první z nich je, kdy lze objem menšího kvádru „zanedbat“ proti objemu kvádru většího? Stačí k zanedbání, aby třeba menší objem byl tisícinou, milióntinou, atd. většího objemu? Tato možnost vypadá prakticky, ale v matematice takováto porovnání nejsou rozumná. Rozhodně rozumněji vypadá, když při stanovení délky intervalu (jednorozměrného kvádru) zanedbáme skutečnost, že se otevřený a uzavřený kvádr liší jen o krajní body (které jsou 0-rozměrné), otevřený a uzavřený obdélník, který je dvojrozměrným útvarem, se liší jen stranami (tj. jednorozměrnými útvary), otevřený a uzavřený kvádr v \mathbf{R}^3 zase (dvojrozměrnými) stěnami, atd. Korektní definice zanedbatelné množiny bude právě na podobné úvaze postavena. Další otázkou je, zda a jak lze „změřit“ objem množiny, která není kvádrem — takových množin je přece většina. První, co nás napadne, je „vycpat“ nějaký nepravidelný útvar co nejpřesněji malými kvádříky, jejichž objem pak bude vystihovat objem útvaru tím lépe, čím budou menší

— tak, jak jsme to udělali v odstavci 12.1 s útvarem pod grafem spojité funkce. Samozřejmě je nutné tyto myšlenky formulovat matematicky daleko přesněji.

Nejprve zobecníme definici otevřeného pokrytí množiny v \mathbf{R}^n , uvedenou v Dodatku F prvního dílu pro $n = 1$, na případ libovolné dimenze n .

*Otevřeným pokrytím množiny $A \subset \mathbf{R}^n$ nazveme libovolný soubor $\mathcal{O} = \{K_\iota | \iota \in I\}$ otevřených n -rozměrných kvádrů v \mathbf{R}^n , jejichž sjednocení je nadmnožinou množiny A , tj. $A \subset \cup_{\iota \in I} K_\iota$. Index ι je prvkem jisté indexové množiny, která může být konečná, ale i spočetná, nebo obecně dokonce nespočetná. Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *kompaktní*, lze-li z každého jejího otevřeného pokrytí vybrat konečné podpokrytí, tj. konečný počet otevřených kvádrů K_1 až K_N tak, že $A \subset \cup_{i=1}^N K_i$.*

Není to nic nového, pouze jsme připomněli definici uvedenou v příkladu 9.8 (druhý díl, strana 445), v němž jsme dokazovali, že podmnožina euklidovského topologického prostoru je ve smyslu výše uvedené definice kompaktní právě když je ohraničená a uzavřená. Toto připomenutí usnadní následující definici zanedbatelné množiny.

Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *zanedbatelná*, nebo také *množina míry nula*, jestliže pro každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje takové její pokrytí otevřenými (ekvivalentně uzavřenými) kvádry $\mathcal{O} = \{K_1, K_2, K_3, \dots\}$, jejichž celkový objem je menší než ε . Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *množinou objemu nula*, jestliže pro každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje takové její konečné pokrytí otevřenými (ekvivalentně uzavřenými) kvádry $\mathcal{O} = \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_N\}$, jejichž celkový objem je menší než ε .

Pozn. 1: Pokud máte výhrady k tomu, že hovoříme o nulové míře, aniž jsme řekli, co to míra je, jsou do jisté míry správné. Abychom věc pochopili do hloubky, potřebovali bychom rozvinout teorii míry. Uviděli bychom, že se jedná o tzv. *Lebesgueovu míru* ve speciálním případě, kdy je nulová. Pro naši potřebu však tato charakteristika ani pořádná teorie míry nejsou potřebné. Jednoduše vezměme slovní spojení „množina nulové míry“ jako samostatný pojem. Jednodušší možná skutečně bude mluvit o zanedbatelné množině.

Pozn. 2: Vzhledem k tomu, že jsme objem otevřeného kvádrů definovali stejně jako objem kvádrů uzavřeného, můžeme v předchozí definici zaměnit otevřené kvádry za uzavřené. Někdy se tato záměna může hodit.

Pozn. 3: Je zřejmé, že množina objemu nula je automaticky množinou míry nula, tedy zanedbatelnou množinou. Naopak tomu být nemusí.

Příklad 12.4: Zanedbatelné množiny, které zanedbatelně vůbec nevypadají

Riemannova funkce z příkladu 9.7 (druhý díl, strana 444) je velice vděčným objektem pro vysvětlení některých pojmů. Množina bodů její nespojitosti je totiž ukázkovým příkladem zanedbatelné množiny. Abychom nemuseli listovat v druhém dílu, Riemannovu funkci připomeňme.

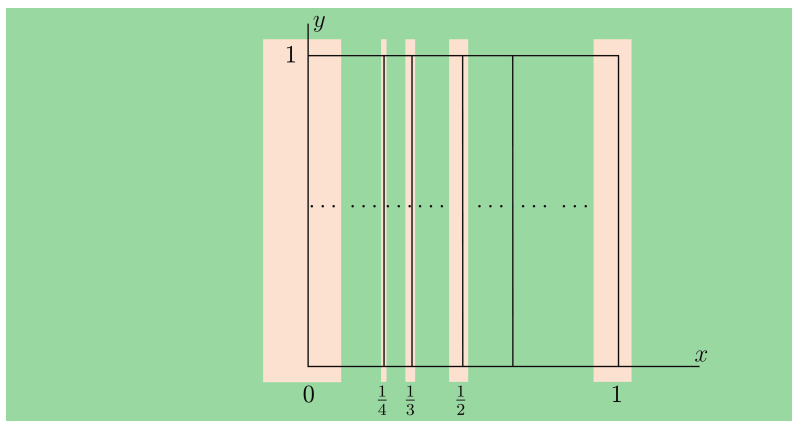
$$f_R : \bar{K} = [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow f_R(x, y) \in \mathbf{R},$$

72 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

$$f_R(x, y) = 1 - \frac{1}{q} \quad \text{pro } x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbf{N} \text{ nesoudělná, } y \in \mathbf{Q},$$

$$f_R(x, y) = 1 \quad \text{v ostatních případech.}$$

V příkladu 9.7 jsme dokázali, že množina bodů nespojitosti funkce f_R je $A = \{(x, y) \in \bar{K} \mid x = \frac{p}{q}, y \in [0, 1]\}$. Tyto body vyplní úsečky o rovnicích $x = \frac{p}{q} \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1$ (obrázek 12.4).



Obrázek 12.4 Množina bodů nespojitosti Riemannovy funkce.

Úseček je tolik, kolik je v intervalu $[0, 1]$ racionálních čísel. Těch je sice nekonečně, ale spočetně mnoho. Znamená to, že je lze všechna očíslovat přirozenými čísly, tj. najít prosté zobrazení množiny přirozených čísel \mathbf{N} na množinu reálných čísel ležících v intervalu $[0, 1]$. Fakt, že racionálních čísel v jakkoli velkém intervalu je stejně jako čísel přirozených, ví jistě každý. Ale *jak* to víme? Ukažme pro zajímavost aspoň jeden způsob, jak racionální čísla „sestavit do řady“, tj. očíslovat je indexy z množiny přirozených čísel. Provedme očíslování třeba takto: Budeme řadit do tabulky jen zlomky $\frac{p}{q}$, kde čísla p a q jsou nesoudělná, přičemž $p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $q \in \mathbf{N}$, $p \leq q$, tak, že v každém řádku tabulky budou zlomky se shodným součtem $p + q$.

$p + q$	$\frac{p}{q}$				
1	$\frac{0}{1}$	—	—	—	—
2	—	$\frac{1}{1}$	—	—	—
3	—	$\frac{1}{2}$	—	—	—
4	—	$\frac{1}{3}$	—	—	—
5	—	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	—	—
6	—	$\frac{1}{5}$	—	—	—
7	—	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	—
8	—	$\frac{1}{7}$	—	$\frac{3}{5}$	—
9	—	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{7}$	—	$\frac{4}{5}$
10	—	$\frac{1}{9}$	—	$\frac{3}{7}$	—
...

Pomlčky v tabulce znamenají „vynechané“ zlomky, tj. takové, které nesplňují požadavky kladené na čísla p a q . Jde o čísla větší než 1 a zkratelitelné zlomky, které představují opakování zlomků uvedených již v předchozích řádcích. Nyní zlomky postupně očíslováme tak, že budeme postupovat po řádcích. Číslo 0 v prvním řádku je očíslováno jedničkou. Číslo 1 v druhém řádku dvojkou, $1/2$ trojkou, $1/3$ čtyřkou, $1/4$ pětkou, $2/3$ šestkou, atd.

Teď už se ale vraťme k původnímu problému. Přejeme si dokázat, že množina bodů nespojitosti Riemannovy funkce je zanedbatelná. Musí se nám proto podařit ji pokrýt otevřenými dvojrozměrnými kvádry (tj. obdélníky), jejichž celkový objem bude menší než předem stanovené číslo ε . Je jasné, že obdélníků musí být nekonečně mnoho. Je však vůbec možné, aby celkový obsah nekonečně mnoha obdélníků byl konečný? Vzpomenete-li si na nekonečné řady, jistě nebudete pochybovat o tom, že to možné je. Výšku pokrývajících obdélníků zvolme stejnou a rovnu třeba $1,1$ (definičním oborem Riemannovy funkce je uzavřený čtverec o straně 1 a pokrývající obdélníky mají být otevřené). Uvažme racionální číslo, jemuž jsme zobrazením definovaným v předchozí tabulce přisoudili jedničku. Je to číslo 0. Úsečku $\{(0, y) \in \bar{K} \mid 0 \leq y \leq 1\}$ pokryjeme obdélníkem o základně $a_1 = \frac{\varepsilon}{1,1 \cdot 2^2}$. Úsečku odpovídající racionálnímu číslu označenému dvojkou pokryjeme obdélníkem o základně $a_2 = \frac{\varepsilon}{1,1 \cdot 2^3}$, atd., obdélník pokrývající úsečku odpovídající racionálnímu číslu označenému i bude mít základnu $a_i = \frac{\varepsilon}{1,1 \cdot 2^{1+i}}$, a tak pokračujeme. Uvedeným postupem jsou pokryta všechna racionální čísla ve čtverci \bar{K} . Celkový obsah pokrývajících obdélníků je

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} 1,1 \cdot \frac{\varepsilon}{1,1 \cdot 2^{1+i}} = \frac{\varepsilon}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Množina bodů nespojitosti Riemannovy funkce je skutečně zanedbatelná. Protože ji však nelze pokrýt konečným počtem otevřených obdélníků o celkovém obsahu menším než předem zadané číslo, není množinou objemu nula.

V předchozím příkladu jsme se setkali se zanedbatelnou množinou (množina míry nula), která však není množinou objemu nula. Položme si otázku, jaká další vlastnost množiny míry nula by zajistila, aby se současně jednalo o množinu objemu nula? Je to kompaktnost. Víme totiž, že z každého pokrytí kompaktní množiny otevřenými kvádry lze vybrat konečné podpokrytí. Bude-li kompaktní množina zanedbatelná, dokážeme ji (jako každou zanedbatelnou množinu) pokrýt kvádry o celkovém objemu menším než je předem zadané číslo. Ze souboru těchto kvádrů bude ovšem možné vybrat konečný podsoubor, který bude mít celkový objem rovněž menší než zadané číslo. Ale pozor: je-li nějaká množina množinou objemu nula, neznamená to, že musí být kompaktní — tvrzení prostě nelze obrátit.

Pro účely integrování nepotřebujeme studovat zanedbatelné množiny do všech detailů. Protože však jde o věc nesporně zajímavou, dopřejme si ještě jednu otázku a jeden příklad, které se zanedbatelných množin týkají. Otázka (pro zopakování topologických vlastností množin): víme, že v \mathbf{R}^n je množina kompaktní právě když je ohraničená a uzavřená. Dále je jasné, že každá úsečka je ohraničenou uzavřenou množinou, je tedy kompaktní. Množina bodů nespojitosti Riemannovy funkce ovšem kompaktní není (jinak by byla množinou objemu nula). Jak je to možné, když je složena jen z úseček?

Příklad 12.5: Sjednocování zanedbatelných množin

V příkladu 12.4 jsme mohli vidět zajímavé věci: jedna úsečka byla „v porovnání s dvojrozměrným útvarem“ zanedbatelnou množinou a sjednocení spočetně mnoha úseček rovněž. Pro vlastnost „objem nula“ už to neplatilo. Položme si otázku, kolik zanedbatelných množin můžeme sjednotit, aby vznikla opět zanedbatelná množina? Zcela jistě jich obecně nemůže být nespočetně mnoho. (Pokuste se to vysvětlit.) A jistě jich může být konečně

mnoho: pokud je totiž množina A konečným sjednocením N zanedbatelných množin, můžeme pro libovolné $\varepsilon > 0$ pokrýt každou z nich kvádry o celkovém objemu menším než $\frac{\varepsilon}{N}$. Všechny tyto kvádry spolehlivě pokryjí i množinu A a jejich celkový objem je menší než $N \cdot \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon$. A co když bude množina A sjednocením spočetně mnoha zanedbatelných množin, tj. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$? Zvolme $\varepsilon > 0$. Množinu A_i lze pokrýt kvádry $K_{i,1}, K_{i,2}, \dots$, jejichž celkový objem je menší než $\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Množinu A pak pokrývá soubor kvádrů $\{K_{i,j} | i, j = 1, 2, 3, \dots\}$. Jejich celkový objem je

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} v(K_{i,j}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} v(K_{i,j}) \right) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dokázali jsme, že sjednocení spočetně mnoha zanedbatelných množin je zanedbatelná množina.

12.1.4 Spojitost funkce trochu jinak

Víme už, že existence Riemannova integrálu souvisí se spojitostí funkce, či přesněji řečeno s tím, do jaké míry je její spojitost porušena. V tomto odstavci se podíváme na problém spojitosti funkce z jiného úhlu. Definice spojitosti, kterou dosud máme k dispozici z prvního i druhého dílu, si všímá pouze toho, zda funkce v daném bodě je či není spojitá. Nový pohled na (ne)spojitost ji umožní „změřit“. Tato možnost bude velmi užitečná zejména v důkazu základního kritéria integrability funkce, které zatím známe pro funkce jedné proměnné jako Lebesgueovu větu (první díl, strana 316).

V dalším textu tohoto odstavce používáme těchto předpokladů: $\bar{K} \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřený n -rozměrný kvádr a $f : \bar{K} \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ ohraničená funkce. Konkrétní bod kvádrů \bar{K} , v němž budeme prošetřovat spojitost funkce $f(x)$, budeme značit $x_0 \in \bar{K}$. (Toto označení, namísto symbolu a oproti druhému dílu, volíme proto, aby nedocházelo k záměně souřadnic bodu s krajními body intervalů $[a^i, b^i]$ definujících kvádr \bar{K} .) Zvolme číslo $\delta > 0$. Množina $\mathcal{O}_\delta(x_0) = \{x \in \bar{K} | |x - x_0| < \delta\}$ definuje okolí bodu x_0 ve smyslu obecné definice na straně 437 druhého dílu. Jedná se o tzv. kulové okolí, neboť v souřadnicovém zápisu má nerovnost $|x - x_0| < \delta$ tvar $\sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2} < \delta$. Pokud okolí $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ není podmnožinou kvádrů \bar{K} , považujeme samozřejmě funkci $f(x)$ za definovanou pouze na průniku $\mathcal{O}_\delta(x_0) \cap \bar{K}$. Dále definujeme

$$m(f, x_0, \delta) = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \cap \bar{K}\}, \quad M(f, x_0, \delta) = \sup \{f(x) \mid x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \cap \bar{K}\}.$$

Rozdíl $M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)$ je neklesající funkcí proměnné δ , tj. pro $\delta \rightarrow 0$ neroste. Přitom je

$$M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta) \geq 0 \quad \text{pro libovolné } \delta > 0,$$

takže množina $\{M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta) \mid \delta > 0\}$ je zdola ohraničená a jako taková má infimum. Dále jsou samozřejmé nerovnosti

$$m(f, x_0, \delta_1) \leq m(f, x_0, \delta_2) \leq M(f, x_0, \delta_2) \leq M(f, x_0, \delta_1), \quad \text{pro libovolné } \delta_1 > \delta_2 > 0,$$

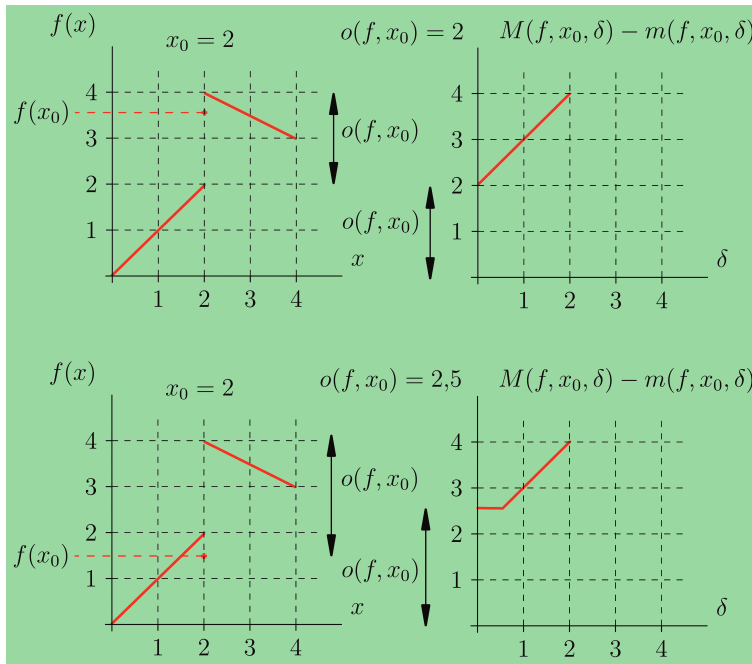
$$m(f, x_0, \delta) \leq M(f, x_0, \delta'), \quad \text{pro libovolné } \delta, \delta' > 0.$$

Nechť $f : \bar{K} \rightarrow \mathbf{R}^n$ je ohraničená funkce, $x \in \bar{K}$, $\delta > 0$. Číslo

$$o(f, x_0) = \inf \{M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta) \mid \delta > 0\} \quad (12.10)$$

se nazývá *oscilace funkce $f(x)$ v bodě x_0* .

Nenulová oscilace zjevně „měří“ nespojitost funkce v bodě x_0 (obrázek 12.5).



Obrázek 12.5 Oscilace funkce v daném bodě a (ne)spojitost.

Pro horní obrázek je zvolena funkce jedné proměnné definovaná na intervalu $[0, 4]$ a daná vztahy $f(x) = x$ pro $x \in [0, 2)$, $f(x) = 5 - 0,5x$ pro $x \in (2, 4]$, $f(2) = 3,5$. Bod, v němž vyšetřujeme oscilaci, je $x_0 = 2$ a bod grafu $(x_0, f(x_0))$ je v obrázku vyznačen plným kroužkem. Uvědomte si, že oscilace funkce $f(x)$ v bodě x_0 na funkční hodnotě $f(x_0)$ v tomto případě nezávisí (pokuste se to zdůvodnit). Dolní obrázek se liší jinou volbou funkční hodnoty $f(x_0)$. V tomto případě je oscilace funkce na volbě funkční hodnoty závislá. A ještě jednu věc si uvědomme: Infimum množiny $\{M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta) \mid \delta > 0\}$ je jejím hromadným bodem a současně limitou pro $\delta \rightarrow 0^+$.

Jak ale souvisí spojitost s oscilací? obrázek 12.5 to názorně napovídá, přinejmenším pro funkci jedné proměnné: má-li být funkce v daném bodě spojitá, nesmí být její graf „přetržený“

— mezi jeho částmi vlevo a vpravo od bodu x_0 nesmí být mezera. Oscilace by proto měla být nulová. A naopak, bude-li oscilace funkce v daném bodě nulová, bude funkce v tomto bodě spojitá. Tato hypotéza je skutečně správná, a to dokonce pro funkce více proměnných.

Věnujme se nyní úvahám, které ji potvrdí. Předpokládejme nejprve, že funkce je v bodě x_0 spojitá. Znamená to, že pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechny body $x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \cap \bar{K}$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Pro tyto body x leží hodnota $f(x)$ v intervalu $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ šířky 2ε . Proto je $M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta) < 2\varepsilon$. Vzhledem k tomu, že číslo ε lze libovolně zmenšovat, je zřejmé, že $\inf \{M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta) \mid \delta > 0\} = 0$, tj. $o(f, x_0) = 0$. Jestliže naopak předpokládáme, že $o(f, x_0) = 0$, měli bychom umět dokázat spojitost funkce $f(x)$ v bodě x_0 . Necht tedy $o(f, x_0) = \inf \{M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta) \mid \delta > 0\} = 0$. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Z definice infima plyne, že v intervalu $(o(f, x_0), o(f, x_0) + \varepsilon)$ leží alespoň jeden prvek množiny $\{M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta) \mid \delta > 0\}$. To znamená, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že $M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta) < \varepsilon$. Odtud již snadno plyne, že pro všechny body $x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \cap \bar{K}$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 . Na základě předchozích úvah můžeme vyslovit následující tvrzení.

Věta 12.3: *Necht $\bar{K} \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřený n -rozměrný kvádr. Funkce $f : \bar{K} \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in \bar{K}$ právě když je $o(f, x_0) = 0$.*

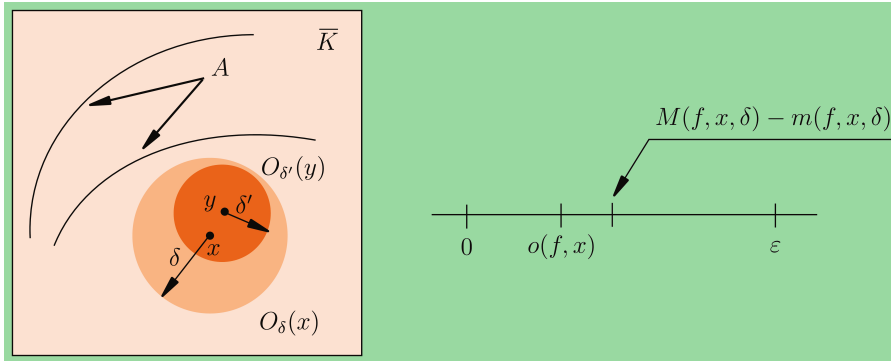
Dokázali jsme tedy najít veličinu (oscilaci funkce v bodě), jejíž nulová, resp. nenulová hodnota identifikuje spojitost, resp. nespojitost funkce v tomto bodě. Následující tvrzení a příklady dokumentují skutečnost, že s hodnotami oscilace, či spíše s intervaly hodnot, v nichž oscilace může ležet, souvisí charakter množiny bodů nespojitosti funkce.

Prozkoumáme nyní množinu bodů definičního oboru \bar{K} funkce $f(x)$, v nichž je oscilace funkce větší než předepsaná hodnota, popřípadě s touto hodnotou shodná. Dokážeme následující tvrzení:

Věta 12.4: *Necht \bar{K} je uzavřený n -rozměrný kvádr v \mathbf{R}^n a $f : \bar{K} \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ ohraničená funkce. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak množina $A = \{x \in \bar{K} \mid o(f, x) \geq \varepsilon\}$ je uzavřená.*

Množina A je samozřejmě podmnožinou definičního oboru \bar{K} . Abychom dokázali, že je uzavřená, je třeba se přesvědčit, že doplněk množiny A v \mathbf{R}^n , tj. $\mathbf{R}^n \setminus A$, je otevřená. Musí se nám proto podařit sestrojít ke každému bodu $x \in \mathbf{R}^n \setminus A$ otevřený kvádr K_x , který obsahuje bod x a vejde se do množiny $\mathbf{R}^n \setminus A$. Protože do každého otevřeného kvádrů obsahujícího daný bod lze vepsat otevřenou n -rozměrnou kouli, která tento bod rovněž obsahuje, můžeme si situaci usnadnit tím, že budeme pracovat s kulovými okolími, danými jednoduše nerovnostmi typu $|y - x| < \delta$. Budeme je značit $\mathcal{O}_\delta(x)$. Situaci přiblíží obrázek 12.6.

Jestliže bod x neleží v kvádru \bar{K} , není takzvaně „co řešit“, neboť množina $\mathbf{R}^n \setminus \bar{K}$ je



Obrázek 12.6 K důkazu věty 12.4.

otevřená. Zabývejme se druhým možným případem polohy bodu x , tj. $x \in \bar{K} \setminus A$. Pro oscilaci funkce v tomto bodě platí $o(f, x) < \varepsilon$. Musí proto existovat číslo $\delta > 0$ tak, že $M(f, x, \delta) - m(f, x, \delta) < \varepsilon$. Proč tomu tak je? Opět to plyne z definice infima číselné množiny. Protože je totiž oscilace funkce v daném bodě infimum množiny $\{M(f, x, \delta) - m(f, x, \delta)\}$, kde δ probíhá množinu všech kladných čísel, pro něž má rozdíl $M(f, x, \delta) - m(f, x, \delta)$ smysl, leží v intervalu $[o(f, x), \varepsilon)$ alespoň jedna hodnota tohoto rozdílu. Ta odpovídá nějaké hodnotě, popřípadě i více hodnotám δ (kterákoli nám poslouží stejně dobře). Okolí $\mathcal{O}_\delta(x) = \{y \mid |y - x| < \delta\}$ je disjunktní s množinou A , tj. $\mathcal{O}_\delta(x) \subset \mathbf{R}^n \setminus A$. Přesvědčme se o tom. Zvolme libovolný bod $y \in \mathcal{O}_\delta(x)$. Jistě existuje $\delta' > 0$ tak, že $\mathcal{O}_{\delta'}(y) \subset \mathcal{O}_\delta(x)$. Proto je $M(f, y, \delta') - m(f, y, \delta') < \varepsilon$ a také $o(f, y) < \varepsilon$. Pro libovolně zvolený bod $x \in \mathbf{R}^n \setminus A$ tedy dokážeme najít jeho otevřené kulové okolí, které je podmnožinou množiny $\mathbf{R}^n \setminus A$. Množina $\mathbf{R}^n \setminus A$ je otevřená a množina A uzavřená. Vzhledem k tomu, že je také ohraničená (je podmnožinou kváдру \bar{K}), je dokonce kompaktní.

Na závěr tohoto odstavce ještě uvedeme dva důležité příklady chování oscilace pro případ rostoucí funkce jedné proměnné. Budou se nám hodit, až budeme dokazovat kritéria integrability funkcí.

Příklad 12.6: Rostoucí funkce a oscilace

Předpokládejme tedy, že $f(x)$ je funkce jedné proměnné, rostoucí na intervalu $[a, b]$. Zvolme v tomto intervalu libovolný počet k různých bodů x_1, \dots, x_k , rovněž libovolných, seřazených vzestupně, $x_1 < \dots < x_k$. Odpověď na otázku, co dostaneme, sečteme-li oscilace funkce $f(x)$ ve všech těchto bodech, je názorná: jistě nemůžeme dostat větší hodnotu, než je rozdíl funkčních hodnot v bodech b a a , tj.

$$\sum_{i=1}^k o(f, x_i) \leq f(b) - f(a).$$

Přesto je třeba, jako vždy, dokázat to, co tvrdíme. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Vzhledem k tomu, že $o(f, x_i)$ je infimum množiny rozdílů $M(f, x_i, \delta) - m(f, x_i, \delta)$, kde δ probíhá množinu kladných čísel, pro něž je příslušný rozdíl definován, existuje v intervalu $[o(f, x_i), o(f, x_i) + \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)})$ alespoň jedna hodnota $M(f, x_i, \delta_i) - m(f, x_i, \delta_i)$. Čísla δ_i lze přitom volit tak, aby průniky intervalů $[x_i - \delta_i, x_i + \delta_i]$ a $[x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1}]$ byly prázdné pro $i = 1, \dots, k - 1$. Pro jednoduchost označme jako δ nejmenší z nich. Pak platí

$$m(f, x_i, \delta) < M(f, x_i, \delta) < m(f, x_{i+1}, \delta) < M(f, x_{i+1}, \delta) \implies M(f, x_i, \delta) - m(f, x_{i+1}, \delta) < 0$$

pro $i = 1, \dots, k-1$. (Nezapomínejme, že funkce $f(x)$ je rostoucí!) Platí

$$\sum_{i=1}^k o(f, x_i) \leq \sum_{i=1}^k [M(f, x_i, \delta) - m(f, x_i, \delta)].$$

Sečteme-li všechny rozdíly $M(f, x_i, \delta) - m(f, x_i, \delta)$ dostaneme

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k [M(f, x_i, \delta) - m(f, x_i, \delta)] = \\ & = M(f, x_1, \delta) - m(f, x_1, \delta) + M(f, x_2, \delta) - m(f, x_2, \delta) + \dots + M(f, x_k, \delta) - m(f, x_k, \delta) = \\ & = -m(f, x_1, \delta) + \sum_{i=1}^{k-1} [M(f, x_i, \delta) - m(f, x_{i+1}, \delta)] + M(f, x_k, \delta) < M(f, x_k, \delta) - m(f, x_1, \delta) \leq f(b) - f(a). \end{aligned}$$

A ještě jeden příklad, na kterém uvidíme, že už jen samotná vlastnost „být rostoucí“ zachrání funkci od „příliš velké“ množiny bodů nespojitosti.

Příklad 12.7: Jak velká je množina bodů nespojitosti rostoucí funkce?

Máme na mysli funkci z příkladu 12.6, tj. funkci $f(x)$ jedné proměnné, která je rostoucí na intervalu $[a, b]$. Uvědomme si, čím je výsledek příkladu 12.6 zajímavý natolik, že by mohl pomoci najít odpověď na úvodní otázku: součet oscilací naší funkce v konečném, avšak *libovolně velkém* počtu bodů definičního intervalu nemůže překročit rozdíl funkčních hodnot v krajních bodech intervalu. Nerovnost odvozená v předchozím příkladu tedy platí pro jeden, dva, deset, či milion bodů v intervalu $[a, b]$. Sama nerovnost není příliš překvapivá, ale zcela jistě nás upozorňuje na to, že množina bodů nespojitosti funkce nebude moci být ledajaká. Umožní nám dokázat, že množina $A_{1/k} = \{x \in [a, b] \mid o(f, x) \geq \frac{1}{k}\}$ je pro každé $k \in \mathbf{N}$ konečná! Jak to dokážeme? Jako obvykle sporem. Předpokládejme, že pro jisté k je množina $A_{1/k}$ nekonečná. Pak stačí, abychom sečetli oscilace funkce v jejich libovolně zvolených bodech x_1, \dots, x_m , jejichž počet m je dán podmínkou $m > k(f(b) - f(a))$. Dostaneme

$$\sum_{i=1}^m o(f, x_i) > \frac{m}{k} > f(b) - f(a).$$

Dostali jsme se do sporu s výsledkem příkladu 12.6. Zajímá nás však množina *všech* bodů nespojitosti dané funkce. Označme ji A . Je to množina všech bodů s nenulovou oscilací. Protože pro jakkoli malou, avšak nenulovou hodnotu oscilace můžeme najít číslo $k \in \mathbf{N}$ takové, že tato oscilace převyší hodnotu $\frac{1}{k}$, platí zřejmě

$$A = A_1 + A_{1/2} + \dots + A_{1/k} + \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1/k}. \quad (12.11)$$

Množina A je spočetným sjednocením konečných množin, je proto sama spočetná. O spočetné množině bodů v intervalu $[a, b]$ (a dokonce v celém prostoru \mathbf{R} , a co víc, nakonec i v \mathbf{R}^n) víme, že je zanedbatelná! Dospíváme k docela silnému a možná trochu překvapivému závěru: ze samotné vlastnosti, že funkce je rostoucí na intervalu $[a, b]$, vyplývá, že nemůže být „neomezeně“ nespojitá. Množina bodů její nespojitosti je zanedbatelná (míry nula).

12.1.5 Integrál z funkce n proměnných na uzavřeném n -rozměrném kvádru aneb hranaté integrování

V prvním odstavci této kapitoly jsme zavedli Riemannův integrál z funkce dvou proměnných spojitě na uzavřeném dvojrozměrném kvádru, tj. na uzavřeném obdélníku. Zobecnit tuto definici na případ obecné dimenze n , včetně Fubiniovy věty, bychom dokázali velmi snadno, neboť otázky spojitosti funkcí jsme důkladně rozebírali v odstavci 9.2. V závěru tohoto odstavce ještě výsledné vztahy pro spojitě funkce n proměnných z praktických důvodů shrneme. Zamysleme se však nad tím, zda by nebylo možné požadavek spojitosti funkce na celém uzavřeném kvádru oslabit a zachovat přitom základní myšlenku definice integrálu. Nebude-li funkce na celém kvádru spojitá, nezaručíme existenci její nejmenší a největší hodnoty na \bar{K} a obecně ani na kvádrech dělení kvádru \bar{K} . Bude-li však funkce na \bar{K} alespoň ohraničená (jiným slovem omezená), nemusí sice na kvádrech dělení kvádru \bar{K} existovat minimum a maximum funkčních hodnot, zaručeně však bude existovat jejich infimum a supremum. Definici integrálu založíme právě na této skutečnosti. (Že jste to už někde viděli? Ano, v prvním dílu v Dodatku K, kde jsme zobecnili definici Riemannova integrálu pro funkce jedné proměnné omezené na uzavřených intervalech. A budete-li listovat v Dodatku K, osvěžte si znovu pojmy infimum a supremum množiny reálných hodnot o pár stránek dopředu v Dodatku F.)

Nechť je tedy $\bar{K} = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n]$ n -rozměrný uzavřený kvádr v \mathbf{R}^n , $x = (x^1, \dots, x^n)$ jeho obecný bod a

$$f : \bar{K} \ni x = (x^1, \dots, x^n) \longrightarrow f(x) = f(x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}$$

funkce n proměnných, která je na \bar{K} ohraničená. (Připomeňme pro jistotu, že funkce se nazývá ohraničená na množině $A \subset D_f$, existuje-li číslo M tak, že pro každý bod $x \in A$ je $|f(x)| < M$.) Zvolme libovolné dělení D kvádru \bar{K} a označme

$$m_S(f) = \inf \{f(x) \mid x \in S\}, \quad M_S(f) = \sup \{f(x) \mid x \in S\}$$

pro každý kvádr $S \in D$ (zde již používáme pozměněnou interpretaci dělení, zmíněnou v závěru odstavce 12.1.2 v příkladu 12.3). Obdobně jako u funkce jedné proměnné v Dodatku K prvního dílu sestavme *dolní a horní součet* pro funkci f a dělení D ,

$$L(f, D) = \sum_{S \in D} m_S(f)v(S), \quad U(f, D) = \sum_{S \in D} M_S(f)v(S), \quad (12.12)$$

kde $v(S)$ je objem kvádru S . Výrazy definované vztahy (12.12) se nazývají *Darbouxovy součty*. Pro libovolné zjemnění D' dělení D samozřejmě platí $m_S(f) \leq m_{S'}(f) \leq M_{S'}(f) \leq M_S(f)$ pro každé dva kvádry $S \in D$ a $S' \in D'$, pro které $S' \subset S$. Proto je také

$$L(f, D) \leq L(f, D') \leq U(f, D') \leq U(f, D). \quad (12.13)$$

Představme si nyní, že bychom mohli „prohlížet“ množinu \mathcal{D} všech dělení kvádrů \bar{K} . Prakticky to samozřejmě není možné, neboť takových dělení je nespočetně mnoho. Z definice Darbouxových součtů je však zřejmé, že hodnota žádného dolního součtu nemůže překročit hodnotu některého součtu horního, tj. žádný dolní součet se nemůže „zamíchat“ mezi součty horní. Množina všech dolních součtů je tedy shora omezená libovolným horním součtem. Naopak, množina horních součtů je zdola omezená libovolným dolním součtem. Označme

$$\xi = \sup \{L(f, D) \mid D \in \mathcal{D}\} = \mathcal{L} \int_{\bar{K}} f, \quad \Xi = \inf \{U(f, D) \mid D \in \mathcal{D}\} = \mathcal{U} \int_{\bar{K}} f.$$

Číslo ξ , resp. Ξ se nazývá *dolní* resp. *horní Riemannův integrál funkce f na kvádru \bar{K}* . Evidentně platí

$$\mathcal{L} \int_{\bar{K}} f \leq \mathcal{U} \int_{\bar{K}} f. \quad (12.14)$$

Uvědomme si, že k tomu, aby existoval dolní a horní Riemannův integrál, stačí, aby funkce f byla ohraničená. To ovšem není nijak silná vlastnost, a také ani existence dolního a horního Riemannova integrálu sama o sobě k ničemu není, nejsou-li tyto dvě hodnoty stejné. Pokud však stejné jsou, definují Riemannův integrál.

Nechť \bar{K} je uzavřený n -rozměrný kvádr v \mathbf{R}^n a $f : \bar{K} \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ funkce ohraničená na \bar{K} . Funkce f se nazývá *integrabilní*, nebo též *integrace schopná* na \bar{K} , platí-li

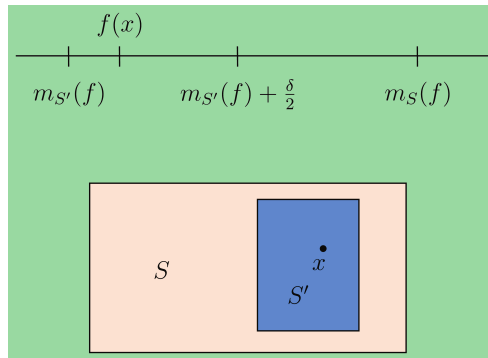
$$\mathcal{L} \int_{\bar{K}} f = \mathcal{U} \int_{\bar{K}} f, \quad \text{společnou hodnotu značíme } \int_{\bar{K}} f. \quad (12.15)$$

Pozn.: Postrádáte v zápisu právě definovaných integrálů „elementární změny“ proměnných, tj. dx^1, \dots, dx^n ? Doposud jsme je v integrálech psali. Ve skutečnosti však z hlediska definice integrálu žádný věcný význam nemají a bylo by proto opravdu logičtější jimi zápis nekomplikovat. Jejich užívání má původ spíše v neurčitém integrálu jako „opačné“ operaci k derivování, $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \Rightarrow f(x) = \int df(x) = \int f'(x) dx$. Na druhé straně však platí, že „zvyk je železná košile“ a zvyklost vypisovat elementární změny proměnných v integrálech je tak zakořeněná, že bychom o její nadbytečnosti těžko kohokoli přesvědčovali. Koneckonců jsme v prvním dílu obvyklý zápis také automaticky používali. Proto ani v tomto textu nebudeme obvyklé zápisy nijak inovovat a budeme psát

$$\int_{\bar{K}} f = \int_{\bar{K}} f \, dv_{\bar{K}} = \int_{\bar{K}} f(x^1, \dots, x^n) \, dx^1 \dots dx^n, \quad \text{zkráceně} \quad \int_{\bar{K}} f(x) \, dx.$$

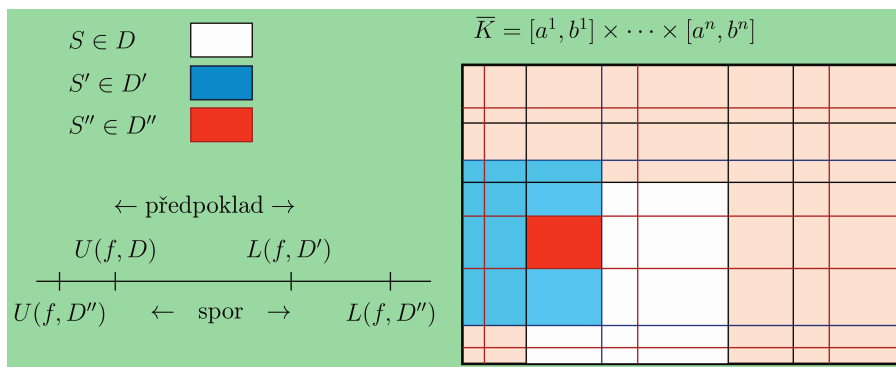
Příklad 12.8: Hrátky se supremy a infimy

Pro případ, že někdo pozapomněl vlastnosti infima a suprema ohraničených množin, dokážeme tři tvrzení, která jsme před chvílí prohlásili za zřejmá. První z nich jsou nerovnosti $m_S(f) \leq m_{S'}(f)$ a $M_{S'}(f) \leq M_S(f)$ pro $S \in D, S' \in D', S' \subset S$, kde D' je zjemněním dělení D kvádru \bar{K} , na němž je funkce definována a ohraničená. Stačí ukázat, že nerovnosti platí pro libovolné kvádry $S' \subset S$. Dokážeme nerovnost pro infima, pro suprema si ji dokažte jako cvičení. Předpokládejme sporem, že pro $S' \subset S$ platí $m_S(f) > m_{S'}(f)$. Označme $\delta = m_S(f) - m_{S'}(f)$ (obrázek 12.7). Podle definice infima existuje v intervalu $[m_{S'}(f), m_{S'}(f) + \frac{\delta}{2})$ alespoň jedna funkční hodnota $f(x)$, kde $x \in S'$. Pro tuto hodnotu je $f(x) < m_S(f)$. Protože však $S' \subset S$, je také $x \in S$. To je ve sporu s faktem, že $m_S(f) = \inf \{f(x) \mid x \in S\}$.



Obrázek 12.7 Hrátky se supremy a infimy.

Jako další „zřejmou“ skutečnost jsme konstatovali, že žádný dolní součet se nemůže „zamíchat“ mezi horní součty, a naopak. Předpokládejme opět sporem, že by tomu tak být mohlo, tj. existovala by dělení D a D' kvádru \bar{K} , pro něž by platilo $U(f, D) < L(f, D')$.



Obrázek 12.8 Hrátky s dolními a horními součty.

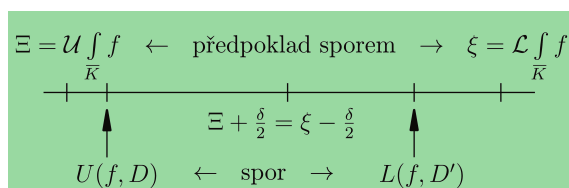
82 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

Jak dojdeme ke sporu? Předpokládejme, že dělení D'' je *společným zjemněným* dělení D a D' , tj. je zjemněním jak dělení D , tak D' . Pak by za našeho předpokladu, že $U(f, D) < L(f, D')$, muselo platit

$$U(f, D'') \leq U(f, D) < L(f, D') \leq L(f, D'') \implies U(f, D'') < L(f, D''),$$

a to se stát nemůže. Situaci ukazuje obrázek 12.8. Vpravo jsou vyznačena dělení D , D' a D'' . Kvádry dělení D jsou vymezeny hranami kvádry \bar{K} a černými čarami, kvádry dělení D' hranami kvádry \bar{K} a modrými čarami, a kvádry dělení D'' hranami kvádry \bar{K} a všemi čarami — černými, modrými i červenými). (Kdybychom vynechali červené čáry, dostali bychom „nejúspornější“ společné zjemnění dělení D a D' .)

A nakonec ověříme „zřejmou“ nerovnost (12.14). Poslouží k tomu obrázek 12.9.



Obrázek 12.9 Proč nemůže být dolní Riemannův integrál větší než horní.

Předpokládejme, že by dokazovaná nerovnost neplatila, tj. dolní Riemannův integrál z funkce f na kvádru \bar{K} by byl větší než integrál horní. Označme $\delta = \xi - \Xi = \mathcal{L} \int_{\bar{K}} f - \mathcal{U} \int_{\bar{K}} f$. Protože Ξ je infimum množiny všech horních součtů, musí v intervalu $[\Xi, \Xi + \frac{\delta}{2})$ ležet alespoň jeden horní součet. Dejme tomu, že je to horní součet příslušný dělení D , tj. $U(f, D)$. Podobně v intervalu $(\xi - \frac{\delta}{2}, \xi]$ bude ležet alespoň jeden dolní součet, označme jej $L(f, D')$. odtud $U(f, D) < L(f, D')$. Tento závěr je ve sporu se skutečností, kterou jsme dokázali v přechodí úloze tohoto příkladu — žádný dolní součet se nesmí dostat nad některý z horních součtů.

Pro definici Riemannova integrálu jsme nevyžadovali spojitost funkce. Je samozřejmé, že každá funkce spojitá na \bar{K} je z hlediska zobecněné definice Riemannova integrálu integrabilní, jak vyplývá z úvah v odstavci 12.1.1. Otázkou je, zda funkce ohraničená na \bar{K} může být integrabilní, bude-li mít na \bar{K} nějaké body nespojitosti, a pokud ano, jak „rozsáhlá“ může být množina takových bodů, aby funkce ještě byla integrabilní. Odpověď na tuto otázku pro případ funkce jedné proměnné dává Lebesgueova věta (první díl, Dodatek K, strana 316). Podle této věty je ohraničená funkce na uzavřeném intervalu integrabilní právě tehdy, je-li na něm spojitá skoro všude, tj. s výjimkou nejvýše spočetné množiny bodů. Tuto větu zobecníme na případ funkcí n proměnných na uzavřených n -rozměrných kvádrech — ale až za chvíli. Nejprve formulujeme jednodušší kritérium integrability a uvedeme příklady.

Věta 12.5: *Funkce $f : \bar{K} \rightarrow \mathbf{R}$, definovaná a ohraničená na uzavřeném n -rozměrném kvádru $\bar{K} \subset \mathbf{R}^n$ je na \bar{K} integrabilní právě tehdy, když pro každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje takové dělení D kvádry \bar{K} , že platí $U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon$.*

Tuto větu už známe i s důkazem z Dodatku K prvního dílu (strana 313) pro případ funkce jedné proměnné na intervalu $[a, b]$. Důkaz pro n -rozměrný případ můžeme doslova opsat,

zaměníme-li interval $[a, b]$ za uzavřený n -rozměrný kvádr v \mathbf{R}^n . Proto jej zde nebudeme reprodukovat.

Příklad 12.9: Jedna zajímavost, která sem zdánlivě nepatří

Tento příklad by se hodil spíše do kapitoly o posloupnostech. Jde o úlohu se šejkem, kterému se šachová hra zalíbila natolik, že člověku, který jej této hře naučil, slíbil za každé šachovnicové pole určitý počet zrněk rýže: za první pole jedno zrnko, za druhé dvě, za třetí čtyři, a dále osm, šestnáct, atd., až na posledním, čtyřiašedesátém poli mělo být 2^{63} zrněk. V původním příběhu se obdarovaný téměř urazil, protože si nedokázal spočítat, jakou zásobu rýže získá. Výpočet pomocí součtu geometrické posloupnosti s prvním členem 1 a kvociem 2 je velice jednoduchý,

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1.$$

Přeformulujme tuto úlohu do podoby vhodné pro integrování a použijeme ji jako ukázkou pro aplikaci věty 12.5. Šachovnice představuje uzavřený obdélník $\bar{K} = [0, 8] \times [0, 8]$, na němž je definována funkce $f(x, y) = 2^{i+8j}$, přičemž předpis platí na množinách $[i, i+1] \times [j, j+1]$ pro $i, j = 0, 1, 2, \dots, 6$, a dále pro $(x, y) \in [i, i+1] \times [j, j+1]$ pro $i = 7, j = 0, \dots, 6$, $(x, y) \in [i, i+1] \times [j, j+1]$ pro $i = 0, \dots, 7, j = 7$ a $(x, y) \in [i, i+1] \times [j, j+1]$ pro $i = 7, j = 7$. Protože jednotlivá pole pomyslné šachovnice jsou čtverce o straně 1 a funkční hodnota na každém z nich je rovna právě počtu zrněk z původní úlohy, měl by být objem útvaru pod grafem této funkce číselně roven celkovému počtu rýžových zrněk, které musel šejk sehnat, aby dodržel svůj slib. Otázkou je, zda vůbec půjde úlohu takto spočítat. Objem pod grafem funkce je integrál z této funkce na definičním oboru — jenže zatím nevíme, zda funkce je integrabilní. Je totiž dost nespojitá. Body její nespojitosti vyplní všechny strany, v nichž se šachová pole stýkají, takže jich je nespočetně mnoho. Integrabilitu prověříme pomocí věty 12.5. Zvolme libovolné číslo $\varepsilon > 0$. K tomu, aby funkce byla integrabilní na \bar{K} , stačí, aby existovalo dělení D definičního oboru \bar{K} , pro které bude splněna podmínka $U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon$. Nebudeme proto uvažovat o nějakých obecných děleních, ale pokusíme se najít to správné. Představme si jednotlivý (podle definice uzavřený) obdélník S nějakého dělení. Bude-li $S \subset [i, i+1] \times [j, j+1]$ pro určité hodnoty i a j , bude $m_S(f) = M_S(f)$ a příspěvek funkce na tomto obdélníku do dolního i horního součtu bude stejný. Zasáhne-li obdélník S sousední pole, budou se infimum a supremum funkčních hodnot na něm lišit. Možné situace jsou znázorněny na obrázku 12.10.

V levé části obrázku je šachovnice s očíslovanými poli — číslo N uvedené na daném poli znamená, že je na něm 2^N zrněk rýže, tj. $i + 8j = N$. Vpravo jsou příklady různých obdélníků dělení:

$$\begin{aligned} m_{S_1}(f) = M_{S_1}(f) = 2^{i+8j}, \quad m_{S_2}(f) = 2^{i+8j}, \quad M_{S_2}(f) = 2^{(i+1)+8j}, \\ m_{S_3}(f) = 2^{i+8j}, \quad M_{S_3}(f) = 2^{i+8(j+1)}, \quad m_{S_4}(f) = 2^{i+8j}, \quad M_{S_4}(f) = 2^{(i+1)+8(j+1)}. \end{aligned}$$

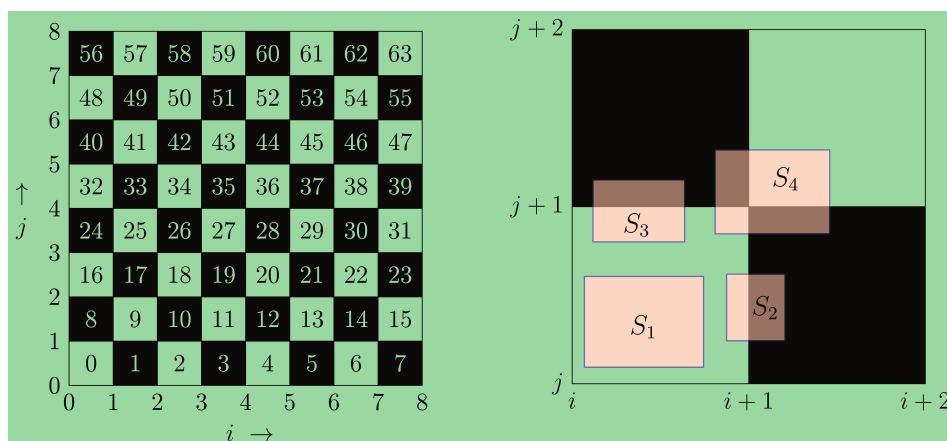
Infimum a supremum (současně minimum a maximum) dané funkce jsou odlišné pouze na obdélnících, které protínají úsečky společné sousedním polím. Představme si, že každou z těchto úseček pokryjeme uzavřeným obdélníkem o šířce δ . Součet obsahů takových obdélníků bude $P = 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \delta$. Jejich sjednocení označme \bar{A} . Zvolíme nyní takové dělení obdélníka \bar{K} , v němž použijeme obdélníky tvořící průnik $\bar{A} \cap \bar{K}$ a zbylé obdélníky tvořící uzávěr rozdílů $\bar{K} \setminus \bar{A}$. Označme $D_1 = \{S \mid S \in \bar{A} \cap \bar{K}\}$ a $D_2 = \{S \mid S \in \text{cl}(\bar{K} \setminus \bar{A})\}$. Pro $S \in D_2$ je $m_S(f) = M_S(f)$. Platí proto

$$U(f, D) - L(f, D) = \sum_{S \in D_1} (M_S(f) - m_S(f))v(S) < (2^{63} - 1) \sum_{S \in D_1} v(S) < (2^{63} - 1)P < 2^{63} \cdot 112\delta.$$

Zvolíme-li

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2^{63} \cdot 112} = \frac{\varepsilon}{7 \cdot 2^{67}},$$

získáme dělení vyhovující větě 12.5. Funkce $f(x, y)$ je tedy na \bar{K} integrabilní. Všimli jste si, že bychom vůbec nemuseli infima a suprema funkce na jednotlivých obdélnících dělení konkrétně vyjadřovat? Stačilo uvážit, že



Obrázek 12.10 Definiční obor „hodně nespojitě“ funkce.

rozdíl $M_S(f) - m_S(f)$ pro každý obdélník $S \in D_1$ je menší než $M_{\bar{K}}(f) - m_{\bar{K}}(f) = 2^{63} - 1 < 2^{63}$. To je sice hodně velké, ale stále pevné konečné číslo.

Když teď už víme, že funkce je na daném obdélníku integrabilní, mohli bychom si říci, že integrál zjistíme buď jako supremum dolních, nebo infimum horních součtů — výsledek musí být stejný. To by však u zadané funkce bylo stále ještě pracné (z Dodatku K v prvním dílu víme, že výpočet Riemannova integrálu přímo z definice nemusí být jednoduchý ani u jednoduché funkce jedné proměnné). Vrátime se k tomuto příkladu ve chvíli, kdy uvedeme některé užitečné vlastnosti integrálu.

Příklad 12.10: Samé malé nespojitosti

V odstavci 12.1.4 jsme se zabývali situací, kdy oscilace funkce v některých bodech převyšovaly předem danou hodnotu. Nyní naopak předpokládáme, že oscilace funkce $f: \bar{K} \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ nepřekročí v žádném z bodů definičního oboru danou hodnotu ε , tj. $o(f, x) < \varepsilon$ pro všechny body $x \in \bar{K}$. Z toho, co už o oscilacích víme, je zřejmé, že dokážeme pokrýt kvádr \bar{K} otevřenými kvádry $\mathcal{O} = \{K_1, K_2, \dots\}$ tak, že pro každý z nich bude platit $\sup \{f(x) \mid x \in K_i \cap \bar{K}\} - \inf \{f(x) \mid x \in K_i \cap \bar{K}\} < \varepsilon$. (Dokážete to zdůvodnit?) Kvádr \bar{K} je ovšem kompaktní množina. Proto k jeho pokrytí stačí ze souboru \mathcal{O} vhodně vybrat pouze konečný podsoubor $\{K_1, \dots, K_N\}$, který udělá tutéž službu jako celý soubor \mathcal{O} , tj. pokryje kvádr \bar{K} . Zvolme nyní dělení D kvádrů \bar{K} tak, že každý jeho kvádr S je podmnožinou některého z kvádrů K_1, \dots, K_N . Pro toto dělení platí

$$U(f, D) - L(f, D) = \sum_{S \in D} (M_S(f) - m_S(f))v(S) < \varepsilon \sum_{S \in D} v(S) = \varepsilon v(\bar{K}).$$

V příkladu 12.10 jsme získali další užitečné tvrzení, které se bude hodit:

Věta 12.6: *Nechť $\varepsilon > 0$. Platí-li pro funkci $f: \bar{K} \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ nerovnost $o(f, x) < \varepsilon$ na celém definičním oboru \bar{K} , pak existuje takové dělení D kvádrů \bar{K} , pro něž je $U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon v(\bar{K})$.*

V tuto chvíli je připraveno vše pro vyslovení zcela zásadní věty týkající se integrability funkcí.

Věta 12.7 (Kritérium integrability): *Nechť $\bar{K} \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřený n -rozměrný kvádr a $f : \bar{K} \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ ohraničená funkce. Funkce $f(x)$ je na \bar{K} integrabilní právě tehdy, je-li množina bodů její nespojitosti zanedbatelná.*

Na to, jak je tato věta důležitá, nebude její důkaz vůbec těžký. To proto, že jsme si pro něj již připravili řadu předběžných tvrzení. Pro další úvahy zvolme pevně kterékoli číslo M , pro něž je na celém kvádru \bar{K} splněna nerovnost $|f(x)| < M$. (Že takových čísel existuje nekonečně mnoho, není snad potřeba zdůrazňovat.) Množinu bodů nespojitosti funkce označme jako obvykle A . Je to množina všech bodů definičního oboru funkce, v nichž má funkce nenulovou oscilaci. Předpokládejme nejprve, že A je zanedbatelná. Chceme dokázat, že funkce f je integrabilní. K dispozici přitom máme větu 12.5. Zvolíme proto libovolně číslo $\varepsilon > 0$ a budeme se snažit najít takové dělení kvádrů \bar{K} , pro něž bude rozdíl horního a dolního součtu funkce f menší než ε . Označme

$$\epsilon = \frac{\varepsilon}{4v(\bar{K})}, \quad A_\epsilon = \{x \in A \mid o(f, x) \geq \epsilon\}.$$

Tato množina je rovněž zanedbatelná, neboť $A_\epsilon \subset A$. Je však zároveň kompaktní (podle věty 12.4), takže má i nulový objem. Dokážeme ji proto pokrýt otevřenými kvádry $K_1, \dots, K_{N(\varepsilon)}$, jejichž celkový objem je menší než $\frac{\varepsilon}{4M}$. (Proč volíme množinu A_ϵ a horní hranici celkového objemu kvádrů, které ji pokrývají, tak trochu „krkolomným“ způsobem, uvidíme za chvíli.) Místo otevřených kvádrů můžeme vzít jejich uzávěry, tj.

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} v(\bar{K}_i) < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (12.16)$$

Zvolme nyní takové dělení D' kvádrů \bar{K} , že v něm budou dva typy uzavřených kvádrů (sledujte schematický obrázek 12.11 a rozmyslete si, že takové dělení opravdu existuje):

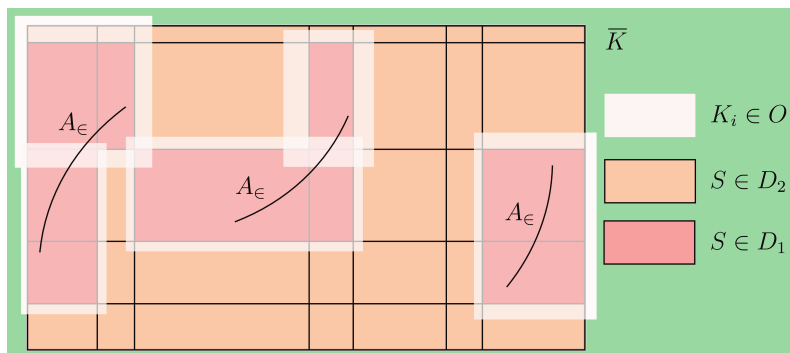
$$D_1 = \left\{ S \in D' \mid S \subset \bar{K}_i \text{ pro jisté } i \in \{1, \dots, N(\varepsilon)\} \right\}, \quad D_2 = \{S \in D' \mid S \cap A_\epsilon = \emptyset\}.$$

V obrázku jsou vyznačeny i otevřené kvádry pokrývající množinu A_ϵ . Pro objemy kvádrů spadajících do D_1 platí

$$\sum_{S \in D_1} v(S) < \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} v(\bar{K}_i) < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (12.17)$$

Uvědomme si, že vzhledem k podmínce $|f(x)| < M$, platné na celém definičním oboru \bar{K} , je pro každý kvádr S jakéhokoli dělení kvádrů \bar{K} splněna nerovnost $M_S(f) - m_S(f) < 2M$. Dostáváme tak

$$\sum_{S \in D_1} [M_S f - m_S(f)] v(S) < 2M \sum_{S \in D_1} v(S) < 2M \frac{\varepsilon}{4M} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12.18)$$



Obrázek 12.11 K důkazu kritéria integrability.

Ve všech bodech každého z kvádrů $S \in D_2$ je oscilace funkce $f(x)$ menší než $\epsilon = \frac{\epsilon}{4v(\bar{K})}$. Podle věty 12.6 ovšem existuje takové dělení D_S kvádrů S , pro které platí

$$\sum_{S' \in D_S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)]v(S') < 2\epsilon v(S) = \frac{\epsilon}{2v(\bar{K})}v(S). \quad (12.19)$$

Pro dělení D , které je společným zjemněním všech dělení, která jsou ve hře, tj. dělení D' a dělení typu D_S (tj. splňující vztah (12.19)) všech kvádrů $S \in D_2$, budou platit všechny nerovnosti (12.16) až (12.19). Pro rozdíl horních a dolních součtů odpovídající dělení D tak dostaneme

$$U(f, D) - L(f, D) = \sum_{\Sigma \in D} (M_{\Sigma}(f) - m_{\Sigma}(f))v(\Sigma) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2v(\bar{K})} \sum_{S \in D_2} v(S) < \epsilon,$$

neboť samozřejmě platí $\sum_{S \in D_2} v(S) < v(\bar{K})$. Zkonstruovali jsme tak dělení D kvádrů \bar{K} , pro které je rozdíl horních a dolních součtů funkce $f(x)$ menší než předem libovolně zvolené číslo $\epsilon > 0$. Podle věty 12.5 je tedy funkce $f(x)$ integrabilní. Dokázali jsme, že zanedbatelnosti množiny bodů nespojitosti funkce vyplývá její integrabilita. Je třeba dokázat i opačnou implikaci.

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je na \bar{K} integrabilní. K tomu, abychom dokázali, že množina bodů její nespojitosti je zanedbatelná, je třeba si uvědomit, že pro ni platí vztah (12.11), a dokázat zanedbatelnost každé z množin $A_{1/k}$, $k \in \mathbf{N}$. Dokážeme dokonce, že každá z těchto množin má objem nula. Zvolme libovolně číslo $\epsilon > 0$. Podle věty 12.5 existuje dělení D kvádrů \bar{K} , pro něž je $U(f, D) - L(f, D) < \frac{\epsilon}{k}$. Označme $\mathcal{S} \subset D$ soubor všech (uzavřených) kvádrů tohoto dělení, které mají neprázdný průnik s množinou $A_{1/k}$, a proto ji pokrývají. Pro každý z nich platí $M_S(f) - m_S(f) \geq \frac{1}{k}$. Pro jejich celkový objem pak dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{S}} v(S) &\leq k \sum_{S \in \mathcal{S}} [M_S(f) - m_S(f)]v(S) \leq k \sum_{S \in D} [M_S(f) - m_S(f)]v(S) = \\ &= k[U(f, D) - L(f, D)] < k \cdot \frac{\epsilon}{k} = \epsilon. \end{aligned}$$

Pokryli jsme množinu $A_{1/k}$ konečným počtem kvádrů o celkovém objemu menším než předem libovolně zvolené číslo ε . Že je těchto pokrývajících kvádrů konečně mnoho je zřejmé ze skutečnosti, že jde o kvádry náležející dělení. Že jsou uzavřené není na závadu — víme totiž, že uzavřenost, resp. otevřenost pokrývajících kvádrů nemá na jejich celkový objem vliv. Každá z množin $A_{1/k}$, $k \in \mathbf{N}$, má tedy skutečně objem nula, takže jejich sjednocení (12.11) je zanedbatelnou množinou.

Se znalostí kritéria integrability teď už můžeme okamžitě odpovědět na otázku, zda funkce z příkladu 12.9 je integrabilní. Samozřejmě, že je. Body její nespojitosti tvoří zanedbatelnou množinu (a nejen to, jde dokonce o množinu objemu nula). Připomeňme si ještě terminologii: v Dodatku K prvního dílu jsme takovou funkci jedné proměnné nazývali *spojitou skoro všude*. Tento termín občas použijeme i pro funkce více proměnných.

V příkladu 12.9 jsme ponechali otevřenou ještě otázku hodnoty integrálu s odkazem na budoucí využití vlastností integrálu. Ty nyní formulujeme v následující větě — nepůjde o nic, co bychom už neznali (v méně obecné podobě) z integrálního počtu funkcí jedné proměnné.

Věta 12.8 (Vlastnosti Riemannova integrálu): *Ve všech případech se jedná o funkce ohraničené na uzavřeném n -rozměrném kvádru \bar{K} v \mathbf{R}^n , ve zkráceném značení píšeme $\int_{\bar{K}} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n = \int_{\bar{K}} f(x) dx$.*

<i>Nechť (předpoklady)</i>	<i>Pak (tvrzení)</i>
f je integrabilní a $g = f$ s výjimkou konečného počtu bodů	$\implies g$ je integrabilní a $\int_{\bar{K}} g(x) dx = \int_{\bar{K}} f(x) dx$
f, g jsou integrabilní	$\implies f + g$ je integrabilní a $\int_{\bar{K}} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\bar{K}} f(x) dx + \int_{\bar{K}} g(x) dx$
f je integrabilní, $c \in \mathbf{R}$ libovolná konstanta	$\implies cf$ je integrabilní a $\int_{\bar{K}} cf(x) dx = c \int_{\bar{K}} f(x) dx$
f a g jsou integrabilní a $f(x) \leq g(x)$ na \bar{K}	$\implies \int_{\bar{K}} f(x) dx \leq \int_{\bar{K}} g(x) dx$
f je integrabilní	$\implies f $ je integrabilní a $ \int_{\bar{K}} f(x) dx \leq \int_{\bar{K}} f(x) dx$

$$\begin{array}{l}
 f \text{ je integrabilní a } D \text{ je libovolné dělení } \bar{K} \iff f \text{ je integrabilní na každém } S \in D \\
 \text{a} \sum_{S \in D} \int_S f(x) dx = \int_{\bar{K}} f(x) dx \\
 f \text{ a } g \text{ jsou integrabilní} \implies fg \text{ je integrabilní}
 \end{array}$$

Jednotlivé vlastnosti integrálu z této věty si dokážete sami v rámci cvičení. Důkazy jsou jednoduché. Jsou založeny na platnosti věty 12.5. Vyžadují pouze uvědomit si nerovnosti pro infima a suprema funkcí na kvádrech dělení D a jeho zjemnění D' a odpovídající nerovnosti pro dolní a horní součty.

Příklad 12.11: Zpět k úloze o rýži

Když už o nějaké funkci zadané na kvádru \bar{K} víme, že je integrabilní, je jedno, jakým způsobem získáme hodnotu integrálu. U příkladu 12.9 s výhodou použijeme předposlední vlastnost věty 12.8, tzv. *aditivitu integrálu*. Zvolme dělení D šachovnice (čtverce $\bar{K} = [0, 8] \times [0, 8]$) tak, aby bylo tvořeno právě jednotlivými šachovými poli, tj. čtverci $S_{ij} = [i, i+1] \times [j, j+1]$, $i, j = 0, \dots, 7$. Pro restrikcí funkce f na čtverec S_{ij} platí

$$f(x, y)|_{S_{ij}} = 2^{i+8j}, \quad \text{pro } (x, y) \in [i, i+1] \times [j, j+1],$$

na zbývajících stranách čtverce S_{ij} je funkční hodnota vyšší, popřípadě stejná (viz zadání příkladu 12.9). Platí tedy

$$m_{S_{ij}}(f|_{S_{ij}}) = 2^{i+8j}.$$

Strany čtverců S_{ij} jsou zanedbatelné množiny, a tak je funkce $f|_{S_{ij}}$ integrabilní na S_{ij} . Hodnota integrálu je

$$\int_{S_{ij}} f|_{S_{ij}} dx dy = 2^{i+8j} v(S_{ij}) = 2^{i+8j}.$$

Pomocí poslední vlastnosti integrálu ve větě 12.8 dostaneme

$$\int_{\bar{K}} f dx dy = \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 2^{i+8j} = \sum_{i=0}^7 2^i \left(\sum_{j=0}^7 2^{8j} \right) = \sum_{i=0}^7 2^i \frac{2^{64} - 1}{2^8 - 1} = 2^{64} - 1.$$

A to je známý výsledek.

12.1.6 Fubiniova věta aneb pro praktické integrování stačí umět jednonásobný integrál

Že je tento název pravdivý, víme už z odstavce 12.1.1, v němž jsme odvodili věc ryze praktickou — Fubiniovu větu pro integraci spojitě funkce dvou proměnných na uzavřeném obdélníku v euklidovské rovině. Zdůvodnili jsme také, proč lze všechny provedené úvahy použít i pro případ spojitě funkce n proměnných na n -rozměrném kvádru v \mathbf{R}^n . Pro praktické účely integrace na kvádrech se skutečně lze spokojit s omezením na spojitě funkce, popřípadě na funkce „mírně“

nespojité, jako třeba v příkladu 12.9, resp. 12.11, kdy lze využít předposlední vlastnosti integrálu z věty 12.8. Fubiniova věta ve své nejobecnější podobě však připouští nespojitosti ještě většího kalibru, avšak stále ještě takové, aby vyhovovaly kritériu integrability (věta 12.7).

Věta 12.9 (Obecná Fubiniova): *Nechť \bar{K} je uzavřený n -rozměrný kvádr v \mathbf{R}^n a \bar{L} uzavřený m -rozměrný kvádr v \mathbf{R}^m . Předpokládejme, že funkce*

$$f : \bar{K} \times \bar{L} \ni (x, y) \longrightarrow f(x, y) \in \mathbf{R}, \quad x = (x^1, \dots, x^n), \quad y = (y^1, \dots, y^m),$$

je integrabilní na kvádru $\bar{K} \times \bar{L}$. Pro každý bod $x \in \bar{K}$ definujme funkci

$$g_x : \bar{L} \ni y \longrightarrow g_x(y) = f(x, y) \in \mathbf{R}. \quad (12.20)$$

Označme

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L} \int_{\bar{L}} g_x(y) dy^1 \dots dy^m, \quad \mathcal{U}(x) = \mathcal{U} \int_{\bar{L}} g_x(y) dy^1 \dots dy^m.$$

Pak funkce $\mathcal{L}(x)$ a $\mathcal{U}(x)$ jsou integrabilní na kvádru \bar{K} a platí

$$\begin{aligned} \int_{\bar{K}} \mathcal{L}(x) dx^1 \dots dx^n &= \int_{\bar{K}} \mathcal{U}(x) dx^1 \dots dx^n = \\ &= \int_{\bar{K} \times \bar{L}} f(x, y) dx^1 \dots dx^n dy^1 \dots dy^m. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Než se pustíme do dokazování této věty, uvědomme si dvě věci: Funkce g_x nemusí být na kvádru \bar{L} integrabilní, a přesto bude Fubiniova věta platit. Pořadí integrace lze navíc zaměnit. První z těchto poznámek doložíme za chvíli příkladem, druhá je předmětem cvičení (úloha 9 cvičení 12.1.13).

Příklad 12.12: (Ne)integrabilita „dílčích“ funkcí

Znovu se vraťme k Riemannově funkci (příklad 12.4), definované na čtverci $[0, 1] \times [0, 1]$. Tento čtverec jsme v příkladu 12.4 značili jako \bar{K} . V souvislosti s Fubiniovou větou se nám však nyní hodí označení $\bar{K} = [0, 1]$, $\bar{L} = [0, 1]$. O Riemannově funkci $f(x, y)$ víme, že je na obdélníku $\bar{K} \times \bar{L}$ integrabilní. Funkce g_x definovaná ve větě 12.9 má pro racionální hodnoty proměnné $x = p/q \in [0, 1]$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla, tvar

$$g_{p/q} : [0, 1] \ni y \longrightarrow g_{p/q}(y) = 1 - \frac{1}{q}, \quad \text{resp.} \quad g_{p/q}(y) = 1,$$

pro racionální, resp. iracionální hodnotu proměnné y , tj. pro $y \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}$, resp. $y \in [0, 1] \setminus \mathbf{Q}$. V každém bodě svého definičního oboru je nespojitá, není proto integrabilní. (Uvědomme si, že se chová stejně jako Dirichletova

funkce — „skáče“ mezi dvěma pevnými hodnotami.) Hodnoty jejího dolního a horního Riemannova integrálu na intervalu $\bar{L} = [0, 1]$ jsou

$$\mathcal{L}\left(\frac{p}{q}\right) = \mathcal{L} \int_0^1 g_{p/q}(y) dy = 1 - \frac{1}{q}, \quad \mathcal{U}\left(\frac{p}{q}\right) = \mathcal{U} \int_0^1 g_{p/q}(y) dy = 1.$$

Pro iracionální hodnoty proměnné x z intervalu $[0, 1]$ je $g_x(y) = 1$ pro libovolné $y \in [0, 1]$. Funkce g_x je proto integrabilní na \bar{L} a její Riemannův integrál je roven jedné. Platí

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L} \int_0^1 g_x(y) dy = \mathcal{U}(x) = \mathcal{U} \int_0^1 g_x(y) dy = \int_0^1 g_x(y) dy = 1, \quad x \in [0, 1] \setminus \mathbf{Q}.$$

Zatímco tedy funkce $\mathcal{L}(x)$ v závislosti na tom, zda je hodnota proměnné x racionální či iracionální, také „skáče“, přičemž její „skoky“ nejsou konstantní jako u Dirichletovy funkce, ale závisejí na jmenovateli hodnot $x = p/q$, chová se funkce $\mathcal{U}(x)$ naprosto neškodně — je konstantní na intervalu $\bar{K} = [0, 1]$. Její Riemannův integrál je roven jedné. Integrabilitu funkce $\mathcal{L}(x)$ už prověřovat nemusíme. Podle Fubiniovy věty je zaručena a integrál z funkce $\mathcal{L}(x)$ musí být rovněž roven jedné, i když to na první pohled tak nevypadalo. (Na příkladech, jako je tento, se přesvědčujeme, že v matematice je dobré intuici používat, ale bez důkazu se na ni nelze stoprocentně spolehnout.) A ještě jednu věc si uvědomme: podle Fubiniovy věty je funkce $\mathcal{L}(x)$ integrabilní, a podle kritéria integrability musí tedy být množina bodů její nespojitosti zanedbatelná. Zase jedna věc, která se na první pohled příliš „nezdá“. I když — nalistujeme-li příklad K.2 (Dodatek K prvního dílu, strana 316), možná se tolik divit nebudeme. Množina bodů nespojitosti Riemannovy funkce jedné proměnné $x \in [0, 1]$, kterou jsme v příkladu K.2 definovali vztahy $f(p/q) = \frac{1}{q}$ a $f(x) = 0$ pro iracionální hodnoty proměnné x , je tvořena právě racionálními čísly z intervalu $[0, 1]$. Je proto zanedbatelná. Množina bodů nespojitosti funkce $\mathcal{L}(x)$, o kterou nám jde nyní, je ovšem stejná (což jistě snadno zdůvodníte). Je tedy rovněž zanedbatelná.

Nyní se už věnujme důkazu Fubiniovy věty 12.9. Pro zjednodušení budeme opět používat značení

$$dx = dx^1 \dots dx^n, \quad dy = dy^1 \dots dy^m.$$

Předpokládejme, že požadavky věty 12.9 jsou splněny a funkce $\mathcal{L}(x)$ a $\mathcal{U}(x)$ definovány pomocí vztahů v ní uvedených. Máme ukázat jejich integrabilitu na kvádru \bar{K} , rovnost jejich Riemannových integrálů a shodu společné hodnoty s Riemannovým integrálem funkce $f(x, y)$ na kartézském součinu $\bar{K} \times \bar{L}$. Provedeme důkaz třeba pro funkci $\mathcal{U}(x)$. Budeme postupovat tak, že dolní a horní součet pro tuto funkci a libovolné dělení $D_{\bar{K}}$ kvádru \bar{K} „sevřeme“ mezi dolní a horní součet pro funkci $f(x, y)$, $x = (x^1, \dots, x^n) \in \bar{K}$, $y = (y^1, \dots, y^m) \in \bar{L}$, a dělení $D = (D_{\bar{K}}, D_{\bar{L}})$, kde $D_{\bar{L}}$ je libovolné dělení kvádru \bar{L} . Dokážeme tedy nerovnosti

$$L(f, D) \leq L(\mathcal{U}, D_{\bar{K}}) \leq U(\mathcal{U}, D_{\bar{K}}) \leq U(f, D). \quad (12.22)$$

Tyto nerovnosti se nezmění, přejdeme-li u dolních součtů k supremům a u horních k infimům. Vzhledem k integrabilitě funkce f je supremum množiny jejích dolních součtů rovno infimu

množiny součtů horních (společná hodnota je Riemannovým integrálem funkce f na kvádr $\bar{K} \times \bar{L}$), a proto

$$\sup \{L(\mathcal{U}, D_{\bar{K}}) \mid D_{\bar{K}} \in \mathcal{D}_{\bar{K}}\} = \inf \{U(\mathcal{U}, D_{\bar{K}}) \mid D_{\bar{K}} \in \mathcal{D}_{\bar{K}}\}.$$

Zbývá jen dokázat avizované nerovnosti. Zvolme libovolně dělení D kvádr $\bar{K} \times \bar{L}$, odpovídající dělení kvádrů \bar{K} a \bar{L} označme $D_{\bar{K}}$ a $D_{\bar{L}}$. Každému kvádr $S \in D$ odpovídá právě jeden kvádr $S_1 \in D_{\bar{K}}$ a právě jeden kvádr $S_2 \in D_{\bar{L}}$ tak, že $S = S_1 \times S_2$. Platí

$$L(f, D) = \sum_{S \in D} m_S(f) v(S) = \sum_{S_1 \in D_{\bar{K}}} \left[\sum_{S_2 \in D_{\bar{L}}} m_{S_1 \times S_2}(f) v(S_2) \right] v(S_1).$$

Pro libovolné $x \in S_1$ je $m_{S_1 \times S_2}(f) \leq m_{S_2}(g_x)$. Pro vnitřní součet v předchozí nerovnosti tak dostaneme

$$\sum_{S_2 \in D_{\bar{L}}} m_{S_1 \times S_2}(f) v(S_2) \leq \sum_{S_2 \in D_{\bar{L}}} m_{S_2}(g_x) v(S_2) \leq \mathcal{L} \int_{\bar{L}} g_x(y) dy = \mathcal{L}(x).$$

Protože tato nerovnost platí pro každou hodnotu proměnné x z kvádr S_1 , musí zůstat zachována také pro $\inf \{\mathcal{L}(x) \mid x \in S_1\} = m_{S_1}(\mathcal{L})$. (Příklady týkající se vlastností suprem a infim jsme uváděli dost na to, abyste toto tvrzení snadno dokázali.) Nakonec dostáváme

$$L(f, D) \leq \sum_{S_1 \in D_{\bar{K}}} m_{S_1}(\mathcal{L}) v(S_1) = L(\mathcal{L}, D_{\bar{K}}) \leq L(\mathcal{U}, D_{\bar{K}}).$$

Tím jsme dokázali první z nerovností (12.22). Druhá je zřejmá z definice Darbouxových součtů a poslední se dokáže zcela obdobně jako první (zkuste to). Protože jsme už předem vysvětlili závěr důkazu, vyplývající z (12.22), můžeme Fubiniovu větu prohlásit za dokázanou.

Pozn. 1: V závěru důkazu jsme použili nerovnost $L(\mathcal{L}, D_{\bar{K}}) \leq L(\mathcal{U}, D_{\bar{K}})$. I když je její platnost samozřejmá a názorná, dokažte ji.

Pozn. 2: V případě, že je funkce $f(x, y)$ spojitá na $\bar{K} \times \bar{L}$, přejde obecná Fubiniova věta ve speciální verzi pro spojitě funkce, kterou jsme formulovali v odstavci 12.1.1. V takovém případě je totiž každá z funkcí $g_x(y)$, kde $x \in \bar{K}$, spojitá na kvádr \bar{L} .

Příklad 12.13: Fubiniova věta a záměnnost smíšených parciálních derivací

Že ty dvě věci spolu nesouvisí? Tento příklad jako malá „perlička“ na konci odstavce ukáže, že velmi úzce. Vzpomenete si, jak jsme docela pracně dokazovali Schwarzovu větu (druhý díl, věta 5.1, strana 107 a věta 9.4, strana 480), týkající se záměnnosti smíšených parciálních derivací druhého řádu pro funkci dvou proměnných? Důkaz je v druhém dílu na stranách 481 až 484. Fubiniova věta umožní dokázat totéž na několika málo řádcích.

Předpokládejme, že parciální derivace $f_{xy}(x, y)$ a $f_{yx}(x, y)$ funkce $f(x, y)$ jsou spojitě na nějaké otevřené množině A a v jistém jejím bodě (a, b) si nejsou rovny (důkaz sporem). Nechť $f_{xy}(a, b) - f_{yx}(a, b) > 0$. Vzhledem ke spojitosti funkcí f_{xy} a f_{yx} zůstane tato nerovnost v platnosti na jistém otevřeném kvádr $K \subset A$. Kvádr K lze volit i tak, aby i jeho uzávěr $\bar{K} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ byl obsažen v množině A . Pak

$$\int_{\bar{K}} (f_{xy}(x, y) - f_{yx}(x, y)) dx dy > 0.$$

Použitím Fubiniovy věty včetně uvážení záměnnosti pořadí integrace dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1}^{y_2} f_{xy}(x, y) dy \right) dx - \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_{yx}(x, y) dx \right) dy = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) dy \right] dx - \int_{y_1}^{y_2} \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) dx \right] dy = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [f_x(x, y_2) - f_x(x, y_1)] dx - \int_{y_1}^{y_2} [f_y(x_2, y) - f_y(x_1, y)] dy = \\ &= [f(x, y_2) - f(x, y_1)]_{x_1}^{x_2} - [f(x_2, y) - f(x_1, y)]_{y_1}^{y_2} = 0. \end{aligned}$$

Výsledek je ve sporu s předpokladem. Z postupu je zřejmé, že při výchozím předpokladu $f_{xy}(a, b) - f_{yx}(a, b) < 0$ bychom rovněž dospěli ke sporu. Proto je $f_{xy}(a, b) - f_{yx}(a, b) = 0$ v libovolném bodě množiny A .

12.1.7 První zobecnění integrálu: integrování na obecnějších n -rozměrných útvarech v \mathbf{R}^n aneb šišaté integrování

Co když definičním oborem funkce nebude zrovna uzavřený kvádr? Je i pak možné definovat Riemannův integrál? Co kdybychom měli třeba za úkol vypočítat objem pod grafem funkce z příkladu 12.1, nikoli však nad obdélníkem $\bar{K} = [-1, 1] \times [-2, 2]$, ale třeba nad kruhem $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$? Těleso by bylo omezeno grafem funkce, kruhem tvořícím podstavu a válcovou plochou o rovnici $x^2 + y^2 = 1$. (Kdo zapomněl rovnici válcové plochy, může se vrátit k odstavci 6.3.2 v druhém dílu.) Nepochybně to nějak jít musí — taková tělesa přece mají svůj objem, který bychom dokázali změřit třeba jejich ponořením do vody v odměrném válci. Znamená to však, že musíme zobecnit integrační obor Riemannova integrálu, tj. přejít od uzavřených kvádrů k obecnějším ohraničeným množinám. Zpočátku však k ne zcela libovolným, ale takovým, pro něž je, podobně jako u kvádrů, rozumně definován jejich objem.

Nechť A je ohraničená podmnožina \mathbf{R}^n , tj. existuje uzavřený n -rozměrný kvádr \bar{K} v \mathbf{R}^n , v němž je množina A obsažena. Funkce

$$\chi_A : \bar{K} \ni x \longrightarrow \chi_A(x) = 1 \quad \text{pro } x \in A, \quad \chi_A(x) = 0 \quad \text{pro } x \in \bar{K} \setminus A \quad (12.23)$$

se nazývá *charakteristická funkce* množiny A . Je-li tato funkce integrabilní na \bar{K} , nazývá se množina A *jordanovsky měřitelná* a integrál její charakteristické funkce *objem množiny A v Jordanově smyslu*. Píšeme

$$v(A) = \int_{\bar{K}} \chi_A(x) dx = \int_A 1 dx. \quad (12.24)$$

Nechť $f : \bar{K} \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ je funkce spojitá na \bar{K} skoro všude a nechť množina $A \subset \bar{K}$ je jordanovsky měřitelná. *Integrálem z funkce f na množině A* rozumíme

$$\int_A f(x) dx = \int_{\bar{K}} f(x) \chi_A(x) dx. \quad (12.25)$$

A hned si můžeme klást otázky:

- Bude-li množina A uzavřeným či otevřeným n -rozměrným kvádrem, dostaneme podle nové definice jeho správný objem?
- Bude-li množina A třeba uzavřeným či otevřeným kruhem o poloměru r v \mathbf{R}^2 , dostaneme podle nové definice správný výsledek πr^2 ? A co koule nebo kužel v \mathbf{R}^3 ?
- Bude-li jordanovsky měřitelná množina A množinou objemu nula, dostaneme podle nové definice nulu? A jaký objem z hlediska nové definice bude mít ohraničená zanedbatelná množina, která však není množinou objemu nula?
- Jak to bude s aditivitou integrálu? Jaký bude vztah mezi integrály funkce f na množinách A_1 , A_2 a $A_1 \cup A_2$?
- Lze definovat integrál z funkce f na množině A i v případě, že by množina bodů její nespojitosti ležících v A byla zanedbatelná, avšak body nespojitosti ležící v $\bar{K} \setminus A$ tuto podmínku nesplňovaly? Anebo kdyby funkce f nebyla na množině $\bar{K} \setminus A$ definována vůbec?

Nejprve ale odpovíme na nejdůležitější otázku: jak vypadá množina bodů nespojitosti charakteristické funkce nějaké množiny? Lze ji popsat nějak obecně, nebo je třeba prošetřovat ji případ od případu? Pravda je obojí — hned uvidíme. Věc je velmi jednoduchá. Z topologického hlediska můžeme u množiny A snadno odlišit její vnitřek $\text{int } A$, vnějšek $\text{ext } A$ a hranici $\text{h}A$ (odstavec 9.1.2). Množiny $\text{int } A$ a $\text{ext } A$ jsou otevřené, takže s každým svým bodem obsahují i jeho jisté otevřené okolí. Funkce χ_A je na každé z nich konstantní funkcí (jedna, resp. nula). Je proto spojitá v každém bodě vnitřku i vnějšku množiny A . Naopak, množina $\text{h}A$ je uzavřená. Každé okolí $\mathcal{O}(x)$ jejího libovolného bodu x „zasahuje“ jak do vnitřku, tak do vnějšku množiny A , tj.

$\mathcal{O}(x) \cap \text{int } A \neq \emptyset$, $\mathcal{O}(x) \cap \text{ext } A \neq \emptyset$. Každý bod hranice množiny A je tedy bodem nespojitosti charakteristické funkce.

Věta 12.10: *Množinou všech bodů nespojitosti charakteristické funkce libovolné množiny $A \subset \mathbf{R}^n$ je její hranice. Množina A je jordanovsky měřitelná právě tehdy, je-li její hranice zanedbatelná množina.*

Podařilo se nám tedy na jedné straně charakterizovat jordanovsky měřitelné množiny obecně, na základě jejich topologických vlastností, na straně druhé musíme případ od případu zkoumat jejich hranici.

Pozn.: Ještě malá úvaha o zobecněné definici integrálu. Požadovali jsme v ní spojitost integrované funkce f na kvádru \bar{K} skoro všude a měřitelnost integračního oboru $A \subset \bar{K}$. Co kdybychom požadovali pouze integrabilitu funkce $\chi_A f$ na kvádru \bar{K} ? Stačilo by to? Při takovém předpokladu bychom jistě mohli určit integrál z funkce $\chi_A f$ na kvádru \bar{K} a prohlásit jej za integrál z funkce f na oboru A . Podívejme se však, jaké případy by taková definice zahrnovala: zvolme například $\bar{K} = [0, 1]$, $A = \bar{K} \setminus (\mathbf{Q} \cap [0, 1])$ a jako $f(x)$ Dirichletovu funkci na \bar{K} . Hranicí množiny A je interval $[0, 1]$, množina A není jordanovsky měřitelná. Dirichletova funkce na intervalu $[0, 1]$ není spojitá v žádném jeho bodě. Avšak funkce $\chi_A f$ je identicky nulová na \bar{K} , a tedy integrabilní. Smysl takové „integrability“ je ovšem pochybný.

Vraťme se nyní k otázkám, které nás napadly před chvílí. Odpovíme na ně v příkladech.

Příklad 12.14: Charakteristická funkce a jordanovský objem kvádrů

Hranicí uzavřeného i otevřeného n -rozměrného kvádrů v \mathbf{R}^n je množina bodů na jeho stěnách, která je ovšem zanedbatelná a dokonce je množinou objemu nula (úloha 11 cvičení 12.1.13). Charakteristická funkce jak otevřeného kvádrů K , tak uzavřeného kvádrů \bar{K} jsou proto integrabilní na \bar{K} . Pro $A = \bar{K}$ je věc jasná na první pohled: pro libovolné dělení D kvádrů \bar{K} je $m_S(\chi_A) = M_S(\chi_A) = 1$ pro každý kvádr $S \in D$, proto

$$L(\chi_A, D) = U(\chi_A, D) = \sum_{S \in D} 1 \cdot v(S) = v(\bar{K}).$$

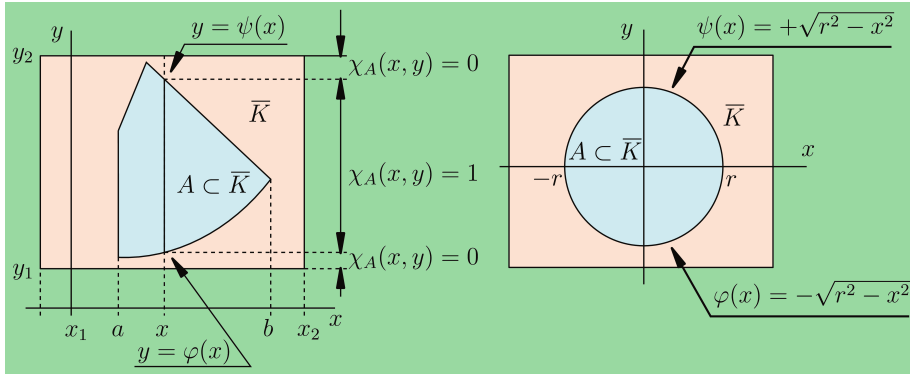
V případě otevřeného kvádrů $A = K$ je $m_S(\chi_A) = M_S(\chi_A) = 1$, je-li $S \cap \text{h}A = \emptyset$, a $m_{S'}(\chi_A) = 0$, $M_{S'}(\chi_A) = 1$ pro $S' \cap \text{h}A \neq \emptyset$. Pak

$$U(\chi_A, D) - L(\chi_A, D) = \sum_{S \in D} (1 - 1)v(S) + \sum_{S' \in D} (1 - 0)v(S') = \sum_{S' \in D} v(S').$$

Vzhledem k tomu, že hranice kvádrů je množinou objemu nula, lze volit dělení D kvádrů \bar{K} tak, aby celkový objem kvádrů typu S' byl menší než libovolné předem zvolené číslo $\varepsilon > 0$. Charakteristická funkce otevřeného kvádrů je rovněž integrabilní na \bar{K} a integrál je opět roven „správnému“ objemu $v(K)$ kvádrů K .

Příklad 12.15: Jordanovský objem „obvyklých“ útvarů

Výpočet jordanovského objemu kruhu jako množiny v \mathbf{R}^2 je speciálním případem obecnější situace, kterou se budeme zabývat v tomto příkladu. Uvažujme o funkcích $y = \varphi(x)$ a $y = \psi(x)$ spojitých na intervalu $[a, b]$. Předpokládejme, že na celém definičním intervalu $[a, b]$ platí $\varphi(x) \leq \psi(x)$ (obrázek 12.12).



Obrázek 12.12 První zobecnění integrálu.

Množina A je vymezena grafy funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ takto:

$$A = \{(x, y) \in \bar{K} \mid x \in [a, b], y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}, \quad A \subset \bar{K}, \quad \bar{K} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2].$$

Její jordanovský objem je podle nové definice

$$v(A) = \int_{\bar{K}} \chi_A(x, y) \, dx \, dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \chi_A(x, y) \, dx \, dy.$$

Podle Fubiniovy věty je pak

$$\begin{aligned} v(A) &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} \chi_A(x, y) \, dy \right] dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{\varphi(x)} \chi_A(x, y) \, dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \chi_A(x, y) \, dy + \int_{\psi(x)}^{y_2} \chi_A(x, y) \, dy \right] dx. \end{aligned}$$

Pro rozepsání vnitřního integrálu jsme použili vlastnosti aditivity integrálu pro případ funkce jedné proměnné (předposlední vlastnost ve větě 12.8). Při výpočtu vnitřního integrálu (podle proměnné y) zacházíme s proměnnou x jako s konstantou. Pro pevně zvolenou hodnotu $x \in [a, b]$ je $\chi_A(x, y) = 0$ pro $y \in [y_1, \varphi(x))$, $\chi_A(x, y) = 1$ pro $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, a $\chi_A(x, y) = 0$ pro $y \in (\psi(x), y_2]$. Pro $x \in [x_1, x_2] \setminus [a, b]$ je $\chi_A(x, y) = 0$ pro všechna $y \in [y_1, y_2]$. Dostáváme tak

$$v(A) = \int_{\bar{K}} \chi_A(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \right] dx. \quad (12.26)$$

V případě, že množinou A je kruh o poloměru r se středem v počátku soustavy souřadnic (vzhledem k zanedbatelnosti hranice je lhostejné, zda uzavřený či otevřený), je $\varphi(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ a $\psi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Pro jeho jordanovský objem dostaneme

$$v(A) = \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy \right) dx = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx.$$

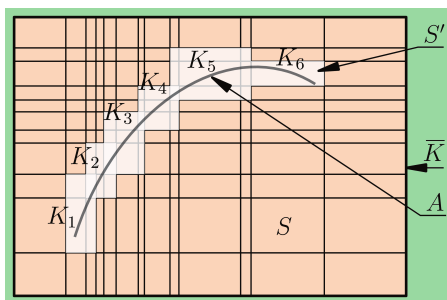
Zvolíme substituci $x = r \cos t$ a dostaneme „správný“ výsledek.

$$v(A) = -2r^2 \int_{\pi}^0 |\sin t| \sin t dt = 2r^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \pi r^2.$$

Jordanovský objem kruhu je roven jeho obsahu, jak jej známe z geometrie.

Příklad 12.16: Jaký objem má množina objemu nula?

Jakkoli tato otázka vypadá divně, má svůj smysl. Množinu objemu nula jsme definovali pomocí jejího pokrytí konečným počtem kvádrů, jejichž celkový objem je menší než libovolné předem zvolené číslo $\varepsilon > 0$. Jde nyní o to, zda jordanovský objem takové množiny, tj. integrál z její charakteristické funkce, bude také nulový. Vzhledem k tomu, že definice má svůj logiku, očekáváme, že ano. Je však třeba se o tom přesvědčit. Předpokládejme tedy, že A je množinou objemu nula v \mathbf{R}^n . Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje konečné pokrytí množiny A otevřenými n -rozměrnými kvádry K_1, \dots, K_N , jejichž celkový objem je menší než ε , tj. $v(K_1) + \dots + v(K_N) < \varepsilon$. Připomeňme, že objem uzavřeného kvádrů je stejný jako objem jeho uzávěru. Bude proto platit také nerovnost $v(\overline{K_1}) + \dots + v(\overline{K_N}) < \varepsilon$. Víme již, že množina objemu nula je ohraničená. Označme \overline{K} libovolný uzavřený kvádr, do kterého se vejde. Situaci v rovině názorně ukazuje obrázek 12.13.



Obrázek 12.13 Jordanovský objem množiny objemu nula je nula.

Průnik otevřených kvádrů je buď prázdný, nebo je to otevřený kvádr. Zvolme dělení D kvádrů \overline{K} tak, aby se všechny průniky dvojic kvádrů $\overline{K_1}, \dots, \overline{K_N}$ staly kvádry tohoto dělení. Dělení D pak obsahuje kvádry dvojího typu: $S \in D$, $S \cap A = \emptyset$ a $S' \in D$, $S' \cap A \neq \emptyset$. Ukázkou takového dělení a příklad kvádrů typu S a S' vidíme rovněž na obrázku 12.13. Je zřejmé, že pro celkový objem kvádrů typu S' platí

$$\sum_{S' \in D} v(S') \leq v(\overline{K_1}) + \dots + v(\overline{K_N}) < \varepsilon.$$

Určíme rozdíl horních a dolních součtů pro charakteristickou funkci množiny A a dělení D . Pro kvádry typu S je $m_S(\chi_A) = M_S(\chi_A) = 0$, pro kvádry typu S' je $m_{S'}(\chi_A) = 0$ a $M_{S'}(\chi_A) = 1$. Pak

$$\begin{aligned} U(\chi_A, D) - L(\chi_A, D) &= \sum_{S \in D} (M_S(\chi_A) - m_S(\chi_A))v(S) + \\ &+ \sum_{S' \in D} (M_{S'}(\chi_A) - m_{S'}(\chi_A))v(S') = \sum_{S' \in D} v(S') < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že charakteristická funkce množiny A je integrabilní podle věty 12.5. Uvědomíme-li si, že dolní součet pro funkci χ_A je nulový pro libovolné dělení kvádrů \overline{K} , vidíme, že Riemannův integrál z této funkce na

kvádrů \bar{K} je rovněž nulový. Jordanovský objem množiny A je proto $v(A) = 0$, jak jsme očekávali. A pokud jde o zanedbatelné množiny, které nemají objem nula? Ty dokonce nemusejí být jordanovsky měřitelné. Tak třeba množina všech racionálních čísel z intervalu $[0, 1]$ není jordanovsky měřitelná, neboť její hranicí je celý interval $[0, 1]$.

A vyvstává hned další otázka: čemu je roven integrál z funkce na množině objemu nula? Správně očekáváme, že je nulový. Postup důkazu je úplně stejný jako v tomto příkladu. Jen v něm namísto funkce $f(x) = 1$ bude figurovat obecná „dostatečně spojitá“ omezená funkce (viz úlohu 12 ve cvičení 12.1.13).

Příklad 12.17: Aditivita integrálu

Předpokládejme, že A_1 a A_2 jsou jordanovsky měřitelné množiny obsažené v kvádrů \bar{K} a f je integrabilní funkce na \bar{K} . Jsou-li množiny A_1 , A_2 disjunktí, jistě lze očekávat, že integrál z funkce f na množině $A_1 \cup A_2$ bude součtem integrálů na množinách A_1 a A_2 . Je však třeba to dokázat a prošetřit i situaci, kdy množiny A_1 a A_2 budou mít neprázdný průnik. Opět můžeme vyzkoušet intuici: bude-li tento průnik množinou objemu nula, zůstane předchozí závěr o součtu integrálů v platnosti. Uvidíme.

Množina $A = A_1 \cup A_2$ je sjednocením tří po dvou disjunktích množin,

$$A = A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2).$$

Platí

$$\begin{aligned} \int_A f(x) dx &= \int_{\bar{K}} \chi_A(x) f(x) dx, \\ &= \int_{A_1 \setminus A_2} f(x) dx + \int_{A_2 \setminus A_1} f(x) dx + \int_{A_1 \cap A_2} f(x) dx = \\ &= \int_{\bar{K}} \chi_{A_1 \setminus A_2}(x) f(x) dx + \int_{\bar{K}} \chi_{A_2 \setminus A_1}(x) f(x) dx + \int_{\bar{K}} \chi_{A_1 \cap A_2}(x) f(x) dx = \\ &= \int_{\bar{K}} [\chi_{A_1 \setminus A_2}(x) + \chi_{A_2 \setminus A_1}(x) + \chi_{A_1 \cap A_2}(x)] f(x) dx. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že jsou množiny $A_1 \setminus A_2$, $A_2 \setminus A_1$ a $A_1 \cap A_2$ disjunktí, je

$$\chi_{A_1 \setminus A_2}(x) + \chi_{A_2 \setminus A_1}(x) + \chi_{A_1 \cap A_2}(x) = \chi_A(x).$$

Odtud již plyne

$$\int_{A_1 \cup A_2} f(x) dx = \int_{A_1 \setminus A_2} f(x) dx + \int_{A_2 \setminus A_1} f(x) dx + \int_{A_1 \cap A_2} f(x) dx.$$

Už tento vztah představuje vlastnost aditivity. Obecně lze analogickým postupem ukázat, že pro $A \cap B = \emptyset$ platí

$$\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx. \quad (12.27)$$

Vraťme se však k naší původní úloze. Množinu A_1 lze napsat jako sjednocení dvou disjunktích množin $A_1 \setminus A_2$ a $A_1 \cap A_2$. Díky vztahu (12.27) je

$$\int_{A_1} f(x) dx = \int_{A_1 \setminus A_2} f(x) dx + \int_{A_1 \cap A_2} f(x) dx.$$

Je-li průnik $A_1 \cap A_2$ množinou objemu nula, je druhý integrál nulový a dostaneme

$$\int_{A_1} f(x) dx = \int_{A_1 \setminus A_2} f(x) dx, \quad \text{a podobně} \quad \int_{A_2} f(x) dx = \int_{A_2 \setminus A_1} f(x) dx.$$

Intuice tentokrát nezklamala: vlastnost aditivity integrálu můžeme psát ve tvaru

$$\int_{A_1 \cup A_2} f(x) dx = \int_{A_1} f(x) dx + \int_{A_2} f(x) dx \quad \text{nejen pro} \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad (12.28)$$

ale i tehdy, je-li $A_1 \cap A_2$ množinou objemu nula.

Na poslední z otázek týkající se integrability funkce f na množině A v případě, že se funkce nechová „spořádaně“ na množině $\bar{K} \setminus A$, odpovíme snadno: podstatné je chování funkce $\chi_A f$ na kvádr \bar{K} . Mimo množinu A je však její charakteristická funkce nulová a vymaže proto případné „nepřístojnosti“ funkce f . (Musíme ovšem mít stále na mysli, že funkce f má být podle výchozích předpokladů pro definici Riemannova integrálu na \bar{K} ohraničená, množina A jordanovsky měřitelná.)

Na ukázkou uvedeme ještě jeden praktický výpočet obsahu rovinného útvaru. V druhém dílu na stranách 129 a 130 jsme počítali obsah útvaru omezeného křivkami $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = x^{-1}$ a $y = 3x^{-1}$. Při výpočtu jsme použili plošný element v křivočarách souřadnicích u , v , daných vztahy $y = ux^2$, $u \in [1, 2]$ a $y = vx^{-1}$, $v \in [1, 3]$. Nápad založit výpočet na sčítání křivočarách plošných elementů integrálem byl spíše intuitivní. Nedokazovali jsme, že takový postup je správný. V následujícím příkladu vypočteme obsah obrazce z příkladů 5.29 a 5.30 jako jeho jordanovský objem. Takový postup bude plně korektní. Uvidíme, zda vyjde stejný výsledek jako v příkladu 5.30.

Příklad 12.18: Obsah útvaru mezi křivkami

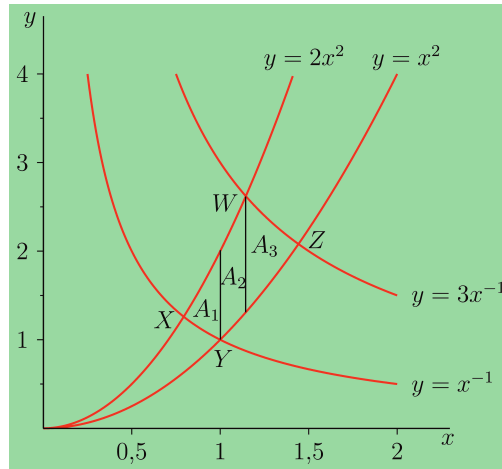
Množinou A je obrazec omezený křivkami $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = x^{-1}$ a $y = 3x^{-1}$. Pro výpočet jeho jordanovského objemu zvolíme postup z příkladu 12.15. Graf funkce $y = \varphi(x)$, omezující množinu A zdola je složen z grafů funkcí $y = x^{-1}$ a $y = x^2$, graf funkce $y = \psi(x)$ omezuje množinu A naopak shora a je tvořen grafy funkcí $y = 3x^{-1}$ a $y = 2x^2$. Množina A je sjednocením množin A_1 , A_2 a A_3 (obrázek 12.14). Uplatníme-li vlastnost aditivity integrálu (12.28), můžeme vyjádřit obsah útvaru A jako součet

$$v(A) = v(A_1) + v(A_2) + v(A_3) = \int_{A_1} dx + \int_{A_2} dx + \int_{A_3} dx.$$

Pro konkrétní stanovení mezí integrálů je třeba určit souřadnice průsečíků X , Y , Z a W . Snadným výpočtem dostaneme

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2} \right), \quad Y = (1, 1), \quad Z = \left(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9} \right), \quad W = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{18} \right).$$

$$v(A) = \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 \left(\int_{x^{-1}}^{2x^2} dy \right) dx + \int_1^{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}} \left(\int_{x^2}^{2x^2} dy \right) dx + \int_{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}^{\sqrt[3]{3}} \left(\int_{x^2}^{3x^{-1}} dy \right) dx =$$



Obrázek 12.14 Výpočet obsahu útvaru mezi křivkami.

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2x^2 - x^{-1}) dx + \int_1^{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}} (2x^2 - x^2) dx + \int_{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}^2 (3x^{-1} - x^2) dx = \\
 &\left(\frac{2}{3}x^3 - \ln x\right)\Big|_{\sqrt[3]{1/2}}^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^{\sqrt[3]{3/2}} + \left(3 \ln x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt[3]{3/2}}^2 = \frac{2}{3} \ln 2.
 \end{aligned}$$

Výsledek je stejný jako v příkladu 5.30.

Viděli jsme, že existují ohraničené množiny, které jsou natolik „divoké“, že nelze rozumně, tj. jordanovsky, změřit jejich objem. Otevřené, resp. uzavřené ohraničené množiny by se mohly z hlediska měřitelnosti jevit nadějně: otevřené a uzavřené kvádry měřitelné jsou. Věc však není zdaleka tak jednoduchá, jak vypadá. Ukážeme, že existují jak otevřené, tak uzavřené ohraničené množiny, které měřitelné nejsou.

Příklad 12.19: Neměřitelné otevřené ohraničené množiny

Hovoříme-li o otevřených množinách třeba na reálné ose, první, co nás napadne, jsou otevřené intervaly. Ty jsou měřitelné — jordanovský objem otevřeného intervalu $I = (a, b)$ je $v(I) = b - a$. Každá otevřená množina (a teď uvažujeme jen o těch ohraničených) je sjednocením jistých otevřených intervalů. Objem sjednocení dvou otevřených intervalů I_1 a I_2 je rovněž měřitelná množina. Je totiž sjednocením tří po dvou disjunktčních otevřených intervalů,

$$I_1 \cup I_2 = (I_1 \setminus I_2) \cup (I_2 \setminus I_1) \cup (I_1 \cap I_2).$$

Jak by tedy mohla být otevřená množina neměřitelná? Problém je v tom, že k vyjádření některých otevřených množin potřebujeme *nekonečně mnoho* otevřených intervalů. Jednu velmi jednoduchou si ukážeme. Uvažme všechna racionální čísla v intervalu $(0, 1)$. Víme, že jich je spočetně mnoho, a proto je očísľujeme r_1, r_2, \dots . Zvolme číslo p , $0 < p < 1$. S číslem r_j spojme interval $I_j = (a_j, b_j)$ délky $b_j - a_j = p \cdot 2^{-j}$ tak, aby v něm

leželo. Množinu A definujeme jako sjednocení všech těchto intervalů a vypočteme jejich celkovou délku (součet jordanovských objemů). Pozor! Nebude to jordanovský objem množiny A :

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p}{2^j} = p < 1.$$

Množina A je ohraničená (je podmnožinou intervalu $(0, 1)$) a otevřená (je sjednocením otevřených intervalů). Její hranice je $\text{h}A = [0, 1] \setminus A$, a to rozhodně není zanedbatelná množina — celková délka otevřených intervalů potřebných k jejímu pokrytí bude totiž muset být větší než $1-p$. Množina A není jordanovsky měřitelná. Můžeme se tomu i divit, protože se zdá, že v intervalu $[0, 1]$ nemohou po vyjmutí množiny A zůstat žádné „zbytky“. A přece, na jejich tvorbě se významně podílejí iracionální čísla, jichž je v každém intervalu nespočetně mnoho. Znovu vidíme, že v případě „nekonečen“ názorné představy příliš nepomáhají.

Množina $B = [0, 1] \setminus A$ je ohraničená a uzavřená (tj. kompaktní) a je podmnožinou své hranice, $B \subset \text{h}B$. (Dokažte, že pro každý bod množiny B má libovolný otevřený interval, který tento bod obsahuje, neprázdný průnik jak s množinou B , tak s jejím doplňkem v \mathbf{R} .) Protože množina B sama není zanedbatelná, nemá tuto vlastnost ani její hranice, která ji obsahuje. Množina B rovněž není jordanovsky měřitelná.

12.1.8 Věta o transformaci integrálu

Tento odstavec začneme problémem, jímž jsme v předchozím odstavci skončili. Zjistili jsme, že korektní výpočet jordanovského objemu rovinného útvaru omezeného zadanými křivkami (parabolami typu $y = ux^2$ a hyperbolami typu $y = vx^{-1}$) dává stejný výsledek, jako když integrálem „sčítáme“ plošné elementy odpovídající křivočarým souřadnicím u a v . V tomto konkrétním příkladu jsme zjistili, že platí rovnost

$$\int_{\alpha(\bar{K})} dx dy = \int_{\bar{K}} |\det D\alpha(u, v)| du dv,$$

kde

$$\alpha : \bar{K} \ni (u, v) \longrightarrow \alpha(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in \alpha(\bar{K})$$

je transformace křivočarých souřadnic $(u, v) \in \bar{K}$, kde $\bar{K} = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$, na kartézské souřadnice (x, y) , a $D\alpha(u, v)$ je Jacobiho matice této transformace (viz druhý díl, odstavec 5.3.1). Jeden příklad samozřejmě nic nedokazuje — mohlo by jít o náhodu. Ale nejde. Zjištěný výsledek platí obecně i v n -rozměrném případě. A nejen pro výpočet objemu, ale pro integrál z funkce f na množině A . Jakkoli vypadá tvrzení o transformaci proměnných v Riemannově integrálu v jedné z možných podob jednoduše, dokazuje se docela těžko. Je potřeba provést důkaz v několika postupných krocích. Proto je nejprve formulujeme a poté se budeme věnovat dílčím situacím v příkladech. Čtenáři, kteří rádi věří matematickým větám bez důkazů, mohou rovnou přeskóčit k praktickým výpočtům v odstavci 12.1.9. Jednu ukázkou toho, co věta o transformaci „umí“, zařadíme hned za její formulaci a následné komentáře jako příklad 12.20.

Věta 12.11 (Věta o transformaci integrálu): *Nechť \bar{K} je uzavřený n -rozměrný kvádr v \mathbf{R}^n a $A \subset \bar{K}$ otevřená jordanovsky měřitelná množina. Nechť dále*

$$\alpha : A \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow \alpha(u) \in \alpha(A) \subset \mathbf{R}^n, \quad (12.29)$$

kde $\alpha(u) = x = (x^1 \alpha(u^1, \dots, u^n), \dots, x^n \alpha(u^1, \dots, u^n))$ je vzájemně jednoznačné spojitě diferencovatelné zobrazení, jehož Jacobiho matice $D\alpha(u)$ je regulární v každém bodě množiny A . Předpokládejme, že funkce $f : \alpha(A) \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ je na množině $\alpha(A)$ integrabilní. Pak platí

$$\int_{\alpha(A)} f(x) dx = \int_A (f \circ \alpha)(u) |\det D\alpha(u)| du. \quad (12.30)$$

Poznamenejme, že je-li diferencovatelné i zobrazení α^{-1} , nazývá se zobrazení α často *vzájemně diferencovatelné*. A uvědomme si několik důležitých okolností, které souvisejí s formulací věty:

- Protože je množina A jordanovsky měřitelná, znamená to, že je a priori ohraničená (definice jordanovsky měřitelných množin ohraničenost předpokládá).
- Uzávěr jordanovsky měřitelné množiny A je jordanovsky měřitelná množina (dokažte, že obecně platí $h\bar{A} \subset hA$).
- Obraz $\alpha(A)$ otevřené množiny A vzájemně jednoznačným a vzájemně diferencovatelným zobrazením α je otevřená množina.
- Obraz kompaktní množiny spojitým zobrazením je kompaktní množina.
- V předpokladu integrability funkce f na množině $\alpha(A)$ je implicitně skryt požadavek jordanovské měřitelnosti množiny $\alpha(A)$ (tento předpoklad je obsažen v zobecněné definici integrálu).

Pustíme se do důkazu věty v několika dílčích krocích. Z toho, co jsme již zjistili o jordanovsky měřitelných množinách a integrálech spojitých, resp. skoro všude spojitých funkcí na nich, je zřejmé, že vztah (12.30) se nezmění, vezmeme-li místo množiny A její uzávěr.

Budeme se větou o transformaci zabývat pro případ, že množina A je uzavřeným kvádrem. Nejedná se o žádnou ztrátu obecnosti, neboť vztah (12.30) lze přepsat také takto:

$$\int_{\alpha(A)} f(x) dx = \int_{\bar{K}} \chi_A(u) (f \circ \alpha)(u) |\det D\alpha(u)| du,$$

kde $A \subset \bar{K}$, resp.

$$\int_{\alpha(\bar{K})} \chi_{\alpha(A)}(x) f(x) dx = \int_{\bar{K}} \chi_A(u) (f \circ \alpha)(u) |\det D\alpha(u)| du,$$

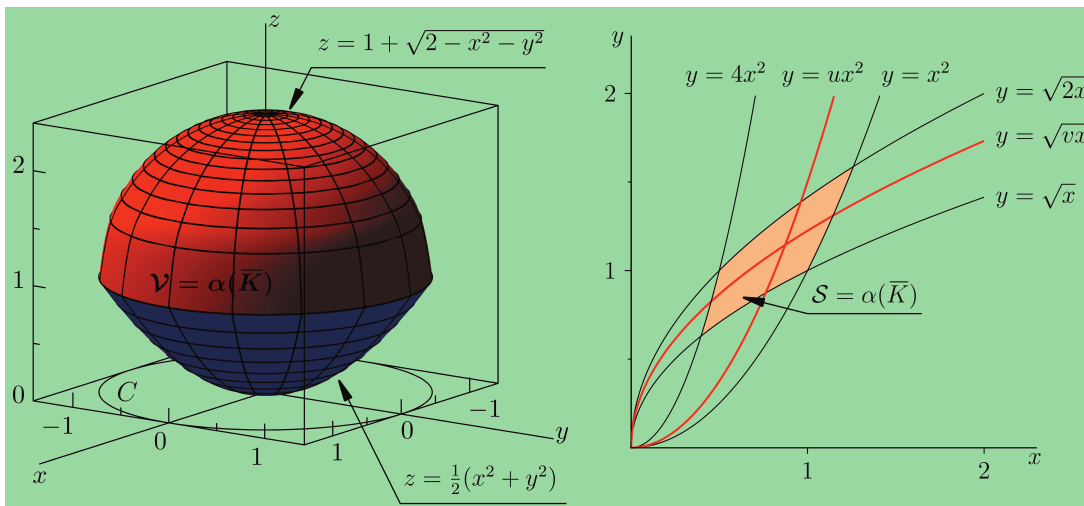
kde $A \subset \bar{K}$, $\alpha(A) \subset \alpha(\bar{K})$. Všimneme si nejprve nízkorozměrných situací. Později ukážeme, že větu stačí dokázat pro konstantní funkci, konkrétně lze zvolit $f(x) = 1$. Pro takový případ dostaneme větu o transformaci při výpočtu jordanovského objemu množiny,

$$\int_{\alpha(A)} dx = \int_A |\det D\alpha(u)| du,$$

resp. totéž pro uzávěr množiny A . Než se však pustíme do úvah týkajících se věty o transformaci jako takové, přesvědčme se na dvou typických příkladech o jejím praktickém významu.

Příklad 12.20: Co „umí“ věta o transformaci

Pokud nalistujete příklady 5.29 a 5.30 z druhého dílu (strany 129 až 131) a porovnáte snadnost výpočtu obsahu plošného útvaru pomocí křivočarých souřadnic s těžkopádným postupem v příkladu 12.18, kdy jsme též obsah počítali přímo z definice integrálu, budete mít jasno. Pomocí křivočarých souřadnic lze často lépe vystihnout geometrický tvar integračního oboru a výpočet je pak mnohem snazší. Můžeme tak počítat geometrické a fyzikální charakteristiky rovinných a prostorových (trojrozměrných) útvarů — objemy, hmotnosti, souřadnice středů hmotnosti, momenty setrvačnosti, ... Na obrázku 12.15 je příklad rovinného a prostorového útvaru. Rovinný útvar, označený jako \mathcal{S} , je omezen parabolami $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2x}$, prostorový útvar \mathcal{V} je omezen povrchem rotačního paraboloidu $2z = x^2 + y^2$ a horní částí kulové plochy $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$. Vypočteme polohu středu hmotnosti rovinného útvaru \mathcal{S} za předpokladu, že jeho plošná hustota je dána funkcí $\sigma(x, y) = kxy$, kde $k = 1 \text{ kg m}^{-4}$ je rozměrová konstanta. V případě prostorového útvaru \mathcal{V} , o němž předpokládáme, že je homogenní s hustotou $s = \text{konst.}$, určíme jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose z .



Obrázek 12.15 Praktické použití věty o transformaci.

Souřadnice středu hmotnosti soustavy částic s diskrétním rozložením hmotnosti jsou dány vztahy (2.56) na str. 176 prvního dílu. V případě rovinného útvaru, jehož hmotnost je rozložena spojitě s plošnou hustotou $\sigma(x, y)$, přejdou na integrální tvar

$$x_T = \frac{1}{\mu} \int_S x \sigma(x, y) dx dy, \quad y_T = \frac{1}{\mu} \int_S y \sigma(x, y) dx dy, \quad \mu = \int_S \sigma(x, y) dx dy. \quad (12.31)$$

Tyto tři integrály můžeme samozřejmě spočítat přímo ze zobecněné definice integrálu, podobně jako jsme to udělali při výpočtu plošného obsahu v příkladu 12.18. Pracnost takového postupu je předem zřejmá. Uvědomíme-li si však, že každým bodem útvaru S lze proložit paraboly $y = ux^2$ a $y = \sqrt{vx}$, přičemž $(u, v) \in \bar{K}$, $\bar{K} = [1, 4] \times [1, 2]$, můžeme proměnné u a v považovat za křivočaré souřadnice. Z rovnic dvou typů parabol snadno zjistíme zobrazení α :

$$\begin{aligned} \alpha: \bar{K} \ni (u, v) &\longrightarrow \alpha(u, v) = (x, y) \in \alpha(\bar{K}), \quad x = u^{-2/3}v^{1/3}, \quad y = u^{-1/3}v^{2/3}. \\ D\alpha(u, v) &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}u^{-5/3}v^{1/3} & -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \end{pmatrix}, \quad |\det D\alpha(u, v)| = \frac{1}{3}u^{-2}. \\ \mu &= \int_{S=\alpha(\bar{K})} \sigma(x, y) dx dy = \int_{\bar{K}} (\sigma \circ \alpha)(u, v) |\det D\alpha(u, v)| du dv = \\ &= \int_1^4 \int_1^2 k(u^{-2/3}v^{1/3})(u^{-1/3}v^{2/3}) \left(\frac{1}{3}u^{-2}\right) du dv = \frac{k}{3} \left(\int_1^4 u^{-3} du\right) \left(\int_1^2 v dv\right) = \\ &= -\frac{k}{6} [u^{-2}]_1^4 \cdot \left[\frac{1}{2}v^2\right]_1^2 = \frac{15k}{64}. \end{aligned}$$

A teď už hbitěji:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{k}{3\mu} \left(\int_1^4 u^{-11/3} du\right) \left(\int_1^2 v^{4/3} dv\right) = \dots \\ \text{vyjde } \frac{3k}{56\mu} \left(1 - \frac{1}{32\sqrt[3]{2}}\right) (4\sqrt[3]{2} - 1) &= \frac{8}{35} \left(1 - \frac{1}{32\sqrt[3]{2}}\right) (4\sqrt[3]{2} - 1), \\ y_T &= \frac{k}{3\mu} \left(\int_1^4 u^{-10/3} du\right) \left(\int_1^2 v^{5/3} dv\right) = \dots \\ \text{vyjde } \frac{3k}{56\mu} \left(1 - \frac{1}{16\sqrt[3]{4}}\right) (4\sqrt[3]{4} - 1) &= \frac{8}{35} \left(1 - \frac{1}{16\sqrt[3]{4}}\right) (4\sqrt[3]{4} - 1). \end{aligned}$$

Že jsou to nepěkné výrazy? A to si představte, že byste k nim skutečně museli dospět z definice postupnou integrací podle Fubiniovy věty, a ještě v proměnných mezích vnitřních integrálů, které byste nejprve museli určit. Věta o transformaci umožnila integrovat na obdélníku a shodou okolností ještě využít výsledku příkladu 12.2.

Pusťme se nyní do výpočtu momentu setrvačnosti prostorového útvaru \mathcal{V} . Od vztahu (2.57) na straně 178 prvního dílu, platného pro soustavu s diskrétním rozložením hmotnosti opět přejdeme k integrálnímu vyjádření

$$J_z = \int_{\mathcal{V}} s(x, y, z)(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

104 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

Pokusme se nejprve o přímý výpočet z definice. Útvar je omezen plochami $z = \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ a $z = \psi(x, y) = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, jeho půdorysem (oborem funkcí φ a ψ omezujícím útvar) je kruh $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ (snadno se o tom přesvědčíte výpočtem vycházejícím z porovnání rovnic ploch, $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}$). Postupná integrace přímo v proměnných x, y, z vypadá následovně (s uvážením konstantní hustoty):

$$\begin{aligned} J_z &= s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{1+\sqrt{2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dz \right) dy \right] dx = \\ &= s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (x^2+y^2) \left((1+\sqrt{2-x^2-y^2}) - \frac{1}{2}(x^2+y^2) \right) dy \right] dx = \\ &= s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (x^2+y^2) (1+\sqrt{2-x^2-y^2}) dy \right] dx - s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 dy \right] dx. \end{aligned}$$

Ve vnitřním integrálu prvního sčítance použijeme substituci $y = \sqrt{2-x^2} \cos t$, pak $\sqrt{2-x^2-y^2} = \sqrt{(2-x^2)} \cdot |\sin t|$, $dy = -\sqrt{2-x^2} \sin t dt$. A už se objevuje malá technická komplikace s absolutní hodnotou a stanovením mezí proměnné t . Funkce $\sin t$ nabývá nezáporných hodnot pro $t \in [0, \pi]$, záporných pak pro $t \in (\pi, 2\pi)$. Meze proměnné y jsou $y_1(x) = -\sqrt{2-x^2}$, $y_2(x) = \sqrt{2-x^2}$. To odpovídá hodnotám $t_1 = \pi$ a $t_2 = 0$ proměnné t . Na intervalu $[0, \pi]$ je $\sin t \geq 0$, a tak můžeme absolutní hodnotu odstranit a rovnou integrovat. S druhým sčítancem zatím žádný problém není. Dostaneme

$$\begin{aligned} J_z &= s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[- \int_{\pi}^0 \sqrt{(2-x^2)} (2 \cos^2 t + x^2 \sin^2 t) (1 + \sqrt{2-x^2} \sin t) \sin t dt \right] dx - \\ &\quad - \frac{1}{2} s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[x^4 y + \frac{2}{3} x^2 y^3 + \frac{1}{5} y^5 \right]_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dx = \\ &= s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[-\sqrt{2-x^2} \int_{\pi}^0 (2 \cos^2 t + x^2 \sin^2 t) \sin t dt \right] dx + s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[-(2-x^2) \int_{\pi}^0 (2 \cos^2 t + x^2 \sin^2 t) \sin^2 t dt \right] dx - \\ &\quad - \frac{1}{2} s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \left[2x^4 + \frac{4}{3} x^2 (2-x^2) + \frac{2}{5} (2-x^2)^2 \right] dx = \\ &= s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \left[\int_0^{\pi} (2 \sin t \cos^2 t + x^2 \sin^3 t) dt \right] dx + s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2) \left[\int_0^{\pi} (2 \sin^2 t \cos^2 t + x^2 \sin^4 t) dt \right] dx - \\ &\quad - s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \left(\frac{8}{15} x^4 + \frac{8}{15} x^2 + \frac{4}{5} \right) dx. \end{aligned}$$

Vypočteme integrály z goniometrických funkcí — připomeňte si vzorce pro dvojnásobný a poloviční úhel:

$$\int_0^{\pi} 2 \sin t \cos^2 t \, dt = \left[-\frac{2}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3},$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 t \, dt = \int_0^{\pi} \sin t (1 - \cos^2 t) \, dt = \left[-\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3},$$

$$\int_0^{\pi} 2 \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 4t) \, dt = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\pi} \sin^4 t \, dt = \int_0^{\pi} \sin^2 t (1 - \cos^2 t) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) \, dt - \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (1 - \cos 4t) \, dt = \frac{3\pi}{8}.$$

Po dosazení a úpravě použijeme v integrálech obsahujících $\sqrt{2-x^2}$ substituci $x = \sqrt{2} \cos t$:

$$\begin{aligned} J_z &= s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}x^2 \right) dx + s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}x^2 \right) dx - s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \left(\frac{8}{15}x^4 + \frac{8}{15}x^2 + \frac{4}{5} \right) dx = \\ &= s \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} \left(\frac{8}{15} + \frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{15}x^4 \right) dx + \frac{\pi s}{8} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2)(2+3x^2) dx = \\ &= 2s \int_0^{\pi} \left(\frac{8}{15} \sin^2 t + \frac{8}{5} \cos^2 t \sin^2 t - \frac{32}{15} \sin^2 t \cos^4 t \right) dt + \frac{\pi s}{8} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4+4x^2-3x^4) dx. \end{aligned}$$

Integrály z goniometrických funkcí spočteme opět pomocí součtových vzorců pro dvojnásobné a poloviční úhly:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{8}, \quad \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos^4 t \, dt = \frac{\pi}{16}.$$

Druhý integrál (z polynomu v proměnné x) je jednoduchý. Konečný výsledek je

$$J_z = \frac{2}{3} \pi s \left(1 + \frac{8\sqrt{2}}{5} \right).$$

Teď se podívejme, jak si s výpočtem poradí věta o transformaci. Moment setrvačnosti útvaru lze vyjádřit jako integrál z funkce

$$f(x, y) = s(x^2 + y^2) \left[\left(1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right]$$

na kruhu $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$. Vidíme, že jak integrační obor, tak integrovaná funkce jsou rotačně symetrické vzhledem k ose z . Tuto symetrii dokonale vystihují polární souřadnice ϱ, φ . Zobrazení α zvolíme tak, aby přiřazovalo polárním souřadnicím kartézské, tj.

$$\alpha : [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] \ni (\varrho, \varphi) \longrightarrow (x, y) \in C \subset \mathbf{R}^2, \quad x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi.$$

Jakobián (absolutní hodnota determinantu Jacobiho matice) odpovídající polárním souřadnicím je

$$|\det D\alpha(\varrho, \varphi)| = \varrho$$

(strana 118 druhého dílu). Pro moment setrvačnosti útvaru tak dostáváme integrál, jehož výpočet je už velmi snadný:

$$\begin{aligned} J_z &= s \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} \varrho^2 \left(1 + \sqrt{2 - \varrho^2} - \frac{1}{2} \varrho^2 \right) \varrho \, d\varrho \right] d\varphi = 2\pi s \left[\int_0^{\sqrt{2}} \left(\varrho^3 - \frac{1}{2} \varrho^5 \right) d\varrho + \int_0^{\sqrt{2}} \varrho^3 \sqrt{2 - \varrho^2} \, d\varrho \right] = \\ &= \frac{2}{3} \pi s - 8\sqrt{2} \pi s \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t \cos^3 t \, dt = \frac{2}{3} \pi s \left(1 + \frac{8\sqrt{2}}{5} \right). \end{aligned}$$

V integrálu obsahujícím $\sqrt{2 - \varrho^2}$ jsme použili již osvědčenou substituci $\varrho = \sqrt{2} \cos t$, integrál v proměnné t jsme počítali běžným způsobem, tj.

$$\int_{\pi/2}^0 \sin^2 t \cos^3 t \, dt = \int_{\pi/2}^0 \cos t (\sin^2 t - \sin^4 t) \, dt = \left[\frac{1}{3} \sin^3 t - \frac{1}{5} \sin^5 t \right]_{\pi/2}^0 = -\frac{2}{15}.$$

Ještě rychlejší je výpočet využívající aditivitu integrálu a symetrie každé z obou částí tělesa zvlášť. Moment setrvačnosti celého tělesa je totiž součtem momentů setrvačnosti paraboloidu a půlky koule. Moment setrvačnosti paraboloidu vypočteme snadno přechodem k válcovým souřadnicím ($x^2 + y^2 = \varrho^2$, determinant Jacobiho matice je ϱ), moment setrvačnosti půlky koule pak v souřadnicích kulových ($x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$, determinant Jacobiho matice je $r^2 \sin \vartheta$):

$$\begin{aligned} J_{z1} &= s \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{1}{3}\varrho^2}^1 \varrho^2 \cdot \varrho \, dz \right) d\varrho \right] d\varphi = \frac{2}{3} \pi s, \\ J_{z2} &= s \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\pi/2} r^2 \sin^2 \vartheta \cdot r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\vartheta \right] d\varphi = \frac{16\sqrt{2}}{15} \pi s. \end{aligned}$$

Sečtením dostaneme správný výsledek.

Viděli jsme, že věta o transformaci proměnných v Riemannově integrálu je velmi účinným prostředkem při praktických výpočtech Riemannova integrálu v případě, že úloha má nějakou rozumnou symetrii. V případě použití různých typů křivočarých souřadnic, odpovídajících symetrii různých částí tělesa, jsme původní rozsáhlý výpočet zredukovali na pouhé dva řádky. A teď už se opravdu věnujme větě o transformaci a jejímu důkazu pořádně. Netrpělivý čtenář, který chce větu používat, ale netrvá na tom, aby jí rozuměl, může rovnou přejít k odstavci 12.1.9.

Příklad 12.21: Ale je zde problém, ...

... kterým jsme se stručně zabývali už v příkladu 5.22 (strana 120 v druhém dílu). Sledovali jste pozorně předpoklady věty 12.11? Pak jste si jistě všimli, že k nim patří vzájemná jednoznačnost zobrazení α a regulárnost jeho Jacobiho matice. V předchozím ukázkovém příkladu však nebyly splněny. U polárních, resp. válcových

souřadnic dostáváme pro $\varphi = 2\pi$ díky periodicitě funkcí sinus a kosinus stejné hodnoty kartézských souřadnic jako pro $\varphi = 0$. Body odpovídající těmto hodnotám úhlu φ vyplní v případě polárních souřadnic polopřímku (kladnou část osy x), v případě válcových souřadnic polorovinu (souřadnicová polorovina xz , $x > 0$). Pro $\varrho = 0$ je determinant Jacobiho matice nulový (tato hodnota odpovídá v polárních souřadnicích počátku soustavy souřadnic, ve válcových vyplní body s nulovou hodnotou determinantu Jacobiho matice osu z). Podobné „nedostatky“ má transformace z kulových do kartézských souřadnic. Vzájemná jednoznačnost je porušena opět pro $\varphi = 0$ a $\varphi = 2\pi$ a příslušné body vyplní stejně jako u válcových souřadnic souřadnicovou polorovinu xz , $x > 0$. Determinant Jacobiho matice je nulový nejen pro $r = 0$, ale ve všech bodech, jimž odpovídá nulová hodnota $\sin \vartheta$. Tyto body vyplní opět celou osu z .) Přesto jsme větu o transformaci v příkladu 12.20 s úspěchem použili — výsledek byl stejný jako při přímém postupu jen pomocí Fubiniovy věty. Abychom tuto možnou nerosovnalost vysvětlili, musíme si uvědomit význam předpokladů týkajících se zobrazení α a zamyslet se nad tím, v jakém rozsahu by případně mohly být porušeny. Předpoklady mají totiž charakter podmínek *postačujících*, což znamená, že věta může platit i v některých případech, kdy striktně splněny nejsou.

Přemýšlejme nejprve, jak by větu o transformaci mohlo „pokazit“ narušení vzájemné jednoznačnosti zobrazení α . Ukažme si to na nejjednodušším možném případě — větě o substituci v jednonásobném integrálu. Už v prvním dílu jsme počítali neurčitý integrál $\int \sqrt{1-x^2} dx$ pomocí substituce $x = \sin t$ (příklad 2.55 na straně 139 prvního dílu). Graf integrované funkce v mezích $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ je půlkružnice o poloměru $r = 1$ v horní polorovině souřadnicové roviny xy . Kdybychom počítali určitý integrál z této funkce v daných mezích, měli bychom dostat obsah půlkruhu omezeného jejím grafem a osou x , tedy hodnotu $\frac{\pi}{2}$. Vezmeme-li jako nové meze integrálu po substituci $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ a $t_2 = \frac{\pi}{2}$, podle obecného návodu na str. 172 prvního dílu, očekávaný výsledek opravdu dostaneme. V řeči věty o transformaci naše substituce včetně stanovení mezí odpovídá zobrazení

$$\alpha : A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni t \longrightarrow x = \alpha(t) = \sin t \in [-1, 1] = \alpha(A).$$

Toto zobrazení je vzájemně jednoznačné, jeho Jacobiho matice je typu $1/1$, $D\alpha = \cos t$, a $\det D\alpha(t) > 0$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Jakobián je tedy nenulový s výjimkou dvou bodů integračního oboru A , a to bodů krajních. Dvoubodová množina je zanedbatelná a víme, že nemá vliv na integrabilitu funkce, ani na hodnotu integrálu (o situacích, kdy může být jakobián nulový, ještě budeme hovořit). Platí

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Zobrazení

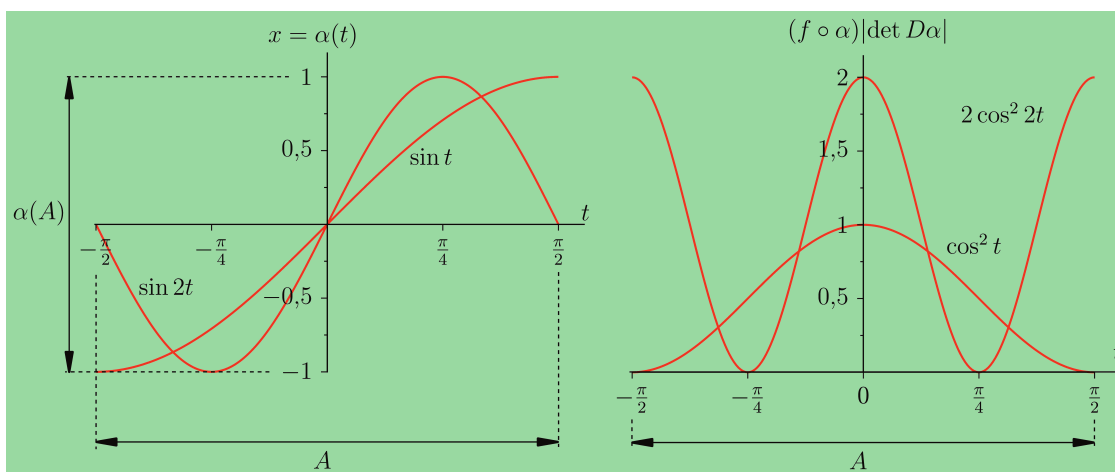
$$\alpha : A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni t \longrightarrow x = \alpha(t) = \sin 2t \in [-1, 1] = \alpha(A)$$

také zobrazuje interval $[-\pi/2, \pi/2]$ na interval $[-1, 1]$ a determinant jeho Jacobiho matice $\det D\alpha = 2 \cos 2t$ je nenulový, s výjimkou dvou bodů, konkrétně $-\pi/4$ a $\pi/4$. Nulovost jakobiánu v těchto bodech není na závadu stejně jako v předchozím případě. Na závadu však je, že zobrazení α není v tomto případě vzájemně jednoznačné, a vzájemná jednoznačnost je porušena nikoli v bodech zanedbatelné množiny, ale v podstatně větším rozsahu. Obě situace jsou znázorněny na obrázku 12.16.

Kdybychom ve druhém případě použili bez rozmyslu větu o transformaci, dostali bychom chybnou hodnotu integrálu

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 2t dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt = \pi.$$

Odlíšnost integrálů z funkcí $(f \circ \alpha) |\det D\alpha|$ pro uvedené dvě transformace, zobrazující v obou případech množinu $A = [\pi/2, \pi/2]$ na množinu $\alpha(A) = [-1, 1]$, je také na první pohled zřejmá při porovnání ploch pod grafy těchto funkcí na obrázku 12.16.



Obrázek 12.16 K příkladu 12.21.

Připomeňme si geometrický význam Jacobiho matice zobrazení α , přiřazujícího bodu $u = (u^1, \dots, u^n) \in A$, $A \subset \mathbf{R}^n$, bod $x = (x^1, \dots, x^n) \in \alpha(A)$, kde $x^j = x^j \alpha(u^1, \dots, u^n)$, $\alpha(A) \subset \mathbf{R}^n$, který jsme objasnili na několika místech, třeba v příkladu 9.66 (str. 569 druhého dílu). j -tý řádek Jacobiho matice vyčíslený v bodě $x \in \alpha(A)$ představuje tečný obraz vektoru $e_{j,u} = (0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0)$, umístěného v bodě $u \in A$. Jinými slovy, prvky tohoto řádku jsou složky tečného vektoru v bodě $x = \alpha(u)$ ke křivce $\alpha \circ p_j$, kde $p_j : s \rightarrow u + s e_{j,u}$ je přímka o směrovém vektoru $e_{j,u}$ procházející bodem $u \in A$. Nenulovost determinantu Jacobiho matice zaručuje, že jsou tyto tečné vektory v každém bodě obrazu $\alpha(A)$ lineárně nezávislé. Je-li naopak v některém bodě $u \in A$ jakobián nulový, jsou tečné obrazy vektorů $e_{j,u}$, umístěné v bodě $x = \alpha(u) \in \alpha(A)$, lineárně závislé a nevytvorí „správný“ objemový element. Integrand na pravé straně vztahu (12.30) ve větě o transformaci je v takových bodech nulový.

Jistě jste si všimli, že množina bodů, v nichž byly v našich příkladech předpoklady věty o transformaci porušeny a přesto vztah (12.30) dával správné hodnoty integrálu, byla zanedbatelná. To je také kritérium, kdy vztah můžeme i při porušených předpokladech použít. Dokonce se dá dokázat tzv. *Sardova věta*, podle níž je množina bodů, v nichž je jakobián spojitě diferencovatelného zobrazení *otevřené* množiny $A \subset \mathbf{R}^n$ do \mathbf{R}^n nulový, zanedbatelná. Toto tvrzení je součástí složitějšího teoremu a nebudeme se jím podrobněji zabývat.

Příklad 12.22: Transformace interval \rightarrow interval

Věta o transformaci integrálu z funkce jedné proměnné není nic jiného, než věta o substituci (první díl, strana 171):

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(x) dx = \int_a^b f[\alpha(u)] \alpha'(u) du,$$

kde $\alpha : [a, b] \ni u \rightarrow \alpha(u) \in [\alpha(a), \alpha(b)]$ pro $\alpha(a) < \alpha(b)$, resp. $\alpha : [a, b] \ni u \rightarrow \alpha(u) \in [\alpha(b), \alpha(a)]$ pro $\alpha(a) > \alpha(b)$, je vzájemně jednoznačné vzájemně spojitě diferencovatelné zobrazení. Skutečnost, že ve vztahu pro substituční metodu není derivace $\alpha'(u)$ v absolutní hodnotě, souvisí s pořadím mezí (derivace vzájemně jednoznačné funkce $\alpha(u)$ má na celém intervalu $[a, b]$ stále stejné znaménko). Pro jordanovský objem intervalu,

kdy je $f(x) = 1$, má věta o substituci pro $\alpha'(u) > 0$, tj. $\alpha(a) < \alpha(b)$, tvar

$$v([\alpha(a), \alpha(b)]) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} dx = \alpha(b) - \alpha(a), \quad \int_a^b \alpha'(u) du = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Analogicky ukážeme, že pro $\alpha'(u) < 0$ je

$$v([\alpha(b), \alpha(a)]) = \alpha(a) - \alpha(b) = \int_a^b (-\alpha'(u)) du.$$

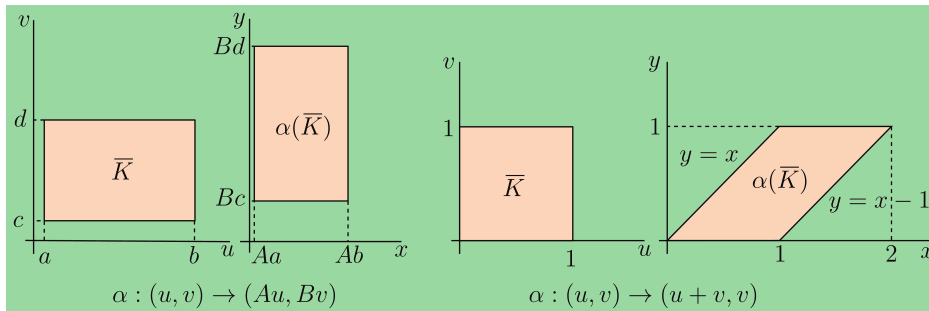
Označíme-li interval $[a, b]$ jako \bar{I} , můžeme větu o substituci (pro případ funkce $f(x) = 1$) psát přesně v duchu věty o transformaci

$$\int_{\alpha(\bar{I})} dx = \int_{\bar{I}} |\alpha'(u)| du = \int_{\bar{I}} |\det D\alpha(u)| du.$$

Příklad 12.23: Transformace obdélník \rightarrow obdélník

Předpokládejme, že zobrazení α představuje deformaci obdélníka $\bar{K} = [a, b] \times [c, d]$ opět v obdélník $\alpha(\bar{K}) = [Aa, Ab] \times [Bc, Bd]$ (obrázek 12.17 vlevo),

$$\alpha : \bar{K} \ni (u, v) \longrightarrow \alpha(u, v) = (x, y) \in \alpha(\bar{K}), \quad x = Au, \quad y = Bv.$$



Obrázek 12.17 Transformace obdélníků.

Jacobiho matice tohoto zobrazení a absolutní hodnota jejího determinantu (jakobián) jsou

$$D\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad |\det D\alpha(u, v)| = |AB|.$$

Platí

$$\int_{\alpha(\bar{K})} dx dy = |(Ab - Aa)(Bd - Bc)| = |AB|(b - a)(d - c),$$

$$\int_{\bar{K}} |\det D\alpha(u, v)| du dv = \int_{\bar{K}} |AB| du dv = |AB|(b - a)(d - c).$$

Příklad 12.24: Transformace čtverec \rightarrow speciální rovnoběžník

Zobrazení

$$\alpha : \bar{K} \ni (u, v) \longrightarrow \alpha(u, v) = (x, y) \in \alpha(\bar{K}), \quad x = u + v, \quad y = v$$

převádí čtverec $\bar{K} = [0, 1] \times [0, 1]$ na rovnoběžník $\alpha(\bar{K})$, jehož základnou je úsečka $[0, 1]$ a jeho výška je jednotková (obrázek 12.17 vpravo). Jeho plošný obsah vypočtený pomocí věty o transformaci by měl vyjít rovněž jednotkový, shodně s plošným obsahem čtverce \bar{K} . Rovnoběžník je omezen přímkami $y = 0$, $y = 1$, $y = x$ a $y = x - 1$ a jeho vrcholy mají souřadnice $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$. Jeho plošný obsah je dán integrálem

$$\int_{\alpha(\bar{K})} \chi_{\alpha(\bar{K})} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^x dy \right] dx + \int_1^2 \left[\int_{x-1}^1 dy \right] dx = 1.$$

Jacobiho matice zobrazení a jeho jakobián jsou

$$D\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\det D\alpha(u, v)| = 1.$$

Pravá strana věty o transformaci má tvar

$$\int_{\bar{K}} |\det D\alpha(u, v)| du dv = 1.$$

Možná si kladete otázku, proč se zabýváme tak triviálními příklady, které mají k důkazu věty velmi daleko. Ne tak docela. Pomocí skládání transformací rozebíraných v těchto příkladech lze totiž získat *libovolné* lineární zobrazení v \mathbf{R}^2 . Ukážeme, že pokud věta platí pro dvě (obecně zadaná) zobrazení

$$\beta : A \ni u \rightarrow \beta(u) = \xi \in \beta(A) \subset \mathbf{R}^n, \quad \gamma : B \ni \xi \rightarrow \gamma(\xi) = x \in \gamma(B) \subset \mathbf{R}^n,$$

$u = (u^1, \dots, u^n)$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, a současně je $\beta(A) \subset B$, pak platí pro jejich složení $\alpha = \gamma \circ \beta$. Tím budeme mít větu dokázanu pro libovolné lineární zobrazení v rovině a zase tak postoupíme o krůček k důkazu. Samozřejmě považujeme za dané, že jak obě zobrazení, tak integrační obory A , $\beta(A)$ a $(\gamma \circ \beta)(A)$ splňují všechny požadavky věty.

Uvažujme tedy o zobrazeních β a γ , která jsme právě popsali, a předpokládejme, že pro každé z nich věta o transformaci platí. Pak

$$\begin{aligned} \int_{(\gamma \circ \beta)(A)} dx &= \int_{\gamma(\beta(A))} dx = \int_{\beta(A)} |\det D\gamma(\xi)| d\xi = \int_A |\det D\beta(u)| \cdot |\det D\gamma(\xi(u))| du = \\ &= \int_A \left| \det \left(D\beta(u) \cdot D\gamma(\xi(u)) \right) \right| du = \int_A |\det D(\gamma \circ \beta)(u)| du = \int_A |\det D\alpha(u)| du. \end{aligned}$$

Příklad 12.25: Lineární transformace v \mathbf{R}^2

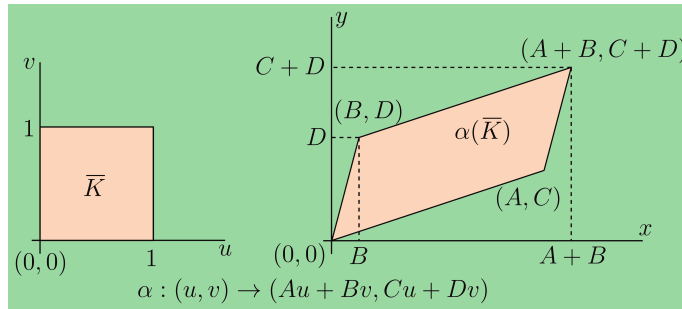
Obecná lineární transformace proměnných v \mathbf{R}^2 má tvar

$$\alpha : \bar{K} \ni (u, v) \longrightarrow \alpha(u, v) = (x, y) \in \alpha(\bar{K}) \subset \mathbf{R}^2, \quad x = Au + Bv, \quad y = Cu + Dv.$$

(Ještě obecnější verzi dostaneme, budeme-li místo uzavřeného obdélníka \bar{K} pracovat s jordanovsky měřitelnou množinou A .) Matici tohoto lineárního zobrazení dostaneme jako součin matic odpovídajících maticím jednodušších lineárních transformací popsaných v příkladech 12.23 a 12.24 (zapište zobrazení odpovídající jednotlivým Jacobiho maticím na pravé straně následující rovnosti):

$$D\alpha = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{B} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \frac{AD}{C} - B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{pmatrix}, \quad |\det D\alpha| = |AD - BC|.$$

Odvodili jsme, že obsah rovnoběžníka, který vznikne z obdélníka \bar{K} , je $|AD - BC|$ -násobkem obsahu obdélníka \bar{K} . Kdyby byl obdélník \bar{K} jednotkový čtverec, byl by obsah rovnoběžníka $\alpha(\bar{K})$ přímo roven číslu $|AD - BC|$ (obrázek 12.18).



Obrázek 12.18 Obecná lineární transformace jednotkového čtverce.

Rovnoběžník $\alpha(\bar{K})$ je v kartézské soustavě souřadnic $\langle O; x, y, z \rangle$ s přidanou osou z určen vektory $\vec{\xi} = (A, C, 0)$ a $\vec{\zeta} = (B, D, 0)$. Z elementární geometrie víme, že jeho plošný obsah je roven velikosti vektorového součinu těchto vektorů, tj. $|\vec{\xi} \times \vec{\zeta}| = |AD - BC|$. Věta o transformaci dává „správnou“ hodnotu obsahu.

V následujícím příkladu zobecníme závěry příkladů 12.23, 12.24 a 12.25 na n -rozměrný případ.

Příklad 12.26: Speciální případ lineární transformace n -rozměrného kvádru

Uvažujme o (regulárních) lineárních transformacích

$$\alpha : \bar{K} \ni u \longrightarrow \alpha(u) = x \in \alpha(\bar{K}) \subset \mathbf{R}^n, \quad \text{resp.} \quad \beta : \bar{K} \ni u \longrightarrow \beta(u) = x \in \beta(\bar{K}) \subset \mathbf{R}^n,$$

daných rovnicemi

$$\alpha : x^1 = u^1, \dots, x^{i-1} = u^{i-1}, x^i = ku^i, x^{i+1} = u^{i+1}, \dots, x^n = u^n \implies$$

$$\begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 & \dots & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & k & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

přičemž číslo $k \neq 0$ stojí na i -té diagonální pozici, resp.

$$\beta : x^1 = u^1, \dots, x^{i-1} = u^{i-1}, x^i = u^i + lu^j, x^{i+1} = u^{i+1}, \dots, x^n = u^n \implies$$

$$\begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 & \dots & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & l & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

kde libovolné číslo l stojí na j -té řádkové a i -té sloupcové pozici. V případě zobrazení α zvolme nejprve $i = 1$, v případě β nechť je $i = 1, j = 2$. Také pro tuto zobrazení věta o transformaci integrálu platí. Ukážeme to pro zobrazení β : Pro určitost zapišme kvádr \bar{K} jako kartézský součin intervalů, tj. $\bar{K} = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \times \dots \times [a^n, b^n]$. Pak

$$\beta(\bar{K}) = \bar{P} \times \bar{Q},$$

kde \bar{P} je rovnoběžník vzniklý transformací obdélníka $[a^1, b^1] \times [a^2, b^2]$ zobrazením $\tilde{\beta} : (u^1, u^2) \rightarrow (x^1, x^2) = (u^1 + lu^2, u^2)$ a $\bar{Q} = \text{id}([a^3, b^3] \times \dots \times [a^n, b^n])$. Podle Fubiniovy věty platí

$$\int_{\beta(\bar{K})} dx^1 \dots dx^n = \int_{\bar{Q}} \left[\int_{\bar{P}} dx^1 dx^2 \right] dx^3 \dots dx^n = \int_{\bar{Q}} \left[\int_{[a^1, b^1] \times [a^2, b^2]} |\det D\tilde{\beta}(u^1, u^2)| du^1 du^2 \right] dx^3 \dots dx^n.$$

Použili jsme závěru z příkladu 12.25, podle něhož věta o transformaci platí pro zobrazení $\tilde{\beta}$. Současně je

$$\det D\beta(u^1, \dots, u^n) = \det D\tilde{\beta}(u^1, u^2) = 1,$$

a

$$\int_{\bar{Q}} dx^3 \dots dx^n = \int_{[a^3, b^3] \times \dots \times [a^n, b^n]} du^3 \dots du^n.$$

Odtud

$$\int_{\beta(\bar{K})} dx = \int_{\bar{K}} |\det D\beta(u)| du.$$

Pro zobrazení α je důkaz zcela analogický (úloha 17 cvičení 12.1.13). Vzhledem k možnosti záměny pořadí integrace, zaručené Fubiniovou větou, je zřejmé, že věta o transformaci integrálu platí pro zobrazení α i β při libovolné volbě indexů $1 \leq i, j \leq n$.

Díky výsledkům speciálních příkladů lineárních transformací je již snadné potvrdit platnost věty 12.11 pro libovolnou lineární transformaci

$$\alpha : \bar{K} \ni (u) \longrightarrow \alpha(u) = (x) \in \alpha(\bar{K}) \subset \mathbf{R}^n,$$

$$(x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n) = (u^1 \ u^2 \ \dots \ u^n) \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{pmatrix},$$

kde A_i^j , $1 \leq i, j \leq n$, jsou reálné koeficienty. V druhém dílu jsme totiž v příkladu 4.44 (strana 65, vztah (4.29)) ukázali, že každá regulární matice je součinem tzv. elementárních matic. Elementární matice však jsou právě ty, které figurují v příkladu 12.26. Každá z nich přímo reprezentuje příslušné speciální lineární zobrazení α , resp. β z tohoto příkladu. Jejich součin pak reprezentuje složení všech těchto speciálních lineárních zobrazení. Protože již víme, že platí-li věta o transformaci integrálu pro jednotlivá zobrazení, platí i pro jejich složení, a protože determinant součinu matic je roven součinu determinantů jednotlivých činitelů, jsme s důkazem věty 12.11 pro libovolnou lineární transformaci hotovi.

Zbývají poslední dvě části důkazu: přejít od lineární transformace ke zcela libovolné a od jednotkové, resp. konstantní integrované funkce $f(x)$ rovněž k libovolné. Začneme druhým z obou zobecnění.

Nyní dokážeme, že z věty o transformaci pro jednotkovou funkci plyne též věta pro libovolnou funkci. Připomeňme, že (bez ztráty obecnosti) stále uvažujeme o množině A jako o uzavřeném n -rozměrném kvádru v \mathbf{R}^n , vlastnosti zobrazení α pak zajišťují kompaktnost obrazu $\alpha(A)$. Pro lepší názornost uvažujme o funkci $f = f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$ spojitě a nezáporně na množině $\alpha(A)$. Můžeme si ale takové omezení vůbec dovolit? Věta předpokládá funkci f integrovatelnou na $\alpha(A)$. Tento předpoklad povoluje její nespojitost pouze v bodech zanedbatelné podmnožiny množiny A , přičemž „velikosti nespojitostí“, tj. hodnoty oscilací, nemají vliv na hodnotu integrálu. Funkce $f \circ \alpha$, definovaná na množině A , je rovněž spojitá a nezáporná. Označme $Q = A \times [a, b]$, kde $[a, b]$ je libovolný interval, pro který je $a < (f \circ \alpha)(u^1, \dots, u^n) < b$ pro všechny body $(u^1, \dots, u^n) \in A$, a

$$V = \left\{ (u^1, \dots, u^n, u^{n+1}) \in Q \mid 0 \leq u^{n+1} \leq (f \circ \alpha)(u^1, \dots, u^n) \right\}.$$

Definujme zobrazení

$$\bar{\alpha} : V \ni (u^1, \dots, u^n, u^{n+1}) \longrightarrow (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \in \bar{\alpha}(V) \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

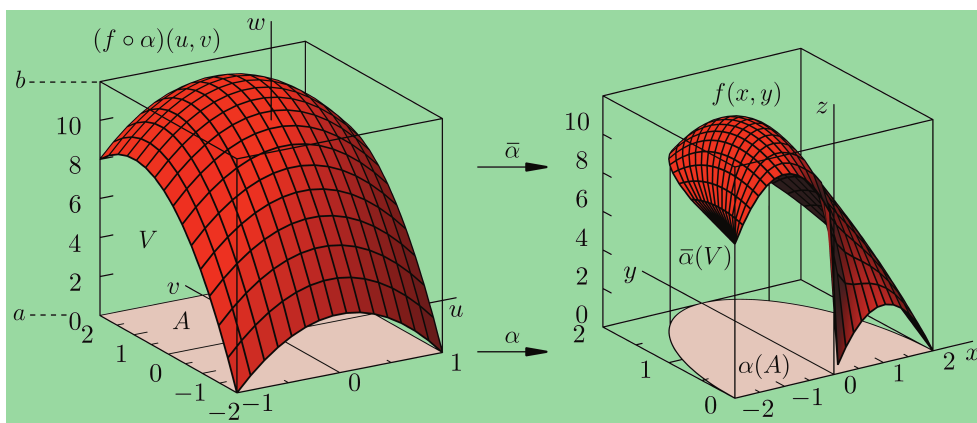
tak, že $(x^1, \dots, x^n) = \alpha(u^1, \dots, u^n)$ a $x^{n+1} = u^{n+1}$, tj. $\bar{\alpha}(V) \subset \alpha(A) \times [a, b]$, přesněji

$$\bar{\alpha}(V) = \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid (x^1, \dots, x^n) \in \alpha(A), 0 \leq x^{n+1} \leq f(x^1, \dots, x^n) \right\}.$$

Příklad takové situace je znázorněn na obrázku 12.19. Jacobiho matice zobrazení $\bar{\alpha}$

$$\left(\begin{array}{c|c} D\alpha & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

je bloková. Prvním blokem je Jacobiho matice $D\alpha$, druhý blok tvoří jednička. Proto platí $\det D\bar{\alpha}(\bar{u}) = \det D\alpha(u)$, kde jsme označili $u = (u^1, \dots, u^n)$ a $\bar{u} = (u^1, \dots, u^{n+1})$.



Obrázek 12.19 K důkazu věty o transformaci integrálu.

Pomocí definice „prvního zobecnění integrálu“ (viz odstavec 12.1.7 a vztah (12.25)) a s použitím Fubiniovy věty můžeme vyjádřit integrál z funkce $F = F(x^1, \dots, x^{n+1}) = 1$, pro $(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \bar{\alpha}(V)$, takto:

$$\begin{aligned} v(\bar{\alpha}(V)) &= \int_{\bar{\alpha}(V)} 1 dx^1 \dots dx^n dx^{n+1} = \int_{\alpha(A)} \left(\int_{[a,b]} \chi_{\bar{\alpha}(V)} dx^{n+1} \right) dx^1 \dots dx^n = \\ &= \int_{\alpha(A)} \left(\int_0^{f(x)} dx^{n+1} \right) dx^1 \dots dx^n = \int_{\alpha(A)} f(x) dx, \quad x = (x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Jistě jste nepřehlédli označení $v(\bar{\alpha}(V))$, které znamená, že se jedná o jordanovský objem množiny $\bar{\alpha}(V)$. Najdete argumenty pro to, že je skutečně jordanovsky měřitelná? Za předpokladu, že věta o transformaci platí pro jednotkovou funkci, má tento integrál (při označení $\bar{u} = (u^1, \dots, u^n, u^{n+1})$) ještě jiné vyjádření:

$$v(\bar{\alpha}(V)) = \int_{\bar{\alpha}(V)} 1 dx^1 \dots dx^n dx^{n+1} = \int_V |\det D\bar{\alpha}(\bar{u})| du^1 \dots du^n du^{n+1} =$$

$$= \int_A |\det D\alpha(u)| \left(\int_0^{(f \circ \alpha)(u)} du^{n+1} \right) du^1 \dots du^n = \int_A (f \circ \alpha)(u) |\det D\alpha(u)| du.$$

Jakkoli se mohlo zdát neuvěřitelné, že z věty o transformaci pro jednotkovou funkci vyplývá její platnost pro *libovolnou* funkci, právě jsme to dokázali.

Zbývá poslední krok, dokázat větu o transformaci pro *libovolné* zobrazení α . Důkaz provedeme indukcí vzhledem k dimenzi integračního oboru. Pro $n = 1$ věta platí, neboť se jedná o větu o substituci v jednonásobném integrálu (příklad 12.22), kterou jsme dokázali v prvním dílu. Indukční předpoklad znamená, že vycházíme z hypotézy, že věta platí pro obecné n . V indukčním kroku provedeme záměnu $n \rightarrow n + 1$ a větu za pomoci indukčního předpokladu dokážeme pro $n + 1$. Nechť A je tentokrát $(n + 1)$ -rozměrný uzavřený kvádr v \mathbf{R}^{n+1} a $\alpha : A \rightarrow \alpha(A) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ zobrazení splňující všechny potřebné požadavky věty 12.11,

$$\alpha : A \ni u \longrightarrow \alpha(u) = v \in \alpha(A) \subset \mathbf{R}^{n+1},$$

kde jsme označili

$$u = (u^1, \dots, u^{n+1}),$$

$$v = (v^1, \dots, v^{n+1}) = (\alpha^1(u^1, \dots, u^{n+1}), \dots, \alpha^{n+1}(u^1, \dots, u^{n+1})),$$

přičemž $\alpha^i(u^1, \dots, u^{n+1})$ představuje zjednodušené označení pro $v^i \alpha(u^1, \dots, u^{n+1})$, tj. pro i -tou složku zobrazení α jako funkci proměnných u^1, \dots, u^{n+1} . Vytvořme toto zobrazení pomocí jistého „mezistupně“ tak, že nejprve ponecháme poslední, tj. $(n+1)$ -tou, souřadnici zobrazovaných bodů beze změny:

$$\beta : A \ni u \longrightarrow \beta(u) = (\alpha^1(u), \dots, \alpha^n(u), u^{n+1}),$$

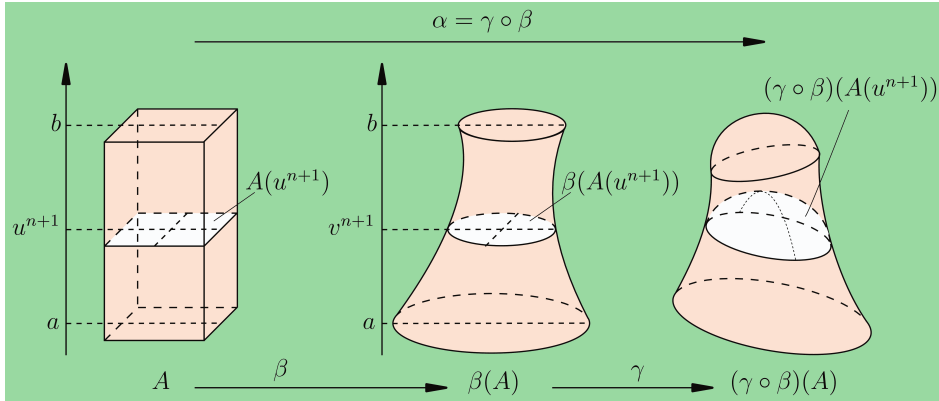
při důsledném značení $v^i \beta(u) = v^i \beta(u^1, \dots, u^{n+1}) = v^i \alpha(u^1, \dots, u^{n+1}) = \alpha^i(u)$ pro $1 \leq i \leq n$, a $v^{n+1} \beta(u) = v^{n+1} \beta(u^1, \dots, u^{n+1}) = u^{n+1}$. Zobrazení β „zdeformuje“ pouze řezy množiny A n -rozměrnými „nadrovinami“ $u^{n+1} = \text{konst.}$ Tyto řezy jsou n -rozměrnými kvádry v \mathbf{R}^n . Přesně se jedná o množiny $A \cap \{(u^1, \dots, u^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid u^{n+1} = \text{konst.}\}$. Označme je třeba $A(u^{n+1})$. Pro $n = 2$ je to dobře vidět na obrázku 12.20.

Definujme další zobrazení, které se naopak nedotkne prvních n složek předchozího obrazu a „dokončí práci“ zobrazení α v poslední složce:

$$\gamma : \beta(A) \ni v \longrightarrow \gamma(v) = x \in \mathbf{R}^{n+1},$$

$$x = (x^1, \dots, x^{n+1}) = (v^1, \dots, v^n, \alpha^{n+1}(\beta^{-1}(v))).$$

Platí $\alpha = \gamma \circ \beta$. Pokud se podaří dokázat větu o transformaci pro zobrazení β a γ , budeme hotovi. Víme již totiž, že platí-li tato věta pro jednotlivá zobrazení, platí i pro jejich kompozici. Také využijeme toho, že důkaz stačí provést pro jednotkovou funkci — to už jsme dokázali. Věnujme se nejprve zobrazení β . Integrační obor A je kartézským součinem $A = \bar{P} \times [a, b]$,



Obrázek 12.20 Ještě k důkazu věty o transformaci integrálu.

kde \bar{P} je uzavřený n -rozměrný kvádr v \mathbf{R}^n a $[a, b]$ je interval, přičemž pro všechny body $u = (u^1, \dots, u^{n+1}) \in A$ je $(u^1, \dots, u^n) \in \bar{P}$ a $u^{n+1} \in [a, b]$. Opět pomůže Fubiniova věta:

$$\int_{\beta(A)} 1 \, dv^1 \dots dv^{n+1} = \int_{[a, b]} \left(\int_{\beta(A(u^{n+1}))} dv^1 \dots dv^n \right) dv^{n+1}. \quad (12.32)$$

Při zpracování vnitřního integrálu zacházíme v souladu s Fubiniovou větou s proměnnou $v^{n+1} = u^{n+1}$ jako s konstantou. Ona také na integračním oboru $\beta(A(u^{n+1}))$ dokonce konstantní je. Vnitřní integrál je integrálem po n -rozměrném integračním oboru $\beta(A(u^{n+1}))$ z jednotkové funkce podle proměnných v^1, \dots, v^n . Vypadá to tedy, že při vyjádření vnitřního integrálu bude možné použít indukčního předpokladu. Přesně vzato, je třeba jej aplikovat na zúžení zobrazení β na množinu $A(u^{n+1})$ a ubezpečit se, že jsou splněny požadavky věty o transformaci pro toto zúžené zobrazení

$$\tilde{\beta} = \beta|_{A(u^{n+1})} : A(u^{n+1}) \ni (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow (\alpha^1(u), \dots, \alpha^n(u)) \in \tilde{\beta}(A(u^{n+1})),$$

kde $\alpha^i(u) = \alpha^i(u^1, \dots, u^{n+1})$, $1 \leq i \leq n$, a $\beta(A(u^{n+1})) = \tilde{\beta}(A(u^{n+1})) \times \{u^{n+1}\}$, kde ovšem $u^{n+1} = \text{konst.!!}$ Zobrazení α je podle předpokladu vzájemně jednoznačné a spojitě diferencovatelné. Totéž platí pro zobrazení β a $\tilde{\beta}$. Ihned to vidíme z Jacobiho matic:

$$D\beta(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha^1(u)}{\partial u^1} & \dots & \dots & \frac{\partial \alpha^n(u)}{\partial u^1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \alpha^1(u)}{\partial u^n} & \dots & \dots & \frac{\partial \alpha^n(u)}{\partial u^n} & 0 \\ \frac{\partial \alpha^1(u)}{\partial u^{n+1}} & \dots & \dots & \frac{\partial \alpha^n(u)}{\partial u^{n+1}} & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \frac{\partial \alpha^1(u)}{\partial u^{n+1}} & \dots & \frac{\partial \alpha^n(u)}{\partial u^{n+1}} & 1 \end{array} \right).$$

Kromě toho je z nich zřejmé, že $\det D\beta = \det D\tilde{\beta}$. Vlastnosti zobrazení α a β zajistí také jordanovskou měřitelnost integračních oborů $\alpha(A)$ a $\tilde{\beta}(A(u^{n+1}))$. Pro vyjádření vnitřního integrálu

ve vztahu (12.32) skutečně můžeme použít větu o transformaci pro n -rozměrný případ, tj. náš indukční předpoklad. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\beta(A)} 1 \, dv^1 \dots dv^{n+1} &= \int_{[a,b]} \left(\int_{A(u^{n+1})} |\det D\tilde{\beta}(u)| \, du^1 \dots du^n \right) du^{n+1} = \\ &= \int_{[a,b]} \left(\int_{A(u^{n+1})} |\det D\beta(u)| \, du^1 \dots du^n \right) du^{n+1} = \int_A |\det D\beta(u)| \, du^1 \dots du^{n+1}. \end{aligned}$$

Zbývá dokázat větu o transformaci ještě pro zobrazení γ . Jacobiho matice zobrazení γ a její determinant jsou

$$D\gamma(v) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & \begin{array}{c} \frac{\partial(\gamma^{n+1} \circ \beta^{-1})(v)}{\partial v^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\gamma^{n+1} \circ \beta^{-1})(v)}{\partial v^n} \end{array} \\ \hline 0 \dots 0 & \frac{\partial(\gamma^{n+1} \circ \beta^{-1})(v)}{\partial v^{n+1}} \end{array} \right), \quad \det D\gamma(v) = \frac{\partial(\gamma^{n+1} \circ \beta^{-1})(v)}{\partial v^{n+1}}.$$

Platí

$$\int_{\gamma[\beta(A)]} dx^1 \dots dx^n dx^{n+1} = \int_{\tilde{\beta}[A(u^{n+1})]} \left[\int_{\gamma^{n+1}([a,b])} dx^{n+1} \right] dx^1 \dots dx^n.$$

V zápisu posledního integrálu není vidět důležitá věc: množina $\gamma^{n+1}([a,b])$ totiž závisí i na proměnných $x^1 = v^1, \dots, x^n = v^n$. Zobrazení γ sice ponechává prvních n souřadnic zobrazovaného bodu beze změny, poslední, tj. $(n+1)$ -tou souřadnici však mění v závislosti na těch předchozích. Při výpočtu vnitřního integrálu pracujeme s proměnnými $x^1 = v^1, \dots, x^n = v^n$ jako s konstantami. Použijeme větu o substituci podle příkladu 12.22 a dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\gamma[\beta(A)]} dx^1 \dots dx^n dx^{n+1} &= \int_{\tilde{\beta}[A(u^{n+1})]} \left[\int_a^b \left| \frac{\partial(\gamma^{n+1} \circ \beta^{-1})(v)}{\partial v^{n+1}} \right| dv^{n+1} \right] dv^1 \dots dv^n = \\ &= \int_{\beta(A)} |\det D\gamma(v)| \, dv^1 \dots dv^n dv^{n+1}. \end{aligned}$$

Pro zobrazení γ tedy věta o transformaci rovněž platí.

V právě ukončeném důkazu se mimořádně osvědčila Fubiniova věta. Proč? Protože umožňuje „rozdřít“ integraci na vícerozměrném oboru na postupný výpočet integrálů na oborech méněrozměrných. A právě to jsme pro důkaz indukci vzhledem k dimenzi integračního oboru potřebovali.

12.1.9 Aplikace: geometrické a fyzikální charakteristiky rovinných a prostorových útvarů

Nyní se již budeme věnovat příkladům a praktickým výpočtům geometrických a fyzikálních charakteristik rovinných a hlavně prostorových útvarů.

Příklad 12.27: Geometrické a fyzikální charakteristiky rovinných útvarů

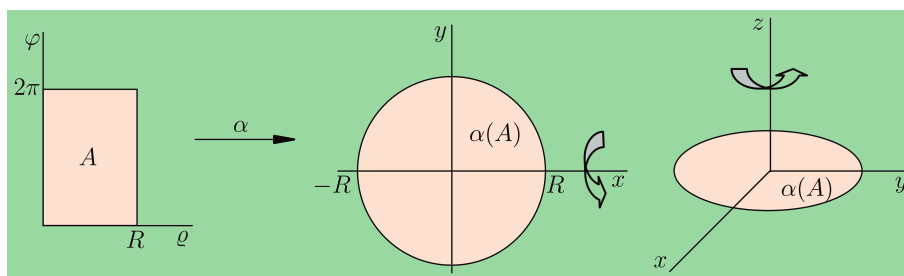
Už žáci základní školy vědí, že plošný obsah kruhu o poloměru R je πR^2 . *Jak to ale vědí?* Řekli jim to učitelé. Pomocí integrálu však tento výsledek snadno odvodíme. Dostaneme jej jako integrál z jednotkové funkce na integračním oboru, jímž je právě onen kruh. Víme také z kapitoly 5 druhého dílu, že kruh vznikne jako obraz obdélníka $A = [0, R] \times [0, 2\pi]$ zobrazením přiřazujícím polárním souřadnicím (r, φ) souřadnice kartézské:

$$\alpha : [0, R] \times [0, 2\pi] \ni (\varrho, \varphi) \longrightarrow \alpha(\varrho, \varphi) = (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi.$$

V kapitole 5 jsme odvodili i Jacobiho matici a víme, že její determinant je $\det D\alpha = \varrho$. Obsah kruhu je

$$v(\alpha(A)) = \int_{\alpha(A)} dx dy = \int_A |\det D\alpha| d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \varrho d\varrho \right) d\varphi = \left[\frac{1}{2} \varrho^2 \right]_0^R \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \pi R^2.$$

Představme si kruh $\alpha(A)$ jako rovinný útvar s rovnoměrně rozloženou hmotností s plošnou hustotou $\sigma = \text{konst.}$ Může jím být třeba kus plechu. Jeho hmotnost pak vypočteme velice snadno jako $m = \sigma \pi R^2$. Ani s výpočtem středu hmotnosti se nemusíme příliš trápit. Vzhledem k symetrii útvaru a jeho homogenitě bude ležet uprostřed. Jak je to ale s momenty setrvačnosti při rotaci kolem různých os? Dejme tomu, že kruh leží v souřadnicové rovině xy (obrázek 12.21).



Obrázek 12.21 Charakteristiky kruhu.

Základními osami, kolem kterých může rotovat, jsou osa z a kterákoli z přímek ležících v rovině kruhu a procházejících jeho středem, třeba osa x . Vypočteme oba momenty setrvačnosti (opět s použitím věty o transformaci integrálu). Moment setrvačnosti vzhledem k libovolné ose je pak možné určit na základě těchto dvou hodnot a umístění osy rotace. To už je ale fyzikální problém, který zde řešit nebudeme. Pro momenty setrvačnosti J_z a J_x platí

$$J_z = \int_{\alpha(A)} (x^2 + y^2) \sigma dx dy = \sigma \int_A \varrho^2 \cdot \varrho d\varrho d\varphi = \sigma \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^R \varrho^3 d\varrho \right) = \sigma \left[\frac{1}{4} \varrho^4 \right]_0^R \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \pi \sigma R^4 = \frac{1}{2} m R^2,$$

$$J_x = \int_{\alpha(A)} \sigma y^2 dx dy = \sigma \int_A \varrho^2 \sin^2 \varphi \cdot \varrho d\varrho d\varphi =$$

$$= \sigma \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^R \varrho^3 \, d\varrho \right) = \sigma \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{4}\varrho^4 \right]_0^R = \frac{1}{4}mR^2.$$

Příklad 12.28: Fyzikální charakteristiky nehomogenních rovinných útvarů

Zůstaňme u kruhu znázorněného na obrázku 12.21, s tím rozdílem, že nyní bude jeho hmotnost rozložena nerovnoměrně. Dokonce předpokládejme, že rozložení hmotnosti „pokazí“ rotační symetrii útvaru vzhledem k ose z . Zvolme za plošnou hustotu třeba funkci

$$\sigma(x, y) = kx^2 \sqrt{x^2 + y^2}, \quad k = 1 \text{ kg m}^{-5} \quad k \text{ je rozměrová konstanta.}$$

Opět určíme hmotnost a základní momenty setrvačnosti (pozor, osy x a y již nejsou z hlediska momentů setrvačnosti ekvivalentní). Protože se střed hmotnosti mohl vysunout vlivem nesymetrie hustoty z geometrického středu, je třeba určit také jeho polohu. Integrační obor je však stále rotačně symetrický vzhledem k ose z , a tak použijeme opět transformaci do polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} m &= \int_{\alpha(A)} \sigma(x, y) \, dx \, dy = k \int_{\alpha(A)} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = k \int_A \varrho^2 \cos^2 \varphi \cdot \varrho \cdot \varrho \, d\varrho \, d\varphi = k \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^R \varrho^4 \, d\varrho \right) = \\ &= k \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{5}\varrho^5 \right]_0^R = \frac{1}{5}k\pi R^5. \end{aligned}$$

$$x_T = \frac{1}{m} \int_{\alpha(A)} x\sigma(x, y) \, dx \, dy = \frac{k}{m} \left(\int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^R \varrho^5 \, d\varrho \right) = \frac{k}{m} \left[\sin \varphi - \frac{1}{3}\sin^3 \varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{6}\varrho^6 \right]_0^R = 0,$$

$$y_T = \frac{1}{m} \int_{\alpha(A)} y\sigma(x, y) \, dx \, dy = \frac{k}{m} \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^R \varrho^5 \, d\varrho \right) = \frac{k}{m} \left[-\frac{1}{3}\cos^3 \varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{6}\varrho^6 \right]_0^R = 0.$$

I přes nesymetrii hustoty je střed hmotnosti opět totožný s geometrickým středem kruhu. Co myslíte? Bude tomu tak při *jakékoli* volbě funkce $\sigma(x, y)$, nebo je naše volba natolik speciální, že ke změně polohy středu hmotnosti nedošlo? Dokážete nezměněnou polohu středu hmotnosti zdůvodnit na základě konkrétního typu zadání funkce $\sigma(x, y)$? A ještě momenty setrvačnosti:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{\alpha(A)} y^2 \sigma(x, y) \, dx \, dy = k \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^R \varrho^6 \, d\varrho \right) = \\ &= k \left[\frac{1}{8}\varphi - \frac{1}{32}\sin 4\varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{7}\varrho^7 \right]_0^R = \frac{1}{28}k\pi R^7 = \frac{5}{28}mR^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= \int_{\alpha(A)} x^2 \sigma(x, y) \, dx \, dy = k \left(\int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^R \varrho^6 \, d\varrho \right) = \\ &= k \left[\frac{3}{8}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{32}\sin 4\varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{7}\varrho^7 \right]_0^R = \frac{3}{28}k\pi R^7 = \frac{15}{28}mR^2. \end{aligned}$$

Moment setrvačnosti J_z vzhledem k ose z vypočtete pro kontrolu. Z jeho definice je zřejmé, že by vám měl vyjít součet momentů J_x a J_y .

Typickou geometrickou charakteristikou prostorových útvarů je jejich objem. Na základní a střední škole jste se nazpaměť museli naučit vzorce pro objem válce, kužele, koule, kulové výseče, kulové úseče a dalších útvarů. Nyní si je všechny dokážeme odvodit. Budeme se jim věnovat v následujících příkladech, v nichž budeme opět s výhodou využívat větu o transformaci a volit vhodné křivočaré souřadnice podle symetrie tělesa. Samozřejmě budeme potřebovat i Fubiniovu větu. Některá tělesa a jejich rozměry jsou znázorněna na obrázku 12.22.

Příklad 12.29: Objemy prostorových útvarů — kužel

Objem kužele \mathcal{K} o poloměru podstavy R a výšce h je $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. Vypočteme jej. Pláštěm kužele je část kuželové plochy o rovnici $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$ omezené nerovností $0 \leq z \leq h$. (Rovnici si můžete připomenout v odstavci 6.3.2 druhého dílu.) Průmětem podstavy do souřadnicové roviny xy je kruh $P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Pro objem dostaneme

$$\begin{aligned} v(\mathcal{K}) &= \int_{\mathcal{K}} dx dy dz = \int_P \left(\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h dz \right) dy dx = \int_P \left(h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \right) dy dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left(h - \frac{h}{R}\rho \right) \rho d\rho \right] d\varphi = 2\pi \left[\frac{1}{2}h\rho^2 - \frac{h}{3R}\rho^3 \right]_0^R = \frac{1}{3}\pi R^2 h. \end{aligned}$$

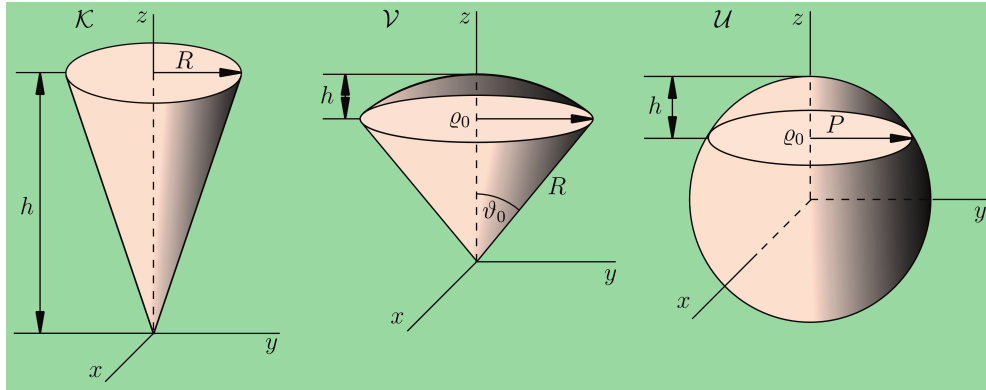
Také si pamatujete, že těžiště (střed hmotnosti) kužele leží ve třech čtvrtinách výšky od vrcholu. I toto snadno ověříme. Souřadnice x_T a y_T počítat nemusíme. Vzhledem k symetrii a homogenitě tělesa jsou nulové. Označme hustotu tělesa jako s . Pro z_T platí

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{s}{m} \int_{\mathcal{K}} z dx dy dz = \frac{1}{v(\mathcal{K})} \int_P \left(\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h z dz \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{v(\mathcal{K})} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{1}{2} \left(h^2 - \frac{h^2}{R^2}\rho^2 \right) \rho d\rho \right] d\varphi = \frac{\pi h^2}{v(\mathcal{K})} \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\frac{\rho^4}{R^2} \right]_0^R = \frac{\pi h^2}{v(\mathcal{K})} \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}h. \end{aligned}$$

Příklad 12.30: Objemy prostorových útvarů — kulová výseč

Kulová výseč \mathcal{V} je definována poloměrem koule R a vrcholovým úhlem ϑ_0 (obrázek 12.22). Její objem vypočteme transformací definičního integrálu do kulových souřadnic r, ϑ, φ :

$$\begin{aligned} \alpha : [0, R] \times [0, \vartheta_0] \times [0, 2\pi] &\ni (r, \vartheta, \varphi) \longrightarrow (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \\ x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad \det D\alpha = r^2 \sin \vartheta, \\ v(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{K}} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\vartheta_0} \left(\int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\vartheta \right] d\varphi = 2\pi [-\cos \vartheta]_0^{\vartheta_0} \cdot \left[\frac{1}{3}r^3 \right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos \vartheta_0). \end{aligned}$$



Obrázek 12.22 Geometrické útvary.

Pro kontrolu správnosti poslouží hodnota $\vartheta_0 = \pi$. Pro ni je totiž „výsečí“ celá koule. Po dosazení $\cos \vartheta_0 = \cos \pi = -1$ skutečně dostaneme správný objem koule $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Příklad 12.31: Objemy prostorových útvarů — kulová úseč

Kulová úseč \mathcal{U} je většinou zadávána poloměrem koule R a výškou h , popřípadě poloměrem ϱ_0 (namísto výšky, nebo poloměru koule — zbývající údaj lze vždy dopočítat). Její objem snadno dostaneme, odečteme-li od objemu příslušné kulové výseče objem kužele, na němž úseč „sedí“. Vypočteme však její objem pomocí integrálu a teprve poté porovnáme s rozdílem objemu výseče a kužele. Všechny výsledky vyjádříme pomocí R a h .

$$\begin{aligned}
 v(\mathcal{U}) &= \int_{\mathcal{U}} dx dy dz = \int_P \left(\int_{R-h}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right) dx dy = \\
 &= \int_P \left(\sqrt{R^2-x^2-y^2} - (R-h) \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\varrho_0} \left(\sqrt{R^2-\varrho^2} - (R-h) \right) \varrho d\varrho \right] d\varphi = \\
 &= 2\pi \left[-\frac{1}{3} (R^2-\varrho^2)^{3/2} - \frac{1}{2} \varrho^2 (R-h) \right]_0^{\varrho_0} = \frac{2}{3} \pi \left(R^3 - (R^2-\varrho_0^2)^{3/2} \right) - \pi \varrho_0^2 (R-h) = \\
 &= \frac{2}{3} \pi \left(R^3 - (R-h)^3 \right) - \pi (R-h) \left(R^2 - (R-h)^2 \right) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R-h).
 \end{aligned}$$

Objem odpovídající kulové výseče je, podle výsledku příkladu 12.30,

$$v(\mathcal{V}) = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos \theta_0) = \frac{2}{3} \pi R^3 \left(1 - \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - \varrho_0^2} \right) = \frac{2}{3} \pi R^2 h,$$

objem kužele pak

$$v(\mathcal{K}) = \frac{1}{3} \pi \varrho_0^2 (R-h) = \frac{1}{3} \pi \left(R^2 - (R-h)^2 \right) (R-h).$$

Po odečtení a úpravách se ukáže, že rozdíl $v(\mathcal{V}) - v(\mathcal{K})$ je skutečně roven objemu úseče \mathcal{U} .

Příklad 12.32: Fyzikální charakteristiky prostorových útvarů — kužel

Jednou z důležitých charakteristik těles je *tenzor momentu setrvačnosti*. Zatím jsme počítali momenty setrvačnosti vzhledem k souřadnicovým osám. Tyto momenty tvoří diagonálu matice, již je tenzor momentu setrvačnosti v dané soustavě souřadnic reprezentován. Mimodiagonální prvky se nazývají *deviační momenty*. Vypočteme prvky tenzoru momentu setrvačnosti pro homogenní kužel o hustotě $s(x, y) = s = \text{konst.}$ na obrázku 12.22. Soustavu souřadnic však nespojíme s vrcholem kužele, ale s jeho středem hmotnosti. Ten má vzhledem k soustavě souřadnic znázorněné na obrázku 12.22 polohu $\vec{r}_T = (0, 0, \frac{3}{4}h)$. Rovnice kuželové plochy vzhledem k soustavě souřadnic spojené se středem hmotnosti je

$$z = -\frac{3}{4}h + \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2},$$

rovnice horní podstavy kužele v této soustavě je $z = \frac{1}{4}h$. Jednotlivé prvky tenzoru momentu setrvačnosti jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} J_{11} &= J_x = \int_{\mathcal{K}} (y^2 + z^2) s(x, y) \, dx \, dy \, dz, \\ J_{22} &= J_y = \int_{\mathcal{K}} (x^2 + z^2) s(x, y) \, dx \, dy \, dz, \\ J_{33} &= J_z = \int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2) s(x, y) \, dx \, dy \, dz, \\ J_{12} &= J_{21} = - \int_{\mathcal{K}} xy s(x, y) \, dx \, dy \, dz, \\ J_{13} &= J_{31} = - \int_{\mathcal{K}} xz s(x, y) \, dx \, dy \, dz, \\ J_{23} &= J_{32} = - \int_{\mathcal{K}} yz s(x, y) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \tag{12.33}$$

Výpočet integrálů provedeme ve válcových souřadnicích, které nejlépe odpovídají symetrii integračního oboru:

$$\begin{aligned} J_{11} &= s \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left(\int_{-\frac{3}{4}h + \frac{h}{R}\varrho}^{\frac{1}{4}h} (\varrho^2 \sin^2 \varphi + z^2) \, dz \right) \varrho \, d\varrho \right] d\varphi = \\ &= s \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[\varrho^3 \sin^2 \varphi \left(h - \frac{h}{R}\varrho \right) + \frac{1}{3}\varrho \left(\frac{1}{64}h^3 - \left(-\frac{3}{4}h + \frac{h}{R}\varrho \right)^3 \right) \right] d\varrho \right\} d\varphi = \\ &= \frac{1}{80} \pi s h R^2 (4R^2 + h^2). \end{aligned}$$

Složka J_{22} má stejnou hodnotu jako J_{11} vzhledem k symetrii. Integrál vyjadřující J_{22} se od J_{11} liší pouze záměnou $\sin^2 \varphi \rightarrow \cos^2 \varphi$, na výsledku integrování to však nic nezmění. Dále je

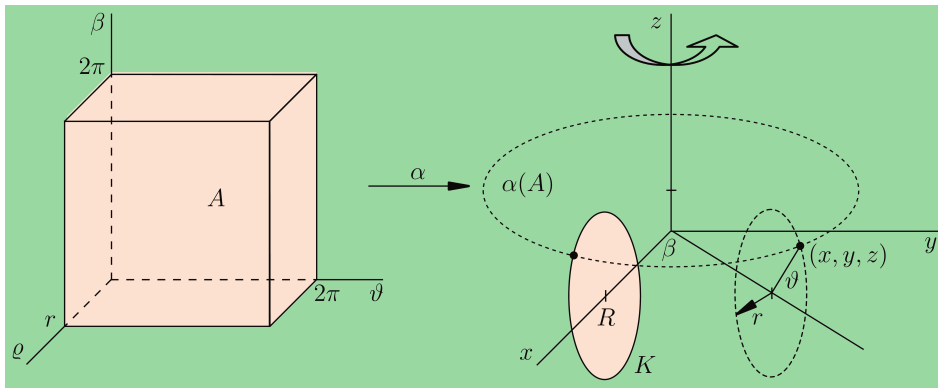
$$J_{33} = s \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left(\int_{-\frac{3}{4}h + \frac{h}{R}\varrho}^{\frac{1}{4}h} \varrho^2 \, dz \right) \varrho \, d\varrho \right] d\varphi = 2\pi s \int_0^R \varrho^3 \left(h - \frac{h}{R}\varrho \right) d\varrho = \frac{1}{10} \pi s h R^4.$$

$$J_{12} = s \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi \left[\int_0^R \varrho^3 \left(\int_{-\frac{3}{4}h + \frac{h}{R}\varrho}^{\frac{h}{4}} dz \right) d\varrho \right] d\varphi = s \left(\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^R \varrho^3 \left(h - \frac{h}{R}\varrho \right) d\varrho \right) = 0.$$

Správnost výpočtu momentu setrvačnosti kužele vzhledem k jeho ose J_{33} můžete zkontrolovat: počítali jsme jej v příkladu 2.86 v prvním dílu s využitím rotační symetrie (byl označen jako J_x , neboť poloha kužele byla taková, že souřadnicová osa x byla jeho osou symetrie). Při výpočtu jsme tehdy o válcových souřadnicích samozřejmě nehovořili, v podstatě však byly použity tak nějak „skrytě“. (Pokusíte se to vysvětlit?)

Příklad 12.33: Fyzikální charakteristiky prostorových útvarů — anuloid

Anuloid, nebo též *toroid*, je těleso vzniklé rotací kruhu K ležícího původně v souřadnicové rovině xz , se středem v bodě $(R, 0, 0)$ a poloměrem $r < R$, kolem osy z (obrázek 12.23).



Obrázek 12.23 Anuloid.

Předpokládejme opět, že je homogenní a má hustotu $s = \text{konst}$. Vypočteme jeho hmotnost a tenzor momentu setrvačnosti. Ze symetrie plyne, že střed hmotnosti leží v počátku soustavy souřadnic, deviační momenty jsou nulové a složky J_{11} a J_{22} mají stejnou hodnotu. (Pro kontrolu a procvičení můžete tvrzení odvolávající se na symetrii tělesa ověřit podrobným výpočtem.) Symetrie tělesa si opět žádá použití křivočarých souřadnic namísto kartézských, jak je vidět i z obrázku. Transformace α z křivočarých do kartézských souřadnic je dána zobrazením

$$\alpha : A = [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \ni (\varrho, \vartheta, \beta) \longrightarrow (x, y, z) \in \alpha(A) \subset \mathbf{R}^3, \\ x = (R + \varrho \cos \vartheta) \cos \beta, \quad y = (R + \varrho \cos \vartheta) \sin \beta, \quad z = \varrho \sin \vartheta.$$

Jacobiho matice této transformace a její determinant jsou

$$D\alpha = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \beta & \cos \vartheta \sin \beta & \sin \vartheta \\ -\varrho \sin \vartheta \cos \beta & -\varrho \sin \vartheta \sin \beta & \varrho \cos \vartheta \\ -(R + \varrho \cos \vartheta) \sin \beta & (R + \varrho \cos \vartheta) \cos \beta & 0 \end{pmatrix}, \\ \det D\alpha = -\varrho(R + \varrho \cos \vartheta).$$

Hmotnost tělesa je dána integrálem

$$m = s \int_{\alpha(A)} dx dy dz = \int_A |\det D\alpha(\varrho, \vartheta, \beta)| d\varrho d\vartheta d\beta = s \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \varrho(R + \varrho \cos \vartheta) d\varrho \right) d\vartheta \right] d\beta = 2s\pi^2 r^2 R.$$

Pro diagonální složky momentu setrvačnosti platí

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \int_{\alpha(A)} (y^2 + z^2) s \, dx \, dy \, dz = s \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r ((R + \varrho \cos \vartheta)^2 \sin^2 \beta + \varrho^2 \sin^2 \vartheta) \varrho (R + \varrho \cos \vartheta) \, d\varrho \right) d\vartheta \right] d\beta = \\
 &= \frac{1}{4} s \pi^2 r^2 R (4R^2 + 5r^2) = J_{22}, \\
 J_{33} &= \int_{\alpha(A)} (x^2 + y^2) s \, dx \, dy \, dz = s \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \varrho (R + \varrho \cos \vartheta)^3 \, d\varrho \right) d\vartheta \right] d\beta = \frac{1}{2} s \pi^2 r^2 R (4R^2 + 3r^2)
 \end{aligned}$$

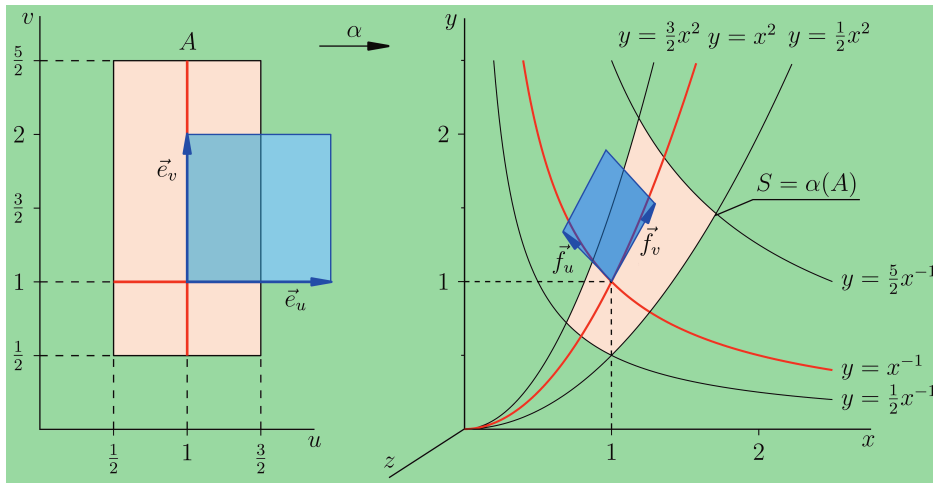
S dalšími praktickými příklady na použití Fubiniovy věty a věty o transformaci si ve Cvičení 12.1.13 pomocí předchozích návodů jistě poradíte.

12.1.10 „Dluhy“ z předchozích dílů

V tomto okamžiku máme „na pořádném“ matematickém základu vybudován pojem vícenásobného integrálu na jordanovsky měřitelných integračních oborech, včetně formulací a důkazů vět umožňujících jejich praktické používání (Fubiniova věta a věta o transformaci integrálu). V geometrické a fyzikální praxi to znamená, že umíme počítat charakteristiky rovinných a prostorových útvarů. V prvním dílu jsme se zabývali jednonásobným integrálem a na základě něj odvodili křivkový integrál prvního druhu. V odstavcích 5.2.5 a 5.3.3 jsme zavedli pojem elementu délky. Prakticky tedy umíme počítat geometrické a fyzikální charakteristiky křivek (jednorozměrných útvarů v \mathbf{R}^2 , v \mathbf{R}^3 , viz odstavce 2.3.5 a 2.3.6). Na jednonásobný integrál dokážeme převést výpočet některých rovinných útvarů v \mathbf{R}^2 (odstavec 2.3.3), ale také rotačních ploch v \mathbf{R}^3 (odstavec 2.3.7). V odstavci 9.3.3 jsme dokonce definovali křivkový integrál druhého druhu, takže umíme počítat i práci silového pole. Umíme toho vcelku dost, ale ještě ne všechno. Nedokážeme zatím spočítat integrály, jejichž integračními obory jsou plochy v \mathbf{R}^3 (obecně k -rozměrné útvary v \mathbf{R}^n pro $1 < k < n$). Příkladem takových výpočtů mohou být geometrické a fyzikální charakteristiky „křivých“ ploch — plošný obsah, hmotnost, poloha středu hmotnosti, momenty setrvačnosti, ale také třeba tok silového pole danou plochou, o kterém jsme se zmínili v odstavci 9.4.1. Dokonce jsme v tomto odstavci elementárně „odvodili“ Gaussovu-Ostrogradského větu (vztah (9.68)). Slovo „odvodili“ je v uvozovkách úmyslně: prezentované „odvození“ je sice velmi jednoduché a názorné, nepředstavuje však důkaz. V druhém dílu jsme totiž plošný integrál neměli ani pořádně definovaný. A o tento „dluh“ se nyní bude jednat, i když nebude „splacen“ zcela — naprosto korektní definici integrálu v situaci, kdy integračním oborem je k -rozměrný útvar v \mathbf{R}^n pro $1 < k < n$, formulujeme teprve poté, kdy zavedeme nový typ integrovaných objektů — diferenciální formy. K čemu je tedy tento vsunutý odstavec, když ani v něm nebude řečeno vše v úplné obecnosti? Je určen čtenářům, kteří netrvají na precizním výkladu teorie, potřebují však provádět praktické výpočty a názorně jim rozumět.

Další výklad v tomto odstavci bude zaměřen právě takto. Jeho podstatou bude návod, jak převést integrál po ploše v \mathbf{R}^3 , která nemusí být rovinná, na integrál dvojnásobný, který už máme zaveden zcela korektně. Zmíněný návod bude založen na geometricky názorné představě plošného elementu z odstavců 5.2.4 a 5.3.2 v druhém dílu. Čtenář, který si tento odstavec projde do konce, bude schopen spočítat úlohy Cvičení 12.4.7, týkající se charakteristik plošných útvarů a toků vektorových polí různými plochami, i kdyby zbylé odstavce kapitoly 12 přeskočil. Geometricky názornou, byť stále poněkud „intuitivní“ definici plošného elementu a plošného integrálu si můžeme dovolit, protože její oprávněnost, zřejmá z korektně dokázané věty o transformaci aplikované na rovinné útvary v \mathbf{R}^2 , a oprávněnost jejího zobecnění na dvojrozměrné útvary v \mathbf{R}^3 , se ukáže v odstavci 12.4.

Podívejme se na obrázek 12.24 a aplikujme větu 12.11 (o transformaci integrálu) na případ $n = 2$ (vzpomeňte si, že podobnou situaci jsme viděli v příkladech 5.29 a 5.30 v druhém dílu a v příkladu 12.18, doprovázeném obrázkem 12.14):



Obrázek 12.24 Element rovinné plochy a věta o transformaci integrálu.

Integračním oborem na obrázku je oblast omezená parabolami $y = \frac{1}{2}x^2$ a $y = \frac{3}{2}x^2$ a dvěma hyperbolami $y = \frac{1}{2}x^{-1}$ a $y = \frac{5}{2}x^{-1}$. Obecný bod této oblasti (na obrázku je zvolen bod $(1,1)$) je průsečíkem paraboly $y = ux^2$ a hyperboly $y = vx^{-1}$. Oborem parametrů u a v je obdélník

$$A = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right].$$

Z rovnic $y = ux^2$ a $y = vx^{-1}$ vypočteme x a y jako funkce těchto parametrů,

$$x(u, v) = u^{-1/3}v^{1/3}, \quad y(u, v) = u^{1/3}v^{2/3}.$$

Zobrazení α vystupující ve větě o transformaci integrálu, jeho Jacobiho matice a jakobián mají tvar

$$\alpha : A \ni (u, v) \longrightarrow \alpha(u, v) = (x, y) \in \alpha(A) \subset \mathbf{R}^2,$$

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) = u^{-1/3}v^{1/3}, \\y &= y(u, v) = u^{1/3}v^{2/3},\end{aligned}$$

$$D\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} \\ \frac{1}{3}u^{-1/3}v^{-2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \end{pmatrix}, \quad |\det D\alpha(u, v)| = \frac{1}{3}u^{-1}.$$

Plošný obsah útvaru $\alpha(A)$ (jeho jordanovský objem) je pak roven integrálu z jednotkové funkce a podle věty o transformaci je

$$v(\alpha(A)) = \int_{\alpha(A)} 1 \, dx \, dy = \int_A |\det D\alpha(u, v)| \, du \, dv = \int_{1/2}^{5/2} \left[\int_{1/2}^{3/2} \frac{1}{3}u^{-1} \, du \right] dv = \frac{2}{3} \ln 3.$$

Podívejme se na tutéž úlohu jinak a připomeňme si při tom poznatky z kapitoly 5. Zobrazení α představuje parametrické vyjádření rovinného útvaru (tj. „placaté“ plochy) $\alpha(A)$. Obecným bodem tohoto útvaru $(x_0, y_0) = \alpha(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ (v našem konkrétním případě $(u_0, v_0) = (1, 1)$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$) prochází *souřadnicová křivka*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_u : \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \ni u &\longrightarrow \alpha(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0)) = \\ &= (u^{-1/3}v_0^{1/3}, u^{1/3}v_0^{2/3}) = (u^{-1/3}, u^{1/3}) \in \alpha(A) \subset \mathbf{R}^2\end{aligned}$$

(hyperbola $y = v_0x^{-1} = x^{-1}$) a souřadnicová křivka

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_v : \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right] \ni v &\longrightarrow \alpha(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v)) = \\ &= (u_0^{-1/3}v^{1/3}, u_0^{1/3}v^{2/3}) = (v^{1/3}, v^{2/3}) \in \alpha(A) \subset \mathbf{R}^2\end{aligned}$$

(parabola $y = u_0x^2 = x^2$). Všimněme si nyní Jacobiho matice zobrazení α v bodě (u_0, v_0) . Její první řádek obsahuje x -ovou a y -ovou složku vektoru

$$\vec{f}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Big|_{(u_0, v_0)},$$

který je tečný ke křivce \mathcal{C}_u v bodě (x_0, y_0) (z -ová složka tohoto vektoru je nulová), druhý řádek pak složky vektoru

$$\vec{f}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) \Big|_{(u_0, v_0)}$$

tečného ke křivce \mathcal{C}_v v tomtéž bodě (jeho z -ová složka je rovněž nulová). Okamžitě vidíme, že jakobián zobrazení α je roven velikosti vektorového součinu vektorů \vec{f}_u a \vec{f}_v . Tento závěr, který jsme názorně demonstrovali na konkrétním případu, platí obecně.

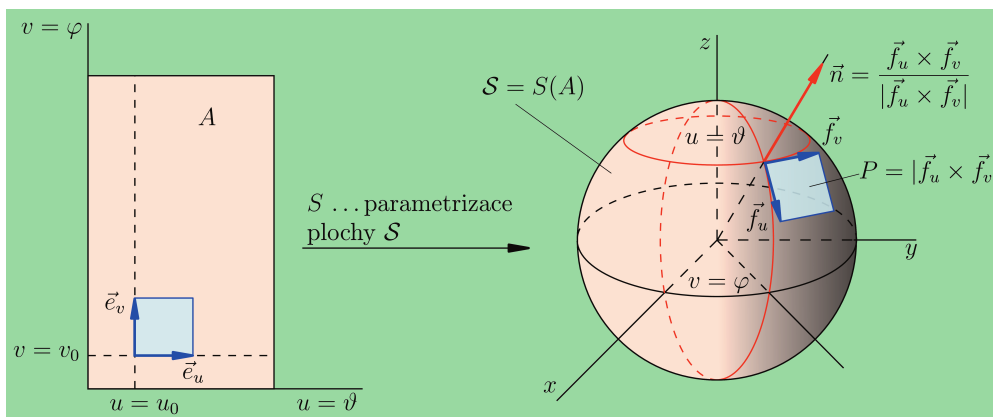
Tvrzení věty o transformaci integrálu pro rovinný integrační obor můžeme proto zapsat místo standardního způsobu s jakobiánem ve tvaru

$$\int_{\alpha(A)} f(x, y) dx dy = \int_A (f \circ \alpha) |\vec{f}_u \times \vec{f}_v| du dv. \quad (12.34)$$

Výraz $|\vec{f}_u \times \vec{f}_v| du dv$ nazýváme *objemový element* rovinné plochy $S = \alpha(A)$, parametrizované zobrazením α .

Integrand $(f \circ \alpha) |\vec{f}_u \times \vec{f}_v|$ na pravé straně posledního integrálu je samozřejmě funkcí proměnných u a v .

Předchozí úvahy, které se týkaly rovinných útvarů, nyní zobecníme na plošné útvary v \mathbf{R}^3 , tj. na *křivé* plochy. Musíme si však uvědomit, že zatímco tyto úvahy a jejich důsledek (12.34) vyplývaly z již dokázané věty o transformaci integrálu, bude mít jejich zobecnění charakter definice — zobecněním totiž zavedeme nový typ integrálu. Geometrickou představu podpoříme obrázkem 12.25.



Obrázek 12.25 Element „křivé“ plochy a věta o transformaci integrálu.

Předpokládejme, že A je jordanovsky měřitelná množina v \mathbf{R}^2 , jejíž objem je nenulový (to proto, aby byla skutečně „dvojměrná“) a

$$S : A \ni (u, v) \longrightarrow S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbf{R}^3$$

je spojitě diferencovatelné zobrazení, jehož hodnota, tj. hodnota Jacobiho matice, je na množině A rovna dvěma (s případnou výjimkou zanedbatelné množiny). Dále

necht $f = f(x, y, z)$ je spojitá funkce definovaná na jednoduše souvislé oblasti obsahující množinu $\mathcal{S} = S(A)$. Zobrazení S se nazývá *parametrizace*, nebo též *parametrické vyjádření* plochy \mathcal{S} . Označme

$$\vec{f}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \vec{f}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right). \quad (12.35)$$

Integrálem prvního druhu z funkce $f(x, y, z)$ na ploše \mathcal{S} rozumíme

$$\int_{\mathcal{S}} f \, dS = \int_A (f \circ S) |\vec{f}_u \times \vec{f}_v| \, du \, dv. \quad (12.36)$$

A hned zkusme na případu z obrázku 12.25 vyzkoušet, jak definice funguje. Pro kontrolu vypočteme nejprve plošný obsah kulové plochy, neboť víme, jaký má být výsledek. Pokud je definice v pořádku, vyjde $P(\mathcal{S}) = 4\pi R^2$, má-li kulová plocha poloměr R . A potom ještě určíme moment setrvačnosti této plochy vzhledem k ose jdoucí jejím středem za předpokladu, že hmotnost je po ní rozložena homogenně, tj. s konstantní plošnou hustotou σ . Parametrizace plochy \mathcal{S} pomocí parametrů u a v , z nichž první má význam sférického úhlu ϑ a druhý význam azimutálního úhlu φ (obrázek), je

$$S : A = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \ni (u, v) \longrightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbf{R}^3,$$

kde

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = R \sin u \cos v, \\ y &= y(u, v) = R \sin u \sin v, \\ z &= z(u, v) = R \cos u, \end{aligned}$$

a odtud

$$\begin{aligned} \vec{f}_u &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, -R \sin u), \\ \vec{f}_v &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = (-R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, 0), \\ \vec{f}_u \times \vec{f}_v &= (R^2 \sin^2 u \cos v, R^2 \sin^2 u \sin v, R^2 \sin u \cos u), \\ |\vec{f}_u \times \vec{f}_v| &= R^2 \sin u. \end{aligned}$$

Kdo přečetl kapitolu 5 (konkrétně příklad 5.14 s obrázkem 5.10), jistě se tomuto výsledku nediví. Pro zjištění plošného obsahu počítáme integrál prvního druhu z identicky jednotkové funkce:

$$P(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} dS = \int_A R^2 \sin u \, du \, dv = R^2 \left(\int_0^{2\pi} dv \right) \left(\int_0^{\pi} \sin u \, du \right) = 4\pi R^2.$$

Pro moment setrvačnosti plochy \mathcal{S} vzhledem k ose z platí

$$\begin{aligned} J_z &= \int_{\mathcal{S}} \sigma(x^2 + y^2) \, dS = \int_A (\sigma R^2 \sin^2 u)(R^2 \sin u) \, du \, dv = \\ &= \sigma R^4 \left(\int_0^{2\pi} dv \right) \left(\int_0^{\pi} \sin^3 u \, du \right) = \frac{8}{3} \pi \sigma R^4 = \frac{2}{3} m R^2, \end{aligned}$$

kde $m = 4\pi\sigma R^2$ je hmotnost útvaru \mathcal{S} .

Nechť jsou splněny předpoklady předchozí definice týkající se množiny A a zobrazení S . Nechť

$$\vec{n} : \mathcal{S} \ni \vec{r} = (x, y, z) \longrightarrow \vec{n}(\vec{r}) = \vec{n}(x, y, z) \in T_x \mathbf{R}^3, \quad |\vec{n}(\vec{r})| = 1, \quad (12.37)$$

je vektorová funkce spojitá vzhledem k množině \mathcal{S} , přičemž vektor \vec{n} je v každém bodě plochy \mathcal{S} k této ploše kolmý. Vektorová funkce n se nazývá *spojité vektorové pole jednotkové normály k ploše \mathcal{S}* . Tvoří-li vektory \vec{f}_u , \vec{f}_v a \vec{n} v každém bodě plochy (s případnou výjimkou zanedbatelné množiny, v níž je hodnota Jacobiho matice $D\mathcal{S}$ menší než 2) pravotočivou, resp. levotočivou bázi, nazývá se parametrizace S plochy \mathcal{S} *souhlasná*, resp. *nesouhlasná* s orientací plochy \mathcal{S} vektorovým polem normály \vec{n} . Předpokládáme, že $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$ je spojitě diferencovatelná vektorová funkce (*spojitě diferencovatelné vektorové pole*) definovaná na jednoduše souvislé oblasti obsahující množinu $\mathcal{S} = S(A)$. *Integrálem druhého druhu z vektorového pole \vec{F}* rozumíme

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} \, d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}} (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, dS. \quad (12.38)$$

Všimněme si podrobněji integrálu (12.38). Dejme tomu, že parametrizace S plochy \mathcal{S} je souhlasná s její orientací vektorovým polem normály \vec{n} . Pak platí

$$\vec{n} \circ S = \frac{\vec{f}_u \times \vec{f}_v}{|\vec{f}_u \times \vec{f}_v|}$$

(uvědomte si, že výsledné vektorové pole je vyjádřeno v závislosti na parametrech u a v). Označíme-li $\vec{F}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) = f(x, y, z)$, dostaneme kombinaci vztahů (12.38) a (12.36)

$$\int_{\mathcal{S}=S(A)} \vec{F} \, d\vec{S} = \int_A (\vec{F} \circ S) \frac{\vec{f}_u \times \vec{f}_v}{|\vec{f}_u \times \vec{f}_v|} |\vec{f}_u \times \vec{f}_v| \, du \, dv = \int_A (\vec{F} \circ S) (\vec{f}_u \times \vec{f}_v) \, du \, dv.$$

Získali jsme návod pro výpočet integrálu druhého druhu z vektorového pole \vec{F} po ploše \mathcal{S} parametrizované zobrazením S souhlasně s předem zvolenou orientací:

$$\int_{\mathcal{S}=S(A)} \vec{F} d\vec{S} = \int_A (\vec{F} \circ S)(\vec{f}_u \times \vec{f}_v) du dv. \quad (12.39)$$

Zkusme teď podle tohoto „vzoru“ vypočítat tok vektorového pole

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad r = |\vec{r}|,$$

plochou \mathcal{S} na obrázku 12.25. Už jsme se s ním také setkali: jedná se o vektorové pole silového působení náboje Q umístěného v počátku soustavy souřadnic na kladný jednotkový náboj v bodě o polohovém vektoru \vec{r} . Tok vektorového pole \vec{F} plochou \mathcal{S} je definován jako plošný integrál druhého druhu z pole \vec{F} po ploše \mathcal{S} . (Vraťte se v souvislosti s touto definicí k příkladu 9.74.) Platí

$$(\vec{F} \circ S)(\vec{f}_u \times \vec{f}_v) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sin u.$$

Už na tomto místě si můžeme říci, že se dílčímu výsledku opět nedivíme — to, že nezávisí na poloměru kulové plochy \mathcal{S} , jsme museli čekat: všechny siločáry elektrického pole bodového náboje uvězněného uvnitř uzavřené plochy musí z této plochy vystoupit, ať je jakkoli velká (a dokonce jakkoli tvarovaná). Pro tok nakonec dostaneme

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} dv \right) \left(\int_0^{\pi} \sin u du \right) = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Analogický výsledek, avšak matematicky poněkud hůře podložený, jsme získali pro gravitační pole v příkladu 9.78.

A nakonec ještě jedna dobrá pomůcka pro výpočty. V plošných integrálech obou typů vystupuje velikost vektorového součinu vektorů \vec{f}_u a \vec{f}_v , tečných k souřadnicovým křivkám ležícím v ploše \mathcal{S} a určeným její parametrizací. Počítat vektorový součin a jeho velikost je poměrně pracné. Výpočet si však můžeme usnadnit, uvědomíme-li si, že obecně platí

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \vec{b})^2 = \det \begin{pmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a} \vec{b} \\ \vec{a} \vec{b} & \vec{b}^2 \end{pmatrix}.$$

(Sami si tento jednoduchý vztah jistě snadno dokážete, například přímo pomocí složek vektorů \vec{a} a \vec{b} .) Pro $\vec{a} = \vec{f}_u$ a $\vec{b} = \vec{f}_v$ tak dostaneme

$$|\vec{f}_u \times \vec{f}_v|^2 = \det G, \quad G = \begin{pmatrix} \vec{f}_u \vec{f}_u & \vec{f}_u \vec{f}_v \\ \vec{f}_u \vec{f}_v & \vec{f}_v \vec{f}_v \end{pmatrix}. \quad (12.40)$$

Pro integrál prvního, resp. druhého druhu dostaneme

$$\int_S f(x, y, z) dS = \int_A (f \circ S) \sqrt{\det G} du dv, \quad \text{resp.} \quad \int_S \vec{F} d\vec{S} = \int_A [(\vec{F} \vec{n}) \circ S] \sqrt{\det G} du dv. \quad (12.41)$$

Zjednodušení výpočtu při použití této verze vztahů pro plošné integrály spočívá v tom, že souřadnicové křivky dané parametrizací bývají často kolmé. Matice G je v takových případech diagonální. Že také tento způsob výpočtu vede ke správným výsledkům si už na příkladu z obrázku 12.25 ověřte sami.

S aparátém umožňujícím výpočty plošných integrálů, který jsme si vyložili v tomto odstavci, mohou čtenáři, kteří považují klasické pojetí integrálního počtu pro sebe za postačující, rovnou přejít k odstavci 12.4.6 a v jeho rámci se věnovat pouze klasickým formulacím integrálních vět a praktickým výpočtům — úlohy k procvičení najdete v odstavci 12.4.7.

12.1.11 Příklad: druhé zobecnění integrálu

Tento odstavec je přídatkem pro čtenáře, kteří si libují v teoretických úvahách. (Pro jeho čtení bude vhodné zopakovat si topologické pojmy z Dodatku F prvního dílu a z odstavce 9.1 dílu druhého, speciálně příklad 9.8 — str. 445 druhého dílu.) Ve vztahu k názvu knihy lze říci, že je určen spíše pro hlubší porozumění problematice integrálu, než pro praxi v integrování. Pokud jej čtenář zcela pomine, nic zlého se nestane. Ukazujeme v něm, že pojem Riemannova integrálu lze ještě dále zobecnit, a to i na některé případy neohraničených funkcí a jordanovsky neměřitelných integračních oborů. Zatím jsme v definici integrálu předpokládali, že integrované funkce jsou ohraničené na kvádrech obsahujících množiny, na kterých je chceme integrovat, a že integrační obory jsou jordanovsky měřitelné. Je jasné, co by se stalo, kdybychom chtěli třeba i na tak neproblematickém oboru, jakým je uzavřený kvádr, integrovat funkci, která by na něm nebyla ohraničená. Nemohli bychom vytvořit Darbouxovy součty, na nichž je dosavadní definice Riemannova integrálu založena. Co by se stalo, kdyby problém naopak nedělala integrovaná funkce, ale chtěli bychom ji integrovat na jordanovsky neměřitelné, byť ohraničené, množině? Uvažujme třeba o jednoduché situaci, popsané v následujícím příkladu.

Příklad 12.34: Integrovat na jordanovsky neměřitelných množinách (zatím) nelze

Předpokládejme, že na n -rozměrném uzavřeném kvádru \bar{K} v \mathbf{R}^n je definována funkce $f: \bar{K} \ni x \rightarrow f(x) = 1 \in \mathbf{R}$. Z hlediska integrování je konstantní funkce zcela neškodná. Co když ji ale chceme integrovat na otevřené množině $A \subset \bar{K}$, která není jordanovsky měřitelná (její hranice není zanedbatelná). O integritě funkce f na množině A rozhoduje integritě funkce $f\chi_A$ na kvádru \bar{K} . V našem případě je $f\chi_A = \chi_A$. Vinou příliš „velké“ množiny bodů nespojitosti charakteristické funkce neměřitelné množiny však integrál

$$\int_{\bar{K}} f(x)\chi_A(x) dx = \int_{\bar{K}} \chi_A(x) dx$$

neexistuje.

132 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

V dalším příkladu uvidíme, že by mohlo mít smysl integrovat i (do jisté míry) neohraničené funkce i na některých neměřitelných, třeba i neomezených množinách.

Příklad 12.35: Lze integrovat neohraničené funkce a na jordanovsky neměřitelných množinách?

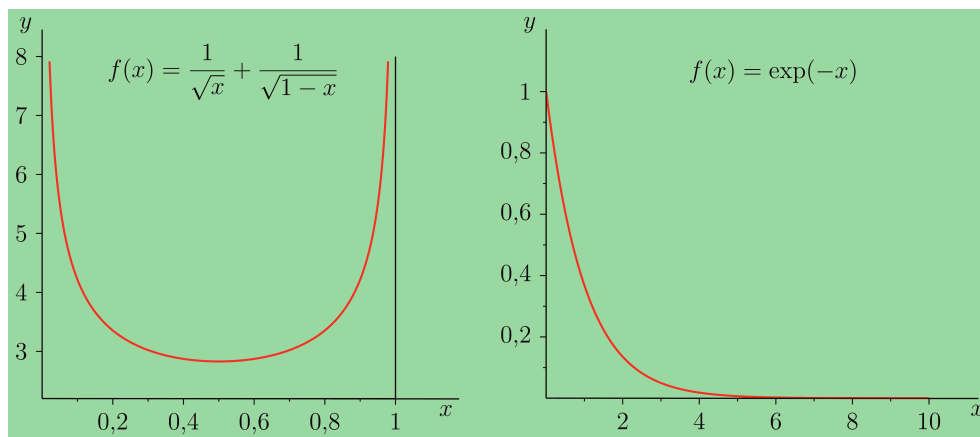
Na obrázku 12.26 jsou grafy funkcí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad f(x) = \exp(-x).$$

První z nich je definována na otevřeném intervalu $A = (0, 1)$. Množina A je sice jordanovsky měřitelná (zdůvodněte), funkce však na ní není ohraničená. Podle toho, co jsme se zatím v odstavci 12.1 dověděli, bychom pro ni vůbec nemohli Riemannův integrál na množině A definovat. Na druhé straně k ní existuje primitivní funkce $F(x) = 2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x})$, jejíž hodnoty lze v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$ vyčíslit, konkrétně je $F(0) = -2$, $F(1) = 2$. Jistě by se nám líbilo, kdybychom mohli napsat

$$\int_{(0,1)} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) dx = [\sqrt{x} - \sqrt{1-x}]_0^1 = 4.$$

Je to možné, nebo není? Pokud ano, pak by tato hodnota byla číselně rovna obsahu útvaru omezeného grafem dané (nezáporné) funkce a osou x . Že by plošný obsah útvaru, který „ubíhá do nekonečna“ byl konečný? Tomu bychom se nemuseli divit, podobně jako jsme se nedivili v kapitole 8, když nekonečná řada měla konečný součet.



Obrázek 12.26 Lze integrovat neohraničenou funkci, nebo na neohraničené množině?

Druhá funkce z obrázku 12.26 je na intervalu $A = (0, \infty)$ ohraničená, ale tento interval není jordanovsky měřitelnou množinou (jeho hranice, jíž je množina obsahující pouze nulu, je sice zanedbatelná, avšak pojem jordanovské měřitelnosti je definován pouze pro ohraničené množiny). I k funkci $f(x) = \exp(-x)$ existuje primitivní funkce $F(x) = -\exp(-x)$ a platí $F(0) = -1$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$. Opět by bylo příjemné, kdybychom mohli napsat

$$\int_{(0,\infty)} \exp(-x) dx = [-\exp(-x)]_0^\infty = 1.$$

Ale zatím nemůžeme. I když jsme si totiž v prvním dílu (Dodatek K) říkali, že takto budeme počítat nevlastní integrály, šlo pouze o rozšíření Newtonovy-Leibnizovy formule na nekonečné meze, popřípadě neohrazenou funkci, nikoli o vlastní rozšíření definice Riemannova integrálu. Navíc máme nyní oproti prvnímu dílu co do činění s vícenásobným integrálem.

Rádi bychom docílili možnosti počítat Riemannovy integrály alespoň z některých neohrazených funkcí, resp. na alespoň některých jordanovsky neměřitelných množinách, pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule, popřípadě jinak. Nemáme však pojem Riemannova integrálu, který by tomu odpovídal. Musíme proto definici Riemannova integrálu zobecnit tak, aby zobecněná definice nějakým způsobem „vymazala“ neměřitelnost, popřípadě i neohrazenost integračního oboru či integrované funkce. A současně aby obsahovala dosavadní definice jako speciální případy. Je jasné, že to nepůjde vždycky a že zobecnění bude mít omezující podmínky. Požadované „vymazávání“ nepohodlných překážek může zajistit nový pojem, kterému říkáme *rozklad jednotky*. Jeho zavedení a vlastnosti specifikuje následující věta.

Věta 12.12 (O rozkladu jednotky): *Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$ a \mathcal{O} je otevřené pokrytí množiny A . Pak existuje soubor Φ funkcí $\varphi(x)$ definovaných na otevřené nadmnožině množiny A , s následujícími vlastnostmi:*

- *Všechny funkce souboru Φ mají spojité parciální derivace všech řádů podle všech proměnných (tzv. funkce třídy C^∞).*
- *Pro každý bod $x \in A$ platí $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.*
- *Pro každý bod $x \in A$ existuje otevřená množina W_x taková, že $x \in W_x$ a všechny funkce $\varphi \in \Phi$ s výjimkou konečného počtu jsou nulové na W_x .*
- *Pro každý bod $x \in A$ platí $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$.*
- *Pro každou funkci φ souboru Φ existuje otevřená množina $U \in \mathcal{O}$ taková, že $\varphi = 0$ vně jisté uzavřené podmnožiny $\Omega \subset U$.*

Soubor Φ z věty 12.12 se nazývá *rozklad jednotky asociovaný s otevřeným pokrytím \mathcal{O} množiny A* . Množina Ω taková, že na jejím vnějšku je funkce $\varphi(x)$ nulová, se nazývá *nosič funkce φ* , značíme $\Omega = \text{supp } \varphi$ (support = nosič).

Uvědomte si, co znamená třetí tvrzení ve větě 12.12 z hlediska tvrzení čtvrtého: I když se sčítání funkčních hodnot $\varphi(x)$ v bodě x děje formálně přes celý soubor Φ , je počet funkcí, které v tomto bodě mají nenulovou hodnotu, pouze konečný. Ve skutečnosti je tedy výraz $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x)$ součtem konečného počtu nenulových hodnot. A ještě jedna důležitá věc plyne z třetího tvrzení: Dejme tomu, že množina A má nějakou kompaktní podmnožinu B . Pak soubor všech množin typu W_x z věty 12.12, kde x probíhá množinu B , tvoří otevřené pokrytí \mathcal{O}_B množiny B . Ta je

však kompaktní. Z každého jejího otevřeného pokrytí, a tedy i z \mathcal{O}_B , lze proto vybrat konečné podpokrytí. Na každé z takto vybraného *konečného počtu* pokrývajících množin je ovšem nenulový pouze *konečný počet* funkcí φ . Znamená to, že na *celé množině* B je nenulový konečný počet funkcí rozkladu jednotky.

Než začneme větu dokazovat, uveďme jeden typický příklad rozkladu jednotky, abychom si jej dokázali názorně představit.

Příklad 12.36: Rozklad jednotky

Zvolme za množinu A celou reálnou osu a pokryjme ji otevřenými množinami takto:

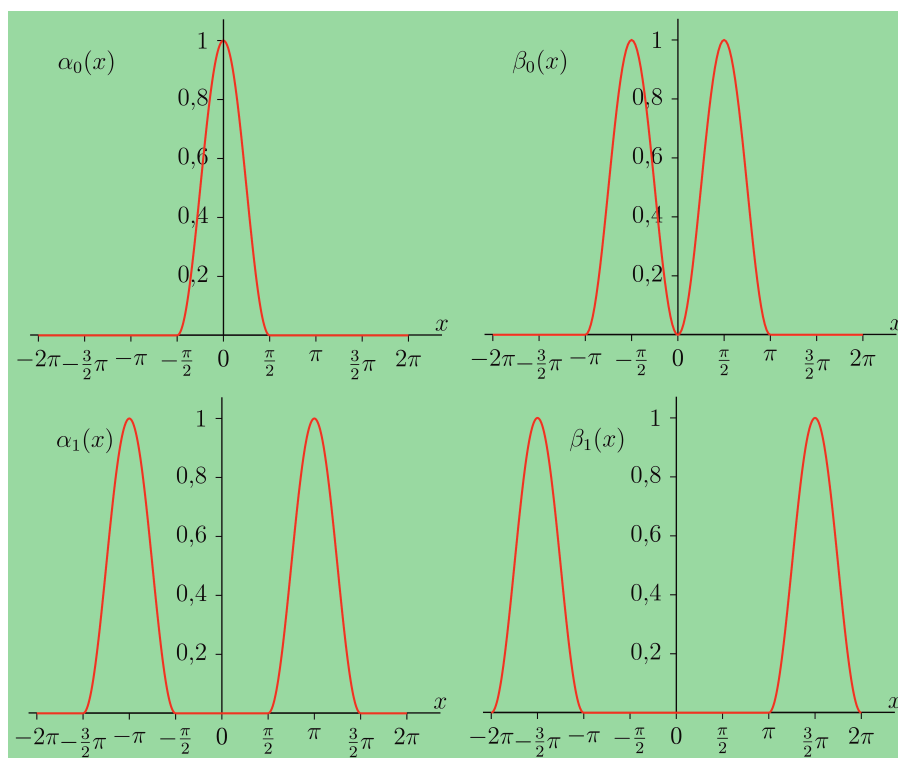
$$\mathcal{O} = \{U_k, V_k \mid k \in \mathbf{N} \cup \{0\}\},$$

kde

$$U_k = \left(-\frac{\pi}{2}(2k+1), \frac{\pi}{2}(2k-1)\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}(2k-1), \frac{\pi}{2}(2k+1)\right),$$

$$V_k = (k\pi, (k+1)\pi) \cup ((k+1)\pi, (k+2)\pi).$$

Na množinách U_k a V_k , $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, definujme následující funkce (obrázek 12.27):



Obrázek 12.27 Rozklad jednotky na reálné ose.

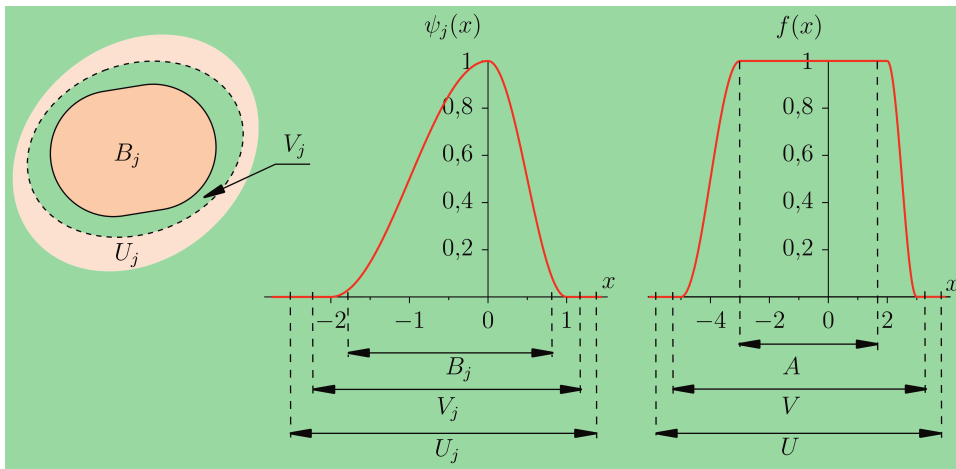
$$\alpha_k(x) = \cos^2 x \text{ pro } x \in U_k, \quad \alpha_k(x) = 0 \text{ pro } x \in \mathbf{R} \setminus U_k,$$

$$\beta_k(x) = \sin^2 x \text{ pro } x \in V_k, \quad \beta_k(x) = 0 \text{ pro } x \in \mathbf{R} \setminus V_k.$$

Snadno se sami přesvědčíte, že soubor $\Phi = \{\alpha_k, \beta_k \mid k = 0, 1, \dots\}$ je rozkladem jednotky asociovaným s pokrytím \mathcal{O} reálné osy.

Nyní už se věnujme dokazování věty. Chceme-li dokázat, že soubor funkcí, o kterém se v ní hovoří, skutečně existuje, musíme nějaký zkonstruovat. Konstrukci provedeme v několika krocích.

Krok I: množina A je kompaktní. Nejjednodušší je případ, kdy množina A je kompaktní. Provedme konstrukci rozkladu jednotky nejprve pro ni. Zvolme libovolné pokrytí \mathcal{O} kompaktní množiny A , jak to požaduje věta, a vyberme konečný počet množin, které rovněž tvoří pokrytí množiny A . Označme je U_1, \dots, U_N . Pokud se nám podaří sestrojít rozklad jednotky asociovaný s tímto konečným pokrytím, budeme mít zároveň rozklad asociovaný s pokrytím \mathcal{O} (sami promyslete, proč tomu tak je). Předpokládejme na chvíli, že bychom měli k dispozici soubor kompaktních množin B_1, \dots, B_N takový, že by platilo $B_j \subset U_j$ pro všechna $j = 1, \dots, N$, a současně by *vnitřky* množin B_j pokrývaly množinu A . Měli bychom tedy jakési speciální otevřené pokrytí množiny A odvozené od původního pokrytí $\{U_1, \dots, U_N\}$. Pro ně sestrojíme rozklad jednotky. Pro každé $j = 1, \dots, N$ označme $\psi_j(x)$ libovolnou funkci třídy C^∞ (pro připomenutí terminologie viz první bod věty 12.12), která je kladná na množině B_j a nulová vně jisté uzavřené množiny V_j , kde $B_j \subset V_j \subset U_j$ (obrázek 12.28).



Obrázek 12.28 Ke konstrukci rozkladu jednotky I.

Jak konkrétně takovou funkci vyrobit uvidíme ve Cvičení 12.1.13 při řešení úlohy 27. Označme $B = \cup_{j=1}^N \text{int } B_j$. Protože $\{\text{int } B_1, \dots, \text{int } B_N\}$ je otevřené pokrytí množiny A , existuje jistá otevřená množina U tak, že $A \subset U \subset B$, na které platí $\psi_1(x) + \dots + \psi_N(x) > 0$. Položme

$$\chi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\psi_1(x) + \dots + \psi_N(x)}. \tag{12.42}$$

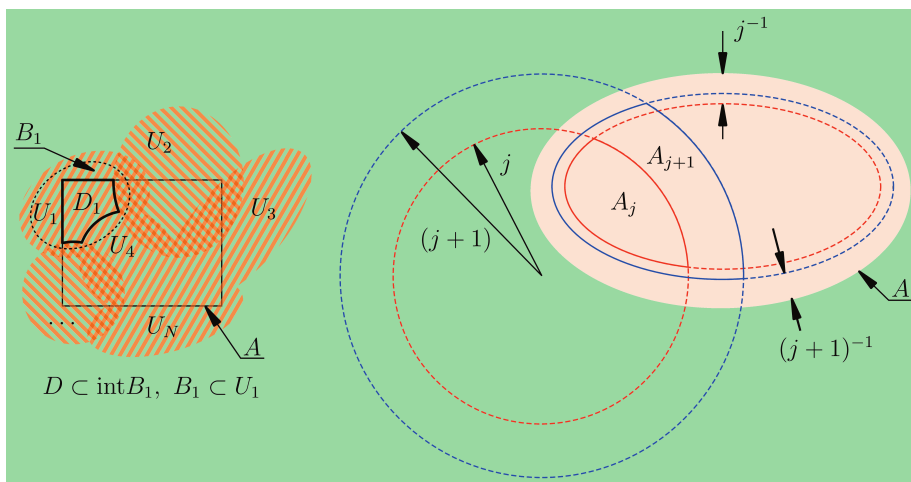
Dále necht' je $f : U \ni x \rightarrow f(x) \in [0, 1]$ funkce třídy C^∞ , která má hodnotu 1 ve všech bodech množiny A a je nulová vně jisté uzavřené množiny $V \subset U$ (obrázek 12.28 vpravo, konstrukce takové funkce je rovněž součástí úlohy 27 ve Cvičení 12.1.13). Soubor

$$\Phi = \{\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)\}, \quad \varphi_j(x) = f(x)\chi_j(x), \quad (12.43)$$

je rozkladem jednotky asociovaným s otevřeným pokrytím $\{\text{int } B_1, \dots, \text{int } B_N\}$. Současně je také rozkladem jednotky asociovaným s původním otevřeným pokrytím \mathcal{O} . Zbývá ukázat, že pro libovolný výběr podpokrytí $\{U_1, \dots, U_N\}$ původního otevřeného pokrytí \mathcal{O} opravdu dokážeme sestavit požadované pokrytí množiny A vnitřky kompaktních množin $B_1 \subset U_1$ až $B_N \subset U_N$. Sestrojíme nejprve první z nich, B_1 . Položme

$$D_1 = A \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_N).$$

Tato množina je kompaktní: je ohraničená, protože je obsažena v A , a je uzavřená, protože je rozdílem uzavřené množiny A a otevřené množiny $U_2 \cup \dots \cup U_N$. Současně je podmnožinou (otevřenou) množiny U_1 . Situaci znázorňuje obrázek 12.29 vlevo (množinu A představuje vyznačený obdélník).



Obrázek 12.29 Ke konstrukci rozkladu jednotky v krocích I (vlevo) a II (vpravo).

To ale ještě stále není množina B_1 , kterou hledáme, neboť $\text{int } D_1 \subset A$ a my potřebujeme, aby vnitřky množin B_1 až B_N *pokryly* množinu A . Přerušíme na chvíli dokazování a věnujme se příkladu, který nám pomůže požadovanou množinu B_1 sestavit.

Příklad 12.37: Množinové „matrjošky“

Představme si otevřenou množinu $U \subset \mathbf{R}^n$ a její kompaktní (tj. ohraničenou a uzavřenou) podmnožinu D . Ukážeme, že „mezi množiny U a D “, myšleno ve smyslu množinové inkluze, lze „vložit“ kompaktní množinu B ,

kteřá se stále ještě vejde do množiny U a zároveň její vnitřek bude obsahovat množinu D . K libovolnému bodu $x \in D$ existuje otevřený kvádr $(x^1 - 2\varepsilon^1, x^1 + 2\varepsilon^1) \times \dots \times (x^n - 2\varepsilon^n, x^n + 2\varepsilon^n) \subset U$. (Tuto vlastnost zajišťuje fakt, že množina U je otevřená a x je i jejím bodem. Víme totiž, že s každým bodem otevřené množiny se do ní „vejde“ i nějaké otevřené okolí tohoto bodu.) Vezmeme-li místo původně označených kvádrů v úvahu kvádry třeba o polovičních rozměrech, tj. $W_x = (x^1 - \varepsilon^1, x^1 + \varepsilon^1) \times \dots \times (x^n - \varepsilon^n, x^n + \varepsilon^n)$, pokryjeme jimi množinu D také a navíc se do množiny U vejdou i jejich uzávěry. Soubor $\{W_x \mid x \in D\}$ pokrývá množinu D . Ta však je kompaktní, a tak lze vybrat konečný podsoubor $\{W_1, \dots, W_M\}$, který množinu D rovněž pokrývá. Přitom konstrukce kvádrů W_x zajišťuje, že $\overline{W}_j \subset U$ pro $j = 1, \dots, M$. Množina $B = \overline{W}_1 \cup \dots \cup \overline{W}_M$ má požadované vlastnosti: je kompaktní (je sjednocením uzavřených kvádrů), je podmnožinou množiny U , a konečně její vnitřek, který je sjednocením otevřených kvádrů W_1, \dots, W_M , je nadmnožinou zadané množiny D .

A můžeme pokračovat v důkazu věty 12.12. Výsledek příkladu 12.37 zaručuje, že ke kompaktní množině $D_1 \subset U_1$, kterou jsme sestrojili ještě před tímto příkladem, existuje kompaktní množina $B_1 \subset U_1$, jejíž vnitřek obsahuje množinu D_1 . Dále označme

$$D_2 = A \setminus (\text{int } B_1 \cup U_3 \cup \dots \cup U_N).$$

To je opět kompaktní množina a platí $D_2 \subset U_2$. Postupně pro $k = 2, \dots, N$ konstruujeme další kompaktní množiny B_2 až B_N , pro něž $B_{k+1} \subset U_{k+1}$ a $D_{k+1} \subset \text{int } B_{k+1}$, kde

$$D_{k+1} = A \setminus (\text{int } B_1 \dots \cup \text{int } B_k \cup U_{k+2} \cup \dots \cup \text{int } U_N).$$

Vnitřky množin B_1 až B_N tvoří otevřené pokrytí množiny A . S takovým pokrytím již můžeme asociovat rozklad jednotky sestrojený v úvodní části důkazu. A ten, jak víme, je zároveň asociovaný s pokrytím \mathcal{O} množiny A , které jsme na začátku zvolili libovolně.

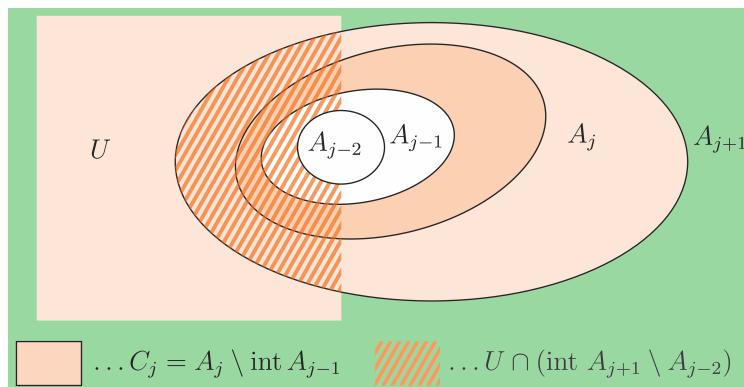
Krok II: množina A je spočetným sjednocením kompaktních množin. Krokem I však nejsme s důkazem zdaleka hotovi. Máme jej zatím jen pro kompaktní množinu A . Zobecníme jej nyní na případ, kdy množina A bude spočetným sjednocením kompaktních množin ve speciálním tvaru

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_j \cup A_{j+1} \cup \dots, \quad \text{přičemž } A_j \subset \text{int } A_{j+1}, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Sjednocováním pokračujícím „donekonečna“ se množina neustále „zvětšuje“ a může být dokonce neohraničená (například interval $A \in [0, \infty) \subset \mathbf{R}$ lze napsat jako sjednocení uzavřených, a tedy kompaktních intervalů $[0, 1], [0, 2], \dots, [0, j], \dots, j \in \mathbf{N}$). Uvědomte si, že taková volba budoucího integračního oboru je základem rozšíření Riemannova integrálu na nevlastní integrály. Otevřené pokrytí této množiny opět označme \mathcal{O} a jeho prvky obecným symbolem U . Množiny $A_j, j \in \mathbf{N}$, definují soubor *kompaktních* množin $C_j = A_j \setminus \text{int } A_{j-1}$ (zdůvodněte, proč jsou kompaktní). Pro každou z těchto množin umíme s libovolným jejím otevřeným pokrytím asociovat rozklad jednotky. To ale nestačí. Chceme-li získat rozklad jednotky pro množinu A , musíme otevřená pokrytí \mathcal{O}_j množin C_j nějak odvodit z pokrytí \mathcal{O} . Označme

$$\mathcal{O}_j = \{U \cap (\text{int } A_{j+1} \setminus A_{j-2}) \mid U \in \mathcal{O}\}.$$

Ověřte, že takto skutečně dostáváme otevřené pokrytí množiny C_j . Pro vytvoření názorné představy pomůže obrázek 12.30.



Obrázek 12.30 Ke konstrukci rozkladu jednotky III.

Označme rozklad jednotky asociovaný s pokrytím \mathcal{O}_j množiny C_j jako Φ_j . Prvky všech těchto systémů dohromady, tj. pro $j = 1, 2, \dots$, označme obecně, bez indexů, symbolem $\tilde{\varphi}$. Pro každý bod $x \in A$ vytvořme součet

$$s(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\tilde{\varphi} \in \Phi_j} \tilde{\varphi}(x) \quad \text{a funkce} \quad \varphi(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x)}{s(x)}. \quad (12.44)$$

Součet $s(x)$ je nekonečný jen formálně. Ve skutečnosti je na jisté otevřené množině obsahující bod x nenulových pouze konečný počet jeho členů. Pro $x \in A_j$ je totiž $\varphi(x) = 0$ pro všechny funkce $\varphi \in \Phi_k$, je-li $k \geq j+2$. Soubor Φ tvořený všemi funkcemi $\varphi(x)$ tvaru (12.44) je hledaným rozkladem jednotky asociovaným s otevřeným pokrytím \mathcal{O} množiny A .

Krok III: množina A je otevřená. Na právě prodiskutovaný případ lze převést konstrukci rozkladu jednotky asociovaného s otevřeným pokrytím \mathcal{O} otevřené množiny A . Otevřenou množinu totiž můžeme zapsat jako sjednocení kompaktních množin

$$A_j = \left\{ x \in A \mid |x| \leq j \text{ a současně } \varrho(x, \text{h}A) \geq \frac{1}{j} \right\}, \quad j \in \mathbf{N},$$

kde $\varrho(x, \text{h}A) = \inf \{|x - y| \mid y \in \text{h}A\}$ je vzdálenost bodu x od hranice množiny A (obrázek 12.29 vpravo). Pro všechny hodnoty j platí $A_j \subset \text{int } A_{j+1}$. Je ještě třeba dokázat, že množina A je sjednocením všech množin A_j . To se na první pohled možná nezdá správné, neboť množina A je otevřená a množiny A_j jsou kompaktní. Jenže jich je nekonečně mnoho a několikrát jsme se už přesvědčili, že nekonečna dokáží nečekané věci. Abychom se ujistili, že množina A je opravdu sjednocením množin A_j , $j \in \mathbf{N}$, je třeba ukázat, že každý bod $x \in A$ je prvkem některé z nich. Zvolme tedy bod $x \in A$. Protože je množina A otevřená, existuje otevřený

kvádr $W_x \subset A$ obsahující bod x . Proto je vzdálenost bodu x od hranice množiny A nenulová. Označme ji $\varrho(x)$. Pro každé přirozené číslo $j \geq \max\{|x|, \varrho^{-1}(x)\}$ je $x \in A_j$. Tím je dokázáno, že $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_j \cup \dots$

Krok IV: množina A je libovolná. Zbývá už jen dokázat existenci rozkladu jednotky pro zcela libovolnou množinu A a její libovolně zvolené otevřené pokrytí \mathcal{O} . Označme \mathcal{A} sjednocení všech množin $U \in \mathcal{O}$. Množina \mathcal{A} je otevřená a \mathcal{O} je její otevřené pokrytí. Platí přitom $A \subset \mathcal{A}$. Tím je tato nejobecnější situace převedena na předchozí případ otevřené množiny.

Jistě vás zajímá, jak nás rozklad jednotky může přivést k zobecnění Riemannova integrálu. Dosavadní definice integrálu kladly omezující podmínky jak na integrovanou funkci, tak na integrační obor. „Přípustnými“ integračními obory byly uzavřené n -rozměrné kvádry v \mathbf{R}^n , v případě prvního zobecnění pak jordanovsky měřitelné (apriori ohraničené) množiny. Integrovanými objekty byly funkce n proměnných, u nichž jsme předem požadovali ohraničenost na uzavřeném kvádru obsahujícím celý integrační obor. Nutnou a postačující podmínkou integrability takové funkce na „přípustném“ integračním oboru pak byla zanedbatelnost množiny bodů její nespojitosti. Než jsme formulovali novou definici, konstatovali jsme, že integrabilitu ve „starém“ pojetí může zkazit každý ze dvou „nedostatků“: a) funkce f (n proměnných) není ohraničená na žádném uzavřeném n -rozměrném kvádru v \mathbf{R}^n obsahujícím množinu A , b) množina A není jordanovsky měřitelná, i když má „správný rozměr“ n (například je-li otevřená). Příklad b) může nastat ve dvou podobách. Buď je množina A ohraničená, ale její hranice není zanedbatelná, nebo množina A ani není ohraničená — zde se mohou vyskytnout jak případy, kdy hranice množiny A je zanedbatelná (například pro $A = (0, \infty) \subset \mathbf{R}$ je $hA = \{0\}$, tak případy, kdy zanedbatelná není (pro $A = \mathbf{Q}$ je $hA = \mathbf{R}$). (Znovu připomeňme, že pro neohraničené množiny jsme o integrálu zatím vůbec neuvažovali a jordanovská měřitelnost pro ně ani není definována.) Při dalším zobecnění integrálu oslabíme požadavky jak na integrované funkce, tak na integrační obory.

Nechť A je otevřená množina v \mathbf{R}^n a \mathcal{O} její otevřené pokrytí jordanovsky měřitelnými množinami (třeba otevřenými kvádry) takové, že A je sjednocením všech množin $U \in \mathcal{O}$. Nechť Φ je rozklad jednotky asociovaný s tímto pokrytím. Předpokládejme, že funkce $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ je *lokálně ohraničená*, tj. ke každému bodu $x \in A$ existuje jeho otevřené okolí V_x , na němž je funkce f ohraničená. Dále předpokládejme, že množina bodů nespojitosti funkce f je zanedbatelná. Řekneme, že funkce f je *integrabilní na množině A* (v zobecněném smyslu), jestliže řada

$$\sum_{\varphi \in \Phi_A} \int |\varphi(x)f(x)| dx = \sum_{\varphi \in \Phi_A} \int \varphi(x)|f(x)| dx \quad (12.45)$$

konverguje. *Riemannovým integrálem v zobecněném smyslu* z funkce f na množině A v takovém případě nazveme integrál

$$\int_A f(x) dx = \sum_{\varphi \in \Phi_A} \int \varphi(x) f(x) dx. \quad (12.46)$$

K druhé části zápisu (12.45) připomeňme, že funkce $\varphi(x)$ jsou nezáporné.

Jestliže ve vás tato definice vzbuzuje nedůvěru, pak uvažujete správně. Abychom mohli uvěřit, že má nějaký smysl, je třeba vyjasnit několik věcí.

- Jak je zaručena existence integrálů $\int_A \varphi(x) |f(x)| dx$, vystupujících ve vztahu (12.45)?
- V definici jsme zvolili pokrytí množiny A otevřenými jordanovsky měřitelnými množinami, jimiž mohou být kvádry. Požadujeme však takové pokrytí, že sjednocení všech jeho prvků dává právě množinu A . Je vždy možné to zařídit?
- Uvažujeme o lokálně ohraničené funkci. Co když okolí bodů, na nichž je funkce ohraničená, nejsou prvky pokrytí \mathcal{O} ?
- Pokrytí \mathcal{O} může obsahovat nespočetně mnoho otevřených množin. Znamená to, že řada (12.45) má nespočetně mnoho členů? Jak je seřadíme, abychom mohli rozhodnout o konvergenci?
- Je konvergencí řady (12.45) zajištěna konvergence řady (12.46) definující integrál?
- Předpokládejme, že na předchozí otázky nějak uspokojivě odpovíme a zjistíme, že řada (12.45) pro dané pokrytí a daný asociovaný rozklad jednotky konverguje. Co když ale zvolíme jiný rozklad jednotky pro totéž pokrytí (není totiž určen jednoznačně), nebo dokonce jiné pokrytí přípustné podle zobecněné definice integrálu a s ním asociovaný rozklad jednotky. Bude nová řada rovněž konvergovat a budou vztahy (12.46) dávat pro různá pokrytí a různé rozklady jednotky stejnou hodnotu integrálu?
- Obsahuje rozšířená definice všechny definice „staré“ jako speciální případy?

Předpoklady v zobecněné definici integrálu samozřejmě nejsou dostatečné k tomu, aby zajistily existenci integrálu $\int_A f(x) dx$ ve smyslu dosavadní definice. Jistě tušíte, že úkolem funkcí rozkladu jednotky v nové definici je „vymazat“ nedostatky integrovaných funkcí a integračních oborů. Sama definice však říká, že to zjevně nebude možné vždy — nová integrabilita je podmíněna konvergencí jakési řady, která se v nejobecnějších situacích možná bude muset prověřovat takříkajíc případ od případu.

Nyní se již věnujme odpovědím na předchozí otázky. Množina A je podle předpokladu definice otevřená, ale ne nutně ohraničená. Předpokládejme, že funkce $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ je ohraničená (na celé množině A). Zvolme libovolnou funkci $\varphi(x) \in \Phi$. Podle posledního bodu věty 12.12 o rozkladu jednotky má tato funkce dokonce kompaktní nosič Ω , který je obsažen v některé

z množin $U \in \mathcal{O}$. Tyto množiny jsou podle definice jordanovsky měřitelné. (Jak to, že je nosič Ω kompaktní, když věta 12.12 hovoří pouze o množině uzavřené? Jednoduše proto, že předpokládáme jordanovskou měřitelnost množin $U \in \mathcal{O}$ — jak jsme řekli, volíme třeba pokrytí otevřenými kvádry. Množiny U jsou proto ohraničené a jejich uzavřené podmnožiny jsou kompaktní.) V součinu $\varphi(x)f(x)$ vymaže funkce φ všechny hodnoty mimo svůj nosič $\Omega \subset U$. Proto můžeme klást

$$\int_A |\varphi(x)f(x)| dx = \int_U |\varphi(x)f(x)| dx = \int_U \varphi(x)|f(x)| dx.$$

Funkce $\varphi(x)|f(x)|$ je ohraničená, množina U je jordanovsky měřitelná, integrál, míněný samozřejmě „postaru“, existuje.

Zajistit pokrytí otevřené množiny A otevřenými kvádry lze snadno. S každým bodem $x \in A$ se do množiny A vejde jistý otevřený kvádr K_x . Tyto kvádry pokrývají množinu A předepsaným způsobem, tj. $A = \cup_{x \in A} K_x$. S takovým pokrytím lze samozřejmě rovněž asociovat rozklad jednotky. Nebude však volba rozkladu jednotky spojeného s pokrytím $\tilde{\mathcal{O}} = \{K_x \mid x \in A\}$ v rozporu s tím, že v definici jsme otevřené pokrytí \mathcal{O} zvolili předem a teď to chceme měnit? Jistě, pokrytí jsme zvolili, ale rozklad jednotky, který není určen jednoznačně, jsme nijak nespecifikovali. Můžeme proto volit kvádry K_x tak, aby se každý z nich vešel do některé množiny U původního pokrytí. Rozklad jednotky asociovaný s pokrytím $\tilde{\mathcal{O}}$ bude asociován rovněž s pokrytím \mathcal{O} .

Nebude-li funkce $f(x)$ ohraničená globálně, tj. na celé množině A , ale jen lokálně, tj. na jistém otevřeném okolí každého z bodů množiny A , můžeme výše uvedené kvádry K_x volit tak, aby každý z nich byl obsažen v otevřeném okolí bodu x , na němž je funkce ohraničená. (Víme z dřívějších, že to je výhoda otevřených okolí bodů: průnik všech otevřených okolí daného bodu, kdy na každém z nich platí některý z požadavků, je rovněž otevřeným okolím tohoto bodu a platí na něm všechny požadavky současně.)

Řada (12.45) v definici zobecnění integrálu, může mít sice formálně dokonce nespočetně mnoho členů (třeba zrovna v případě pokrytí $\tilde{\mathcal{O}} = \{K_x \mid x \in A\}$), vlastnosti rozkladu jednotky však zaručují nulovost „většiny“ z nich, takže lze zařídit, aby součet (12.45) byl ve skutečnosti spočetný a mohli jsme tak z něj vytvořit řadu. Předchozí vyjádření se určitě nikomu nelíbí, a proto se raději odvoláme na seriózně vedený důkaz věty 12.12, v němž jsme takový spočetný součet zkonstruovali v části II, kde jsme množinu A předpokládali ve tvaru spočetného sjednocení kompaktních množin, a tuto konstrukci jsme pak využili i v další části důkazu, kde již šlo o obecnou otevřenou množinu.

Jak je to s konvergencí řady (12.46) za předpokladu konvergence řady (12.45) jistě tušíte na základě znalostí z kapitoly 8 druhého dílu. Přesto potřebné odhady pomocí nerovností provedeme. Protože $\int_A \varphi(x)f(x) dx$ je efektivně vzato integrálem na nějakém kvádru U , konkrétně

$$\int_A \varphi(x)f(x) dx = \int_U \varphi(x)f(x) dx = \int_{\bar{U}} \varphi(x)f(x) dx$$

(integrační obory U a \bar{U} se liší množinou dokonce nulového objemu), můžeme použít pátou vlastnost ve větě 12.8. Pro každou funkci $\varphi \in \Phi$ platí

$$\left| \int_A \varphi(x)f(x) dx \right| \leq \int_A |\varphi(x)f(x)| dx = \int_A \varphi(x)|f(x)| dx.$$

Jestliže konverguje řada (12.45), pak podle srovnávacího kritéria konvergence řad (kapitola 8) konverguje řada (12.46) absolutně, a tedy i obyčejně. (Stále máme na mysli, že součty (12.45) a (12.46) jsou ve skutečnosti spočetné, a jsou to tedy nekonečné řady v obvyklém smyslu.)

Následuje otázka, nakolik je součet řady (12.45) či (12.46) závislý, resp. nezávislý na volbě konkrétního pokrytí integračního oboru a konkrétního rozkladu jednotky. Tušíme samozřejmě, že nemá-li být celá definice nesmyslná, mělo by se nám podařit prokázat nezávislost.

Věta 12.13 (Nezávislost integrálu na rozkladu jednotky): *Nechť funkce*

$$f : A \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$$

je integrabilní v zobecněném smyslu. Označme \mathcal{O} otevřené pokrytí množiny A a Φ s ním asociovaný rozklad jednotky, pro něž řada (12.45) konverguje. Nechť $\tilde{\mathcal{O}}$ je otevřené pokrytí a $\tilde{\Phi}$ s ním asociovaný rozklad jednotky rovněž vyhovující zobecněné definici. Pak řada

$$\sum_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}} \int_A \tilde{\varphi}(x)|f(x)| dx$$

konverguje a platí

$$\sum_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}} \int_A \tilde{\varphi}(x)f(x) dx = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi(x)f(x) dx.$$

K důkazu této věty si opět musíme vzpomenout na vlastnosti konvergence řad. Každá z funkcí $\varphi \in \Phi$ má kompaktní nosič Ω , který je podmnožinou některé z množin $U \in \mathcal{O}$ (otevřených kvádrů). Jak se chovají na množině Ω funkce systému $\tilde{\Phi}$? Věta o rozkladu jednotky zajišťuje, že jich je na této množině nenulových pouze konečný počet. To proto, že z otevřených množin pokrytí $\tilde{\mathcal{O}}$, které pokrývají kompaktní nosič Ω , lze vybrat konečné podpokrytí tohoto nosiče. Zbytek plyne z vlastností rozkladu jednotky $\tilde{\Phi}$. Nejprve dokažme konvergenci řady typu (12.45) i pro pokrytí $\tilde{\mathcal{O}}$ a s ním asociovaný rozklad jednotky $\tilde{\Phi}$. Platí

$$\int_A \varphi(x)|f(x)| dx = \int_A \left(\sum_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}} \tilde{\varphi}(x) \right) \varphi(x)|f(x)| dx = \sum_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}} \int_A \tilde{\varphi}(x)\varphi(x)|f(x)| dx.$$

V předchozím výpočtu jsme aplikovali čtvrtou vlastnost rozkladu jednotky na případ systému Φ (součet funkčních hodnot všech funkcí rozkladu v každém bodě je roven jedné). Záměnnost integrace a sumace při úpravě vztahu je zajištěna tím, že počet nenulových funkcí $\tilde{\varphi}$ na množině Ω je pouze konečný, jak jsme před chvílí konstatovali. Sečteme-li nyní levou i pravou stranu předchozího vztahu přes všechny funkce systému Φ , dostaneme

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi(x) |f(x)| dx = \sum_{\varphi \in \Phi} \left(\sum_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}} \int_A \varphi(x) \tilde{\varphi}(x) |f(x)| dx \right).$$

Protože samozřejmě platí $\int_A \varphi(x) |f(x)| dx = \left| \int_A \varphi(x) f(x) dx \right|$, je na levé straně absolutně konvergující řada. Ze stejných důvodů je tomu tak i na pravé straně. Absolutní konvergence řady ovšem zaručuje možnost záměny pořadí sčítání, proto

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi(x) |f(x)| dx = \sum_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}} \int_A \left(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \right) \tilde{\varphi}(x) |f(x)| dx = \sum_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}} \int_A \tilde{\varphi}(x) |f(x)| dx.$$

V závěru výpočtu jsme znovu využili čtvrté vlastnosti z věty 12.12, tentokrát pro funkce rozkladu jednotky Φ . Poslední výsledek znamená, že řada typu (12.45) konverguje i pro pokrytí $\tilde{\mathcal{O}}$ a asociovaný rozklad jednotky $\tilde{\Phi}$. Integrál v zobecněném smyslu proto existuje i pro $\tilde{\mathcal{O}}$ a $\tilde{\Phi}$. To by ale ještě nemuselo automaticky znamenat, že hodnota integrálu vyjde stejná jako pro \mathcal{O} a Φ . Integrál se totiž počítá z funkce $f(x)$ a ne z její absolutní hodnoty. Musíme si uvědomit, že výrazy

$$\int_A \varphi(x) |f(x)| dx, \quad \left| \int_A \varphi(x) f(x) dx \right|, \quad \int_A \varphi(x) f(x) dx$$

znamenají každý něco jiného. Integrály vlevo jsou členy řady vytvořené z absolutních hodnot funkce f a jsou kladné. Výrazy uprostřed jsou členy řady tvořené absolutními hodnotami integrálů vpravo a jsou rovněž kladné. Nemusí však být rovny odpovídajícím integrálům vlevo — stačí vypočítat třeba integrály $\int_{-1}^1 |x| dx$ a $\left| \int_{-1}^1 x dx \right|$ a hned to uvidíte. Vztah obyčejné a absolutní konvergence panuje mezi řadou tvořenou výrazy vpravo a řadou tvořenou výrazy uprostřed. Znamená to, že musíme ještě prověřit, zda platí rovnost součtů řad členů prostředního typu pro různá pokrytí a rozklady jednotky a totéž pro součty řad členů typu uvedeného vpravo. Především jsme již ukázali, že z konvergence řady tvořené členy vlevo plyne absolutní konvergence řady tvořené členy vpravo, tj. konvergence řady z členů prostředního typu. Stačí proto rovnost součtu pro různá pokrytí a rozklady jednotky dokázat pro „obyčejnou“ řadu z členů vpravo, která již přímo definuje zobecněný integrál. Postup, který jsme použili pro řadu tvořenou členy vlevo, tj. integrály $\int_A \varphi(x) |f(x)| dx$, můžeme doslova opsat pro integrály vpravo, tj. $\int_A \varphi(x) f(x) dx$, neboť tvoří členy absolutně konvergentní řady. Jestliže tedy integrál podle zobecněné definice existuje pro dané pokrytí integračního oboru a asociovaný rozklad jednotky,

pak existuje i pro jiné pokrytí a jiný rozklad jednotky splňující zobecněnou definici a má stejnou hodnotu.

Příklad 12.38: Ale pozor!

Právě jsme dokázali, že pro funkci $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ a dvě různá pokrytí \mathcal{O} , resp. $\tilde{\mathcal{O}}$ množiny A splňující zobecněnou definici, a s nimi asociované rozklady jednotek Φ , resp. $\tilde{\Phi}$ platí

$$\int_A f(x) dx = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi(x) f(x) dx = \sum_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}} \int_A \tilde{\varphi}(x) f(x) dx.$$

Na základě rovnosti součtů „obyčejné“ řady si však nemůžeme myslet, že se musí rovnat také součty řad z absolutních hodnot. Obecně je totiž

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \left| \int_A \varphi(x) f(x) dx \right| \neq \sum_{\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}} \left| \int_A \tilde{\varphi}(x) f(x) dx \right|.$$

O této skutečnosti se můžeme přesvědčit i u daleko jednodušších řad, než jsou řady integrálů, o něž se právě zajímáme. Vezměme v úvahu třeba dvě geometrické řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots.$$

Obě konvergují absolutně, avšak součty řad z absolutních hodnot jsou různé. V případě první řady k hodnotě 2, v případě druhé řady k hodnotě $\frac{2}{3}$. Samozřejmě obě konvergují i obyčejně, a to ke stejné hodnotě $\frac{2}{3}$. Tento „zádrhel“ nám ovšem nevádí, protože integrál je definován obyčejnou řadou.

Následující věta uvádí *postačující* podmínky pro zobecněnou integrabilitu funkce. Zobecnění se v ní týká integračního oboru, pro který se požaduje jediná věc — aby byl ohraničenou množinou. Myslí se samozřejmě množina otevřená, neboť právě otevřených množin se zobecnění integrálu týkalo.

Věta 12.14: *Nechť A je (otevřená) ohraničená množina v \mathbf{R}^n a f ohraničená funkce definovaná a spojitá skoro všude na množině A (množina bodů její nespojitosti je zanedbatelná). Pak funkce f je integrabilní na množině A v zobecněném smyslu.*

Větu dokážeme docela snadno. Podle předpokladu je množina A ohraničená, takže se vejde do jistého uzavřeného n -rozměrného kvádrů \bar{K} . Ohraničenost funkce f na množině A zase znamená, že existuje číslo M tak, že $|f(x)| \leq M$ pro všechna $x \in A$. Musíme otestovat konvergenci řady

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi(x) |f(x)| dx,$$

kde Φ je rozklad jednotky asociovaný s předem libovolně zvoleným otevřeným pokrytím množiny A vyhovujícím zobecněné definici integrálu. Již dříve jsme si vysvětlili, že „efektivně“ je

tento součet spočetný, a je tedy skutečně nekonečnou řadou v obvyklém smyslu. Jde o řadu s nezápornými členy, proto je můžeme číslovat v jakémkoli pořadí. Částečné součty této řady jsou typu

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_A \varphi(x) |f(x)| dx,$$

kde $\mathcal{F} \subset \Phi$ je libovolný *konečný* podsoubor rozkladu Φ . Provedme odhad částečných součtů. Platí

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_A \varphi(x) |f(x)| dx \leq \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} M \int_A \varphi(x) dx = M \int_A \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi \leq Mv(\bar{K}).$$

Zatímco první nerovnost v tomto odhadu je jasná, neboť plyne z ohraničenosti funkce f , konkrétně z nerovnosti $|f(x)| \leq M$, poslední nerovnost tak zřejmě být nemusí a pečliví čtenáři právem očekávají komentář. Integrály $\int_A \varphi(x) dx$, jak víme, existují, protože každá funkce $\varphi(x)$ má v případě ohraničené množiny A kompaktní (a tedy jordanovsky měřitelný) nosič. Záměnnost integrálu a konečné sumy snad není třeba komentovat. Konečný počet funkcí $\varphi \in \mathcal{F}$ má konečný počet kompaktních, a tedy jordanovsky měřitelných nosičů. Jejich sjednocením je rovněž kompaktní, tj. jordanovsky měřitelná množina. Označme ji třeba $A_{\mathcal{F}}$. Ta je ovšem nosičem funkce $\sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x)$ a zároveň podmnožinou množiny A , tj. $A_{\mathcal{F}} \subset A \subset \bar{K}$. Současně je

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x) \leq \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1.$$

Proto

$$\int_A \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x) dx = \int_{A_{\mathcal{F}}} \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x) dx \leq v(A_{\mathcal{F}}) \leq v(\bar{K}).$$

Z předchozích úvah vyplývá, že, částečné součty řady, jejíž konvergence podmiňuje integrabilitu funkce, tvoří neklesající shora ohraničenou posloupnost. A taková posloupnost má vlastní limitu (poslední vlastnost věty 8.2 v kapitole 8 druhého dílu). Řada (12.45), definující integrabilitu funkce $f(x)$, tedy konverguje.

Nakonec ještě zbývá ukázat, že předešlé definice integrálu jsou obsaženy v definici zobecněné. Předpokládejme, že otevřená množina A je jordanovsky měřitelná a funkce $f(x)$ je na ní ohraničená. Je třeba dokázat, že posloupnost částečných součtů řady

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi(x) f(x) dx$$

konverguje k integrálu definovanému „postaru“, tj. k hodnotě $\int_A f(x) dx$. Vzhledem k nezávislosti zobecněného integrálu na konkrétním otevřeném pokrytí integračního oboru a na volbě rozkladu jednotky (věta 12.13) může být Φ kterýkoli rozklad jednotky asociovaný s libovolným, prozatím blíže nespecifikovaným otevřeným pokrytím \mathcal{O} množiny A , splňujícím však požadavky

definice zobecněného integrálu. Zvolme libovolně číslo $\varepsilon > 0$ a zatím také libovolný konečný podsoubor \mathcal{F} rozkladu Φ . Součet

$$S_{\mathcal{F}} = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_A \varphi(x) f(x) dx$$

je členem posloupnosti částečných součtů řady definující zobecněný integrál. Půjde o to, zda se od jistého členu této posloupnosti podaří „stlačit“ absolutní hodnotu rozdílu $S_{\mathcal{F}} - \int_A f(x) dx$ pod hodnotu ε . Platí

$$\begin{aligned} \left| \int_A f(x) dx - \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_A \varphi(x) f(x) dx \right| &\leq \int_A \left| f(x) - \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x) f(x) \right| dx \leq \\ &\leq M \int_A \left(1 - \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x) \right) dx = M \int_A \left(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) - \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x) \right) dx = M \int_A \sum_{\varphi \in \Phi \setminus \mathcal{F}} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Uvědomme si, že právě odvozená nerovnost platí pro libovolný konečný podsoubor \mathcal{F} rozkladu jednotky Φ . Kdyby se teď podařilo volbou podsouboru \mathcal{F} stlačit poslední výraz pod hodnotu ε , byli bychom z důkazem hotovi. Nerovnost

$$M \int_A \left(\sum_{\varphi \in \Phi \setminus \mathcal{F}} \varphi(x) \right) dx < \varepsilon$$

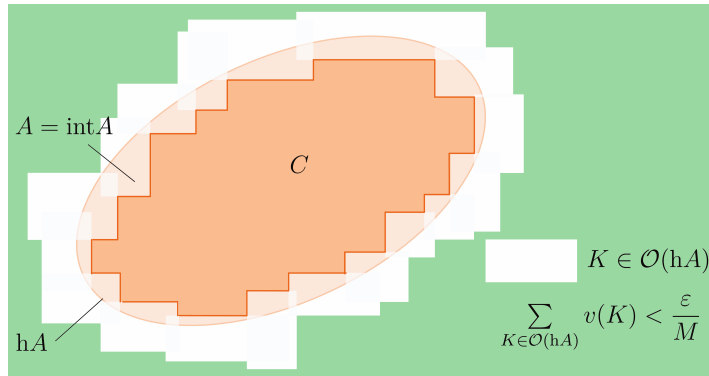
by pak totiž platila pro všechny konečné podsoubory \mathcal{F}' obsahující \mathcal{F} . Využijeme jordanovské měřitelnosti množiny A . Její hranice je zanedbatelná. Můžeme proto zvolit pokrytí $\mathcal{O}(hA)$ této hranice otevřenými kvádry tak, že jejich celkový objem bude menší než $\frac{\varepsilon}{M}$. Množina C , kterou definujeme jako rozdíl množiny A a sjednocení těchto kvádrů (obrázek 12.31), je uzavřená a je podmnožinou množiny A .

Je proto kompaktní a samozřejmě i jordanovsky měřitelná. Také množina $A \setminus C$ je jordanovsky měřitelná a její objem je definován integrálem (v původním smyslu)

$$v(A \setminus C) = \int_{A \setminus C} 1 dx < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Když teď vezmeme libovolné pokrytí \mathcal{O} množiny A vyhovující zobecněné definici integrálu, bude jím pokryta i množina C . S \mathcal{O} spojíme rozklad jednotky Φ . Z pokrytí \mathcal{O} lze vybrat konečné podpokrytí množiny C , přičemž na každé z množin v něm obsažených bude nenulový pouze konečný počet funkcí rozkladu Φ . Všechny tyto funkce vytvoří konečný podsoubor $\mathcal{F} \subset \Phi$. Pro něj platí

$$\int_A \sum_{\varphi \in \Phi \setminus \mathcal{F}} \varphi(x) dx = \int_C \left(\sum_{\varphi \in \Phi \setminus \mathcal{F}} \varphi(x) \right) dx + \int_{A \setminus C} \left(\sum_{\varphi \in \Phi \setminus \mathcal{F}} \varphi(x) \right) dx =$$



Obrázek 12.31 K důkazu rovnosti starého a nového integrálu.

$$= 0 + \int_{A \setminus C} \left(\sum_{\varphi \in \Phi \setminus \mathcal{F}} \varphi(x) \right) dx \leq \int_{A \setminus C} 1 dx = v(A \setminus C) < \frac{\varepsilon}{M}$$

a nakonec

$$\left| \int_A f(x) dx - \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_A \varphi(x) f(x) dx \right| \leq M \int_{A \setminus C} 1 dx < \varepsilon.$$

Jak jsme již konstatovali, bude tato nerovnost platit pro všechny konečné podsoubory \mathcal{F}' , pro něž je $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Tím je dokázáno, že v případě jordanovsky měřitelné otevřené množiny a ohraničené funkce konverguje posloupnost částečných součtů řady definující zobecněný integrál k hodnotě integrálu určeného pomocí původní definice.

Příklad 12.39: A dá se pomocí zobecněné definice vůbec něco vypočítat?

Nová definice sice integrál zobecňuje, ale nedává návod, jak integrály doopravdy počítat. Kdo by se hledal s rozkladem jednotky a ještě prověřoval konvergenci nějaké řady? Máme v paměti zatím neproověřenou možnost počítat integrály z (globálně) neohrazených, ale spojitých funkcí, nebo spojitých funkcí na neohrazených množinách tak, že najdeme k integrované funkci primitivní, dosadíme konečné meze, pro něž lze určit funkční hodnoty primitivní funkce, a zjišťujeme, zda existují limity pro případ, kdy meze „pošleme“ k předepsaným hodnotám (v případě neohrazené funkce), nebo k nekonečnu. Tak jsme to udělali u příkladu 12.35. Stále však nevíme, jaká je souvislost mezi takto získaným výsledkem a hodnotou integrálu získaného „regulérně“ pomocí zobecnění využívajícího rozkladu jednotky. Ukázku takové souvislosti hned uvidíme. V příkladu 12.35 jsme postupem využívajícím primitivní funkce „počítali“ integrál z funkce $f(x)$, která byla na ohraničeném otevřeném intervalu $(0, 1)$ ohraničená pouze lokálně, avšak pro celý interval neexistovala horní závora funkčních hodnot. Tento postup může získat oprávnění teprve tehdy, dokážeme-li (samozřejmě obecně) shodu výsledku s výpočtem podle zobecněné definice integrálu. Předpokládejme, že $f : (0, 1) \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ je nezáporná spojitá funkce. Dokážeme, že její integrál na množině $A = (0, 1)$ v zobecněném smyslu existuje právě když existuje vlastní limita

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} I(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{1-\delta} f(x) dx. \quad (12.47)$$

V takovém případě je zobecněný integrál roven této limitě.

Důkaz musíme vést oběma směry. Nejprve si uvědomme, jaké další vlastnosti funkce $f(x)$ vyplývají z podmínek zadání. Ze spojitosti na celém integračním oboru především plyne, že je ohraničená (a samozřejmě spojitá) na každém z intervalů $[\delta, 1 - \delta]$, což zajišťuje existenci všech integrálů typu (12.47), a že hodnoty všech těchto integrálů jsou nezáporné. Kromě toho jistě snadno zdůvodníte (nezapomeňte, že funkce $f(x)$ je nezáporná), že platí

$$\int_{\delta_1}^{1-\delta_1} f(x) dx \geq \int_{\delta_2}^{1-\delta_2} f(x) dx \quad \text{pro libovolné hodnoty } \delta_1 < \delta_2 < \frac{1}{2}, \quad (12.48)$$

veličina $I(\delta)$ je proto nerostoucí funkcí proměnné δ .

Předpokládejme nejprve, že existuje limita L . Pak ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\Delta > 0$ tak, že pro všechna $\delta < \Delta$ platí $|I(\delta) - L| < \varepsilon$. S ohledem na vztah (12.48) platí pro libovolné δ nerovnost $L - I(\delta) \geq 0$ (zdůvodněte). Zvolme otevřené pokrytí intervalu $(0, 1)$ otevřenými intervaly I_n takto:

$$\mathcal{O} = \left\{ I_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right) \mid n = 3, 4, 5, \dots \right\}$$

a s ním asociovaný rozklad jednotky Φ . Protože je funkce $f(x)$ nezáporná, budeme prověřovat přímo konvergenci řady

$$\sum_{\varphi \in \Phi_{(0,1)}} \int \varphi(x) f(x) dx,$$

kteřá definuje zobecněný integrál (pokud ovšem konverguje). Zvolme konečný podsoubor $\mathcal{F} \subset \Phi$. Výraz

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_{(0,1)} \varphi(x) f(x) dx$$

představuje částečný součet celé řady. Abychom dokázali konvergenci řady, stačí dokázat ohraničenost posloupnosti částečných součtů. Vzhledem k tomu, že podsoubor \mathcal{F} je konečný, existuje k němu číslo k tak, že všechny funkce $\varphi(x) \in \mathcal{F}$ jsou vně intervalu I_k nulové. Pak

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_{(0,1)} \varphi(x) f(x) dx = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_{I_k} \varphi(x) f(x) dx = \int_{I_k} \left(\sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x) \right) f(x) dx \leq \int_{I_k} f(x) dx \leq L, \quad (12.49)$$

neboť $\sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x) \leq 1$ pro libovolný bod $x \in A$. Nerovnost (12.49) znamená, že posloupnost částečných součtů řady, jejíž konvergence je požadována v zobecněné definici integrálu, je ohraničená (připomeňme znovu, že tato řada je vzhledem k nezápornosti funkce $f(x)$ a vlastnostem funkcí rozkladu jednotky totožná s řadou definující zobecněný integrál jako takový). Řada proto konverguje. Existence zobecněného integrálu je tak důsledkem existence limity L . A opravdu je hodnota zobecněného integrálu této limitě rovna? Dokázali jsme sice, že L je horní závorkou množiny hodnot částečných součtů, to však ještě neznamená, že musí být nutně jejím hromadným bodem a ještě k tomu jediným, tj. limitou. O supremech, infimech a hromadných bodech obecně jsme toho však už řekli tolik, že jistě sami dokážete, že číslo L je supremem množiny částečných součtů řady definující zobecněný integrál, přičemž jiné hromadné body tato množina nemá. (Malá pomůcka: ukažte, že do intervalu $(L - \varepsilon, L)$ padne při jakékoli hodnotě $\varepsilon > 0$ alespoň jeden částečný součet naší řady.)

A nyní naopak. Předpokládejme, že zobecněný integrál z dané funkce na množině $A = (0, 1)$ existuje, tj. řada

$$\sum_{\varphi \in \Phi_A} \int \varphi(x) |f(x)| dx = \sum_{\varphi \in \Phi_A} \int \varphi(x) f(x) dx$$

konverguje. Je to řada s nezápornými členy, proto ji lze přerovnávat bez vlivu na její konvergenci a výsledný součet (druhý díl, druhá vlastnost ve větě 8.5). Přerovnáme řadu podle velikosti jejích členů a očíslovíme je vzestupně přirozenými čísly $k = 1, 2, \dots$. Podsoubor rozkladu jednotky, který bude odpovídat k -tému částečnému součtu řady, tj. součtu jejích prvních k členů, označíme \mathcal{F}_k . Díky existenci zobecněného integrálu víme, že každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný podsoubor $\mathcal{F}_k \subset \Phi$ takový, že pro všechna $m \geq k$ platí

$$\left| \sum_{\varphi \in \mathcal{F}_m} \varphi(x) f(x) dx - \int_A f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

neboť zobecněný integrál je limitou částečných součtů definiční řady. Soubor \mathcal{F}_m je ovšem konečný, takže existuje index $r \geq 3$ tak, že interval I_r obsahuje nosiče všech funkcí souboru \mathcal{F}_m . Pak pro libovolné $\delta < \frac{1}{r}$ platí

$$\left| \int_{\delta}^{1-\delta} f(x) dx - \int_A f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

To znamená, že

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{1-\delta} f(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

Integrálem vlevo rozumíme samozřejmě Riemannův integrál definovaný „postaru“, který můžeme v případě spojité funkce počítat pomocí Leibnizovy-Newtonovy formule. Pravou stranu tvoří integrál ve smyslu zobecněné definice.

Příklad 12.40: A co když ...

A co když funkce $f(x)$ bude sice spojitá, ale nebude nezáporná? Je v takovém případě rovněž možný výpočet zobecněného integrálu jako limity integrálů v mezích $[\delta, 1 - \delta]$ pro $\delta \rightarrow 0$, ať už je určíme pomocí Leibnizovy-Newtonovy formule, či nějak jinak? Pokud by to možné bylo, museli bychom to dokázat. V opačném případě stačí najít protipříklad. Zkusme nad problémem trochu zapřemýšlet: jak by mohly vypadat obecnější situace, které by se daly na předchozí jednoduchý případ převést? Kdyby třeba funkce byla na celém intervalu $A = (0, 1)$ nekladná, mohli bychom pracovat s funkcí $g(x) = -f(x)$ a zjistili bychom, že pro funkci $g(x)$ tvrzení rovněž platí, jen znaménko integrálu bude jiné. Kdyby funkce $f(x)$ spojitá na celém intervalu A měnila znaménko v konečném počtu jeho bodů, mohli bychom tento interval rozdělit na konečně mnoho podintervalů a použít aditivitu integrálu. Dokonce by stačilo předpokládat, že existuje číslo $\delta > 0$ tak, že funkce nezmění znaménko na intervalech $(0, \delta]$ a $[1 - \delta, 1)$. Pomocí tvrzení dokázaného pro nezápornou spojitou funkci bychom si jistě dokázali poradit i s případem funkce po částech spojitě (nespojité v konečném počtu bodů definičního intervalu). Existují ovšem i divné funkce, pro které tvrzení dokázané pro nezápornou spojitou funkci použít nemůžeme. Jsou to třeba funkce, které mění znaménko moc rychle. Uvažujme o funkci definované opět na intervalu $A = (0, 1)$, stejně jako v předchozím příkladu. Tento interval můžeme zapsat jako sjednocení

$$A = (0, 1) = \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right] \cup \dots \cup \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right] \cup \dots,$$

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n, \text{ kde } I_0 = \left(0, \frac{1}{2}\right], \dots, I_n = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right] \text{ pro } n = 1, 2, \dots$$

150 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

Dále označme $A_n = \cup_{k=1}^n I_k$ a definujme „divnou“ funkci takto:

$$f : A \ni x \longrightarrow f(x) = 0 \text{ pro } x \in I_0, \quad \int_{I_n} f(x) dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Asi se zeptáte, zda taková funkce vůbec existuje. Existuje, a dokonce v mnoha provedeních. Jednoduše chceme, aby integrál z této funkce na každém z intervalů I_n měl předepsanou hodnotu. Jaký konkrétní průběh má funkce v tomto intervalu, není důležité. Požadavek můžeme splnit třeba i funkcí konstantní na jednotlivých intervalech

$$f(x) = 2^{n+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{pro } x \in \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right), \quad n \in \mathbf{N},$$

neboť

$$\int_{1 - \frac{1}{2^n}}^{1 - \frac{1}{2^{n+1}}} 2^{n+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Taková funkce sice bude mít v bodech $1 - \frac{1}{2^n}$ nespojitosti, ale ty z hlediska integrování nevadí, neboť je jich pouze spočetně mnoho. Sousední intervaly, jejichž sjednocením dostaneme množinu A , mají společné pouze krajní body. Proto můžeme využít aditivity integrálu. Platí

$$\int_{A_n} f(x) dx = \int_0^{1 - \frac{1}{2^{n+1}}} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{I_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Zjistili jsme, že integrál $\int_{A_n} f(x) dx$ je n -tým částečným součtem alternující řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Tato řada konverguje, nikoli ovšem absolutně. Řada z absolutních hodnot je totiž harmonická řada, a ta nekonverguje — viz příklad 8.9 v druhém dílu. Víme, že konvergence alternujících řad je poněkud nedokonalá, neboť přeskládáním jejich členů je můžeme nechat dokonkovat k jakémukoli součtu, nebo je nechat divergovat, popřípadě i oscilovat. Tím vším jsme se v druhém dílu podrobně zabývali. My však naši řadu přeskládat nebudeme. Ve své původní (nepřeskládané) podobě konverguje k součtu $\ln 2$.

Z předchozích úvah plyne, že integrál z funkce $f(x)$ podle „staré“ definice existuje na každém intervalu $[\delta, 1 - \delta]$, kde $0 < \delta < \frac{1}{2}$, a platí

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{1-\delta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Jde nyní o to, zda existuje zobecněný integrál z dané funkce na množině A , a když ano, zda je také roven $\ln 2$. K existenci zobecněného integrálu je podle definice potřeba konvergence řady (12.45), jejíž členy jsou vyjádřeny pomocí *absolutních hodnot* funkce $f(x)$. Provedme odhady částečných součtů této řady pro nějaké pokrytí \mathcal{O} množiny A (samozřejmě splňující požadavky definice zobecněného integrálu) a s ním asociovaný rozklad jednotky

Φ . Nechť $\mathcal{F} \subset \Phi$ je libovolný konečný podsoubor rozkladu Φ . Pak jistě existuje $n \in \mathbf{N}$ tak, že všechny funkce tohoto podsouboru jsou nulové vně A_n . Odpovídající částečný součet řady (12.45) je

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_A \varphi(x) |f(x)| dx = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_{A_n} \varphi(x) |f(x)| dx.$$

Platí $A_n = \cup_{k=1}^n I_k$ (sčítá se až od $k=1$, neboť na intervalu I_0 je $f(x)=0$). Na každém z intervalů I_k , $k \in \mathbf{N}$, je nenulový pouze konečný počet funkcí souboru \mathcal{F} , a ty tvoří podsoubor $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}$. Můžeme proto psát

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{F}} &= \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_{A_n} \varphi(x) |f(x)| dx = \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \sum_{k=1}^n \int_{I_k} \varphi(x) |f(x)| dx = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{I_k} \left(\sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(x) \right) |f(x)| dx = \sum_{k=1}^n \int_{I_k} |f(x)| dx \geq \sum_{k=1}^n \left| \int_{I_k} f(x) dx \right| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Vidíme, že částečné součty řady (12.45), jejíž konvergence rozhoduje o existenci zobecněného integrálu, převyšují částečné součty harmonické řady. Ta však nekonverguje, neboť posloupnost jejích částečných součtů není ohraničená. Nekonverguje tedy ani řada (12.45) a zobecněný integrál neexistuje. A teď si jistě položíte otázku, proč. Vždyť množina $A = (0, 1)$ je dokonce jordanovsky měřitelná, funkce je na ní spojitá skoro všude (předpoklad existence „obyčejného“ integrálu na intervalech I_n zajišťuje spojitost funkce skoro všude na každém z intervalů, další body nespojitosti mohou sice být v bodech, jimiž na sebe intervaly navazují, ale i těch je pouze spočetně mnoho). Tak co se pokazilo? Víme, že zobecněný integrál může, ale nemusí existovat, když funkce není na integračním oboru ohraničená. A to ta naše není. Délka intervalů I_n je rovna $\frac{1}{2^{n+1}}$, takže s rostoucím n klesá podstatně rychleji než předepsaná hodnota integrálu $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Tato disproporce musí být kompenzována průběhem funkce $f(x)$ pro $x \rightarrow 1$. Abychom byli přesnější, použijeme větu o střední hodnotě integrálního počtu. Podle ní platí pro střední hodnotu funkce $f(x)$ na intervalu I_n vztah

$$\langle f(x) \rangle_{I_n} = \frac{1}{v(I_n)} \int_{I_n} f(x) dx = \frac{1}{v(I_n)} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad v(I_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \implies \langle f(x) \rangle_{I_n} = 2^{n+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Pro zajímavost si ještě uvědomme, že díky předepsaným hodnotám integrálů $\int_{I_n} f(x) dx$ musí funkce při rostoucím x rychleji a rychleji měnit znaménko.

Příklady 12.39 a 12.40 ukázaly, že zobecněný integrál a nevlastní integrály, jak jsme je zavedli v Dodatku K prvního dílu, a jak jsme je počítali v příkladu 12.35, nejsou přesně totéž. Zobecnění definice integrálu pomocí rozkladu jednotky je jednak korektnější, jednak připouští dokonce širší třídu integračních oborů než nevlastní integrály definované v Dodatku K. Integračním oborem se totiž může stát i ohraničená množina, která není jordanovsky měřitelná, což „klasická“ definice nevlastního integrálu nepřipouští. Pro praxi však stačí pracovat s nevlastními integrály tak, jak jsme je definovali v Dodatku K.

A nakonec zlatý hřeb celého „přídavku“: zobecnění věty o transformaci integrálu na otevřené množiny, které nutně nemusejí být jordanovsky měřitelné, na rozdíl od věty 12.11.

Věta 12.15 (0 transformaci integrálu na otevřených množinách):

Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Nechť dále

$$\alpha : A \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow \alpha(u) \in \alpha(A) \subset \mathbf{R}^n, \quad (12.50)$$

kde $\alpha(u) = x = (x^1 \alpha(u^1, \dots, u^n), \dots, x^n \alpha(u^1, \dots, u^n))$, je vzájemně jednoznačné spojitě diferencovatelné zobrazení, jehož Jacobiho matice $D\alpha(u)$ je regulární v každém bodě množiny A . Předpokládejme, že funkce $f : \alpha(A) \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ je na množině $\alpha(A)$ integritelná. Pak platí

$$\int_{\alpha(A)} f(x) dx = \int_A (f \circ \alpha)(u) |\det D\alpha(u)| du. \quad (12.51)$$

Věta 12.15 se od věty 12.11 skutečně liší pouze uvolněním požadavku jordanovské měřitelnosti integračního oboru A . Integrál je samozřejmě chápán v podobě zobecněné pomocí rozkladu jednotky. Předpoklad integrability funkce $f(x)$ na množině $\alpha(A)$ tak znamená existenci integrálu v zobecněném smyslu, tj. konvergenci řady (12.45). Dodejme, že spojitá diferencovatelnost zobrazení $\alpha : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ dokonce umožňuje opustit i podmínku $\det D\alpha \neq 0$. Lze totiž ukázat, že v takovém případě je množina $\alpha(B)$, kde $B = \{x \in A \mid \det D\alpha(x) = 0\}$, zanedbatelná (již dříve zmíněný *Sardův teorém*).

Důkaz věty 12.15 nebude složitý. Máme totiž dokázáno totéž tvrzení pro jordanovsky měřitelnou množinu. Tou je jistě každý otevřený kvádr K v \mathbf{R}^n . Zvolme pokrytí \mathcal{O} množiny A otevřenými kvádry tak, aby množina A byla právě sjednocením všech těchto kvádrů. Pak množina $\alpha(A)$ je sjednocením otevřených množin $\alpha(K)$, $K \in \mathcal{O}$. Rozklad jednotky asociovaný s pokrytím $\alpha(\mathcal{O}) = \{\alpha(K) \mid K \in \mathcal{O}\}$ označme Φ . Nechť $\varphi \in \Phi$. Podle věty 12.11 platí

$$\int_{\alpha(K)} \varphi(x) f(x) dx = \int_K [(\varphi \cdot f) \circ \alpha](u) |\det D\alpha(u)| du.$$

Je-li funkce $\varphi \in \Phi$ nulová vně množiny $\alpha(K)$, je funkce $(\varphi \cdot f) \circ \alpha$ nulová vně K . To je zajištěno vzájemnou jednoznačností zobrazení α . Proto je

$$\int_{\alpha(A)} \varphi(x) f(x) dx = \int_A [(\varphi \cdot f) \circ \alpha](u) |\det D\alpha(u)| du.$$

Zobecněný integrál z funkce f na množině $\alpha(A)$ je

$$\int_{\alpha(A)} f(x) dx = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{\alpha(A)} \varphi(x) f(x) dx =$$

$$= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A (\varphi \circ \alpha)(u) \cdot (f \circ \alpha)(u) |\det D\alpha(u)| du = \int_A (f \circ \alpha)(u) |\det D\alpha(u)| du,$$

neboť funkce $\varphi \circ \alpha$ tvoří rozklad jednotky asociovaný s pokrytím \mathcal{O} množiny A .

12.1.12 Několik slov a vět o nevlastních integrálech

V předcházejícím odstavci jsme se zabývali aplikací zobecněné definice integrálu využívající rozkladu jednotky při výpočtu *nevlastních integrálů*, které byly dvojího typu:

- integrační obor není ohraničený (nevlastní integrál *prvního typu*),
- integrovaná funkce není na ohraničeném integračním oboru ohraničená (nevlastní integrál *druhého typu*).

V druhém případě jsme našli příklad, kdy za jistých podmínek kladených na integrovanou funkci lze integrály počítat jako limity integrálů vyhovujících standardní definici. V tomto odstavci uvedeme bez důkazu několik praktických tvrzení umožňujících počítat některé nevlastní integrály jedné, dvou a tří proměnných právě pomocí limit integrálů vlastních.

Nevlastní integrál prvního typu (jednoduchý): Necht $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $[a, \infty)$. (Uvědomte si, že pak je spojitá na každém intervalu $[a, b]$ a připomeňte si její vlastnosti.) Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

řekneme, že nevlastní integrál v mezích $[a, \infty)$ *konverguje* a píšeme

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

V opačném případě integrál *diverguje*. Analogicky definujeme nevlastní integrály v mezích $(-\infty, b]$, resp. $(-\infty, \infty)$.

Nevlastní integrál prvního typu (víceúhelníkový): Necht $f(x, y)$ je funkce spojitá na neohraničené oblasti $D = (a, \infty) \times (c, \infty) \subset \mathbf{R}^2$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{b \rightarrow \infty, d \rightarrow \infty} \int_{[a, b] \times [c, d]} \chi_A f(x, y) dx dy$$

pro každou jordanovsky měřitelnou množinu $A \subset [a, b] \times [c, d]$, říkáme, že nevlastní integrál prvního typu z funkce $f(x, y)$ na oblasti D *konverguje*, v opačném případě integrál *diverguje*. Analogicky pro $D = (-\infty, b) \times (-\infty, d)$, $D = [a, \infty) \times (-\infty, d)$, apod.

Věta 12.16 (O nevlastních integrálech prvního typu):

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $[a, \infty)$. Platí:

<i>Nechť (předpoklady)</i>	<i>Pak (tvrzení)</i>
$ f(x) \leq F(x)$ a $\int_a^\infty F(x) dx$ konverguje	$\implies \int_a^\infty f(x) dx$ konverguje
$f(x) \geq 0$, $m > 1$, a $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^m f(x)) = L$ je vlastní	$\implies \int_a^\infty f(x) dx$ konverguje

Příklad 12.41: Nevlastní integrály prvního typu

Vyšetříme konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}.$$

Na intervalu $[1, \infty)$ platí

$$|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = x^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-3}}} \leq x^{-3/2} = F(x),$$

a současně

$$\int_1^\infty F(x) dx = \int_1^\infty x^{-3/2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_1^b = 2,$$

integrál tedy konverguje podle prvního tvrzení věty 12.16. Na konvergenci lze usoudit také podle druhého tvrzení této věty, neboť

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{3/2} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \right) = 1, \quad m = \frac{3}{2} > 1.$$

Dále prošetříme konvergenci integrálu

$$\int_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy, \quad p > 0,$$

oblastí D je rovina $z = 0$. Zvolme množinu $A_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$, tj. $A \subset \bar{K}$ kde $\bar{K} = [-r, r] \times [-r, r]$. Platí (při výpočtu použijeme větu o transformaci integrálu a Fubiniovu větu)

$$\int_{\bar{K}} \chi_A f(x, y) dx dy = \int_A f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^r \frac{1}{(1+\varrho^2)^p} \varrho d\varrho \right] d\varphi =$$

$$= 2\pi \frac{(1 + \varrho^2)^{1-p}}{2(1-p)} \Big|_0^r = \frac{\pi}{1-p} [(1+r^2)^{1-p} - 1] \text{ pro } p \neq 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^r \frac{1}{(1+\varrho^2)} \varrho \, d\varrho \right] d\varphi = \pi \ln(1+r^2) \text{ pro } p = 1.$$

Pro $p > 1$ je limita získaného výrazu pro $r \rightarrow \infty$ vlastní (je rovna $\frac{\pi}{p-1}$), proto integrál konverguje. Pro $p \leq 1$ je limita nevlastní, integrál diverguje.

Nevlastní integrál druhého typu (jednoduchý): Necht funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $[a, b)$, ne nutně ohraničená. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) \, dx,$$

říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x) \, dx$ *konverguje*, a píšeme

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) \, dx.$$

V opačném případě říkáme, že *diverguje*. Analogicky definujeme integrál v případě, že je funkce $f(x)$ neohraničená v okolí bodu a , popřípadě v okolí obou krajních bodů intervalu $[a, b]$. Je-li funkce spojitá na intervalech $[a, c)$ a $(c, b]$ (neohraničená v okolí bodu c), je pro konvergenci nevlastního integrálu rozhodující limita

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\delta_1} f(x) \, dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_{c+\delta_2}^b f(x) \, dx.$$

Pokud je tato limita vlastní, integrál $\int_a^b f(x) \, dx$ *konverguje*, jinak *diverguje*. V případě, že existuje vlastní limita

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x) \, dx + \int_{c+\delta}^b f(x) \, dx \right),$$

integrál *konverguje ve smyslu hlavní hodnoty*. Uvedená limita se pak nazývá *hlavní hodnota integrálu*.

Věta 12.17 (O nevlastních integrálech druhého typu):

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a, b) . Platí:

<i>Nechť (předpoklady)</i>	<i>Pak (tvrzení)</i>
$\int_a^b f(x) dx$ konverguje	$\implies \int_a^b f(x) dx$ konverguje
$ f(x) < \frac{C}{(b-x)^p}$, $C > 0$, $0 < p < 1$ konstanty	$\implies \int_a^b f(x) dx$ konverguje i absolutně
$f(x) > \frac{C}{(b-x)^p}$, $C > 0$, $p \geq 1$ konstanty	$\implies \int_a^b f(x) dx$ diverguje

Příklad 12.42: Nevlastní integrály druhého typu

Prošetříme konvergenci i konvergenci ve smyslu hlavní hodnoty integrálu

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Integrovaná funkce je spojitá na množině $[-1, 0) \cup (0, 1]$, v okolí bodu $c = 0$ je neohraničená. Platí

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\delta_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_{-\delta_2}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\delta_1} + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\delta_2}^1.$$

Předchozí výraz nemá vlastní limitu, integrál proto diverguje. Dále platí

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x^2} + \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^2} \right) = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right).$$

Ani zde vlastní limita neexistuje, integrál proto nekonverguje ani ve smyslu hlavní hodnoty.

12.1.13 Cvičení

- Integrál z funkce definované v příkladu 12.1 vypočtete se zaměněným pořadím integrace.
- Dokažte, že definice zanedbatelné množiny (odstavec 12.1.3) pomocí otevřených, resp. uzavřených kvádrů jsou skutečně ekvivalentní, jak je uvedeno. (Je-li množina zanedbatelná podle jedné z nich, je zanedbatelná i podle druhé.)
- Dokažte, že konečné sjednocení množin objemu nula je množina objemu nula.
- Dokažte, že uzavřený n -rozměrný kvádr v \mathbf{R}^n není zanedbatelná množina. Důkaz proveďte nejprve pro $n = 1$, tj. pro interval $[a, b]$.

5. Necht A je množina objemu nula. Dokažte, že její hranice $h(A)$ je rovněž množinou objemu nula.
6. Najděte příklad zanedbatelné množiny, jejíž hranice není zanedbatelná množina.
Výsledek: Například $A = \{x \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{R}$, $hA = [0, 1]$.
7. Dokažte, že množina bodů nespojitosti funkce z příkladu 12.9 má objem nula.
Návod: K libovolně zadanému číslu $\varepsilon > 0$ sestrojte konkrétní pokrytí této množiny otevřenými kvádry tak, aby byla splněna definice množiny nulového objemu.
8. Dokažte všechny vlastnosti Riemannova integrálu uvedené ve větě 12.8.
Návod: Použijte větu 12.5, nerovnosti pro infima a suprema funkce na kvádrech dělení D a jeho zjemnění D' a odpovídající nerovnosti pro dolní a horní součty.
9. Formulujte obecnou Fubiniovu větu (věta 12.9) pro zaměněné pořadí integrace.
Návod: Pro zaměněné pořadí proměnných reprodukuje postup uvedený ve formulaci věty.
10. Dokažte integrabilitu funkce $\mathcal{L}(x)$ definované ve větě 12.9. Postupujte zcela analogicky jako při důkazu integrability funkce $\mathcal{U}(x)$.
11. Popište hranici otevřeného, resp. uzavřeného n -rozměrného kvádrů v \mathbf{R}^n a dokažte, že je zanedbatelnou množinou. Je také množinou objemu nula?
12. Použitím postupu z příkladu 12.16 ukažte, že integrál z funkce $f(x)$ na množině A objemu nula je nulový. (Předpokládejte, že $A \subset \bar{K}$ a funkce $f: \bar{K} \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ je na \bar{K} spojitá skoro všude.)
13. Necht $A \subset \{(0, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y > 0, z > 0\}$ je jordanovsky měřitelná množina (představte si nějaký obrazec v prvním kvadrantu souřadnicové roviny yz). Množinu V vytvoříme rotací množiny A kolem osy z . Dokažte, že množina V je jordanovsky měřitelná a zapište integrál určující její objem $v(V)$. Dále ukažte, že platí tzv. *Guldinova věta*

$$v(V) = 2\pi y_T s(A), \quad \text{kde } y_T = \frac{1}{s(A)} \int_A y \, dy \, dz$$

je y -ová souřadnice těžiště množiny A . ($s(A)$ je plošný obsah množiny A , tj. její objem jako podmnožiny v \mathbf{R}^2 .)

Návod: Ukažte, že $v(V) = v(V')$, kde $V' = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (0, y, z) \in A, 0 \leq x \leq 2\pi y\}$.

Výsledek: $v(V) = \int_A 2\pi y \, dy \, dz$.

14. Necht $A, B \in \mathbf{R}^3$ jsou jordanovsky měřitelné množiny. Označme A_c a B_c množiny vzniklé řezem množin A a B rovinou $z = c = \text{konst.}$, tj. $A_c = \{(x, y, z) \in A \mid z = c\}$ a podobně pro B_c . Předpokládejme, že množiny A_c a B_c jsou pro každé c jordanovsky měřitelné a mají stejný plošný obsah, tj. $s(A_c) = s(B_c)$. (Plošným obsahem zde rozumíme objem množin A_c , resp. B_c jako podmnožin v \mathbf{R}^2 .) Dokažte, že množiny A a B mají stejný objem. (Tento výsledek představuje tzv. *Cavalieriho princip*).

Návod: Označte $\bar{K} = \bar{S} \times [a, b]$ libovolný uzavřený kvádr v \mathbf{R}^3 obsahující množiny A i B (\bar{S} je uzavřený kvádr v \mathbf{R}^2). Vyjádřete $v(A)$ resp. $v(B)$ z definice pomocí charakteristické funkce a pomocí Fubiniovy věty pak pomocí integrálu z charakteristické funkce množiny A_c , resp. B_c .

15. Necht $A \subset \mathbf{R}^2$ je jordanovsky měřitelná množina v souřadnicové rovině xy .
- a) Dokažte, že polární moment setrvačnosti homogenního rovinného útvaru určeného množinou A je součtem momentu setrvačnosti vzhledem k ose x a momentu setrvačnosti vzhledem k ose y . Polární moment setrvačnosti je definován vztahem $J = \int_A s \varrho^2 \, dx \, dy$, kde $s = \text{konst.}$ je plošná hustota útvaru a $\varrho^2 = x^2 + y^2$.
- b) Vyjádřete moment setrvačnosti množiny A vzhledem k libovolné ose o ležící v rovině xy a procházející počátkem souřadnic.

158 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

Návod b): Proveďte transformaci souřadnic $(x, y) \rightarrow (x', y')$ tak, aby osa x' splynula s osou o .

Výsledek b): Svírá-li osa o s osou x úhel α a prochází-li počátkem soustavy souřadnic, platí

$$J_o = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A \sigma xy \, dx \, dy,$$

kde $\sigma = \text{konst.}$ je plošná hustota útvaru. Veličina $D = - \int_A \sigma xy \, dx \, dy$ je *deviační moment*. Je to mimodiagonální složka (symetrického) tenzoru momentu setrvačnosti, jehož složky vzhledem k soustavě souřadnic

$\langle O; x, y \rangle$ jsou $J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & J_{22} \end{pmatrix}$, $J_{11} = J_x$, $J_{12} = D$, $J_{22} = J_y$.

16. Vypočtěte objem následujících těles v \mathbf{R}^3 :

- a) těleso ohraničené rovinami $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ a eliptickým paraboloidem $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ (všechny zúčastněné konstanty považujte za kladné),
- b) těleso ohraničené rovinami $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $0 < a < b$, $0 < c < d$, a hyperbolickým paraboloidem $z = \frac{xy}{m}$, $m > 0$.

Návod: Lze použít výsledku první části úlohy 13.

Výsledky:

$$\text{a) } v(V) = \frac{a^3 b}{6p} + \frac{ab^3}{6q}, \quad \text{b) } \frac{1}{4m}(b^2 - a^2)(d^2 - c^2).$$

17. Dokažte větu o transformaci integrálu pro zobrazení α z příkladu 12.26.

18. Jsou dána zobrazení

- a) $\alpha : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \ni (\varrho, \varphi) \rightarrow \alpha(\varrho, \varphi) = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$,
- b) $\alpha : (0, R) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni (r, \vartheta, \varphi) \rightarrow \alpha(r, \vartheta, \varphi) = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$.

V obou případech zjistěte, zda je dané zobrazení vzájemně jednoznačné a určete inverzní zobrazení. Rozhodněte, zda jsou tato zobrazení vzájemně diferencovatelná. Určete v obou případech Jacobiho matici zobrazení α a Jacobiho matici inverzního zobrazení, tj. $D\alpha(\varrho, \varphi)$, resp. $D\alpha(r, \vartheta, \varphi)$ a $D\alpha^{-1}(x, y)$, resp. $D\alpha^{-1}(x, y, z)$. Určete také množinu $\alpha(A)$, kde A je definiční obor zobrazení α , specifikovaný v zadání.

Výsledek a): Zobrazení α je vzájemně jednoznačné $\alpha(A) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ pro } x \geq 0\}$. Platí

$$D\alpha(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \det D\alpha = \varrho,$$

$$D\alpha^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \quad \det D\alpha^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Zobrazení α je také vzájemně diferencovatelné.

Výsledek b): Zobrazení α je vzájemně jednoznačné $\alpha(A) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 < R^2, y \neq 0 \text{ pro } x \geq 0\}$. Platí

$$D\alpha(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ r \cos \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \\ -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det D\alpha = r^2 \sin \vartheta,$$

$$D\alpha^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2(x^2+y^2+z^2)}} & \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2(x^2+y^2+z^2)}} & \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det D\alpha^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Zobrazení α je také vzájemně diferencovatelné.

19. Určete souřadnice těžiště části homogenního elipsoidu se středem v počátku soustavy souřadnic o poloosách a , b a c , ležící v prvním oktantu soustavy souřadnic.

Návod: Použijte zobecněných sférických souřadnic

$$\alpha : [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ni (r, \vartheta, \varphi) \longrightarrow \alpha(r, \vartheta, \varphi) = (x, y, z),$$

kde $x = ar \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = br \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = cr \cos \vartheta$.

Výsledek: $T = \frac{3}{8}(a, b, c)$.

20. Určete polohu těžiště (středu hmotnosti) homogenního tělesa V ohraničeného plochami o rovnicích $x^2 + y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, $a > 0$.

Návod: Použijte válcové souřadnice.

Výsledek: $T = \left(0, 0, \frac{5a(6\sqrt{3}+5)}{83}\right)$.

21. Určete hmotnost a polohu středu hmotnosti tělesa (koule) ohraničeného kulovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $a > 0$, jehož hustota je dána funkcí $s = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $k > 0$ je konstanta. Vadí, že v bodě $(0, 0, 0)$ není hustota definována?

Návod: Použijte kulových souřadnic a integrace s proměnnou mezi proměnné r .

Výsledek: $m = \frac{4}{3}\pi a^2 k$, $T = \left(0, 0, \frac{4}{5}a\right)$.

22. Vypočtěte geometrické a fyzikální charakteristiky (plošný obsah, hmotnost, souřadnice středu hmotnosti, momenty setrvačnosti vzhledem k osám x , y , z) následujících rovinných útvarů:

- útvár omezený křivkami $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = 2x^{-1}$, $y = 4x^{-1}$, plošná hustota $\sigma = \text{konst.}$,
- útvár omezený křivkami ad a), hustota $\sigma = kxy$, kde $k = 1 \text{ kg m}^{-4}$ je rozměrová konstanta,
- útvár omezený v prvním kvadrantu křivkami $y = x$, $y = 2x$, $y = 2x^{-2}$, $y = 4x^{-2}$, plošná hustota $\sigma = \text{konst.}$,
- útvár omezený křivkami ad c), hustota $\sigma = kxy$, kde $k = 1 \text{ kg m}^{-4}$ je rozměrová konstanta,
- homogenní kruhová výseč s konstantní plošnou hustotou σ a poloměrem R vymezená úhlem $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$,
- kruhová výseč ad e) s plošnou hustotou $\sigma = k\rho$, kde $k = 1 \text{ kg m}^{-3}$,
- výseč mezikružjí o poloměrech r a R vymezená úhlem $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, s plošnou hustotou $\sigma = kx$, $k = 1 \text{ kg m}^{-3}$ je rozměrová konstanta.

Výsledky:

$$\begin{aligned} \text{a) } S &= \frac{2}{3} \ln 3, \quad m = \frac{2}{3} \sigma \ln 3, \quad T = \left[\frac{9}{4 \ln 3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) (2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}), \frac{9}{5 \ln 3} (\sqrt[3]{3} - 1) (2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}) \right], \quad J_x = \\ &= \frac{6\sigma}{7} (\sqrt[3]{9} - 1) (4\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}), \quad J_y = \frac{3\sigma}{5} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) (2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}), \quad J_z = J_x + J_y, \end{aligned}$$

- b) $S = \frac{2}{3} \ln 3$, $m = 2k \ln 3$, $T = \left[\frac{6k}{7 \ln 3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right) (4\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}), \frac{3k}{4 \ln 3} (\sqrt[3]{3} - 1) (4\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}) \right]$,
 $J_x = \frac{6k}{5} (\sqrt[3]{9} - 1) (8\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})$, $J_y = \frac{3k}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \right) (4\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4})$, $J_z = J_x + J_y$,
- c) $S = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{2} - 1) (\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4})$, $m = \sigma S$, $T = \left[\frac{4}{9} \frac{\ln 2}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4})}, \frac{4}{9} \frac{1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4})} \right]$,
 $J_x = \frac{3\sigma}{10} (2\sqrt[3]{4} - 1) (2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})$, $J_y = \frac{3\sigma}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) (2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})$, $J_z = J_x + J_y$,
- d) $S = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{2} - 1) (\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4})$, $m = \frac{3k}{4} (\sqrt[3]{4} - 1) (2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})$,
 $T = \left[\frac{6k}{5m} (\sqrt[3]{2} - 1) (2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}), \frac{3k}{10m} (2\sqrt[3]{2} - 1) (2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}) \right]$, $J_x = 3k$, $J_y = 2k \ln 2$, $J_z = J_x + J_y$,
- e) $S = \frac{1}{4} \pi R^2$, $m = \frac{\sigma}{4} \pi R^2$, $T = \left[\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R, 0 \right]$, $J_x = \frac{1}{8} \sigma R^4 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$, $J_y = \frac{1}{8} \sigma R^4 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right)$, $J_z = J_x + J_y = \frac{1}{8} \sigma \pi R^4$,
- f) $S = \frac{1}{4} \pi R^2$, $m = \frac{1}{6} k \pi R^3$, $T = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} R, 0 \right]$, $J_x = \frac{1}{10} k R^5 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$, $J_y = \frac{1}{10} k R^5 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right)$, $J_z = J_x + J_y = \frac{1}{10} k \pi R^5$,
- g) $S = \frac{1}{8} \pi (R^2 - r^2)$, $m = \frac{k\sqrt{2}}{6} (R^3 - r^3)$, $T = \left[\frac{k}{16m} (R^4 - r^4) \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right), \frac{k}{16m} (R^4 - r^4) \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right]$, $J_x = \frac{\sqrt{2}}{60} k (R^5 - r^5)$, $J_y = \frac{\sqrt{2}}{12} k (R^5 - r^5)$, $J_z = J_x + J_y = \frac{\sqrt{2}}{10} k (R^5 - r^5)$.

23. Vypočítejte geometrické a fyzikální charakteristiky (objem, hmotnost, souřadnice středu hmotnosti, tenzor momentu setrvačnosti) následujících prostorových útvarů (polohu středu hmotnosti a složky tenzoru momentu setrvačnosti počítejte vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic, v níž jsou zadány rovnice útvarů):

- a) homogenní kužel s hustotou s omezený plochami $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ a $z = h$,
- b) nehomogenní kužel s hustotou $s(x, y, z) = k \sqrt{x^2 + y^2}$ omezený plochami ad a), k je rozměrová konstanta jednotkové hodnoty,
- c) homogenní koule o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,
- d) nehomogenní koule o rovnici ad c) s rozložením hmotnosti daným hustotou $s(x, y, z) = k|z|$, kde k je rozměrová konstanta jednotkové hodnoty,
- e) horní polovina homogenního anuloidu z příkladu 12.33 s hustotou $s = \text{konst.}$,
- f) horní polovina nehomogenního anuloidu geometricky zadaného v příkladu 12.33 s rozložením hmotnosti zadaným hustotou $s(x, y, z) = k \sqrt{x^2 + y^2}$, kde k je rozměrová konstanta jednotkové hodnoty,
- g) homogenní rotační paraboloid s hustotou s , omezený plochami $z = \frac{h}{R^2} (x^2 + y^2)$, $z = h$,
- h) homogenní elipsoid se středem v počátku soustavy souřadnic a osami podél os soustavy souřadnic x , y , z , délky poloos jsou po řadě a , b , c , a hustota útvaru je s . (Použijte zobecněné kulové souřadnice z úlohy 9. cvičení 5.2.6).

Výsledky: Deviační momenty (mimodiagonální složky tenzoru momentu setrvačnosti) jsou ve všech případech nulové.

- a) $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, $m = \frac{1}{3} s \pi R^2 h$, $T = (0, 0, \frac{3}{4} h)$, $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{20} s \pi h R^4 + \frac{1}{5} s \pi h^3 R^2$, $J_{33} = \frac{1}{10} s \pi h R^4$,
- b) $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, $m = \frac{1}{6} \pi k h R^3$, $T = (0, 0, \frac{4}{5} h)$, $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{30} \pi k h R^5 + \frac{1}{9} \pi k h^3 R^3$, $J_{33} = \frac{1}{15} \pi k h R^5$,
- c) $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, $m = \frac{4}{3} \pi s R^3$, $T = (0, 0, 0)$, $J_{11} = J_{22} = J_{33} = \frac{2}{5} m R^2$,
- d) $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, $m = \frac{1}{2} \pi k R^4$, $T = (0, 0, 0)$, $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{4} \pi k R^6$, $J_{33} = \frac{1}{6} \pi k R^6$,
- e) $V = \pi^2 r^2 R$, $m = \pi^2 s r^2 R$, $T = (0, 0, \frac{4r}{3\pi})$, $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{8} \pi^2 s R r^2 (4R^2 + 5r^2)$, $J_{33} = \pi^2 s R r^2 (R^2 + \frac{3}{4} r^2)$,

- f) $V = \pi^2 r^2 R$, $m = \frac{1}{4} \pi^2 k r^2 (4R^2 + r^2)$, $T = [0, 0, \frac{4}{15m} \pi k r^3 (5R^2 + r^2)]$,
 $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{2} \pi^2 k r^2 (R^4 + 2R^2 r^2 + \frac{5}{24} r^4)$, $J_{33} = \pi^2 k R^2 (R^4 + \frac{3}{2} R^2 r^2 + \frac{1}{8} r^4)$,
- g) $V = \frac{1}{2} \pi R^2 h$, $m = \frac{1}{2} s \pi R^2 h$, $T = (0, 0, \frac{2}{3} h)$, $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{12} \pi s h R^2 (R^2 + 3h^2) = \frac{1}{6} m (R^2 + 3h^2)$,
 $J_{33} = \frac{1}{6} \pi s h R^4 = \frac{1}{3} m R^2$,
- h) $V = \frac{4}{3} \pi abc$, $m = \frac{4}{3} s \pi abc$, $T = (0, 0, 0)$, $J_{11} = \frac{4}{15} \pi s abc (b^2 + c^2)$, $J_{22} = \frac{4}{15} \pi s abc (a^2 + c^2)$, $J_{33} = \frac{4}{15} \pi s abc (a^2 + b^2)$.

24. Určete velikost gravitační síly, kterou působí koule o hustotě $s = \text{konst.}$ a poloměru R na bod X jednotkové hmotnosti umístěné ve vzdálenosti $a \geq 0$ od středu koule.

Návod: Zvolte počátek soustavy souřadnic ve středu koule. Osu z jako spojnicí počátku soustavy souřadnic a bodu X . Ten pak bude mít polohový vektor $\vec{r}_X = (0, 0, a)$. Gravitační síla, jíž působí koule na bod X , je

$$\vec{F} = Gs \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}_X}{|\vec{r} - \vec{r}_X|^3} dV,$$

kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ je univerzální gravitační konstanta. Rozepište výraz do složek a při integraci použijte kulových souřadnic.

Výsledek: pro $a \geq R$ je $\vec{F} = (0, 0, -\frac{4}{3} \pi Gs R^3 \cdot \frac{1}{a^2})$, pro $a \leq R$ je $\vec{F} = (0, 0, -\frac{4}{3} \pi Gsa)$.

25. Dokažte větu o transformaci pro zobrazení α z příkladu 12.26.

26. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na kompaktní množině A . Nechť $B \subset A$ je množina takových bodů, v nichž je funkční hodnota funkce f nulová, a přitom každé okolí takového bodu obsahuje jak body, v nichž funkce nabývá kladné hodnoty, tak body, v nichž nabývá hodnoty záporné. Dokažte, že množina B je zanedbatelná.

27. Řešte následující úlohy:

- a) Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Nechť $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce třídy C^∞ , která na intervalu $(0, \varepsilon)$ nabývá kladných hodnot a na množině $(-\infty, 0] \cup [\varepsilon, \infty)$ je nulová. Dokažte, že funkce

$$g(x) = \frac{\int_0^x f(x) dx}{\int_0^\varepsilon f(x) dx}$$

je nulová na množině $(-\infty, 0]$ a jednotková na množině $[\varepsilon, \infty)$.

- b) Nechť $A \subset \mathbf{R}$ a $B \subset A$ je kompaktní množina. Pomocí funkce $g(x)$ sestrojte funkci $\psi(x)$ definovanou na A takovou, aby $0 \leq \psi(x) \leq 1$ a $\psi(x) = 1$ pro všechna $x \in B$.

Návod: Nejprve předpokládejte, že $A = [\alpha, \beta]$, $B = [a, b]$, tj. množiny A a B jsou intervaly, $\alpha < a < b < \beta$. Pak zobecněte.

- c) Nechť $x_0 \in \mathbf{R}^n$ je libovolně, ale pevně zvolený bod. Pomocí funkcí typu f z části a) této úlohy sestrojte funkci $\psi(x)$ třídy C^∞ definovanou na \mathbf{R}^n tak, že $\psi(x) > 0$ pro $x \in (x_0^1 - \varepsilon, x_0^1 + \varepsilon) \times \dots \times (x_0^n - \varepsilon, x_0^n + \varepsilon)$ a $\psi(x) = 0$ v ostatních případech.

Návod: Nejprve sestrojte požadovanou funkci $\psi(x^1)$ pro $n = 1$. Proveďte lineární transformaci intervalu $[0, \varepsilon]$, na interval $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Pak zobecněte.

- d) Pomocí konstrukce v předcházející části úlohy ukažte, že je-li B kompaktní podmnožina množiny $A \in \mathbf{R}^n$, lze sestroit funkci $\psi(x)$ třídy C^∞ definovanou na A tak, aby na množině B nabývala kladných hodnot a byla nulová vně jisté uzavřené množiny V , pro kterou je $B \subset V \subset A$.

162 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

Výsledek: b) $\psi(x) = 1 + \left[g\left(\varepsilon \frac{x-\alpha}{a-\alpha}\right) - g\left(\varepsilon \frac{x-b}{\beta-b}\right) \right]$, c) $\psi(x) = \prod_{j=1}^n f\left(\frac{1}{2}x^j - \frac{x_0^j - \varepsilon}{2}\right)$.

28. V příkladu 12.40 sestrojte pokrytí množiny $A = (0, 1)$ a odpovídající rozklad jednotky tak, aby na každém z intervalů I_n byly nenulové vždy právě dva prvky rozkladu.

Návod: Sledujte postup důkazu věty 12.12 a aplikujte jej na daný konkrétní příklad.

Výsledek: Například $\mathcal{O} = \{U_1, U_2, \dots\}$, $U_n = (a_{n-1}, a_{n+3})$ pro $n = 1, 2, \dots$, $B_n = [a_n, a_{n+2}]$, pro $n = 2, 3, \dots$, $B_1 = (0, a_2]$, $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, $\psi_n \geq 0$ je hladká funkce nenulová pouze na $I_n \cup I_{n+1}$, $\varphi_n = \frac{\psi_n}{\psi_{n-1} + \psi_n}$. Například lze volit

$$\psi_n(x) = \sin^2 \left[\frac{2^{n+1}}{3} \pi(x-1) + \frac{1}{3} \pi(3n+4) \right], \quad x \in I_n \cup I_{n+1} = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+2}} \right],$$

$\psi_n(x) = 0$ pro $x \in A \setminus (I_n \cup I_{n+1})$, $n = 1, 2, \dots$, $\psi_0(x) = 1$ pro $x \in (0, a_1]$, $\psi_0(x) = \sin^2 \left[\frac{2}{3} \pi(x-1) + \frac{4}{3} \pi \right]$ pro $x \in [a_1, a_2]$, $\psi_0(x) = 0$ pro $x \in A \setminus (0, a_2]$.

29. Prošetřete konvergenci nevlastních integrálů a konvergující integrály vypočtěte:

a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

b) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$,

c) $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dx dy$,

d) $\int_0^1 \int_0^1 dx dy$,

e) $\int_D \frac{1}{x^4+y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2, 1 \leq x\}$,

f) $\int_D \frac{1}{x^4+y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2, 1 \leq x\}$,

g) $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^2} dx dy$, $a > 0$,

h) $\int_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} dx dy dz$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$,

i) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^m} dx$, konvergenci diskutujte vzhledem k m ,

j) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$, diskutujte konvergenci jako takovou i konvergenci ve smyslu hlavní hodnoty.

Výsledky: a) $I = \frac{\pi}{2}$, b) $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (polovina Laplaceova integrálu), c) $I = 1$, d) nekonverguje, e) $I = \frac{\pi}{4}$, f) $I = \frac{\pi}{4}$, g) $I = \frac{\pi}{4a^2}$, h) $I = \frac{\pi^2}{8}$, i) konverguje pro $m \leq 0$, j) konverguje pouze ve smyslu hlavní hodnoty,

$\mathcal{P} \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$.

12.2 A zase algebra, tentokrát tenzorová

Opakovat, že lineární algebra je potřeba „skoro všude“, je již zbytečné. Mnohokrát jsme se o tom přesvědčili. Je všude tam, kde se vyskytuje úměra — složky jedné veličiny jsou lineárními kombinacemi složek druhé veličiny. S některými fyzikálními příklady jsme se setkali v kapitole 6: úměra mezi složkami momentu hybnosti a úhlové rychlosti ($L_i = \sum_{j=1}^3 J_{ij}\omega_j$), koeficienty tvoří *tenzor* momentu setrvačnosti, úměra mezi složkami elektrické intenzity a složkami elektrické indukce ($D_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}E_j$), koeficienty tvoří *tenzor* dielektrické permitivity. Další úměru najdeme třeba mezi složkami veličiny, která popisuje pnutí v piezoelektrickém krystalu a sama je tenzorem (tenzor napětí), a složkami elektrické intenzity pole, do něhož je krystal vložen ($\tau_{ij} = \sum_{k=1}^3 d_{ijk}E_k$), a tak bychom mohli pokračovat: tenzor deformace, tenzor modulů pružnosti jako veličina tvořená koeficienty úměry mezi složkami tenzoru napětí a tenzoru deformace ($\tau_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl}\epsilon_{kl}$), tenzor energie-hybnosti v teorii relativity, apod. Jsou také úměry bilineární, kdy nějaká veličina je úměrná složkám *dvou* jiných veličin. Například energie elektrostátického pole je $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}E_iD_j$. Koncept úměry lze takto rozšířit i na podobný typ závislosti na složkách většího počtu veličin ($A_{i_1\dots i_p} = \sum_{j_1,\dots,j_q=1}^3 \tau_{i_1\dots i_p,j_1\dots j_q}B_{j_1\dots j_q}$). (Všechny indexy jsou zatím, na rozdíl od kapitol 4 a 6, psány pro jednoduchost dole, různé typy tenzorů rozlišíme v odstavci 12.2.1.)

Že lineární algebra vstupuje i do teorie a praxe integrování, nás možná také nepřekvapuje. Operace integrování je přece lineární: integrál z lineární kombinace konečného počtu funkcí je lineární kombinací integrálů z každé z nich. Funkce $f : \mathbf{R}^n \ni x = (x^1, \dots, x^n) \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$, které jsou integrovanými objekty, tvoří (obecně nekonečněrozměrný) vektorový prostor. Jaké tedy může být ještě další „zapojení“ lineární algebry do teorie a praxe integrování, když integrovat už umíme? Umíme, ale zdaleka ne všechno. Naše schopnost integrovat je velmi omezená pokud jde o volbu integračního oboru. Umíme integrovat na jednorozměrných oborech v \mathbf{R} , dvojrozměrných v \mathbf{R}^2 , trojrozměrných v \mathbf{R}^3 , atd., obecně n -rozměrných v \mathbf{R}^n . Co to znamená? Tak třeba u dvojrozměrného oboru jednoduše to, že musí být „placatý“. Kdybychom chtěli, aby integračním oborem byla třeba část povrchu koule, tj. dvojrozměrný útvar „vnořený“ v trojrozměrném prostoru, pak nám předchází odstavec o integrování moc nepomůže (ani úvahy o plošném integrálu v odstavci 12.1.10 nejsou matematicky příliš podložené, představují pouze jakýsi „návod k počítání“). Podobná situace je v ostatních případech, tj. má-li být integračním oborem k -rozměrný útvar v \mathbf{R}^n pro $k < n$. Kdo četl předchozí díly, namítne, že jsme se přece s takovými případy integrace setkali. Skutečně, v prvním dílu, v odstavcích 2.3.5 a 2.3.6, jsme se zabývali křivkovým integrálem prvního druhu, integračními obory byly křivky, tj. jednorozměrné útvary v \mathbf{R} , \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^3 , obecně \mathbf{R}^n . V druhém dílu jsme v odstavci 9.3.3 zavedli křivkový integrál druhého druhu. Tyto definice, následná tvrzení týkající se křivkových integrálů, i praktické počítání s nimi byly matematicky korektní. Totéž však nelze zcela tvrdit o plošných integrálech a jejich převodech na integrály objemové, resp. křivkové, s nimiž jsme spíše intuitivně pracovali v odstavci 9.4 v souvislosti s diferenciálními operátory. Tento „dluh“ je nyní třeba

vyrovnat. Mohli bychom postupovat ryze klasicky a další typy integrálů definovat tak, že by integrovanými objekty byly zase funkce (při praktických výpočtech tomu nakonec tak bude, neboť integrály křivkové převedeme na jednoduché, plošné na dvojnásobné, atd.). Daleko snadněji se však nové pojmy definují a tvrzení dokazují, jestliže definice postavíme na jiném typu integrovaných objektů, které s procedurou integrování souvisejí velmi přirozeně. Jsou to speciální „vícesložkové“ objekty tvořící v každém pevně zvoleném bodě (topologického) euklidovského prostoru vektorové prostory. Složky těchto objektů jsou samozřejmě funkcemi souřadnic daného bodu v euklidovském prostoru. (Pojem „pole“ v rámci matematické analýzy nám koneckonců není neznámý. Celá kapitola 9 byla v podstatě věnována vlastnostem skalárních a vektorových polí, tj. skalárním a vektorovým funkcím více proměnných). Jestliže jsme chtěli pracovat s vektorovými poli, museli jsme umět počítat s vektory. Máme-li včlenit tenzorová pole do teorie integrálu, musíme umět pracovat s tenzory. A to jsou, jak jsme se již zmínili, objekty lineární, či přesněji multilineární algebry.

Další návrat k lineární algebře již bude poněkud účelový. Pro pochopení objektů vhodných k vybudování definice integrálu potřebujeme pracovat s tenzory specifického typu — tzv. antisymetrickými a kovariantními. Na nich totiž stojí definice *diferenciálních forem*, které budou integrovanými objekty v nové definici (názvu se nelekejte, podstata není složitá). Pro úplnost se seznámíme s tenzory obecně, nebudeme se však tenzorovou algebrou zabývat do všech teoretických detailů a v příkladech se soustředíme hlavně na typ, který budeme potřebovat.

Omezit však výklad problematiky tenzorů pouze na rozsah potřebný pro integrování by bylo jistým ochuzením z hlediska fyzikální výpočetní praxe. Nakonec se odstavec o tenzorech docela „rozrostl“ a zahrnuje i řadu fyzikálních aplikací. Čtenáři, kteří se rozhodně nechtějí tenzory zabývat více než je nutné pro vybudování nové definice integrálu, mohou rovnou přejít k odstavci 12.2.6, v němž jsou uvedeny všechny potřebné definice a tvrzení, avšak zúžené pouze do podoby potřebné pro integrování. Vynechány budou i některé důkazy, které byly v obecnosti uvedeny v odstavcích 12.2.1 až 12.2.4. V některých částech bude odstavec 12.2.6 odkazovat na příklady v předchozích odstavcích, ale i bez nich neztratí text srozumitelnost.

Ještě rada: pro práci s tenzory bude vhodné osvěžit si Einsteinovu sčítací symboliku z kapitoly 4 (příklad 4.18 na str. 24 druhého dílu).

12.2.1 Tenzory nejsou nic jiného než lineární zobrazení více proměnných . . .

Znáte domeček z karet? Na základní řadě se staví další a další patra až ke špičce. Něco obdobného se děje i v případě tenzorů, i když s dimenzemi je to tak trochu složitější. Základ pro stavbu „tenzorového domečku“ už máme z čtvrté kapitoly druhého dílu, konkrétně z odstavce 4.2.5, kde jsme množiny $L(V_n, W_m)$ lineárních zobrazení vektorových prostorů nad polem komplexních čísel $V_n \rightarrow W_m$ vybavovali strukturou vektorového prostoru. Definovali jsme součet a skalární násobek lineárních zobrazení tak, aby byly splněny axiomy vektorového prostoru, na-

šli jsme bázi prostoru $L(V_n, W_m)$ indukovanou bázemi zvolenými v prostorech V_n a W_m a zjistili jsme, že dimenze prostoru $L(V_n, W_m)$ je $n \cdot m$. Speciálním případem takové situace byl prostor $L(V_n, \mathbf{R})$, kde V_n je vektorový prostor nad \mathbf{R} . Těmto zobrazením jsme říkali *lineární formy* a prostoru $V_n^* = L(V_n, \mathbf{R})$ *duální prostor* prostoru V_n . Jeho dimenze je n a báze (e^1, \dots, e^n) indukovaná bází (e_1, \dots, e_n) prostoru V_n se nazývala *duální báze*. Právě prostory V_n a V_n^* jsou základem další tenzorové konstrukce. Jde o důležité pojmy, proto si je oživte na stranách 71 a 72 druhého dílu v příkladech 4.47 a 4.48. Pro každý případ nyní definice zopakujeme a ještě něco přidáme.

Nechť V_n je vektorový prostor nad polem \mathbf{R} . *Duálním prostorem* V_n^* rozumíme množinu všech lineárních zobrazení $\varphi : V_n \ni a \rightarrow \varphi(a) \in \mathbf{R}$ se standardně zavedenou strukturou vektorového prostoru. Báze duálního prostoru (e^1, \dots, e^n) indukovaná bází (e_1, \dots, e_n) vztahy (4.35), $e^i(e_j) = \delta_j^i$, se nazývá *duální báze*. Značíme také $V_n = \mathcal{T}_0^1(V_n)$, resp. $V_n^* = \mathcal{T}_1^0(V_n)$. Hovoříme o *tenzorových prostorech prvního řádu* na vektorovém prostoru V_n , v prvním případě *kontravariantních*, v druhém *kovariantních*.

Důvody alternativního značení v definici a pojem kontravariantnosti a kovariantnosti se vyjasní za chvíli. Z příkladu 4.48 si nyní připomeneme podstatu duality. Provedeme ve V_n přechod od báze (e_1, \dots, e_n) k bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ s maticí přechodu $T = (T_i^j)$, $(S = T^{-1} = (S_i^j))$, $1 \leq i, j \leq n$. (Nepochybně jste si všimli, že jsme se odchýlili od symboliky čtvrté kapitoly v tom, že prvky matic přechodu budeme nyní značit T_i^j a S_i^j namísto dřívějšího značení řeckými písmeny τ_i^j a σ_i^j . To proto, že symbol τ budeme za chvíli hojně používat pro tenzory, a mohlo by docházet ke kolizi značení.) Při použití Einsteinovy symboliky píšeme transformační vztahy pro báze ve tvaru

$$\bar{e}_i = T_i^j e_j, \quad e_i = S_i^j \bar{e}_j, \quad \bar{e}^i = S_i^j e^j, \quad e^i = T_j^i \bar{e}^j. \quad (12.52)$$

Pro složky vektoru $a \in V_n$, $a = \alpha^i e_i = \bar{\alpha}^i \bar{e}_i$, resp. lineární formy $\omega \in V_n^*$, $\omega = \omega_i e^i = \bar{\omega}_i \bar{e}^i$, platí

$$\bar{\alpha}^i = \alpha^j S_j^i, \quad \alpha^i = \bar{\alpha}^j T_j^i, \quad \bar{\omega}_i = T_i^j \omega_j, \quad \omega_i = S_i^j \bar{\omega}_j, \quad (12.53)$$

nebo v maticovém zápisu při označení $(\alpha) = (\alpha^1 \ \dots \ \alpha^n)$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}^1 \ \dots \ \bar{\alpha}^n)$ (řádkové vektory) a $(\omega) = (\omega_1 \ \dots \ \omega_n)^T$, resp. $(\bar{\omega}) = (\bar{\omega}_1 \ \dots \ \bar{\omega}_n)^T$,

$$(\bar{\alpha}) = (\alpha)T^{-1}, \quad (\alpha) = (\bar{\alpha})T, \quad (\bar{\omega}) = T(\omega), \quad (\omega) = T^{-1}(\bar{\omega}). \quad (12.54)$$

Všechny tyto vztahy jsme poctivě odvodili v odstavci 4.1.4 (strana 32, vztah (4.13), strana 72, vztah (4.36) a příklad 4.48), proto je již pouze bez důkazu rekapitulujeme. Název „kontrava-

riantní“, resp. „kovariantní“ těsně souvisí s transformačními vlastnostmi těchto objektů — kontravariantní a kovariantní tenzory prvního řádu, nazývané též *vektory* a *kovektory*, se transformují duálně, tj. tak nějak „navzájem proti srsti.“ Nejlépe je to vidět, vyjádříme-li v různých bázích hodnotu lineární formy ω na vektoru a — musí vyjít ve všech bázích stejně. Platí

$$\omega(a) = (\omega_i e^i)(\alpha^j e_j) = \omega_i \alpha^j \delta_j^i = \alpha^i \omega_i = (\alpha)(\omega) = ((\bar{\alpha})T)(T^{-1}(\bar{\omega})) = (\bar{\alpha})(TT^{-1})(\bar{\omega}) = (\bar{\alpha})(\bar{\omega}).$$

Matice T a T^{-1} se při násobení navzájem „spolknou“, takže součin řádkové matice složek vektoru a a sloupcové matice složek kovektoru (lineární formy) ω je na volbě báze nezávislý. Musí tomu tak být, neboť jak vektory, tak kovektory jsou *geometrické objekty*, nezávislé na tom, v jaké bázi je vyjadřujeme.

Příklad 12.43: Existuje duální prostor k duálnímu prostoru?

Jistěže, vždyť duální prostor je také vektorovým prostorem. Duálním prostorem k duálnímu prostoru V_n^* vektorového prostoru V_n je množina všech lineárních zobrazení definovaných na kovektorech, tj. na V_n^* , opatříme-li ji také strukturou vektorového prostoru. To se provede stejným standardním způsobem, jako jsme to udělali v odstavci 4.2.5. A hned je tu otázka: jak souvisí prostor $(V_n^*)^*$ s původním prostorem V_n ? Jsou stejné? Jsou i nejsou. Jistěže obecně nejsou stejné pokud jde o konkrétní objekty v nich obsažené. Tak třeba prvky prostoru V_3 by mohly být volné vektory, vznikající všemi možnými umístěními orientovaných úseček v euklidovském prostoru (první díl, odstavec 1.4.2). Prvky prostoru V_3^* by pak byla všechna lineární zobrazení přiřazující těmto volným vektorům reálná čísla. Prvky prostoru $(V_n^*)^*$ jsou pak lineární zobrazení přiřazující reálná čísla lineárním zobrazením z prostoru V_n^* . A to už, přesně vzato, nejsou volné vektory generované orientovanými úsečkami. V čem tedy prostory $(V_n^*)^*$ a V_n stejné jsou? Především jsou „algebraicky stejné“, neboť jsou izomorfní. (To není nic nového — víme, že všechny vektorové prostory stejné konečné dimenze jsou navzájem izomorfní). Navíc se však složky prvků prostoru $(V_n^*)^*$, ať už je to konkrétně cokoli, musí při přechodu mezi bázemi transformovat stejně jako vektory prostoru V_n . Je-li totiž přechod od báze (e_1, \dots, e_n) k bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ dán maticí T , je přechod mezi indukovanými bázemi duálního prostoru dán maticí T^{-1} . A přechod mezi indukovanými bázemi prostoru duálního k duálnímu musí být dán maticí $(T^{-1})^{-1} = T$. Jak ale vypadá indukovaná báze v prostoru $(V_n^*)^*$? Označme ji například $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ a definujme ji zcela analogicky jako jsme definovali indukovanou bázi ve V_n^* , tj. v podstatě stejnými vztahy jako jsou vzorce (4.35) na straně 71 v druhém dílu. Pro indukované báze v prostoru $(V_n^*)^*$ a přechody mezi nimi pak platí

$$\epsilon_i(e^j) = \delta_i^j, \quad \bar{\epsilon}_i = T_i^j \epsilon_j, \quad \epsilon_i = S_i^j \bar{\epsilon}_j. \quad (12.55)$$

Algebra tedy nedokáže nijak, ani pomocí transformačních vztahů, rozlišit prvky e_i a ϵ_i , resp. obecně prvky prostorů V_n a $(V_n^*)^*$. Tyto prostory jsou z jejího hlediska totožné. Protože však jejich realizace prostřednictvím konkrétních prvků může být různá, je třeba je formálně nějak *ztotožnit*. Děje se tak pomocí *kanonického izomorfismu*

$$\iota : V_n \ni e_i \rightarrow \iota(e_i) = \epsilon_i \in (V_n^*)^*, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (12.56)$$

Připomeňme si, že lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báze, proto stačí zadat kanonický izomorfismus ι pouze na vektorech báze prostoru V_n . Inverzní izomorfismus ι^{-1} zase přiřazuje prvku $\epsilon_i \in (V_n^*)^*$ prvek $e_i \in V_n$, $1 \leq i \leq n$. Pro jednoduchost budeme v dalším značit $(V_n^*)^* = V_n$ a ztotožněné prvky jako totožné, tj. $\epsilon_i = e_i$. Zvolme v prostoru V_n bázi (e_1, \dots, e_n) . V prostoru V_n^* je indukovaná báze (e^1, \dots, e^n) , $e^i(e_j) = \delta_j^i$,

a v prostoru $(V_n^*)^*$ indukovaná báze $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, $\epsilon_i(e^j) = \delta_i^j$. Předpokládejme, že složky vektoru $\xi \in V_n$, resp. kovektoru $\omega \in V_n^*$ v příslušných bázích jsou $(\xi) = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, resp. $(\omega)^T = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Je-li $\tilde{\xi} = \iota(\xi) \in (V_n^*)^*$, pak $\tilde{\xi} = \iota(\xi^i e_i) = \xi^i \iota(e_i) = \xi^i \epsilon_i$. Prvek $\tilde{\xi} \in (V_n^*)^*$ má v bázi $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ stejné složky jako vektor $\xi \in V_n$ v bázi (e_1, \dots, e_n) , což jsme na základě definice kanonického izomorfismu jistě čekali.

Příklad 12.44: Součin, který tu ještě nebyl

Pro vektory a kovektory definujme ještě jednu speciální operaci, o které jsme se v příkladu 4.48 nezmínili. Je jí *duální součin*, definovaný jako zobrazení

$$\langle | \rangle : V_n^* \times V_n \ni (\omega, \xi) \longrightarrow \langle \omega | \xi \rangle = \omega(\xi) \in \mathbf{R}. \quad (12.57)$$

Hodnota duálního součinu kovektoru ω s vektorem ξ se jednoduše získá tak, že se lineární forma ω vyčíslí na vektoru ξ . Není tedy tak docela pravda, že tu duální součin nebyl. Objevil se v příkladu 4.47, jen jsme jej tak nenazývali. Duální součin je *bilineární*, tj. lineární v obou činitelích. Skutečně, jsou-li ω a η libovolné prvky V_n^* a ξ, ζ libovolné prvky V_n a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ libovolné skaláry, platí

$$\langle \alpha\omega + \beta\eta | \xi \rangle = (\alpha\omega + \beta\eta)(\xi) = \alpha\omega(\xi) + \beta\eta(\xi) = \alpha\langle \omega | \xi \rangle + \beta\langle \eta | \xi \rangle,$$

$$\langle \omega | \gamma\xi + \delta\zeta \rangle = \omega(\gamma\xi + \delta\zeta) = \gamma\omega(\xi) + \delta\omega(\zeta) = \gamma\langle \omega | \xi \rangle + \delta\langle \omega | \zeta \rangle.$$

Vyjádření duálního součinu ve složkách je jednoduché: $\langle \omega | \xi \rangle = \xi^i \omega_i$, kde řádková matice $(\xi) = (\xi^1 \dots \xi^n)$ reprezentuje vektor ξ v jisté bázi (e_1, \dots, e_n) prostoru V_n a sloupcová n -tice (ω) , kde $(\omega)^T = (\omega_1 \dots \omega_n)$ kovektor ω v indukované bázi (e^1, \dots, e^n) prostoru V_n^* . Hodnota duálního součinu samozřejmě nezávisí na volbě báze.

Existuje také duální součin

$$\langle | \rangle : (V_n^*)^* \times V_n^* \ni (\tilde{\xi}, \omega) \longrightarrow \langle \tilde{\xi} | \omega \rangle = \tilde{\xi}(\omega) \in \mathbf{R}. \quad (12.58)$$

Pro $\tilde{\xi} = \iota(\xi)$, kde $\iota : V_n \rightarrow (V_n^*)^*$ je kanonický izomorfismus z předchozího příkladu, pak $\tilde{\xi} = \xi^i \epsilon_i$ a platí

$$\langle \tilde{\xi} | \omega \rangle = \xi^i \omega_i = \langle \omega | \xi \rangle.$$

Použijeme-li pro ztotožnění zjednodušujícího zápisu, můžeme psát tento druhý duální součin ve tvaru

$$\langle | \rangle : V_n \times V_n^* \ni (\xi, \omega) \longrightarrow \langle \xi | \omega \rangle = \xi(\omega) \in \mathbf{R}, \quad \langle \xi | \omega \rangle = \langle \omega | \xi \rangle. \quad (12.59)$$

Pozor! Neplette si duální součin se skalárním, i když zápisy ve složkách mohou vypadat stejně. Duální součin však přiřazuje číslo dvojici kovektor-vektor a vyjádření ve složkách má vždy tvar $\langle \omega | \xi \rangle = \xi^i \omega_i$ bez nějakých speciálních požadavků na volbu báze ve V_n . V prostorech přitom vůbec nemusí být zadán skalární součin. Skalární součin přiřazuje číslo dvojici vektorů $a, b \in V_n$ a ve složkách má vyjádření podobné vyjádření duálního součinu, $(a, b) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \beta^i = \delta_{ij} \alpha^j \beta^j$, jen tehdy, jsou-li složky vektorů zadány v ortonormální bázi. Obecně je však $(a, b) = g_{ij} \alpha^i \beta^j$, kde $g_{ij} = (e_i, e_j)$, $1 \leq i, j \leq n$.

Příklad 12.45: Duální versus skalární součin a jiné ztotožnění

Na druhé straně můžeme přece jen vysledovat souvislost mezi duálním a skalárním součinem, bude-li samozřejmě v prostoru V_n skalární součin definován. Dejme tomu, že je. Zvolme libovolný prvek $\omega \in V_n^*$. Dokážeme, že existuje jednoznačně vektor $\zeta \in V_n$ takový, že pro každý vektor $\xi \in V_n$ platí

$$\langle \omega | \xi \rangle = (\zeta, \xi). \quad (12.60)$$

Zvolme v prostoru V_n bázi (e_1, \dots, e_n) , duální báze je (e^1, \dots, e^n) , pro ω, ξ a ζ platí $\omega = \omega_i e^i$, $\xi = \xi^i e_i$, $\zeta = \zeta^i e_i$. Vyjádříme-li rovnost (12.60) v bázích, dostaneme

$$\omega_j \xi^j = \zeta^i \xi^j (e_i, e_j) = \zeta^i \xi^j g_{ij} \implies (\omega_j - g_{ij} \zeta^i) \xi^j = 0,$$

kde jsme stejně jako v kapitole 6 označili $G = (g_{ij})$, $g_{ij} = (e_i, e_j)$, matici skalárního součinu. Připomeňme si, že tato matice je symetrická (V_n je vektorový prostor nad \mathbf{R}) a pozitivně definitní. Vzhledem k tomu, že získaná rovnost má platit pro libovolný vektor ξ , je třeba, aby byla splněna soustava rovnic $\omega_j - g_{ij} \zeta^i = 0$, $j = 1, \dots, n$. Pro daný kovektor ω jde o nehomogenní soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých složek vektoru ζ . Matice této soustavy G je regulární, proto má soustava jediné řešení

$$\zeta^i = \omega_j G^{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad \text{v maticovém zápisu } (\zeta) = (\omega)^T G^{-1}, \quad (\omega)^T = (\zeta)G,$$

kde jsme označili $G^{-1} = (G^{ji})$, $1 \leq i, j \leq n$. Pro pořádek prověříme platnost transformačního vztahu $\bar{G} = TGT^T$ (vztah (6.5) na str. 140 druhého dílu), který má platit pro matici skalárního součinu při přechodu od báze (e_1, \dots, e_n) k bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ pomocí matice přechodu T . (V prostoru nad \mathbf{R} samozřejmě bez operace komplexního sdružení.) Platí

$$(\bar{\zeta}) = (\zeta)T^{-1} = (\omega)^T G^{-1} T^{-1} = (\bar{\omega})^T (T^{-1})^T G^{-1} T^{-1}.$$

Odtud dostáváme $\bar{G}^{-1} = (T^{-1})^T G^{-1} T^{-1} \implies \bar{G} = TGT^T$, jak to má podle vztahu (6.5) být. Mohli bychom tedy definovat ztotožnění vektorového prostoru s prostorem duálním tak, že ztotožníme každý vektor $\zeta \in V_n$ s příslušným kovektorem $\omega \in V_n^*$:

$$j: V_n \ni \zeta \longrightarrow j(\zeta) = \omega \in V_n^*, \quad \langle \omega | \xi \rangle = (\zeta, \xi) \quad \text{pro lib. } \xi \in V_n.$$

Naopak, $j^{-1}(\omega) = \zeta$. Ztotožnění j je izomorfismus a j^{-1} izomorfismus k němu inverzní. Je to ovšem takové „horší“ ztotožnění než kanonický izomorfismus ι prostorů V_n a $(V_n^*)^*$, který jsme definovali v příkladu 12.43. Kovektor $\omega = j(\zeta)$ a vektor ζ se totiž při přechodech mezi bázemi transformují „proti srsti“. Pro zajímavost ještě zkusme, na které kovektory zobrazí izomorfismus j vektory báze (e_1, \dots, e_n) . Jistě nás napadne, že by to mohly být prvky duální báze. Ale budou? Označme $\eta^i = j(e_i)$. Pak pro složky kovektoru η^i platí

$$(\eta^i)^T = (e_i)G \implies (\eta_1^i \dots \eta_n^i) = (0 \dots 0 \ 1_i \ 0 \dots 0)G = (g_{i1} \ g_{i2} \dots \ g_{in}).$$

Vidíme, že rovnost $\eta^i = e^i$ nastane právě tehdy, platí-li $g_{ij} = \delta_{ij}$, tj. matice skalárního součinu je jednotková. To ovšem odpovídá jediné situaci, kdy je báze (e_1, \dots, e_n) vzhledem k zadanému skalárnímu součinu ortonormální. Kdybychom se byli tentokrát spolehli na odhad, zklamal by nás.

Avizovali jsme, že vektorové prostory V_n a V_n^* (nad \mathbf{R}) budou základem konstrukce tenzorových prostorů na V_n . Jakým? Kartézské součiny vektorových prostorů V_n a V_n^* budou definičními obory tenzorů. Zde je definice:

Nechť V_n je vektorový prostor nad \mathbf{R} a $p, q \geq 0$ celá čísla, $p + q \neq 0$. Tenzorem $(p + q)$ -tého řádu typu (p, q) na V_n , též tenzorem p -krát *kontravariantním* a q -krát *kovariantním* rozumíme zobrazení

$$\tau : (\times_p V_n^*) \times (\times_q V_n) \ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \longrightarrow \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{R}, \quad (12.61)$$

které je lineární v každém ze svých kovektorových i vektorových argumentů, tj.

$$\tau(\omega_1, \dots, \alpha\omega_i + \beta\eta_i, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) = \quad (12.62)$$

$$= \alpha\tau(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) + \beta\tau(\omega_1, \dots, \eta_i, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q),$$

resp.

$$\tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \alpha\xi_j + \beta\zeta_j, \dots, \xi_q) =$$

$$= \alpha\tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_q) + \beta\tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \zeta_j, \dots, \xi_q)$$

pro libovolný výběr argumentů $\omega_1, \dots, \omega_p, \eta_i \in V_n^*$, $\xi_1, \dots, \xi_q, \zeta_j \in V_n$, pozic $1 \leq i \leq p$ a $1 \leq j \leq q$ a skalárů $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Tenzorem nultého řádu rozumíme skalár. Poznamenejme, že \times_p , resp. \times_q je p -násobný, resp. q -násobný kartézský součin.

Příklad 12.46: Tenzory druhého řádu

Abychom si definici linearity zobrazení více proměnných dobře ujasnili, ukážeme si, jak tato *multilinearita* funguje pro tenzory nižšího řádu — to proto, abychom mohli všechny požadavky linearity pořádně rozepsat a zápisy přitom měly rozumný rozsah. Vektorovému prostoru ponecháme obecnou dimenzi n .

Tenzor druhého řádu typu $(0, 2)$ na V_n je čistě kovariantní a operuje tedy jen na vektorech. Podle definice je to zobrazení

$$\tau : V_n \times V_n \ni (\xi_1, \xi_2) \longrightarrow \tau(\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}$$

lineární v obou vektorových argumentech. Co to znamená? Budou-li ζ_1 a ζ_2 libovolné další vektory a α, β, γ a δ libovolná reálná čísla (skaláry), bude platit

$$\tau(\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1, \xi_2) = \alpha\tau(\xi_1, \xi_2) + \beta\tau(\zeta_1, \xi_2), \quad \tau(\xi_1, \gamma\xi_2 + \delta\zeta_2) = \gamma\tau(\xi_1, \xi_2) + \delta\tau(\xi_1, \zeta_2),$$

anebo dohromady

$$\tau(\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1, \gamma\xi_2 + \delta\zeta_2) = \alpha\gamma\tau(\xi_1, \xi_2) + \alpha\delta\tau(\xi_1, \zeta_2) + \beta\gamma\tau(\zeta_1, \xi_2) + \beta\delta\tau(\zeta_1, \zeta_2).$$

Kdybychom tedy znali hodnoty tenzoru τ na dvojicích vektorů (ξ_1, ξ_2) , (ξ_1, ζ_2) , (ζ_1, ξ_2) a (ζ_1, ζ_2) , můžeme pomocí nich a předchozího vztahu určovat hodnotu tenzoru τ na dvojici vektorů $(\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1, \gamma\xi_2 + \delta\zeta_2)$ pro všechny možné čtveřice skalárů α, β, γ a δ . Vektorové argumenty ovšem můžeme vyjádřit v bázích. Zvolme v prostoru V_n bázi (e_1, \dots, e_n) . Vektory ξ_1 a ξ_2 pak zapíšeme ve tvaru $\xi_1 = \xi_1^i e_i$, $\xi_2 = \xi_2^j e_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Hodnota tenzoru τ na vektorových argumentech ξ_1 a ξ_2 je

$$\tau(\xi_1, \xi_2) = \tau(\xi_1^i e_i, \xi_2^j e_j) = \xi_1^i \xi_2^j \tau(e_i, e_j).$$

Budeme-li znát hodnoty tenzoru τ na všech dvojicích (e_i, e_j) vektorů tvořících bázi (tedy celkem n^2 hodnot), dokážeme zjistit hodnotu tenzoru na libovolné dvojici vektorových argumentů pomocí jejich složek a výše

170 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHOU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

uvedených n^2 čísel $\tau(e_i, e_j)$. Jistě to nikoho nepřekvapí — vždyť přece lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báze (věta 4.2 dokázaná v druhém dílu pro lineární zobrazení $V_n \rightarrow W_m$).

Tenzor druhého řádu typu $(1, 1)$ je zobrazení

$$\tau : V_n^* \times V_n \ni (\omega; \xi) \longrightarrow \tau(\omega, \xi) \in \mathbf{R},$$

$$\tau(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\xi_1 + \delta\xi_2) = \alpha\gamma\tau(\omega_1, \xi_1) + \alpha\delta\tau(\omega_1, \xi_2) + \beta\gamma\tau(\omega_2, \xi_1) + \beta\delta\tau(\omega_2, \xi_2)$$

pro libovolné argumenty $\omega_1, \omega_2 \in V_n^*$, $\xi_1, \xi_2 \in V_n$ a libovolné skaláry $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$. Vyjádříme-li argumenty ω a ξ v bázích, dostaneme

$$\tau(\omega, \xi) = \tau(\omega_i e^i, \xi^j e_j) = \omega_i \xi^j \tau(e^i, e_j).$$

Pro případ tenzoru druhého řádu typu $(2, 0)$ jistě snadno provedete obdobné úvahy a výpočty sami.

Příklad 12.47: Dva důležité příklady tenzorů druhého řádu

Dva příklady tenzorů už známe, i když si to možná neuvědomujeme. Jsou jimi duální a skalární součin. Duální součin, ať už kterýkoli ze dvou, které jsme uvedli v příkladu 12.44, je tenzorem druhého řádu typu $(1, 1)$, neboť jeho definiční obor je $V_n^* \times V_n$, resp. $V_n \times V_n^*$. (Později uvidíme, že prostory tenzorů typu $(1, 1)$ s těmito dvěma definičními obory lze také ztotožnit.) Skalární součin, jehož definičním oborem je $V_n \times V_n$, je rovněž tenzorem druhého řádu, avšak typu $(0, 2)$. Navíc má ještě další speciální vlastnosti (symetrii a pozitivní definitnost).

A ještě jedna poznámka „na okraj“. Dosavadní úvahy by mohly vzbudit dojem, že dimenze vektorového prostoru a prostoru duálního je vždy stejná. Je to však pravda jen pro konečně-rozměrné prostory. V případě prostorů nekonečné dimenze tak ani nelze ztotožnit prostory V a $(V^*)^*$.

12.2.2 ... a tvoří vektorové prostory

V předchozím odstavci jsme sice tenzory definovali, ale neřekli jsme, jak s nimi počítat. Na množinách tenzorů daného typu (p, q) je proto především potřeba zavést strukturu vektorového prostoru a v takto vzniklých vektorových prostorech najít vhodné báze. Pak bude způsob základního počítání s nimi jasný — jednoduše jako vždy „po složkách“.

Označme množinu všech tenzorů typu (p, q) na vektorovém prostoru V_n symbolem $\mathcal{T}_q^p(V_n)$. Zvolme libovolně dva její prvky τ a η a skaláry $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Definujme nové zobrazení se stejným definičním oborem, jaký mají prvky množiny $\mathcal{T}_q^p(V_n)$, takto:

$$\begin{aligned} \chi : (\times_p V_n^*) \times (\times_q V_n) \ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) &\longrightarrow & (12.63) \\ &\longrightarrow \chi(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) = \\ &= \alpha\tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) + \beta\eta(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

pro libovolný výběr argumentů $\omega_1, \dots, \omega_p \in V_n^*$ a $\xi_1, \dots, \xi_q \in V_n$.

Velmi jednoduše se dokáže (úloha 1 ve Cvičení 12.2.8), že zobrazení χ je lineární ve všech svých argumentech, takže je také tenzorem typu (p, q) , tj. $\chi \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$. Pro $\alpha = \beta = 1$ nazveme zobrazení χ *součtem* tenzorů τ a η ($\chi = \tau + \eta$), pro $\beta = 0$ je zobrazení χ α -*násobkem* tenzoru τ ($\chi = \alpha\tau$). V úloze 1 Cvičení 12.2.8 si sami dokážete, že takto definovaný součet a skalární násobek tenzorů splňují axiomy vektorového prostoru. Důkazy necháváme do cvičení proto, že jsou velmi jednoduché, jen vyžadují trochu více psaní. K důkazu multilinearity zobrazení χ stačí pro jeho libovolně vybraný kovektorový, resp. vektorový argument reprodukovat postup, který jsme uplatnili na straně 68 druhého dílu, když jsme dokazovali linearitu součtu lineárních zobrazení $V_n \rightarrow W_m$, resp. skalárního násobku lineárního zobrazení $V_n \rightarrow W_m$. Axiomy vektorového prostoru se prověří pro libovolný výběr vektorových a kovektorových argumentů. Podobně jako u vektorového prostoru $L(V_n, W_m)$ si rozmyslete, jak vypadá neutrální prvek prostoru $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ (nulový tenzor typu (p, q)) a opačný prvek k tenzoru τ . Uvědomte si, jakou hodnotu musí mít obraz libovolného výběru argumentů $(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q)$ nulovým tenzorem a jakou hodnotu musí mít obraz tohoto výběru argumentů opačným tenzorem k tenzoru τ ve vztahu k obrazu tenzorem τ .

Příklad 12.48: $\mathcal{T}_2^0(V_n)$ jako vektorový prostor

Pro případ kovariantních tenzorů druhého řádu rozepíšeme operace, které souvisejí se zavedením struktury vektorového prostoru na množině těchto tenzorů. Nechť $\tau, \eta \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Podle vztahu (12.63) definujeme zobrazení

$$\chi : V_n \times V_n \ni (\xi_1, \xi_2) \longrightarrow \chi(\xi_1, \xi_2) = \alpha\tau(\xi_1, \xi_2) + \beta\eta(\xi_1, \xi_2).$$

Vyjádříme-li složky vektorů ξ_1 a ξ_2 v bázi (e_1, \dots, e_n) , je

$$(\tau + \eta)(\xi_1, \xi_2) = \alpha \left(\xi_1^i \xi_2^j \tau(e_i, e_j) \right) + \beta \left(\xi_1^i \xi_2^j \eta(e_i, e_j) \right) = \xi_1^i \xi_2^j (\alpha\tau(e_i, e_j) + \beta\eta(e_i, e_j)),$$

$$(\alpha\tau)(\xi_1, \xi_2) = \alpha \left(\xi_1^i \xi_2^j \tau(e_i, e_j) \right) = \xi_1^i \xi_2^j (\alpha\tau(e_i, e_j)).$$

Prověříme linearitu zobrazení $(\tau + \eta)$ třeba v prvním argumentu. Využijeme nejprve definice těchto zobrazení, potom linearitu tenzorů τ a η a nakonec opět definice zobrazení $(\tau + \eta)$.

$$\begin{aligned} (\tau + \eta)(\gamma\xi_1 + \delta\zeta_1, \xi_2) &= \tau(\gamma\xi_1 + \delta\zeta_1, \xi_2) + \eta(\gamma\xi_1 + \delta\zeta_1, \xi_2) = \\ &= \gamma\tau(\xi_1, \xi_2) + \delta\tau(\zeta_1, \xi_2) + \gamma\eta(\xi_1, \xi_2) + \delta\eta(\zeta_1, \xi_2) = \gamma[\tau(\xi_1, \xi_2) + \eta(\xi_1, \xi_2)] + \delta[\tau(\zeta_1, \xi_2) + \eta(\zeta_1, \xi_2)] = \\ &= \gamma[(\tau + \eta)(\xi_1, \xi_2)] + \delta[(\tau + \eta)(\zeta_1, \xi_2)]. \end{aligned}$$

Linearitu v druhém argumentu a linearitu zobrazení $\alpha\tau$ v obou argumentech snadno prověříte sami podle vzoru předchozího postupu. Že množina $\mathcal{T}_2^0(V_n)$ s nově zavedenými operacemi sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem splňuje axiomy vektorového prostoru, dokážeme také snadno. Přímo z definice součtu je vidět komutativita a asociativita. Neutrálním prvkem grupy je tenzor $0_{\mathcal{T}_2^0(V_n)} : V_n \times V_n \ni (\xi_1, \xi_2) \rightarrow 0 \in \mathbf{R}$, přiřazuje tedy každé dvojici vektorů (ξ_1, ξ_2) nulu. Opačným prvkem k tenzoru τ je tenzor, který každé dvojici vektorů (ξ_1, ξ_2) přiřadí hodnotu $-\tau(\xi_1, \xi_2)$. Z definice zobrazení $(\tau + \eta)$ přímo prověříme i distributivní zákony, kombinující sčítání a násobení skalárem. Například

$$[\alpha(\tau + \eta)](\xi_1, \xi_2) = \alpha[(\tau + \eta)(\xi_1, \xi_2)] = \alpha[\tau(\xi_1, \xi_2) + \eta(\xi_1, \xi_2)] =$$

$$= \alpha\tau(\xi_1, \xi_2) + \alpha\eta(\xi_1, \xi_2) = (\alpha\tau)(\xi_1, \xi_2) + (\alpha\eta)(\xi_1, \xi_2) = (\alpha\tau + \alpha\eta)(\xi_1, \xi_2).$$

Protože tento výsledek platí pro libovolně zvolenou dvojici vektorových argumentů (ξ_1, ξ_2) , platí pro samotná zobrazení na levé a pravé straně, tj. $\alpha(\tau + \eta) = \alpha\tau + \alpha\eta$. Další vztahy se dokáží podobně jednoduše.

Když už jsme z množin tenzorů typu (p, q) udělali vektorové prostory, měli bychom se naučit pracovat v bázích se složkami. Bylo by dobré, kdybychom pomocí bází volených v prostoru V_n , na němž celá konstrukce „tenzorového domečku“ stojí, dokázali indukovat báze v prostorech tenzorů nějak podobně, jako jsme naindukovali báze v duálním prostoru V_n^* . Sestrojíme-li v tenzorových prostorech báze, budeme hned také vědět, jaké jsou jejich dimenze. To už koneckonců dobře tušíme. V příkladu 12.46 jsme viděli, že hodnotu tenzoru druhého řádu, třeba typu $(0, 2)$, pro libovolnou dvojici vektorových argumentů můžeme snadno určit pomocí jejich složek v dané bázi (e_1, \dots, e_n) , známe-li hodnoty tenzoru pro všech n^2 dvojic (e_i, e_j) prvků báze. Ze zkušeností s lineárními zobrazeními, které jsme získali v kapitolách 4 a 6, můžeme intuitivně usuzovat, že by čísla $\tau_{ij} = \tau(e_i, e_j)$ mohla být složkami tenzoru τ v nějaké indukované bázi, kterou ještě nemáme. Dimenze prostoru $\mathcal{T}_2^0(V_n)$ by tedy mohla být n^2 . Pokud tento nápad extrapolujeme dále, pak by čísla $\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \tau(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$, $1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$, mohla představovat složky tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ (v bázi, která stále ještě není specifikována). Jejich počet je roven počtu možných výběrů indexů $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$, které se mohou opakovat a jejich různá pořadí dávají obecně různé složky. Jde tedy o počet variací s opakováním $(p+q)$ -té třídy z n prvků, a ten činí n^{p+q} . Vidíme, že pokud nás zkušenost či intuice neklame, budou dimenze tenzorových prostorů s jejich řádem $(p+q)$ rychle narůstat.

Intuice je ovšem dobrý sluha, ale špatný pán. Proto závěrům o složkách tenzorů a dimenzích tenzorových prostorů nemůžeme věřit, dokud je nedokážeme. Nezbývá než sestavit indukovanou bázi. Vzorem pro takovou konstrukci bude konstrukce báze prostoru $L(V_n, W_m)$ na stranách 69 a 70 druhého dílu (vztahy (4.34)). Tento vzor se na první pohled nemusí zdát zcela dokonalý: který objekt bude v našem případě realizovat vektorový prostor vzorů V_n (pozor, náš nynější prostor V_n to není, jde jen o kolizi označení), a který prostor obrazů W_m ? Jako prostor W_m bude sloužit jednorozměrný vektorový prostor \mathbf{R} . Ale jsou definiční obory tenzorů vektorovými prostory? Zatím jsou to jen kartézské součiny, přičemž struktura vektorového prostoru je na každém s činitelů. Strukturu vektorového prostoru však můžeme zavést tak, že definujeme sčítání $(p+q)$ -tice kovektorových a vektorových argumentů „po kovektorových a vektorových složkách“ a podobně násobení $(p+q)$ -tice argumentů skalárem tak, že jím vynásobíme každou kovektorovou a vektorovou složku. Například $\alpha(\omega, \xi) + \beta(\eta, \zeta) = (\alpha\omega + \beta\eta, \alpha\xi + \beta\zeta)$. Vlastnosti multilinearity tenzoru vyhovují představě tenzorového prostoru $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ jako prostoru $L((\times_p V_n^*) \times (\times_q V_n), \mathbf{R})$. Dimenze tohoto prostoru je podle výsledku na straně 69 druhého dílu

$$\dim \mathcal{T}_q^p(V_n) = \left[\dim \left((\times_p V_n^*) \times (\times_q V_n) \right) \right] \cdot [\dim \mathbf{R}] = n^{p+q} \cdot 1 = n^{p+q}.$$

Problém dimenze je tedy vyřešen dokonce ještě dříve, než jsme našli indukovanou bázi. Tu nyní už doopravdy sestrojíme z libovolně zvolené báze (e_1, \dots, e_n) prostoru V_n . Definujme zobrazení

$$\begin{aligned} \phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q} : (\times_p V_n^*) \times (\times_q V_n) &\ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{R} \quad \text{vztahy} \\ \phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) &= \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{l_1} \dots \delta_{j_q}^{l_q}, \end{aligned} \quad (12.64)$$

pro všechny výběry indexů

$$1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n, \quad 1 \leq k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q \leq n.$$

Požadavek, aby tato zobrazení byla lineární ve všech argumentech, zajišťuje, že skutečně stačí zadat jejich hodnoty na všech možných výběrech prvků báze prostoru V_n a duální báze indukované v prostoru V_n^* . Počet těchto zobrazení je dán počtem výběrů indexů $k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q$, včetně opakování a závislosti na pořadí, tj. n^{p+q} . Je třeba dokázat, že tato zobrazení skutečně tvoří bázi v $\mathcal{T}_q^p(V_n)$. Dokážeme nejprve jejich lineární nezávislost. Zápisů s mnoha indexy se nelekejte, práce s nimi je stejná, jako když je index jeden, jen se popíše trochu víc papíru. Vzpomínáte, jak se dokazuje lineární nezávislost prvků vektorového prostoru? Pokud ne, vraťte se k příslušným pasážím kapitoly 4. Sestavíme lineární kombinaci zobrazení (12.64) s koeficienty $\gamma_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \in \mathbf{R}$ a položíme ji rovnu nule (neutrálnímu prvku grupy tenzorového prostoru).

$$\gamma_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q} = 0_{\mathcal{T}_q^p(V_n)}.$$

Pak obě strany vyčíslíme na argumentech tvořících prvky báze V_n a V_n^* a dostaneme výsledek:

$$\begin{aligned} \gamma_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) &= 0 \implies \\ \gamma_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{l_1} \dots \delta_{j_q}^{l_q} &= 0 \implies \gamma_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = 0 \end{aligned}$$

pro libovolný výběr indexů $1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$. (Jistě jste si připomněli, že každé Kroneckerovo delta maže jednu sumaci ve vícenásobném součtu. Náš součet je $(p+q)$ -násobný, ale jeho sčítance obsahují součin právě tolika Kroneckerových delta. Vymažou se všechny sumace a zbude jediný koeficient $\gamma_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$.) Ukázali jsme, že nulové lineární kombinace zobrazení (12.64) dosáhneme jen s nulovými koeficienty. Zobrazení $\phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}$ jsou lineárně nezávislá. Druhá část důkazu má prověřit, že systém zobrazení, který podezíráme z toho, že je v daném prostoru bázi, je úplný. To znamená, že každý tenzor τ musíme umět zapsat jako lineární kombinaci této báze. Hledejme tedy takovou lineární kombinaci s koeficienty $\tau_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \in \mathbf{R}$, tj.

$$\tau = \tau_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}.$$

Vyčíslením na argumentech bází (e_1, \dots, e_n) a (e^1, \dots, e^n) s uvážením definičního vztahu (12.64) a samozřejmě vlastností Kroneckerova delta dostaneme přímo konkrétní složku tenzoru τ jako obraz kovektorů a vektorů bází se stejnými indexy (provedte podrobně):

$$\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \tau(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q}). \quad (12.65)$$

Teď jsme již opravdu matematicky korektně dokázali, že soubor

$$\left\{ \phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n \right\}$$

je bází tenzorového prostoru $\mathcal{T}_q^p(V_n)$.

Jedná se opět o indukovanou bázi, neboť definice je založena na volbě báze základního prostoru V_n . Zatím ji máme zavedenu poněkud „implicitně“, pomocí obrazů příslušných souborů bází prostorů V_n a V_n^* . Explicitního vyjádření pomocí těchto bází se dočkáme v následujícím odstavci. Závěry, k nimž jsme postupně dospěli, zformulujeme ve větě.

Věta 12.18: *Množina $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ tenzorů typu (p, q) s operacemi sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem definovanými vztahy (12.63) je vektorovým prostorem dimenze n^{p+q} nad polem reálných čísel \mathbf{R} . Je-li (e_1, \dots, e_n) libovolně zvolená báze ve vektorovém prostoru V_n , je soubor $\phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}$ definovaný vztahy (12.64) bází v prostoru $\mathcal{T}_q^p(V_n)$.*

Jakmile máme bázi jakéhokoli prostoru, je už jednoduché provádět operace sčítání a násobení skalárem v tomto prostoru pomocí složek. Tenzory se jednoduše sčítají a násobí skalárem „po složkách“, jako kterékoli jiné vektory. A je úplně jedno, o jaký typ tenzorového prostoru se jedná, tj. kolik indexů nahoře a dole mají složky tenzorů.

Předpokládejme, že složky tenzorů τ a η v bázi (12.64) indukované primární volbou báze v prostoru V_n jsou

$$\tau = \left(\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right), \quad \eta = \left(\eta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right), \quad 1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n,$$

a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Pak tenzor $\chi = \alpha\tau + \beta\eta$ má v této bázi složky

$$\chi = \left(\chi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) = \left(\alpha\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \beta\eta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right), \quad 1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n. \quad (12.66)$$

Příklad 12.49: Tenzorové operace v $\mathcal{T}_1^1(V_n)$ po složkách

Provádění operací vektorového prostoru v tenzorových prostorech (vytváření lineárních kombinací tenzorů) ve složkách si ověříme a procvičíme na příkladu prostoru $\mathcal{T}_1^1(V_n)$. V prostoru V_n zvolme jako obvykle bázi (e_1, \dots, e_n) . Indukovaná báze v $\mathcal{T}_1^1(V_n)$ pak bude dána vztahy (12.64) pro $p = q = 1$, tj.

$$\{\phi_j^i \mid 1 \leq i, j \leq n\}, \quad \phi_j^i(e^k, e_l) = \delta_j^k \delta_l^i.$$

Tenzory $\tau, \eta \in \mathcal{T}_1^1(V_n)$ jsou lineárními kombinacemi této báze,

$$\tau = \tau_i^j \phi_j^i, \quad \eta = \eta_i^j \phi_j^i.$$

Zvolme $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a počítejme lineární kombinaci tenzorů τ a η s koeficienty α, β . Dostaneme postupně

$$\alpha\tau + \beta\eta = \alpha(\tau_i^j \phi_j^i) + \beta(\eta_i^j \phi_j^i) = (\alpha\tau_i^j + \beta\eta_i^j) \phi_j^i.$$

Vyjádřili jsme tenzor $\alpha\tau + \beta\eta$ jako lineární kombinaci prvků báze. Koeficienty této lineární kombinace jsou složky tenzoru $\alpha\tau + \beta\eta$ vzhledem k této bázi. Výsledek je v souladu s obecnými vztahy (12.66), které si můžete v plné obecnosti odvodit stejným postupem, pokud se nezaleknete zápisů s více indexy.

Naším úkolem teď bude odvodit transformační vztahy mezi složkami tenzorů všech typů. Opět začneme příkladem — tenzory druhého řádu.

Příklad 12.50: Tenzory a přechody mezi bázemi

Zvolme v prostoru V_n báze (e_1, \dots, e_n) a $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$. Označme matici přechodu symbolem $T = (T_i^j)$ a matici inverzní symbolem $S = T^{-1} = (S_i^j)$, $1 \leq i, j \leq n$. Hledejme transformační vztahy pro tenzory druhého řádu, nejprve třeba typu $(0, 2)$. Nejprve zjistíme vztahy mezi indukovanými bázemi $\{\phi^{ij}\}$ a $\{\bar{\phi}^{ij}\}$, $1 \leq i, j \leq n$. Každý z prvků druhé báze je lineární kombinací prvků první báze a naopak, tj.

$$\bar{\phi}^{ij} = \alpha_{kl}^{ij} \phi^{kl}, \quad \phi^{ij} = \beta_{kl}^{ij} \bar{\phi}^{kl}.$$

Zabýváme se třeba první z těchto lineárních kombinací. Vyčísleme ji na dvojici vektorových argumentů (e_k, e_l) a při úpravě použijeme jednak definičních vztahů (12.64) pro indukované báze, jednak transformačních vztahů (12.53):

$$\bar{\phi}^{ij}(e_k, e_l) = \alpha_{ab}^{ij} \phi^{ab}(e_k, e_l) = \alpha_{ab}^{ij} \delta_k^a \delta_l^b = \alpha_{kl}^{ij}.$$

Dosadíme-li do levé strany vektory e_k a e_l jako lineární kombinace prvků báze $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ pomocí transformačních vztahů (12.52), získáme ještě jiné vyjádření:

$$\bar{\phi}^{ij}(e_k, e_l) = \bar{\phi}^{ij}(S_k^a \bar{e}_a, S_l^b \bar{e}_b) = S_k^a S_l^b \bar{\phi}^{ij}(\bar{e}_a, \bar{e}_b) = S_k^a S_l^b \delta_a^i \delta_b^j = S_k^i S_l^j.$$

Porovnáním obou výrazů pro $\bar{\phi}^{ij}(e_k, e_l)$ dostaneme dosud neznámé koeficienty $\alpha_{kl}^{ij} = S_k^i S_l^j$. Podobným postupem získáme dvojí úpravou vztahu $\phi^{ij} = \beta_{kl}^{ij} \bar{\phi}^{kl}$ koeficienty β_{kl}^{ij} . Složky tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$ v bázích $\{\phi^{ij}\}$, resp. $\{\bar{\phi}^{ij}\}$, $1 \leq i, j \leq n$, jsou $\tau_{ij} = \tau(e_i, e_j)$, resp. $\bar{\tau}_{ij} = \tau(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$. Jejich transformační vztahy dostaneme opět snadno dosazením za e_i a e_j , resp. \bar{e}_i a \bar{e}_j z (12.52):

$$\tau_{ij} = \tau(e_i, e_j) = \tau(S_i^k \bar{e}_k, S_j^l \bar{e}_l) = S_i^k S_j^l \tau(\bar{e}_k, \bar{e}_l) = S_i^k S_j^l \bar{\tau}_{kl},$$

a podobně

$$\bar{\tau}_{ij} = \tau(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \tau(T_i^k e_k, T_j^l e_l) = T_i^k T_j^l \tau(e_k, e_l) = T_i^k T_j^l \tau_{kl}.$$

Postup při odvození transformačních vztahů pro tenzory typu $(2, 0)$ a $(1, 1)$ je zcela analogický a ponecháme jej do cvičení (úloha 2 ve Cvičení 12.2.8). Všechny vztahy shrneme v přehledné tabulce:

Přejchody mezi bázemi pro tenzory druhého řádu

(12.67)

$\mathcal{T}_2^0(V_n)$	$\bar{\phi}^{ij} = S_k^i S_l^j \phi^{kl}$	$\bar{\tau}_{ij} = T_k^i T_l^j \tau_{kl}$	$\phi^{ij} = T_k^i T_l^j \bar{\phi}^{kl}$	$\tau_{ij} = S_k^i S_l^j \bar{\tau}_{kl}$
$\mathcal{T}_0^2(V_n)$	$\bar{\phi}_{ij} = T_k^i T_l^j \phi_{kl}$	$\bar{\tau}^{ij} = S_k^i S_l^j \tau^{kl}$	$\phi_{ij} = S_k^i S_l^j \bar{\phi}_{kl}$	$\tau^{ij} = T_k^i T_l^j \bar{\tau}^{kl}$
$\mathcal{T}_1^1(V_n)$	$\bar{\phi}_j^i = S_k^i T_l^j \phi_l^k$	$\bar{\tau}_i^j = T_k^i S_l^j \tau_l^k$	$\phi_j^i = T_k^i S_l^j \bar{\phi}_l^k$	$\tau_i^j = S_k^i T_l^j \bar{\tau}_l^k$

Pokud se vám předchozí úvahy stále jeví jako málo konkrétní hra s indexy, můžeme si je ještě více přiblížit třeba pro případ, který je geometricky názorný. Za výchozí prostor zvolme euklidovskou rovinu ($n = 2$), v níž lze měřit velikosti vektorů a úhly, je v něm definován skalární součin $(\xi, \zeta) = |\xi||\zeta| \cos \varphi$, kde φ je úhel mezi vektory ξ a ζ . Předpokládejme, že báze (\bar{e}_1, \bar{e}_2) vznikne otočením ortonormální báze (e_1, e_2) o úhel $(-\alpha)$. Matice přechodu pro tento případ jsou

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Rozepíšeme vztahy z tabulky (12.67) pro složky tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_2^0$. Indexy probíhají hodnoty 1, 2. Platí

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{11} &= T_1^k T_1^l \tau_{kl} = T_1^1 T_1^1 \tau_{11} + T_1^1 T_1^2 \tau_{12} + T_1^2 T_1^1 \tau_{21} + T_1^2 T_1^2 \tau_{22} = \\ &= \tau_{11} \cos^2 \alpha + \tau_{22} \sin^2 \alpha - (\tau_{21} + \tau_{12}) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_{11} &= S_1^k S_1^l \bar{\tau}_{kl} = S_1^1 S_1^1 \bar{\tau}_{11} + S_1^1 S_1^2 \bar{\tau}_{12} + S_1^2 S_1^1 \bar{\tau}_{21} + S_1^2 S_1^2 \bar{\tau}_{22} = \\ &= \bar{\tau}_{11} \cos^2 \alpha + \bar{\tau}_{22} \sin^2 \alpha + (\bar{\tau}_{21} + \bar{\tau}_{12}) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Pro složky τ_{12} , τ_{21} a τ_{22} zapište transformační vztahy sami. Pro tenzory typu $(2, 0)$ dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^{11} &= S_k^1 S_l^1 \tau^{kl} = S_1^1 S_1^1 \tau^{11} + S_1^1 S_2^1 \tau^{12} + S_2^1 S_1^1 \tau^{21} + S_2^1 S_2^1 \tau^{22} = \\ &= \tau^{11} \cos^2 \alpha + \tau^{22} \sin^2 \alpha - (\tau^{21} + \tau^{12}) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau^{11} &= T_k^1 T_l^1 \bar{\tau}^{kl} = T_1^1 T_1^1 \bar{\tau}^{11} + T_1^1 T_2^1 \bar{\tau}^{12} + T_2^1 T_1^1 \bar{\tau}^{21} + T_2^1 T_2^1 \bar{\tau}^{22} = \\ &= \bar{\tau}^{11} \cos^2 \alpha + \bar{\tau}^{22} \sin^2 \alpha + (\bar{\tau}^{21} + \bar{\tau}^{12}) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Pro složky τ^{12} , τ^{21} , τ^{22} postupujte podobně. A pro úplnost ještě pro tenzor typu $(1, 1)$.

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1^1 &= S_k^1 T_l^1 \tau_l^k = S_1^1 T_1^1 \tau_1^1 + S_1^1 T_2^1 \tau_2^1 + S_2^1 T_1^1 \tau_1^2 + S_2^1 T_2^1 \tau_2^2 = \\ &= \tau_1^1 \cos^2 \alpha + \tau_2^2 \sin^2 \alpha - (\tau_1^2 + \tau_2^1) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_1^1 &= T_k^1 S_l^1 \bar{\tau}_l^k = T_1^1 S_1^1 \bar{\tau}_1^1 + T_1^1 S_2^1 \bar{\tau}_2^1 + T_2^1 S_1^1 \bar{\tau}_1^2 + T_2^1 S_2^1 \bar{\tau}_2^2 = \\ &= \bar{\tau}_1^1 \cos^2 \alpha + \bar{\tau}_2^2 \sin^2 \alpha + (\bar{\tau}_1^2 + \bar{\tau}_2^1) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Divíte se, že transformační vztahy pro $\bar{\tau}_{11}$ a τ_{11} (indexy jsou dole) jsou shodné se vztahy pro $\bar{\tau}^{11}$ a τ^{11} (indexy nahoře) a se vztahy pro $\bar{\tau}_1^1$ a τ_1^1 ? (A když budete pilní a propočítáte i vztahy pro ostatní složky, také zjistíte, že se pro danou dvojici indexů shodují nezávisle na typu tenzoru, tj. na umístění indexů). Bude tomu tak vždy? Bude tomu tak jen za určitých podmínek? Nebo je to dokonce úplná náhoda? Odpovědi jsou „ne“, „ano“, „ne“. Shoda se objevila proto, že v případě ortonormálních výchozích bází prostoru V_n jsou matice T a S ortogonální, a proto navzájem transponované. Složky kontravariantních, kovariantních a smíšených tenzorů se transformují stejně. Není to tedy nějaká náhoda, na druhé straně to neplatí obecně.

Prozkoumáme-li strukturu transformačních vztahů z příkladu 12.50, mohli bychom rovnou zapsat odpovídající vztahy pro tenzory libovolného typu (p, q) . Zkuste si to a porovnejte pak svůj „odhad“ s výsledkem následujícího odvození. Lineární kombinaci

$$\bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \alpha_{i_1 \dots i_p b_1 \dots b_q}^{j_1 \dots j_q a_1 \dots a_p} \phi_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}$$

vyčíslíme na argumentech $(e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q})$ a na pravé straně výrazu využijeme definičních vztahů (12.64) pro zobrazení $\phi_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} (e^{k_1}, \dots, e^{k_p}; e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) &= \alpha_{i_1 \dots i_p b_1 \dots b_q}^{j_1 \dots j_q a_1 \dots a_p} \phi_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} (e^{k_1}, \dots, e^{k_p}; e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) = \\ &= \alpha_{i_1 \dots i_p b_1 \dots b_q}^{j_1 \dots j_q a_1 \dots a_p} \delta_{a_1}^{k_1} \dots \delta_{a_p}^{k_p} \delta_{b_1}^{l_1} \dots \delta_{b_q}^{l_q} = \alpha_{i_1 \dots i_p l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_q k_1 \dots k_p}. \end{aligned}$$

Na levé straně zapíšeme vektory z báze (e_1, \dots, e_n) jako lineární kombinace báze $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ a kovektory z báze (e^1, \dots, e^n) jako lineární kombinace báze $(\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n)$ pomocí vztahů (12.52) a opět použijeme definiční vztahy pro prvky báze tenzorového prostoru, tentokrát $\bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} (e^{k_1}, \dots, e^{k_p}; e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) &= \bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} (T_{a_1}^{k_1} \bar{e}^{a_1}, \dots, T_{a_p}^{k_p} \bar{e}^{a_p}; S_{b_1}^{l_1} \bar{e}_{b_1}, \dots, S_{b_q}^{l_q} \bar{e}_{b_q}) = \\ &= T_{a_1}^{k_1} \dots T_{a_p}^{k_p} S_{b_1}^{l_1} \dots S_{b_q}^{l_q} \delta_{i_1}^{a_1} \dots \delta_{i_p}^{a_p} \delta_{b_1}^{j_1} \dots \delta_{b_q}^{j_q} = T_{i_1}^{k_1} \dots T_{i_p}^{k_p} S_{l_1}^{j_1} \dots S_{l_q}^{j_q}. \end{aligned}$$

Porovnáním dostaneme hodnoty koeficientů lineárních kombinací

$$\alpha_{i_1 \dots i_p l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_q k_1 \dots k_p} = T_{i_1}^{k_1} \dots T_{i_p}^{k_p} S_{l_1}^{j_1} \dots S_{l_q}^{j_q}$$

a převodní vztahy pro prvky báze $\{\phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\} \rightarrow \{\bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\}$, $1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$,

$$\bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = (T_{i_1}^{k_1} \dots T_{i_p}^{k_p}) (S_{l_1}^{j_1} \dots S_{l_q}^{j_q}) \phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}$$

a naopak pro $\{\bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\} \rightarrow \{\phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\}$, $1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$,

$$\phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = (S_{i_1}^{k_1} \dots S_{i_p}^{k_p}) (T_{l_1}^{j_1} \dots T_{l_q}^{j_q}) \bar{\phi}_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q}.$$

(Závorky ve vztazích jsou pochopitelně „navíc“, jejich úkolem je pouze opticky oddělit složky matic T a S , aby vynikla struktura vztahů.) Z převodních vztahů pro složky vektorů a kovektorů víme, že je lze ze vztahů pro prvky báze získat jednoduše záměnou horních indexů za dolní a záměnou matice T za inverzní matici $S = T^{-1}$. Jakkoli je to pohodlné, správný matematik by měl vztahy regulérně odvodit. Odvození ponecháme do cvičení (úloha 3) a vztahy pouze shrneme.

Přechody mezi bázemi pro tenzory typu (p, q) (12.68)

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} &= T_{i_1}^{k_1} \dots T_{i_p}^{k_p} S_{j_1}^{l_1} \dots S_{j_q}^{l_q} \phi_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q} & \bar{\tau}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= S_{k_1}^{i_1} \dots S_{k_p}^{i_p} T_{j_1}^{l_1} \dots T_{j_q}^{l_q} \tau_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \\ \phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} &= S_{i_1}^{k_1} \dots S_{i_p}^{k_p} T_{l_1}^{j_1} \dots T_{l_q}^{j_q} \bar{\phi}_{k_1 \dots k_p}^{l_1 \dots l_q} & \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= T_{k_1}^{i_1} \dots T_{k_p}^{i_p} S_{j_1}^{l_1} \dots S_{j_q}^{l_q} \bar{\tau}_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \end{aligned}$$

Obrázek 12.32 přibližuje strukturu transformačních vztahů pro tenzory z hlediska „kontravariantních = horních“ a „kovariantních = dolních“ indexů u složek tenzorů a umožňuje jejich snazší zapamatování bez nutnosti je stále odvozovat. Stačí mít zafixovány vztahy pro transfor-

$$\begin{aligned} \text{složky vektoru} & \quad \bar{\alpha}^i = S_k^i \alpha^k, \quad \alpha^i = T_k^i \bar{\alpha}^k \\ \text{složky kovektoru} & \quad \bar{\omega}_j = T_j^l \omega_l, \quad \omega_j = S_j^l \bar{\omega}_l \\ \text{složky tenzoru} & \quad \bar{\tau}_{j_1 \dots j_b \dots j_q}^{i_1 \dots i_a \dots i_p} = S_{k_1}^{i_1} \dots S_{k_a}^{i_a} \dots S_{k_p}^{i_p} T_{j_1}^{l_1} \dots T_{j_b}^{l_b} \dots T_{j_q}^{l_q} \bar{\tau}_{l_1 \dots l_b \dots l_q}^{k_1 \dots k_a \dots k_p} \\ & \quad \tau_{j_1 \dots j_b \dots j_q}^{i_1 \dots i_a \dots i_p} = T_{k_1}^{i_1} \dots T_{k_a}^{i_a} \dots T_{k_p}^{i_p} S_{j_1}^{l_1} \dots S_{j_b}^{l_b} \dots T_{j_q}^{l_q} \bar{\tau}_{l_1 \dots l_b \dots l_q}^{k_1 \dots k_a \dots k_p} \end{aligned}$$

Obrázek 12.32 Transformace kontravariantních a kovariantních indexů.

maci složek vektorů, resp. kovektorů, které mají jeden horní, resp. dolní index, a aplikovat je na každý index složky obecného tenzoru zvlášť. Zelenou a hnědou barvou jsou vyznačeny sčítací indexy, červenou a modrou barvou indexy (na levé i pravé straně) volné. Barevně jsou také vyznačeny „výměny“ matic T a $S = T^{-1}$ při transformacích složek „tam a zpět“, tj. $\tau \rightarrow \bar{\tau}$ a $\bar{\tau} \rightarrow \tau$.

Příklad 12.51: Vyčíslení tenzoru na vektorových a kovektorových argumentech

Ještě jsme si neřekli, jak určíme hodnotu tenzoru zadaného jeho složkami v dané bázi na kovektorových a vektorových argumentech zadaných rovněž složkami, samozřejmě v odpovídající bázi. Dejme tomu, že (e_1, \dots, e_n) je výchozí báze ve vektorovém prostoru V_n a $\{\phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\}$, $1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$, indukovaná báze v tenzorovém prostoru $\mathcal{T}_q^p(V_n)$. Vyjádření kovektorů $\omega_1, \dots, \omega_p \in V_n^*$, vektorů $\xi_1, \dots, \xi_q \in V_n$ a tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$

v příslušných bázích mají tvar

$$\omega_r = \omega_{r,i} e^i, \quad \xi_s = \xi_s^j e_j, \quad \tau = \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q},$$

kde $1 \leq r \leq p$, $1 \leq s \leq q$. Hodnota tenzoru τ na argumentech $(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q)$ je

$$\begin{aligned} \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) &= \tau(\omega_{1,i_1} e^{i_1}, \dots, \omega_{p,i_p} e^{i_p}; \xi_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \xi_q^{j_q} e_{j_q}) = \\ &= \omega_{1,i_1} \dots \omega_{p,i_p} \xi_1^{j_1} \dots \xi_q^{j_q} \tau(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \omega_{1,i_1} \dots \omega_{p,i_p} \xi_1^{j_1} \dots \xi_q^{j_q}. \end{aligned}$$

Příklad 12.52: Jeden číselný příklad

Abychom dobře pronikli do struktury tenzorových výrazů, včetně transformačních vztahů, vyřešíme si jednu úlohu s číselným zadáním. Nemůžeme si dovolit příliš vysokou dimenzi n a příliš vysoký řád tenzoru $(p+q)$, abychom se v rozumném čase vůbec dopočítali nějakého výsledku. I když jde o počítání v principu nenáročného, přece jen počet n^{p+q} složek roste velmi rychle jak s rozměrem základního prostoru, tak s řádem tenzorového prostoru. Zkusme tenzory typu $(0, 2)$ na V_3 — i tak budeme mít co do činění s devíti složkami. Bázi ve vektorovém prostoru V_3 označme (e_1, e_2, e_3) . Vektory ξ a ζ mají v této bázi složky

$$(\xi) \dots (1, 0, -1), \quad (\zeta) \dots (2, -1, 0),$$

tenzor τ je v indukované bázi dán složkami

$$\tau_{11} = 0, \tau_{12} = -1, \tau_{13} = 1, \tau_{21} = 2, \tau_{22} = 0, \tau_{23} = 2, \tau_{31} = -2, \tau_{32} = 0, \tau_{33} = 1.$$

Vypočteme hodnotu tenzoru τ na dvojici vektorových argumentů (ξ, ζ) . Použijeme vztahu odvozeného v předchozím příkladu. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \tau(\xi, \zeta) &= \tau_{ij} \xi^i \zeta^j = \\ &= \tau_{11} \xi^1 \zeta^1 + \tau_{12} \xi^1 \zeta^2 + \tau_{13} \xi^1 \zeta^3 + \tau_{21} \xi^2 \zeta^1 + \tau_{22} \xi^2 \zeta^2 + \tau_{23} \xi^2 \zeta^3 + \tau_{31} \xi^3 \zeta^1 + \tau_{32} \xi^3 \zeta^2 + \tau_{33} \xi^3 \zeta^3 = \\ &= 0 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 0 = 5. \end{aligned}$$

Zvolme nyní bázi $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ a předpokládejme, že matice přechodu k ní od původní báze je

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Složky vektorů ξ a ζ v nové bázi jsou

$$\begin{aligned} (\bar{\xi}) &= (\xi)S = (1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ 0), \\ (\bar{\zeta}) &= (\zeta)S = (2 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

složky tenzoru τ v nové indukované bázi jsou

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{11} &= T_1^k T_1^l \tau_{kl} = T_1^1 T_1^1 \tau_{11} + T_1^1 T_1^2 \tau_{12} + T_1^1 T_1^3 \tau_{13} + T_1^2 T_1^1 \tau_{21} + \\ &+ T_1^2 T_1^2 \tau_{22} + T_1^2 T_1^3 \tau_{23} + T_1^3 T_1^1 \tau_{31} + T_1^3 T_1^2 \tau_{32} + T_1^3 T_1^3 \tau_{33} = -1. \\ \bar{\tau}_{12} &= T_1^k T_2^l \tau_{kl} = 3, \quad \bar{\tau}_{13} = T_1^k T_3^l \tau_{kl} = 4,\end{aligned}$$

a dále podobně

$$\bar{\tau}_{21} = -1, \quad \bar{\tau}_{22} = 2, \quad \bar{\tau}_{23} = 1, \quad \bar{\tau}_{31} = -4, \quad \bar{\tau}_{32} = -1, \quad \bar{\tau}_{33} = 1.$$

Hodnota tenzoru τ na dvojici vektorů (ξ, η) vypočtená ze složek v bázi $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ musí vyjít stejně jako v bázi (e_1, e_2, e_3) . Platí

$$\begin{aligned}\tau(\xi, \zeta) &= \bar{\tau}_{ij} \bar{\xi}^i \bar{\zeta}^j = \\ &= \bar{\tau}_{11} \bar{\xi}^1 \bar{\zeta}^1 + \bar{\tau}_{12} \bar{\xi}^1 \bar{\zeta}^2 + \bar{\tau}_{13} \bar{\xi}^1 \bar{\zeta}^3 + \bar{\tau}_{21} \bar{\xi}^2 \bar{\zeta}^1 + \bar{\tau}_{22} \bar{\xi}^2 \bar{\zeta}^2 + \bar{\tau}_{23} \bar{\xi}^2 \bar{\zeta}^3 + \bar{\tau}_{31} \bar{\xi}^3 \bar{\zeta}^1 + \bar{\tau}_{32} \bar{\xi}^3 \bar{\zeta}^2 + \bar{\tau}_{33} \bar{\xi}^3 \bar{\zeta}^3 = \\ &= (-1) \cdot 0 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 \cdot 0 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot (1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} + \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + (-4) \cdot 0 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 5.\end{aligned}$$

Příklad 12.53: Kovariantní tenzory

V úvodu k tomuto odstavci jsme předeslali, že pro nově budovanou definici integrálu budeme potřebovat jen určitý specifický typ tenzorů. První specifičností je, že se omezíme na tenzory čistě kovariantní, tj. typu $(0, q)$. Proto je vhodné, abychom jim lépe přišli na kloub i pomocí příkladů. Kovariantní tenzor q -tého řádu dostaneme z obecné definice (12.61) jednoduše tím, že položíme $p = 0$. Jde tedy o zobrazení

$$\omega : \underbrace{V_n \times \cdots \times V_n}_{q\text{-krát}} \ni (\xi_1, \dots, \xi_q) \longrightarrow \omega(\xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{R}, \quad (12.69)$$

lineární v každém z vektorových argumentů. Zvolíme-li ve vektorovém prostoru V_n bázi (e_1, \dots, e_n) , je bázi indukovanou v prostoru $\mathcal{T}_q^0(V_n)$ soubor $\{\phi^{j_1 \dots j_q} \in \mathcal{T}_q^0(V_n) \mid 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n\}$, definovaný vztahy (12.64) pro $p = 0$, tj.

$$\phi^{j_1 \dots j_q}(e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) = \delta_{l_1}^{j_1} \dots \delta_{l_q}^{j_q}, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_q, l_1, \dots, l_q \leq n.$$

Vyjádření tenzoru ω ve složkách v této bázi pak je

$$\omega = \omega_{j_1 \dots j_q} \phi^{j_1 \dots j_q}, \quad \text{přičemž } \omega_{j_1 \dots j_q} = \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}).$$

Transformační vztahy při přechodu mezi bázemi $(e_1, \dots, e_n) \rightarrow (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ s maticí přechodu T pro prvky indukované báze a složky tenzoru ω mají tvar

$$\bar{\phi}^{j_1 \dots j_q} = S_{l_1}^{j_1} \dots S_{l_q}^{j_q} \phi^{l_1 \dots l_q}, \quad \phi^{j_1 \dots j_q} = T_{l_1}^{j_1} \dots T_{l_q}^{j_q} \bar{\phi}^{l_1 \dots l_q}, \quad (12.70)$$

$$\bar{\omega}_{j_1 \dots j_q} = T_{j_1}^{l_1} \dots T_{j_q}^{l_q} \omega_{l_1 \dots l_q}, \quad \omega_{j_1 \dots j_q} = S_{j_1}^{l_1} \dots S_{j_q}^{l_q} \bar{\omega}_{l_1 \dots l_q}. \quad (12.71)$$

Dimenze tenzorového prostoru $\mathcal{T}_q^0(V_n)$ je n^q .

Příklad 12.54: Je možné definovat tenzory i nad polem \mathbf{C} ?

V kapitolách 4 a 6 jsme běžně pracovali s vektorovým prostorem V_n nad polem komplexních čísel \mathbf{C} . U tenzorů jsme se zatím omezili na situaci, kdy základní vektorový prostor V_n je konstruován nad polem reálných čísel, neboť pro účely integrování, pro něž se tenzory nyní zabýváme, je takové zjednodušení plně postačující. Aby výklad o tenzorech přece jen nezůstal tak docela „na půli cesty“, alespoň se o tenzorech na \mathbf{C} stručně zmíníme, aniž bychom se jimi dále podrobně zabývali.

Předpokládejme tedy, že V_n je vektorový prostor dimenze n nad polem komplexních čísel \mathbf{C} . Jak na něm vystavět tenzorové prostory? Znamená to podobně jako na V_n nad \mathbf{R} definovat tenzory. Má být definice úplně stejná, nebo se bude něčím lišit? Především by měla být taková, aby „věci do sebe zapadaly“. K dispozici máme jisté spojení dosavadní definice tenzorů se strukturou, kterou umíme dobře definovat na vektorovém prostoru jak nad polem \mathbf{R} , tak \mathbf{C} . Je to souvislost duálního součinu, který je tenzorem typu $(1, 1)$, a skalárního součinu (popsali jsme ji v příkladu 12.45). Ta by měla zůstat zachována i v případě vektorového prostoru nad \mathbf{C} , a to prostřednictvím rovnosti (12.60). Definice a vlastnosti skalárního součinu ve vektorovém prostoru nad \mathbf{C} jsou pevně dány (kapitola 6), definici duálního součinu (a tím současně tenzoru typu $(1, 1)$) musíme na případ nad \mathbf{C} rozšířit tak, aby pro reálné skaláry splývala s dosavadní definicí nad \mathbf{R} , a aby byla přizpůsobena skalárnímu součinu. Druhý požadavek znamená, že pro každý kovektor $\omega \in V_n^*$ bude ve V_n opět existovat právě jeden vektor ζ tak, že pro libovolný vektor ξ bude platit vztah (12.60). Vyjádříme-li skalární součin vektorů ζ a ξ pomocí jejich složek v bázi (e_1, \dots, e_n) , dostaneme

$$\langle \zeta, \xi \rangle = (\zeta^i e_i, \xi^j e_j) = \zeta^i \xi^{j*} (e_i, e_j) = \zeta^i \xi^{j*} g_{ij},$$

kde $G = (g_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, je matice skalárního součinu (samoadjungovaná a pozitivně definitní). V definici duálního součinu $\langle | \rangle$ budeme logicky požadovat linearitu, popřípadě antilinearitu (s ohledem na to, že máme co do činění s komplexními skaláry — právě proto je také skalární součin definován v prvním faktoru jako lineární a v druhém jako antilineární, viz příklad 6.7 na straně 138 druhého dílu). Zatím však nemáme definici duálního prostoru. Pochopitelně i v případě vektorového prostoru nad \mathbf{C} musí být duální prostor tvořen lineárními, popřípadě antilineárními (příklad 6.7) formami. Duální prostor V_n^* definujeme tak, abychom zachovali definici duální báze (e^1, \dots, e^n) indukované bázi (e_1, \dots, e_n) . Rozhodnutí, zda formy, které jej budou tvořit, mají být lineární nebo antilineární, je třeba přizpůsobit následujícím skutečnostem: 1) hodnota duálního součinu kovektoru a vektoru $\langle \omega | \xi \rangle = \omega(\xi)$ vzniká vyčíslením formy (kovektoru) ω na vektorovém argumentu ξ , 2) požadujeme korespondenci duálního a skalárního součinu. Proto musí platit

$$\langle \omega | \xi \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle \implies \omega(\xi) = (\omega_i e^i)(\xi^j e_j) = \zeta^i \xi^{j*} g_{ij}.$$

Získaný vztah ukazuje, že je třeba, aby forma ω byla antilineární. Duální prostor V_n^* tak bude tvořen anitilineárními formami $V_n \rightarrow \mathbf{C}$. Bude platit

$$\langle \omega | \xi \rangle = (\omega_i \xi^{j*}) e^i(e_j) = \omega_j \xi^{j*}$$

a odtud srovnáním $(\omega_j - \zeta^i g_{ij}) \xi^{j*} = 0$, tj. $(\zeta) = (\omega)^T G^{-1}$. Pro hledaný vektor ζ jsme tak dostali formálně stejný vztah jako v případě prostorů nad \mathbf{R} , jen s tím rozdílem, že složky vektorů i prvky matice skalárního součinu mohou být obecně komplexní. Duální součin definujeme nyní pořádně jako zobrazení

$$\langle | \rangle : V_n^* \times V_n \ni (\omega, \xi) \longrightarrow \langle \omega | \xi \rangle \in \mathbf{C}, \quad (12.72)$$

lineární v prvním a antilineární v druhém faktoru. Znamená to platnost vztahů

$$\langle \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 | \gamma \xi_1 + \delta \xi_2 \rangle = \alpha \gamma^* \langle \omega_1 | \xi_1 \rangle + \alpha \delta^* \langle \omega_1 | \xi_2 \rangle + \beta \gamma^* \langle \omega_2 | \xi_1 \rangle + \beta \delta^* \langle \omega_2 | \xi_2 \rangle. \quad (12.73)$$

Strukturu vektorového prostoru na V_n^* nad \mathbf{C} zavedeme úplně stejně jako v případě, kdy pole skalárů tvořila reálná čísla.

182 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

Podobně jako v příkladu 12.43 provedeme ztotožnění prostorů $(V_n^*)^*$ a V_n pomocí kanonického izomorfismu $\iota : V_n \ni e_i \rightarrow \iota(e_i) = \epsilon_i \in (V_n^*)^*$, kde $\epsilon_i(e^j) = \delta_i^j = \langle \epsilon_i | e^j \rangle = \delta_i^j$. Duální součin $\langle \epsilon_i | e^j \rangle = \langle e_i | e^j \rangle$ (po ztotožnění) je opět lineární v prvním a antilineární v druhém faktoru (podle obecné definice (12.72)). Platí tedy $\langle \xi | \omega \rangle = \langle \xi^j e_j | \omega_i e^i \rangle = \xi^j \omega_i^* \langle e_i | e^j \rangle = \omega_j^* \xi^j$, tj.

$$\langle \xi | \omega \rangle = \langle \omega | \xi \rangle^* . \quad (12.74)$$

Na základě předchozích úvah bychom již mohli definovat tenzory typu $(1, 1)$ jako zobrazení

$$\tau : V_n^* \times V_n \ni (\omega, \xi) \longrightarrow \tau(\omega, \xi) \in \mathbf{C} ,$$

lineární v kovektorovém a antilineární ve vektorovém argumentu. Hodnota $\tau(\omega, \xi)$ vyjádřená pomocí složek kovektoru ω , resp. vektoru ξ v bázích (e_1, \dots, e_n) , resp. (e^1, \dots, e^n) je

$$\tau(\omega, \xi) = \tau(\omega_i e^i, \xi^j e_j) = \omega_i \xi^{j*} \tau(e^i, e_j) = \tau_j^i \omega_i \xi^{j*} .$$

Duální součin $\langle \omega | \xi \rangle = \omega(\xi) = \omega_j \xi^{j*}$ vyhovuje této obecné definici, je tedy tenzorem typu $(1, 1)$. Jeho složky v indukované bázi jsou $\langle | \rangle_i^j = \delta_i^j$.

Transformační vztahy pro složky tohoto tenzoru můžeme v podstatě „opsat“ z tabulky (12.67), jen musíme na správném místě udělat hvězdičku:

$$\bar{\tau}_j^i = \tau_l^k S_k^i T_j^{l*} , \quad \tau_j^i = \bar{\tau}_l^k T_k^i S_j^{l*} ,$$

Vzniká otázka, co by se stalo, kdybychom chtěli definovat tenzor typu $(1, 1)$ tak, aby byl lineární ve vektorovém a antilineární v kovektorovém argumentu, tj. $\tau(\omega, \xi) = \omega_i^* \xi^j \tau(e^i, e_j) = \tau_j^i \omega_i^* \xi^j$. Duální prostor by byl definován v původní podobě, tj. jako prostor *lineárních* forem na V_n a duální součin by měl hodnotu $\langle \omega | \xi \rangle = \omega_i^* \xi^i$. To by odpovídalo buď skalárnímu součinu (ξ, ζ) , nebo skalárnímu součinu (ζ, ξ) , jestliže by ovšem byl definován jako antilineární v prvním a lineární v druhém činiteli. I když jsme v kapitole 6 s takovou definicí nepracovali, je také přípustná a například v kvantové mechanice je běžně užívána. Je vidět, že v definicích využívajících linearity resp. antilinearitu zobrazení je jistá volnost.

Nabízí se definice tenzoru typu (p, q) na vektorovém prostoru V_n nad \mathbf{C} jako zobrazení

$$\begin{aligned} \tau : \underbrace{V_n^* \times \dots \times V_n^*}_{p\text{-krát}} \times \underbrace{V_n \times \dots \times V_n}_{q\text{-krát}} \ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \longrightarrow \\ \longrightarrow \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{C} , \end{aligned} \quad (12.75)$$

lineární v p kovektorových a antilineární v q vektorových argumentech, přičemž V_n^* je vektorový prostor antilineárních forem na V_n . Strukturu vektorového prostoru na tenzorových prostorech tohoto typu zavedeme stejně jako v případě nad \mathbf{R} . Pro $p = 0$ dostaneme tenzory typu $(0, q)$, tj. čistě kovariantní, pro $q = 0$ naopak tenzory čistě kontravariantní, typu $(p, 0)$. Vztahy pro indukované báze zůstanou ve tvaru (12.64), transformační vztahy pro složky budou oproti (12.68) modifikovány pouze hvězdičkami (úloha 6 ve Cvičení 12.2.8).

Nejobecněji bychom mohli definovat tenzory na vektorových prostorech nad \mathbf{C} takto:

Nechť V_n je vektorový prostor nad \mathbf{C} . Tenzorem typu $(p, r; q, s)$ nazýváme zobrazení

$$\begin{aligned} \tau : \underbrace{V_n^* \times \cdots \times V_n^*}_{p\text{-krát}} \times \underbrace{V_n \times \cdots \times V_n}_{q\text{-krát}} \times \underbrace{V_n^* \times \cdots \times V_n^*}_{r\text{-krát}} \times \underbrace{V_n \times \cdots \times V_n}_{s\text{-krát}} \ni \quad (12.76) \\ \ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q; \omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; \xi_{q+1}, \dots, \xi_{q+s}) \longrightarrow \\ \longrightarrow \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q; \omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; \xi_{q+1}, \dots, \xi_{q+s}) \in \mathbf{C} \end{aligned}$$

lineární v prvních $(p + q)$ argumentech (p kovektorových a q vektorových) a antilineární ve zbývajících $(r + s)$ argumentech (r kovektorových a s vektorových).

Definice indukované báze při volbě báze (e_1, \dots, e_n) v prostoru V_n je opět standardní,

$$\begin{aligned} \phi_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_s}(e^{a_1}, \dots, e^{a_p}; e_{u_1}, \dots, e_{u_q}; e^{b_1}, \dots, e^{b_r}; e_{v_1}, \dots, e_{v_s}) = \\ = \delta_{i_1}^{a_1} \dots \delta_{i_p}^{a_p} \delta_{u_1}^{j_1} \dots \delta_{u_q}^{j_q} \delta_{k_1}^{b_1} \dots \delta_{k_r}^{b_r} \delta_{v_1}^{l_1} \dots \delta_{v_s}^{l_s}, \quad \text{indexy probíhají množinu } \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Na množině $\mathcal{T}_{q,s}^{p,r}(V_n)$ všech takových zobrazení se zavede struktura vektorového prostoru zase úplně stejným způsobem jako jsme to udělali na množině $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ nad \mathbf{R} . Sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem (obecně lineární kombinování) se pak opět děje „po složkách“, jen mají víc indexů. Samozřejmě, že lineární kombinace můžeme vytvářet pouze z tenzorů stejného typu, tj. se stejnými p , q , r a s . Také transformační vztahy pro složky jsou zcela analogické jako (12.68), jen opět s více indexy a nějakými těmi hvězdičkami. Z pohledu této obecné definice je duální součin prvkem prostoru $\mathcal{T}_{0,1}^{1,0}(V_n)$, tenzory definované vztahem (12.75) jsou prvky prostoru $\mathcal{T}_{0,q}^{p,0}(V_n)$.

Hlouběji se nebudeme touto problematikou zabývat, neboť pro účely integrování potřebujeme tenzorové prostory pouze nad \mathbf{R} . A je-li pole skalárů \mathbf{R} , všechny peripetie kolem linearit a antilinearit samozřejmě odpadnou. V dalších odstavcích se již budeme zabývat výhradně tenzory nad \mathbf{R} a co nejrychleji se pokusíme propracovat k tenzorům se speciálními vlastnostmi, které budou základem pro definici diferenciálních forem.

12.2.3 Tenzory se dají i násobit, samozřejmě tenzorově

Poznali jsme skalární součin vektorů v obecném n -rozměrném prostoru a z fyziky známe také vektorový součin vektorů trojrozměrných. I když víme, že vektory jsou také tenzory (typu $(1, 0)$), není žádný z obou součinů vektorů součinem tenzorovým. Ten musíme nejprve definovat.

Předpokládejme, že V_n je vektorový prostor nad polem reálných čísel a $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ a $\mathcal{T}_s^r(V_n)$ jsou tenzorové prostory. *Tenzorovým součinem tenzorů* $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ a $\eta \in \mathcal{T}_s^r(V_n)$ rozumíme zobrazení

$$\begin{aligned}
\chi : \underbrace{V_n^* \times V_n^*}_{(p+r)\text{-krát}} \times \underbrace{V_n \times V_n}_{(q+s)\text{-krát}} \ni (\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; \xi_1, \dots, \xi_{q+s}) &\longrightarrow \quad (12.77) \\
&\longrightarrow \chi(\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; \xi_1, \dots, \xi_{q+s}) = \\
&= \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \eta(\omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; \xi_{q+1}, \dots, \xi_{q+s}) \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že τ a η jsou tenzory, jsou tedy lineární ve všech svých kovektorových i vektorových argumentech, je zobrazení χ také lineární ve všech svých argumentech. Proto je tenzorem typu $(p+r, q+s)$. Značíme $\chi = \tau \otimes \eta$.

Dalo by se říci, že tenzory v tenzorovém součinu „si berou své argumenty popořadě“. První činitel se vyčíslí na prvních p kovektorových a prvních q vektorových argumentech, druhý činitel pak na zbývajících r , resp. s kovektorových, resp. vektorových argumentech. Další definice zavádí tenzorový součin jako zobrazení kartézského součinu tenzorových prostorů typu (p, q) , a (r, s) do prostoru tenzorů typu $(p+r, q+s)$.

Nechť V_n je vektorový prostor nad polem reálných čísel a $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ a $\mathcal{T}_s^r(V_n)$ jsou tenzorové prostory. *Tenzorovým součinem* se nazývá zobrazení

$$\otimes : \mathcal{T}_q^p(V_n) \times \mathcal{T}_s^r(V_n) \ni (\tau, \eta) \longrightarrow \tau \otimes \eta \in \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}(V_n). \quad (12.78)$$

S definicí nové operace se jako obvykle objeví otázky: Jaké má vlastnosti? Jak souvisí s operacemi, které byly zavedeny již dříve (v našem případě sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem)? První, co nás napadne, je vyzkoušet distributivní zákony. Vezměme tenzory $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$, tenzor $\eta \in \mathcal{T}_s^r(V_n)$, skaláry $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a zkusme vyčíslit tenzorový součin $(\alpha\tau_1 + \beta\tau_2) \otimes \eta$ na patřičném počtu kovektorových a vektorových argumentů, tj. na uspořádaném souboru $(\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; \xi_1, \dots, \xi_{q+s})$. Co při tom použijeme? Nejprve definici tenzorového součinu, pak skutečnosti, že v tenzorových prostorech všech typů máme jednotně zavedenou strukturu vektorového prostoru, a nakonec pravidel pro počítání s reálnými čísly, která používáme běžně. Platí

$$\begin{aligned}
& [(\alpha\tau_1 + \beta\tau_2) \otimes \eta](\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; \xi_1, \dots, \xi_{q+s}) = \\
& = (\alpha\tau_1 + \beta\tau_2)(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \cdot \eta(\omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; \xi_{q+1}, \dots, \xi_{q+s}) = \\
& = [\alpha\tau_1(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) + \beta\tau_2(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q)] \cdot \eta(\omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; \xi_{q+1}, \dots, \xi_{q+s}) = \\
& = \alpha\tau_1(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \eta(\omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; \xi_{q+1}, \dots, \xi_{q+s}) + \\
& + \beta\tau_2(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \eta(\omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; \xi_{q+1}, \dots, \xi_{q+s}) =
\end{aligned}$$

$$= \alpha(\tau_1 \otimes \eta)(\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; \xi_1, \dots, \xi_{q+s}) + \beta(\tau_2 \otimes \eta)(\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; \xi_1, \dots, \xi_{q+s}).$$

Získaný výsledek platí pro libovolný výběr argumentů. Platí tedy pro zobrazení jako taková, tj.

$$(\alpha\tau_1 + \beta\tau_2) \otimes \eta = \alpha(\tau_1 \otimes \eta) + \beta(\tau_2 \otimes \eta).$$

Závorky na pravé straně by přitom ani nemusely být. Stejně dokážeme rovnost $\tau \otimes (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) = \tau \otimes (\alpha\eta_1) + \tau \otimes (\beta\eta_2) = \alpha(\tau \otimes \eta_1) + \beta(\tau \otimes \eta_2)$. Z definice tenzorového součinu také na první pohled bez složitějšího rozepisování plyne vztah $(\tau \otimes \eta) \otimes \chi = \tau \otimes (\eta \otimes \chi)$, který vyjadřuje asociativitu. Závorky tedy nemusíme psát. Vlastnosti tenzorového součinu shrneme ve větě.

Věta 12.19 (Vlastnosti tenzorového součinu): *Nechť*

$$\tau_1, \tau_2, \tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n), \quad \eta_1, \eta_2, \eta \in \mathcal{T}_s^r(V_n), \quad \chi \in \mathcal{T}_v^u(V_n)$$

jsou libovolné tenzory, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ libovolné skaláry. Platí

$$(\alpha\tau) \otimes \eta = \tau \otimes (\alpha\eta) = \alpha(\tau \otimes \eta), \quad \text{píšeme } \alpha\tau \otimes \eta, \quad (12.79)$$

$$(\alpha\tau_1 + \beta\tau_2) \otimes \eta = \alpha\tau_1 \otimes \eta + \beta\tau_2 \otimes \eta, \quad (12.80)$$

$$\tau \otimes (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) = \alpha\tau \otimes \eta_1 + \beta\tau \otimes \eta_2, \quad (12.81)$$

$$(\tau \otimes \eta) \otimes \chi = \tau \otimes (\eta \otimes \chi), \quad \text{píšeme } \tau \otimes \eta \otimes \chi. \quad (12.82)$$

Příklad 12.55: Pozor na nekomutativitu!

Jistě jste si hned při čtení definice všimli, že tenzorový součin není komutativní. Snadno a přímo to uvidíme, vyčíslíme-li tenzory $\tau \otimes \eta$ a $\eta \otimes \tau$, kde $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ a $\eta \in \mathcal{T}_s^r(V_n)$, na libovolném výběru prvků duální báze (e^1, \dots, e^n) a báze (e_1, \dots, e_n) . Dostaneme tak vyjádření obou tenzorových součinů pomocí složek jednotlivých činitelů. Platí

$$\begin{aligned} & (\tau \otimes \eta)(e^{i_1}, \dots, e^{i_{p+r}}; e_{j_1}, \dots, e_{j_{q+s}}) = \\ & = \tau(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) \cdot \eta(e^{i_{p+1}}, \dots, e^{i_{p+r}}; e_{j_{q+1}}, \dots, e_{j_{q+s}}) = \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \eta_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}, \end{aligned}$$

zatímco

$$\begin{aligned} & (\eta \otimes \tau)(e^{i_1}, \dots, e^{i_{p+r}}; e_{j_1}, \dots, e_{j_{q+s}}) = \\ & = \eta(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}; e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \cdot \tau(e^{i_{r+1}}, \dots, e^{i_{p+r}}; e_{j_{s+1}}, \dots, e_{j_{q+s}}) = \eta_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \tau_{j_{s+1} \dots j_{q+s}}^{i_{r+1} \dots i_{p+r}}. \end{aligned}$$

Rozdílnost obou výsledků je očividná.

Příklad 12.55 ukazuje, že operace tenzorového součinu není komutativní. Na druhé straně je pravda, že oba tenzorové součiny, jak $\tau \otimes \eta$, tak $\eta \otimes \tau$ jsou prvky téhož tenzorového prostoru \mathcal{T}_{q+s}^{p+r} . Prvky tohoto prostoru jsou však také tenzory, které mají třeba tvar tenzorového součinu většího počtu tenzorů, přičemž omezení je pouze v tom, že součet stupňů jejich kontravariance (tj. součet počtů jejich kontravariantních indexů) musí být $(p+r)$ a součet stupňů jejich kovariance (součet počtů kovariantních indexů) $(q+s)$. Nabízí se obrácená otázka: lze každý tenzor daného typu vyjádřit jako tenzorový součin tenzorů nižších typů, které si stanovíme tak, aby souhlasil součet stupňů jejich kontravariance a kovariance? Obecně to možné není. Označíme-li $\mathcal{T}_q^p(V_n) \otimes \mathcal{T}_s^r(V_n)$ množinu všech tenzorů, které vznikly jako tenzorové součiny prvků z $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ a prvků z $\mathcal{T}_s^r(V_n)$, bude obecně $\mathcal{T}_q^p(V_n) \otimes \mathcal{T}_s^r(V_n) \subset \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}(V_n)$. Abychom docílili rovnosti, musíme množinu $\mathcal{T}_q^p(V_n) \otimes \mathcal{T}_s^r(V_n)$ „lineárně obalit“, tj. přidat všechny lineární kombinace jejich prvků. Pak bude platit

$$\left[\mathcal{T}_q^p(V_n) \otimes \mathcal{T}_s^r(V_n) \right] = \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}(V_n). \quad (12.83)$$

Tímto způsobem lze provést rozklad tenzorového prostoru libovolného typu (nepíšeme žádné závorky, neboť tenzorový součin je asociativní):

$$\left[\mathcal{T}_{q_1}^{p_1}(V_n) \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_{q_k}^{p_k}(V_n) \right] = \mathcal{T}_{q_1+\cdots+q_k}^{p_1+\cdots+p_k}(V_n).$$

Rozklad tenzorového prostoru $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ takřikajíc „na elementy“, za něž lze považovat tenzorové prostory prvního řádu, pak bude mít například tvar

$$\mathcal{T}_q^p(V_n) = \left[\underbrace{\mathcal{T}_0^1(V_n) \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_0^1(V_n)}_{p\text{-krát}} \otimes \underbrace{\mathcal{T}_1^0(V_n) \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_1^0(V_n)}_{q\text{-krát}} \right].$$

Další otázka se týká indukovaných bází. Definovali jsme je vztahy (12.64). Na druhé straně víme, že každé lineární (a samozřejmě i multilineární) zobrazení je jednoznačně určeno obrazy báze. Vztahy (12.64) zadávají soubor $\{\phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\}$, $1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n$, jednoznačně. Pokud bychom tedy našli bázi prostoru $\mathcal{T}_q^p(V_n)$, která by splňovala tytéž relace, byla by totožná s bází $\{\phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\}$. Z definičních vztahů pro duální bázi (e^1, \dots, e^n) , $e^i(e_j) = \delta_j^i$, a duálních vztahů, $e_i(e^j) = \delta_i^j$, po ztotožnění ϵ_i a e_i pomocí kanonického izomorfismu ι v (12.56) je hned vidět, že relace (12.64) splňuje soubor

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}\}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n. \quad (12.84)$$

V dalších částech textu již budeme pracovat jen s tímto vyjádřením prvků indukované báze $\phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$. Indukované báze v prostorech čistě kovariantních tenzorů jsou

$$\{e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}\}, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n, \quad (12.85)$$

vyjádření kovariantního tenzoru q -tého řádu ve složkách má tvar

$$\eta = \eta_{j_1 \dots j_q} e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}.$$

Při tomto vyjádření také lépe vynikne struktura transformačních vztahů při přechodech mezi bázemi. Zkuste si je znovu odvodit.

12.2.4 Symetrické a antisymetrické tenzory, vnější součin

S některými druhy symetrie v lineární algebře jsme se už setkali. V druhém dílu jsme v odstavci 6.2.2 definovali symetrické lineární operátory na vektorovém prostoru se skalárním součinem, symetrický byl také samotný skalární součin ve vektorovém prostoru nad \mathbf{R} . Jak jsme viděli v příkladu 12.47, lze skalární součin chápat jako tenzor typu $\mathcal{T}_2^0(V_n)$. Jeho symetrie spočívá v tom, že při záměně pořadí vektorových argumentů (které jsou jen dva) se nic nestane, neboť $(\xi, \zeta) = (\zeta, \xi)$ pro libovolné dva vektory $\xi, \zeta \in V_n$. Také symetrie tenzorů v obecné situaci bude znamenat záměnnost argumentů. Jistě lze tušit, jaký bude význam antisymetrie. Záměna dvou argumentů způsobí změnu znaménka hodnoty tenzoru. Je jasné, že zaměňovat pořadí bude možné pouze zvlášť u kovektorových a zvlášť u vektorových argumentů, záměna kovektorového a vektorového argumentu možná nebude — to vyplývá ze samotné definice tenzoru. U tenzoru typu (p, q) můžeme sledovat, co se stane při záměně dvou, tří, i více argumentů na různých pozicích, až po záměnu všech p kovektorových či všech q vektorových argumentů. Definujme však symetrii a antisymetrii pořádně. Nejprve na příkladech postupně uvedeme nejjednodušší a nejpochoptelnější verze definice, formulující symetrii a antisymetrii vždy jen ve dvou argumentech.

Příklad 12.56: Symetrie a antisymetrie tenzorů druhého řádu

Uvažujme o symetrii a antisymetrii tenzorů, které operují jen na dvou argumentech. Jsou to tenzory typů $(2, 0)$, $(0, 2)$ a $(1, 1)$. V případě posledního z těchto typů o symetrii ani antisymetrii mluvit nemůžeme, neboť záměna kovektorových argumentů za vektorové je zapovězena. Je přirozené, že tenzor $\tau \in \mathcal{T}_0^2(V_n)$, který operuje na dvou kovektorových argumentech, nazveme *symetrickým*, pokud se při libovolném výběru dvojice argumentů (ω_1, ω_2) nezmění hodnota tenzoru při výměně jejich pořadí. Jednoduše zapsáno

$$\tau(\omega_1, \omega_2) = \tau(\omega_2, \omega_1) \quad \text{pro libovolné kovektory } \omega_1, \omega_2.$$

Nazveme jej *antisymetrickým*, změní-li hodnota vlivem záměny argumentů znaménko, tj.

$$\tau(\omega_1, \omega_2) = -\tau(\omega_2, \omega_1) \quad \text{pro libovolné kovektory } \omega_1, \omega_2.$$

Zcela analogická je definice symetrie a antisymetrie tenzorů typu $(0, 2)$. Tenzor $\eta \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$ se nazývá *symetrický*, resp. *antisymetrický*, platí-li

$$\eta(\xi_1, \xi_2) = \eta(\xi_2, \xi_1) \quad \text{pro libovolné vektory } \xi_1, \xi_2,$$

resp.

$$\eta(\xi_1, \xi_2) = -\eta(\xi_2, \xi_1) \quad \text{pro libovolné vektory } \xi_1, \xi_2.$$

Podívejme se, jaký dopad na složky tenzorů bude mít jejich symetrie či antisymetrie. Zvolme jako vždy libovolnou bázi (e_1, \dots, e_n) ve V_n . Pro složky tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_0^2(V_n)$, resp. složky tenzoru $\eta \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$ v příslušných indukovaných bázích platí, jak víme, vztahy (12.65), tj.

$$\tau^{ij} = \tau(e^i, e^j), \quad \eta_{ij} = \eta(e_i, e_j).$$

Protože se záměnnost, resp. „antizáměnnost“ argumentů vztahuje k jejich libovolnému výběru, platí samozřejmě i pro argumenty tvořící báze. Proto

$$\tau^{ij} = \tau^{ji}, \quad \eta_{ij} = \eta_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

pro symetrické tenzory a

$$\tau^{ij} = -\tau^{ji}, \quad \eta_{ij} = -\eta_{ji} \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

pro tenzory antisymetrické. Složky symetrických, resp. antisymetrických tenzorů nejsou nezávislé. Složky antisymetrických tenzorů se stejnými indexy jsou dokonce nulové. Dále je třeba si uvědomit, že jakákoli lineární kombinace symetrických tenzorů (samozřejmě téhož typu, různé typy lineárně kombinovat nelze) je opět symetrickým tenzorem, jakákoli lineární kombinace antisymetrických tenzorů je tenzorem antisymetrickým. Obojí si snadno ověříte vyčíslením na argumentech.

Co z toho plyne? Důležitý závěr: množina všech symetrických tenzorů druhého řádu $\mathcal{S}_0^2(V_n)$, resp. $\mathcal{S}_2^0(V_n)$ je vektorovým podprostorem prostoru $\mathcal{T}_0^2(V_n)$, resp. $\mathcal{T}_2^0(V_n)$, množina všech antisymetrických tenzorů druhého řádu $\Lambda_0^2(V_n)$, resp. $\Lambda_2^0(V_n)$ je vektorovým podprostorem prostoru $\mathcal{T}_0^2(V_n)$, resp. $\mathcal{T}_2^0(V_n)$. Dimenze tenzorových prostorů druhého řádu je n^2 . Jaké budou dimenze prostorů symetrických a antisymetrických tenzorů? Takové, kolik nezávislých složek má tenzor. U symetrického tenzoru jsou obecně nezávislé všechny složky se stejnými indexy, tj. n složek, a dále polovina složek s různými indexy, přesněji složky τ^{ij} , resp. η_{ij} , pro $i < j$. Jejich počet je $\frac{1}{2}(n^2 - n)$. Celkový počet nezávislých složek symetrických tenzorů je $n + \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Antisymetrické tenzory mají, jak jsme už zjistili, složky se stejnými indexy z podstaty věci nulové, počet jejich nezávislých složek je jen $\frac{1}{2}n(n - 1)$. Proto

$$\dim \mathcal{S}_0^2(V_n) = \dim \mathcal{S}_2^0(V_n) = \frac{1}{2}n(n + 1),$$

$$\dim \Lambda_0^2(V_n) = \dim \Lambda_2^0(V_n) = \frac{1}{2}n(n - 1).$$

Na první pohled je vidět, že $\dim \mathcal{S}_0^2(V_n) + \dim \Lambda_0^2(V_n) = \dim \mathcal{T}_0^2(V_n)$ a obdobně $\dim \mathcal{S}_2^0(V_n) + \dim \Lambda_2^0(V_n) = \dim \mathcal{T}_2^0(V_n)$. Na druhé straně je jasné, že žádný tenzor (stále mluvíme o tenzorech druhého řádu) kromě nulového nemůže být současně symetrický i antisymetrický. Průnikem prostorů symetrických a antisymetrických tenzorů druhého řádu je právě jen nulový tenzor. Každý z tenzorových prostorů $\mathcal{T}_0^2(V_n)$ a $\mathcal{T}_2^0(V_n)$ je přímým součtem svých vektorových podprostorů symetrických a antisymetrických tenzorů. (Pojem přímého součtu vektorových podprostorů je definován v druhém dílu vztahem (4.18) na straně 40.) To by ale znamenalo, že každý tenzor typu $(2, 0)$ a každý tenzor typu $(0, 2)$ lze jednoznačně rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru. A také tomu tak je. K rozkladu dospějeme jednoduchou úpravou ve složkách. Provedme ji třeba pro tenzor η typu $(0, 2)$.

$$\eta = \eta_{ij} e^i \otimes e^j = \frac{1}{2}(\eta_{ij} + \eta_{ji} + \eta_{ij} - \eta_{ji}) e^i \otimes e^j = \frac{1}{2}(\eta_{ij} + \eta_{ji}) e^i \otimes e^j + \frac{1}{2}(\eta_{ij} - \eta_{ji}) e^i \otimes e^j.$$

Snadno prověříte, že tenzor $\text{sym } \eta = \frac{1}{2}(\eta_{ij} + \eta_{ji}) e^i \otimes e^j$ je symetrický a tenzor $\text{alt } \eta = \frac{1}{2}(\eta_{ij} - \eta_{ji}) e^i \otimes e^j$ antisymetrický. Provedli jsme tak *symetrizaci* „sym“ a *antisymetrizaci*, neboli *alternaci* „alt“, tenzoru η .

Ekvivalentní způsob, jak definovat symetrizaci a antisymetrizaci, je následující:

Symetrizací tenzoru $\eta \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$ nazveme zobrazení

$$\text{sym } \eta : V_n \times V_n \ni (\xi, \zeta) \longrightarrow \text{sym } \eta(\xi, \zeta) = \frac{1}{2}(\eta(\xi, \zeta) + \eta(\zeta, \xi)) \in \mathbf{R},$$

jeho *antisymetrizací*, resp. *alternací* nazveme zobrazení

$$\text{alt } \eta : V_n \times V_n \ni (\xi, \zeta) \longrightarrow \text{alt } \eta(\xi, \zeta) = \frac{1}{2}(\eta(\xi, \zeta) - \eta(\zeta, \xi)) \in \mathbf{R}.$$

Z definice je přímo jasné, že obě tato zobrazení jsou opět tenzory typu $(0, 2)$. Dosadíme-li za vektory ξ a ζ prvky báze e_i a e_j , dostaneme rovnou vztahy pro složky tenzorů $\text{sym } \eta$ a $\text{alt } \eta$, jak jsme je odvodili před chvílí.

Poslední problém, který zbývá vyřešit, je konstrukce bází v podprostorech symetrických a antisymetrických tenzorů. Provedme ji opět pro kovariantní tenzory. Platí zjevná identita

$$e^i \otimes e^j = \frac{1}{2}(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i) + \frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i).$$

Soubory lineárně nezávislých tenzorů

$$\left\{ \frac{1}{2}(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i) \right\}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n,$$

resp.

$$\left\{ \frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i) \right\}, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

tvoří hledané báze tenzorových podprostorů symetrických, resp. antisymetrických tenzorů.

Příklad 12.57: Symetrie a antisymetrie tenzorů třetího řádu

Abychom si procvičili praktické výpočty, rozeberme před formulací obecné definice ještě symetrii a antisymetrii tenzorů třetího řádu. Zde máme co do činění s prostory $\mathcal{T}_0^3(V_n)$, $\mathcal{T}_3^0(V_n)$, $\mathcal{T}_1^2(V_n)$ a $\mathcal{T}_2^1(V_n)$. Pokud jde o poslední dva, je věc jednoduchá. Symetrie či antisymetrie se může týkat v případě prostoru $\mathcal{T}_1^2(V_n)$ jen kovektorových argumentů (jediný vektorový se nemá s čím zaměňovat), v případě prostoru $\mathcal{T}_2^1(V_n)$ jen vektorových argumentů. Tyto situace jsme v podstatě probrali v příkladu 12.56, viz také úlohu 8 ve Cvičení 12.2.8. Například prostor $\mathcal{T}_2^1(V_n)$, jehož dimenze je n^3 , je přímým součtem podprostoru $\mathcal{S}_2^1(V_n)$ o dimenzi $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ a podprostoru $\Lambda_2^1(V_n)$ o dimenzi $\frac{1}{2}n^2(n-1)$.

Soustředme se na prostory čistě kovariantních tenzorů (pro čistě kontravariantní budou postupy shodné až na umístění indexů, dolní indexy se přesunou nahoru a naopak). Možností symetrie a antisymetrie je několik: tenzor může být „imunní“ vůči záměně vektorových argumentů na první a druhé pozici, nebo vůči záměně na první a třetí pozici, nebo vůči záměně na druhé a třetí pozici. Může být také natolik symetrický, že mu nevadí jakákoli výměna (permutace) jeho tří vektorových argumentů na všech třech pozicích. Podobně je tomu s antisymetrií. Definujme třeba symetrizaci a antisymetrizaci tenzoru η v prvním a druhém vektorovém argumentu. Jsou to zobrazení

$$\text{sym}_{12} \eta : V_n \times V_n \times V_n \ni (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longrightarrow \text{sym}_{12} \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2}(\eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \eta(\xi_2, \xi_1, \xi_3)) \in \mathbf{R},$$

190 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHOU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

$$\text{alt}_{12} \eta : V_n \times V_n \times V_n \ni (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longrightarrow \text{alt}_{12} \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2}(\eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \eta(\xi_2, \xi_1, \xi_3)) \in \mathbf{R},$$

vždy pro libovolný výběr argumentů ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Opět je jasné, že obrazy $\text{sym}_{12} \eta$ a $\text{alt}_{12} \eta$ jsou tenzory typu $(0, 3)$, není ani třeba nic rozepisovat. Dosadíme-li za vektory ξ_1, ξ_2 a ξ_3 prvky báze prostoru V_n , dostaneme složky tenzorů $\text{sym}_{12} \eta$ a $\text{alt}_{12} \eta$ v indukované bázi,

$$(\text{sym}_{12} \eta)_{ijk} = \text{sym}_{12} \eta(e_i, e_j, e_k) = \frac{1}{2}(\eta(e_i, e_j, e_k) + \eta(e_j, e_i, e_k)) = \frac{1}{2}(\eta_{ijk} + \eta_{jik}),$$

$$(\text{alt}_{12} \eta)_{ijk} = \text{alt}_{12} \eta(e_i, e_j, e_k) = \frac{1}{2}(\eta(e_i, e_j, e_k) - \eta(e_j, e_i, e_k)) = \frac{1}{2}(\eta_{ijk} - \eta_{jik}).$$

Tenzory symetrické v argumentech na pozicích 1 a 2 tvoří vektorový podprostor $\mathcal{S}_3^0(V_n)_{12}$ prostoru všech tenzorů typu $(0, 3)$, tenzory antisymetrické v argumentech na pozicích 1 a 2 tvoří vektorový podprostor $\Lambda_3^0(V_n)_{12}$ prostoru všech tenzorů typu $(0, 3)$. Zobrazení

$$\text{sym}_{12} : \mathcal{T}_3^0(V_n) \ni \eta \longrightarrow \text{sym}_{12} \eta \in \mathcal{S}_3^0(V_n)_{12} \subset \mathcal{T}_3^0(V_n),$$

resp.

$$\text{alt}_{12} : \mathcal{T}_3^0(V_n) \ni \eta \longrightarrow \text{alt}_{12} \eta \in \Lambda_3^0(V_n)_{12} \subset \mathcal{T}_3^0(V_n)$$

definují *symetrizaci*, resp. *antisymetrizaci* neboli *alternaci* ve vektorových argumentech na první a druhé pozici. Je to skutečně analogické jako u tenzorů druhého řádu v příkladu 12.56. Symetrizaci v argumentech na ostatních dvojicích pozic definujeme obdobně. Zbývá ještě vyjasnit, jak to bude s tenzorem, který bude symetrický či antisymetrický ve všech argumentech.

Tenzor $\eta \in \mathcal{T}_3^0(V_n)$ nazveme *úplně symetrickým*, je-li jeho hodnota neměnná při libovolných záměnách jeho tří vektorových argumentů, resp. *úplně antisymetrickým*, mění-li hodnota znaménko podle znaménka permutace, kterou jsme s argumenty provedli, tj.

$$\eta(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \xi_{\sigma(3)}) = \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad \text{pro libovolné } \xi_1, \xi_2, \xi_3,$$

resp.

$$\eta(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \xi_{\sigma(3)}) = \text{sgn } \sigma \cdot \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad \text{pro libovolné } \xi_1, \xi_2, \xi_3.$$

Tzv. *úplná symetrizace*, resp. *úplná antisymetrizace* neboli *úplná alternace* tenzoru $\eta \in \mathcal{T}_3^0(V_n)$ je zobrazení

$$\text{sym } \eta : V_n \times V_n \times V_n \ni (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longrightarrow \text{sym } \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \eta(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \xi_{\sigma(3)}) \in \mathbf{R},$$

resp.

$$\text{alt } \eta : V_n \times V_n \times V_n \ni (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longrightarrow \text{alt } \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \text{sgn } \sigma \cdot \eta(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \xi_{\sigma(3)}) \in \mathbf{R}.$$

Permutací tří indexů je jen šest, nebude proto nijak pracné výrazy pro symetrizaci a antisymetrizaci tenzoru η rozepsat. Provedeme to pro antisymetrizaci, pro případ symetrizace stačí zaměnit znaménka „minus“ za „plus“.

$$\text{alt } \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{6}(\eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \eta(\xi_3, \xi_1, \xi_2) + \eta(\xi_2, \xi_3, \xi_1) - \eta(\xi_2, \xi_1, \xi_3) - \eta(\xi_3, \xi_2, \xi_1) - \eta(\xi_1, \xi_3, \xi_2)).$$

Množina úplně symetrických tenzorů i množina úplně antisymetrických tenzorů typu $(0, 3)$ jsou vektorové podprostory tenzorového prostoru $\mathcal{T}_3^0(V_n)$. Označme je $\mathcal{S}_3^0(V_n)$ a $\Lambda_3^0(V_n)$ a zkusme určit jejich dimenze. Složky úplně symetrického tenzoru η_{ijk} jsou neměnné při jakékoli záměně indexů i, j a k . Některé (nebo i všechny) indexy

však mohou být stejné. Počet nezávislých složek je proto roven počtu možných výběrů tří indexů z množiny $1, \dots, n$, přičemž se indexy mohou opakovat, tj. počtu kombinací s opakováním třetí třídy z n prvků. V případě úplně antisymetrických tenzorů jsou navíc složky, jejichž některé indexy jsou stejné, rovny nule. Počet nezávislých složek je tedy roven počtu kombinací bez opakování třetí třídy z n prvků. Platí tedy

$$\dim \mathcal{S}_3^0(V_n) = \binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)!}{n!3!}, \quad \dim \Lambda_3^0(V_n) = \binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!}.$$

Průnikem vektorových podprostorů $\mathcal{S}_3^0(V_n)$ a $\Lambda_3^0(V_n)$ je pochopitelně opět pouze nulový tenzor. Součet jejich dimenzí je ovšem menší než dimenze celého prostoru \mathcal{T}_q^0 .

Úplnou symetrizací, resp. úplnou antisymetrizací neboli alternací rozumíme zobrazení

$$\text{sym} : \mathcal{T}_3^0(V_n) \ni \eta \longrightarrow \text{sym } \eta \in \mathcal{S}_3^0(V_n) \subset \mathcal{T}_3^0(V_n),$$

resp.

$$\text{alt} : \mathcal{T}_3^0(V_n) \ni \eta \longrightarrow \text{alt } \eta \in \Lambda_3^0(V_n) \subset \mathcal{T}_3^0(V_n).$$

Uvědomte si malý rozdíl v terminologii: rozlišujeme mezi symetrizací a antisymetrizací tenzoru (to je tenzor) a symetrizací a antisymetrizací jako takovými (to jsou zobrazení tenzorového prostoru do sebe).

Díky příkladům 12.56 a 12.57 jsme teď připraveni formulovat obecnou definici symetrie a antisymetrie tenzorů a definici symetrizace a antisymetrizace.

Řekneme, že tenzor $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ je *symetrický v kovektorových argumentech na pozicích* $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, p\}$, $2 \leq k \leq p$, platí-li pro libovolný výběr argumentů a libovolnou permutaci σ pozičních indexů i_1 až i_k

$$\begin{aligned} \tau(\dots, \omega_{\sigma(i_1)}, \dots, \omega_{\sigma(i_k)}, \dots; \xi_1, \dots, \xi_q) &= \\ &= \tau(\dots, \omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}, \dots; \xi_1, \dots, \xi_q). \end{aligned} \quad (12.86)$$

Tenzor $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ se nazývá *symetrický ve vektorových argumentech na pozicích* $j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, q\}$, $2 \leq l \leq q$, platí-li pro libovolný výběr argumentů a libovolnou permutaci σ pozičních indexů j_1 až j_l

$$\begin{aligned} \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \dots, \xi_{\sigma(j_1)}, \dots, \xi_{\sigma(j_l)}, \dots) &= \\ &= \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \dots, \xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l}, \dots). \end{aligned} \quad (12.87)$$

Tenzor $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ je *antisymetrický v kovektorových argumentech na pozicích* $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, p\}$, $2 \leq k \leq p$, platí-li pro libovolný výběr argumentů a libovolnou permutaci σ pozičních indexů i_1 až i_k

$$\begin{aligned} \tau(\dots, \omega_{\sigma(i_1)}, \dots, \omega_{\sigma(i_k)}, \dots; \xi_1, \dots, \xi_q) &= \\ &= \operatorname{sgn} \sigma \cdot \tau(\dots, \omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}, \dots; \xi_1, \dots, \xi_q). \end{aligned} \quad (12.88)$$

Tenzor $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ se nazývá *antisymetrický ve vektorových argumentech na pozicích* $j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, q\}$, $2 \leq l \leq q$, platí-li pro libovolný výběr argumentů a libovolnou permutaci σ pozičních indexů j_1 až j_l

$$\begin{aligned} \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \dots, \xi_{\sigma(j_1)}, \dots, \xi_{\sigma(j_l)}, \dots) &= \\ &= \operatorname{sgn} \sigma \cdot \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \dots, \xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l}, \dots). \end{aligned} \quad (12.89)$$

Je-li $k = p$, nazývá se tenzor *úplně symetrický*, resp. *úplně antisymetrický* v kovektorových argumentech, v případě $l = q$ pak *úplně symetrický*, resp. *úplně antisymetrický* ve vektorových argumentech.

Různé typy symetrie či antisymetrie se mohou kombinovat. Tenzor typu (p, q) může třeba být úplně symetrický v kovektorových argumentech a úplně antisymetrický ve vektorových argumentech. Z definice je také jasné, že všechny tenzory typu (p, q) se stejným typem symetrie či antisymetrie tvoří v $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ vektorový podprostor. Určení dimenzí těchto podprostorů je jen kombinatorický problém, který zde pro jednotlivé situace řešit nebudeme.

Definujeme symetrizaci a antisymetrizaci tenzoru v argumentech na vybraných pozicích.

Symetrizací tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ v kovektorových argumentech na pozicích $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, p\}$, $2 \leq k \leq p$, nazveme zobrazení

$$\begin{aligned} \operatorname{sym}^{i_1 \dots i_k} \tau : (\times)_p V_n^* \times (\times)_q V_n \ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \operatorname{sym}^{i_1 \dots i_k} \tau(\dots, \omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}, \dots; \xi_1, \dots, \xi_q) = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_{i_1 \dots i_k}} \tau(\dots, \omega_{\sigma(i_1)}, \dots, \omega_{\sigma(i_k)}, \dots; \xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (12.90)$$

Symetrizací tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ ve vektorových argumentech na pozicích $j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, q\}$, $2 \leq l \leq q$, nazveme zobrazení

$$\begin{aligned} \operatorname{sym}_{j_1 \dots j_l} \tau : (\times)_p V_n^* \times (\times)_q V_n \ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \operatorname{sym}_{j_1 \dots j_l} \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_{j_1 \dots j_l}} \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \dots, \xi_{\sigma(j_1)}, \dots, \xi_{\sigma(j_l)}, \dots) \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (12.91)$$

Antisymmetrizací neboli *alternací* tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ v kovektorových argumentech na pozicích $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, p\}$, $2 \leq k \leq p$, nazveme zobrazení

$$\begin{aligned} \text{alt}^{i_1 \dots i_k} \tau : (\times)_p V_n^* \times (\times)_q V_n \ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) &\longrightarrow (12.92) \\ &\longrightarrow \text{alt}^{i_1 \dots i_k} \tau(\dots, \omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}, \dots; \xi_1, \dots, \xi_q) = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_{i_1 \dots i_k}} \text{sgn } \sigma \cdot \tau(\dots, \omega_{\sigma(i_1)}, \dots, \omega_{\sigma(i_k)}, \dots; \xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Antisymmetrizací neboli *alternací* tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ ve vektorových argumentech na pozicích $j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, q\}$, $2 \leq l \leq q$, nazveme zobrazení

$$\begin{aligned} \text{alt}_{j_1 \dots j_l} \tau : (\times)_p V_n^* \times (\times)_q V_n \ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) &\longrightarrow (12.93) \\ &\longrightarrow \text{alt}_{j_1 \dots j_l} \tau(\omega_1, \dots, \omega_p, \dots; \xi_1, \dots, \xi_q) = \\ &= \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_{j_1 \dots j_l}} \text{sgn } \sigma \cdot \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \dots, \xi_{\sigma(j_1)}, \dots, \xi_{\sigma(j_l)}, \dots) \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Je-li $k = p$, jedná se o *úplnou symmetrizaci*, resp. *úplnou antisymmetrizaci* v kovektorových argumentech, pro $l = q$ o *úplnou symmetrizaci*, resp. *úplnou antisymmetrizaci* ve vektorových argumentech. Úplnou symmetrizaci, resp. antisymmetrizaci tenzoru τ značíme symbolem *sym*, resp. *alt* bez indexů.

Symmetrizací, resp. *antisymmetrizací* neboli *alternací* v kovektorových, resp. vektorových argumentech na pozicích $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, p\}$, $2 \leq k \leq p$, resp. $j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, q\}$, $2 \leq l \leq q$, rozumíme zobrazení

$$\begin{aligned} \text{sym}^{i_1 \dots i_k} : \mathcal{T}_q^p(V_n) \ni \tau &\longrightarrow \text{sym}^{i_1 \dots i_k} \tau \in \mathcal{T}_q^p, \\ \text{sym}_{j_1 \dots j_l} : \mathcal{T}_q^p(V_n) \ni \tau &\longrightarrow \text{sym}_{j_1 \dots j_l} \tau \in \mathcal{T}_q^p, \\ \text{alt}^{i_1 \dots i_k} : \mathcal{T}_q^p(V_n) \ni \tau &\longrightarrow \text{alt}^{i_1 \dots i_k} \tau \in \mathcal{T}_q^p, \\ \text{alt}_{j_1 \dots j_l} : \mathcal{T}_q^p(V_n) \ni \tau &\longrightarrow \text{alt}_{j_1 \dots j_l} \tau \in \mathcal{T}_q^p. \end{aligned} \quad (12.94)$$

Příklad 12.58: Úplná symetrie a úplná antisymetrie

Jaké vlastnosti mají složky úplně symetrického a úplně antisymetrického tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$? Předpokládejme, že tenzor τ je úplně symetrický ve všech kovektorových argumentech, o symetrii či antisymetrii v argumentech vektorových nic nepředpokládáme. Zvolme bázi (e_1, \dots, e_n) v prostoru V_n . Pro složky tenzoru τ v indukované bázi platí podle (12.65)

$$\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \tau(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q}).$$

194 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

Je-li tenzor úplně symetrický ve všech kovektorových argumentech, pak pro libovolnou permutaci σ indexů 1 až p platí

$$\tau(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \tau(e^{i_{\sigma(1)}}, \dots, e^{i_{\sigma(p)}}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}},$$

tj.

$$\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}}$$

pro libovolnou permutaci horních indexů σ . Pro případ tenzoru úplně antisymetrického v kovektorových argumentech dostaneme stejným postupem

$$\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}}.$$

Vzhledem k umístění indexů u složek mluvíme také o tensorech symetrických, resp. antisymetrických *v horních indexech*. Pro složky tenzoru τ úplně symetrického, resp. antisymetrického ve vektorových argumentech platí

$$\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \tau_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}^{i_1 \dots i_p},$$

resp.

$$\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \tau_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}^{i_1 \dots i_p}$$

pro libovolnou permutaci dolních indexů σ . Hovoříme o symetrii, resp. antisymetrii *v dolních indexech*.

A zkusme ještě jednu věc: co se stane, když provedeme třeba se symetrickým tenzorem symetrizaci, popřípadě antisymetrizaci? Je předem vcelku jasné, že symetrizace by neměla se symetrickým tenzorem udělat nic, antisymetrizace by jej naopak měla „zlikvidovat“, tj. přiřadit mu nulový tenzor. Hned uvidíme, zda usuzujeme správně. Počítejme obecnou složku úplné symetrizace tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_q^0(V_n)$ (omezení na $p = 0$ volíme proto, abychom se nemuseli při výpočtu vláčet s indexy, s kterými se stejně nic neděje). Podle definice symetrizace tenzoru ve vektorových argumentech (12.91) je

$$(\operatorname{sym} \tau)_{j_1 \dots j_q} = (\operatorname{sym} \tau)(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \tau(e_{j_{\sigma(1)}}, \dots, e_{j_{\sigma(q)}}).$$

(Pozor! Máme už trochu „přeindexováno“, takže je třeba hlídat význam indexovaných veličin. Výraz $(\operatorname{sym} \tau)_{j_1 \dots j_q}$ je složka úplně symetrizovaného tenzoru.)

Protože je tenzor τ symetrický, jsou všechny složky vystupující v součtu na pravé straně posledního vztahu stejné a rovny složce se základní permutací indexů, tj. $\tau_{j_1 \dots j_q}$. Stejných sčítanců na pravé straně je právě tolik, kolik je permutací q indexů, tj. $q!$. Je proto $(\operatorname{sym} \tau)_{j_1 \dots j_q} = \tau_{j_1 \dots j_q}$. Novou symetrizací symetrického tenzoru dostaneme původní tenzor. Je také jasné, že dvojí aplikace operace symetrizace na obecný tenzor vede ke stejnému výsledku jako jedna její aplikace, tj. $\operatorname{sym} \circ \operatorname{sym} = \operatorname{sym}$. Operace symetrizace je projekcí na podprostor symetrických tenzorů. I když jsme tuto vlastnost odvodili pro úplnou symetrizaci, je zřejmé, že platí pro symetrizaci v libovolné skupině indexů. (Postup, který vede k tomuto závěru je plně analogický s tím, který jsme použili v tomto příkladu, s tím rozdílem, že se týká jen vybraných pozic indexů.)

Budeme-li symetrický tenzor antisymetrizovat, dostaneme pro obecnou složku

$$(\operatorname{alt} \tau)_{j_1 \dots j_q} = (\operatorname{alt} \tau)(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \tau(e_{j_{\sigma(1)}}, \dots, e_{j_{\sigma(q)}}) = 0.$$

Tenzor τ je podle předpokladu symetrický, takže všechny složky vystupující na pravé straně poslední rovnosti jsou opět stejné. Znaménka u nich se ovšem střídají podle parity permutace. Sudých a lichých permutací indexových pozic je stejný počet, proto je výraz na pravé straně nulový.

Aniž bychom už cokoli rozepisovali, můžeme na základě předchozích výsledků usoudit, že symetrizace antisymetrického tenzoru dává nulový tenzor, antisymetrizace antisymetrického tenzoru je původní antisymetrický tenzor. Antisymetrizace je tedy rovněž projekcí, a to na podprostor antisymetrických tenzorů.

Vlastnosti symetrizace a antisymetrizace, které jsme odvodili v příkladu 12.58 pro speciální případ úplné symetrie, resp. úplné antisymetrie, a jejichž zobecnění na libovolný typ symetrie či antisymetrie je zřejmé, shrneme v následující větě.

Věta 12.20 (Vlastnosti symetrizace a antisymetrizace): *Pro operace symetrizace a antisymetrizace na prostoru \mathcal{T}_q^p platí*

$$\begin{aligned}
 \text{sym}^{i_1 \dots i_k} \circ \text{sym}^{i_1 \dots i_k} &= \text{sym}^{i_1 \dots i_k}, & 2 \leq k \leq p, \\
 \text{sym}_{j_1 \dots j_l} \circ \text{sym}_{j_1 \dots j_l} &= \text{sym}_{j_1 \dots j_l}, & 2 \leq l \leq q, \\
 \text{alt}^{i_1 \dots i_k} \circ \text{alt}^{i_1 \dots i_k} &= \text{alt}^{i_1 \dots i_k}, & 2 \leq k \leq p, \\
 \text{alt}_{j_1 \dots j_l} \circ \text{alt}_{j_1 \dots j_l} &= \text{alt}_{j_1 \dots j_l}, & 2 \leq l \leq q, \\
 \text{sym}^{i_1 \dots i_k} \circ \text{alt}^{i_1 \dots i_k} &= \text{alt}^{i_1 \dots i_k} \circ \text{sym}^{i_1 \dots i_k} = 0, & 2 \leq k \leq p, \\
 \text{sym}_{j_1 \dots j_l} \circ \text{alt}_{j_1 \dots j_l} &= \text{alt}_{j_1 \dots j_l} \circ \text{sym}_{j_1 \dots j_l} = 0, & 2 \leq l \leq q.
 \end{aligned} \tag{12.95}$$

I když není možné při symetrizaci a antisymetrizaci „míchat“ kovektorové a vektorové argumenty, lze operace symetrizace a antisymetrizace *zvlášť* na kovektorových a vektorových argumentech skládat. Mají tedy smysl například zobrazení

$$\begin{aligned}
 \text{sym}_{j_1 \dots j_l} \circ \text{sym}^{i_1 \dots i_k} &= \text{sym}^{i_1 \dots i_k} \circ \text{sym}_{j_1 \dots j_l}, \\
 \text{sym}_{j_1 \dots j_l} \circ \text{alt}^{i_1 \dots i_k} &= \text{alt}^{i_1 \dots i_k} \circ \text{sym}_{j_1 \dots j_l}
 \end{aligned}$$

a další podobného tvaru. (Že takové operace komutují, je zřejmé na první pohled: každá z nich zasahuje jen do jedné skupiny argumentů, kovektorových, nebo vektorových, proto je jedno, v jakém pořadí se při kompozici provede.) Provedeme-li například úplnou symetrizaci tenzoru v kovektorových argumentech a úplnou antisymetrizaci ve vektorových argumentech, dostaneme tenzor, jehož hodnota se nezmění při záměně dvou libovolných kovektorových argumentů a změní znaménko při záměně libovolných dvou vektorových argumentů.

Z dosavadních spíše teoretických úvah by se mohlo zdát, že tenzory nepředstavují něco příliš praktického. Opak je pravda. S tenzory pracujeme hlavně ve fyzice, a ta je jistě nejdůležitější disciplínou umožňující pochopit přírodní zákonitosti. Zdaleka ne všechny fyzikální veličiny jsou skalární nebo vektorové. Naopak, vztahy mezi vektorovými veličinami mají často charakter úměry a jsou proto zprostředkovány tenzory. Vztahy úměry mezi tenzorovými veličinami pak zase dalšími tenzory, jenže vyšších řádů. V následujících příkladech uvedeme několik typických ukázek. Proč až v tomto odstavci? Fyzikální tenzory jsou totiž většinou symetrické, nebo antisymetrické, popřípadě symetrii a antisymetrii kombinují. Příroda je zkrátka taková, že různé

typy symetrie sama vykazuje (kromě základních vlastností prostoročasu lze jako typický příklad uvést třeba geometrickou symetrii krystalů, o níž jsme hovořili v odstavci 4.1.1 o grupách). A ještě poznámka: složky fyzikálních tenzorů obecně závisejí na souřadnicích bodů v tělesech, v nichž je vyčísľujeme. Přesně řečeno, jedná se o tenzorová pole. O těch budeme v obecné poloze mluvit později, ale zdá se vhodné ukázat si použití tenzorů co nejdříve.

Příklad 12.59: Jiný pohled na tenzory

Tenzor jsme definovali jako multilineární zobrazení přiřazující vektorům a kovektorům číslo. Je to takto v pořádku? V úvodu k celému odstavci 12.2 jsme přece tenzorem nazývali soubor veličin představujících koeficienty úměrnosti třeba mezi složkami vektorů (lineární vztah mezi složkami úhlové rychlosti a momentu hybnosti zprostředkovaný tenzorem momentu setrvačnosti), nebo koeficienty úměrnosti mezi složkami jiných tenzorů (vztah tenzoru mechanického napětí a tenzoru deformace zprostředkovaný tenzorem modulů pružnosti), apod. Jak to jde dohromady? V tomto příkladu ukážeme, že docela dobře. Definovat tenzor je totiž možné i jinými způsoby, než jak jsme to provedli. Nejpřirozenějším alternativním způsobem je zavést například tenzory druhého řádu jako lineární zobrazení přiřazující vektoru vektor, kovektoru kovektor, kovektoru vektor či vektoru kovektor. Rozebereme podrobněji jen jednu z těchto možností, například tu poslední. Uvažujme o množině $L(V_n, V_n^*)$ všech lineárních zobrazení

$$\eta : V_n \ni \xi \longrightarrow \eta(\xi) \in V_n^*$$

a zaveďme na ní strukturu vektorového prostoru jako v odstavci 4.2.5, tj. vztahy

$$(\eta + \chi)(\xi) = \eta(\xi) + \chi(\xi), \quad (\alpha\eta)(\xi) = \alpha\eta(\xi),$$

popřípadě ekvivalentně jediným vztahem

$$(\alpha\eta + \beta\chi)(\xi) = \alpha\eta(\xi) + \beta\chi(\xi)$$

pro libovolné prvky $\eta, \chi \in L(V_n, V_n^*)$, libovolné skaláry $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a libovolný vektor $\xi \in V_n$. Zvolíme-li ve V_n bázi (e_1, \dots, e_n) a ve V_n^* bázi duální, můžeme indukovanou bázi v $L(V_n, V_n^*)$ definovat, opět v souladu s odstavcem 4.2.5, jako systém zobrazení $\phi^{ij} \in L(V_n, V_n^*)$, $1 \leq i, j \leq n$, definovaných vztahy

$$\phi^{ij}(e_k) = \delta_k^j e^i \implies \eta = \eta_{ij} \phi^{ij}.$$

Pro $\omega = \eta(\xi)$, $\omega = \omega_i e^i$, platí

$$\omega_i e^i = \eta(\xi^j e_j) = \xi^j \eta(e_j) = \xi^j (\eta_{ik} \phi^{ik}(e_j)) = (\xi^j \eta_{ik} \delta_j^k) e^i = (\eta_{ij} \xi^j) e^i \implies \omega_i = \eta_{ij} \xi^j.$$

Zjistíme, jak se transformují složky lineárního zobrazení η při přechodu od báze (e_1, \dots, e_n) k bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$. Matici přechodu označme jako obvykle $T = (T_i^j)$, $1 \leq i, j \leq n$:

$$\bar{\omega}_i = T_i^k \omega_k = T_i^k (\eta_{kl} \xi^l) = T_i^k \eta_{kl} \bar{\xi}^j T_j^l = (T_i^k T_j^l \eta_{kl}) \bar{\xi}^j \implies \bar{\eta}_{ij} = T_i^k T_j^l \eta_{kl}.$$

Že jsme výsledek už někde viděli? Jistě, má přesně podobu transformačního vztahu pro složky prvků prostoru $\mathcal{T}_2^0(V_n)$. Vektorové prostory $\mathcal{T}_2^0(V_n)$ a $L(V_n, V_n^*)$ mají dimenzi n^2 a k tomu stejné transformační vztahy. Jsou tedy nejen izomorfní (shodnost dimenzí), ale izomorfní kanonicky (stejně transformační vlastnosti). Proto je lze ztotožnit.

Předchozí úvahy lze zobecnit. Zvolme celá nezáporná čísla r, s, p, q tak, že $r \leq p$ a $s \leq q$. Uvažujme o lineárním zobrazení

$$\eta : \mathcal{T}_{p-r}^{q-s}(V_n) \ni \tau \longrightarrow \eta(\tau) = \sigma \in \mathcal{T}_s^r(V_n),$$

tj. $\eta \in L(\mathcal{T}_{p-r}^{q-s}(V_n), \mathcal{T}_s^r(V_n))$. Snadno zjistíme, že složky tohoto zobrazení mají stejné transformační vlastnosti jako složky tenzorů typu (p, q) :

$$\begin{aligned} \sigma_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \eta_{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_p} \tau_{i_{r+1} \dots i_p}^{j_{s+1} \dots j_q}, \\ \bar{\sigma}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= S_{k_1}^{i_1} \dots S_{k_r}^{i_r} T_{j_1}^{l_1} \dots T_{j_s}^{l_s} \sigma_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} = S_{k_1}^{i_1} \dots S_{k_r}^{i_r} T_{j_1}^{l_1} \dots T_{j_s}^{l_s} \eta_{l_1 \dots l_s l_{s+1} \dots l_q}^{k_1 \dots k_r k_{r+1} \dots k_p} \tau_{k_{r+1} \dots k_p}^{l_{s+1} \dots l_q} = \\ &= S_{k_1}^{i_1} \dots S_{k_r}^{i_r} T_{j_1}^{l_1} \dots T_{j_s}^{l_s} \eta_{l_1 \dots l_s l_{s+1} \dots l_q}^{k_1 \dots k_r k_{r+1} \dots k_p} T_{j_{s+1}}^{l_{s+1}} \dots T_{j_q}^{l_q} S_{k_{r+1}}^{i_{r+1}} \dots S_{k_p}^{i_p} \tau_{i_{r+1} \dots i_p}^{j_{s+1} \dots j_q}, \end{aligned}$$

takže nakonec

$$\bar{\sigma}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = (S_{k_1}^{i_1} \dots S_{k_r}^{i_r} S_{k_{r+1}}^{i_{r+1}} \dots S_{k_p}^{i_p} T_{j_1}^{l_1} \dots T_{j_s}^{l_s} T_{j_{s+1}}^{l_{s+1}} \dots T_{j_q}^{l_q} \eta_{l_1 \dots l_s l_{s+1} \dots l_q}^{k_1 \dots k_r k_{r+1} \dots k_p}) \tau_{i_{r+1} \dots i_p}^{j_{s+1} \dots j_q}.$$

V závorce je nepochybně složka $\bar{\eta}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ zobrazení η v bázi indukované v prostoru $L(\mathcal{T}_{p-r}^{q-s}(V_n), \mathcal{T}_s^r(V_n))$ bází $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ vektorového prostoru V_n , tj.

$$\bar{\eta}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = S_{k_1}^{i_1} \dots S_{k_p}^{i_p} T_{j_1}^{l_1} \dots T_{j_q}^{l_q} \eta_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}.$$

Vektorové prostory $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ a $L(\mathcal{T}_{p-r}^{q-s}(V_n), \mathcal{T}_s^r(V_n))$ jsou kanonicky izomorfní. Uvědomme si, že při pevně zvolených hodnotách p a q mohou být rozklady $p = (p-r) + r$ a $q = (q-s) + s$, $r \leq p$, $s \leq q$ libovolné. Máme tedy $(p+1)(q+1)$ prostorů lineárních zobrazení kanonicky izomorfních s prostorem $\mathcal{T}_q^p(V_n)$ a také kanonicky izomorfních navzájem. Můžeme je proto všechny ztotožnit. Později uvidíme, že existuje další možnost interpretace multilineárních vztahů typu $\sigma_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \eta_{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_p} \tau_{i_{r+1} \dots i_p}^{j_{s+1} \dots j_q}$. Využívá pojmu *úžení*, resp. *stopa* tenzoru. Ale to až za chvíli.

Příklad 12.60: Kartézské tenzory

Fyzika většinou pracuje s kartézskými soustavami souřadnic, tj. s ortonormálními bázemi umístěnými v počátku soustavy souřadnic. V nich se transformační vztahy pro složky tenzorů značně zjednoduší, neboť inverzní matice k matici přechodu od báze k bázi je v tomto případě rovna matici transponované. Transformační vztahy pro složky vektoru pak splynou s transformačními vztahy pro složky kovektoru, například

$$\bar{\alpha}^i = \alpha^j S_j^i = \alpha^j T_i^j, \quad \bar{\omega}_i = T_i^j \omega_j, \quad \text{sčítá se přes } j.$$

Rozeznáte jeden od druhého? Jistě, pomocí umístění indexů a zápisu složek vektorů do řádku a složek kovektoru do sloupce. Jenže umístění indexů a způsob zápisu složek je pouze naše dohoda, vhodná při použití Einsteinovy symboliky. Dohodneme-li se, že budeme psát všechny indexy dolů (což je v případě kartézských tenzorů standardní), přičemž u složek matice T bude první index řádkový a druhý sloupcový, dostaneme transformační vztahy ve tvaru

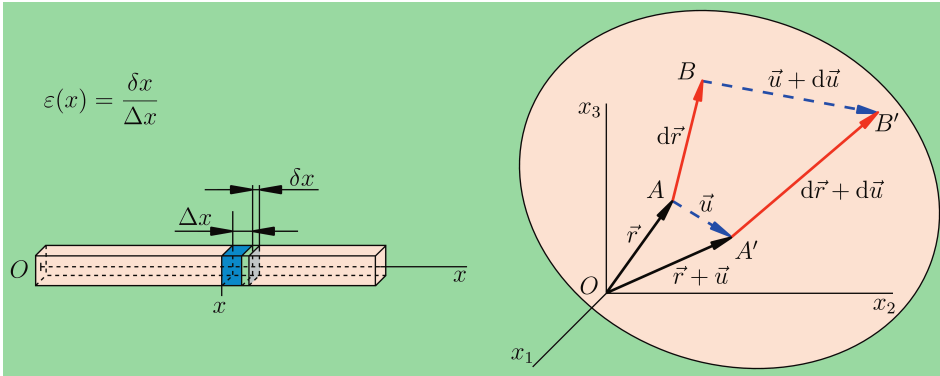
$$\bar{\alpha}_i = T_{ij}\alpha_j, \quad \bar{\omega}_i = T_{ij}\omega_j, \quad \text{sčítá se přes } j,$$

tedy k nerozeznání. Kartézské vektory a kovektory splývají. Fyzikální vektory a tenzory často závisejí na tom, v kterém místě prostoru s nimi počítáme. Jedná se pak o *vektorová*, resp. *tenzorová pole*, o nichž budeme mluvit v dalším odstavci. Některá tenzorová pole představují veličiny, které závisejí na parciálních derivacích jiných veličin podle jednotlivých proměnných a chovají se právě jako kartézské tenzory.

V následujících fyzikálních příkladech půjde o kartézské tenzory, proto budeme všechny indexy psát dolů. Zachováme však Einsteinovu symboliku. Sčítacím indexem bude index opakovaný.

Příklad 12.61: Deformace a napětí

Kolik veličin je třeba, abychom popsali obecnou deformaci tělesa se spojitě rozloženou hmotností v okolí každého jeho bodu? Kdybychom natahovali či stlačovali tyč, jejíž rozměry určující její průřez jsou zanedbatelné vůči délce, stačí jedna veličina, poměr změny délky elementu tyče v daném bodě k jeho délce, tzv. pole relativní deformace. Budeme-li natahovat či stlačovat kvádr ze všech stran tak, aby stále zůstal kvádrem, stačí veličiny tři, relativní deformace ve směrech hran kvádrů. Ale co když budeme kvádr deformovat obecně, třeba tak, že z něj nebude ani rovnoběžnostěn? Co když s ním budeme třeba kroutit? Je jasné, že tři veličiny stačit nebudou. K tomu, abychom charakterizovali deformaci, poslouží obrázek 12.33 vpravo.



Obrázek 12.33 K definici tenzoru deformace.

Body A a B definují délkový element v bodě $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ tělesa. Po deformaci charakterizované vektorem $\vec{u}(\vec{r})$ přejdou do poloh A' a B' . Platí $\overrightarrow{AB} = d\vec{r}$, $\overrightarrow{A'B'} = d\vec{r} + d\vec{u}$. Změna čtverce délky elementu při vyjádření posunutí $d\vec{u}$ je

$$\begin{aligned} (d\vec{r} + d\vec{u})^2 - (d\vec{r})^2 &= ds'^2 - ds^2 = \delta_{ij}(dx_i + du_i)(dx_j + du_j) - \delta_{ij} dx_i dx_j = \\ &= \delta_{ij} \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left(dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l \right) - \delta_{ij} dx_i dx_j = \\ &= \delta_{ij} \left(dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_i dx_l + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_k dx_l \right) - \delta_{ij} dx_i dx_j = \\ &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j. \end{aligned}$$

V lineární aproximaci, kdy zanedbáme součin parciálních derivací v závorce předchozího vztahu, dostáváme *tenzor deformace* ϵ (přesně řečeno jde o tenzorové pole) v závislosti na poloze v tělese. Jeho kartézské složky jsou

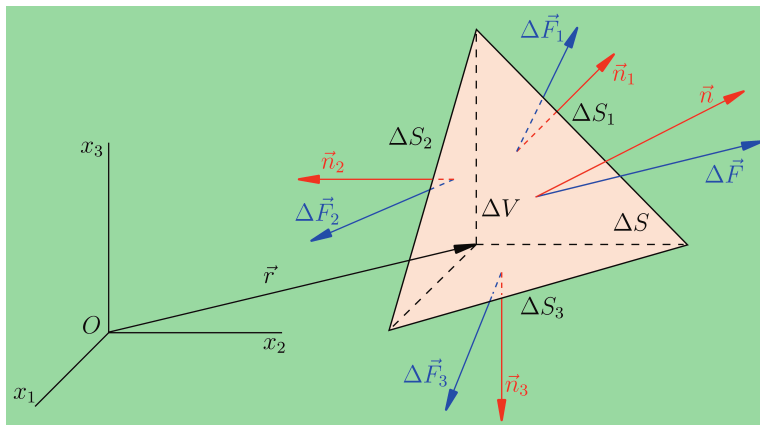
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Všimněte si, že tenzor deformace je symetrický. A vůbec — je to skutečně tenzor? Vždyť přece tenzory jsme definovali jako multilineární zobrazení přiřazující vektorům, resp. kovektorům čísla. Funguje takto i tenzor deformace? Ano, plyne to ze vztahu $ds'^2 - ds^2 = 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j$, který můžeme chápat tak, že dvěma vektorům o složkách (ξ_1, ξ_2, ξ_3) a $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ přiřazuje číslo $2\epsilon_{ij}\xi_i\zeta_j$. Toto zobrazení je lineární v obou vektorových argumentech. Tenzorové chování veličiny $\epsilon = (\epsilon_{ij})$ lze také doložit transformačními vztahy při přechodech mezi kartézskými bázemi (úloha 12 ve Cvičení 12.2.8).

V případě tyče deformované v tahu nebo tlaku podél její délky (obrázek 12.33) platí v lineární aproximaci *Hookeův zákon*

$$\frac{F(x)}{S} = E\epsilon, \quad \epsilon = \frac{\delta x}{\Delta x},$$

který známe ze střední školy. Poměr $F(x)/S$ je *mechanické napětí*, přičemž $F(x)$ je síla, jíž působí pravá část tyče rozdělené na dvě části v bodě x na levou část, S je průřez tyče. Konstanta E se nazývá *modul pružnosti v tahu* a definuje úměru mezi mechanickým napětím a deformací. Jak je tomu v obecném případě? Abychom mohli analogický vztah napsat, musíme především umět popsat mechanické napětí v obecném bodě tělesa. K popisu opět slouží tenzorová veličina, kterou postupně definujeme pomocí obrázku 12.34.



Obrázek 12.34 K definici tenzoru mechanického napětí.

Na schematickém obrázku je znázorněn element o objemu ΔV tělesa se spojitě rozloženou hmotností v bodě o polohovém vektoru \vec{r} . Předpokládejme, že na těleso nepůsobí žádné objemové síly vnější z hlediska tělesa jako celku. (Tento předpoklad zjednoduší výpočty, které však povedou ke stejnému výsledku, jako kdybychom zjednodušení nepoužili). Na element tedy působí pouze jeho okolí, tvořené zbytkem tělesa. Silové působení na element má charakter *plošných sil* — jejich působíště jsou spojitě rozložena podél hraničních ploch. Element je úmyslně vybrán ve tvaru čtyřstěnu, jehož tři stěny jsou rovnoběžné s rovinami soustavy souřadnic, zatímco čtvrtá stěna je obecná. Stěny o obsahích ΔS_1 , ΔS_2 , ΔS_3 a ΔS jsou orientovány jednotkovými vnějšími normálami $\vec{n}_1 = (-1, 0, 0)$, $\vec{n}_2 = (0, -1, 0)$, $\vec{n}_3 = (0, 0, -1)$ a $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Označme α_1 , α_2 a α_3 úhly, které svírají stěny ΔS_1 , ΔS_2 a ΔS_3 se stěnou ΔS . Platí

$$\Delta S_i = \Delta S \cos \alpha_i = -\Delta S (\vec{n} \vec{n}_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Síly, jimiž okolí působí na elementární čtyřstěn, jsou v rovnováze, tj.

$$\Delta \vec{F} + \Delta \vec{F}_1 + \Delta \vec{F}_2 + \Delta \vec{F}_3 = \vec{0}.$$

Veličinu

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}(\vec{r})}{\Delta S}$$

nazýváme *hustota plošných sil*. Podmínku rovnováhy sil pak můžeme zapsat ve tvaru

$$\int_{\Delta S} \vec{\sigma} dS + \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta S_i} \vec{\sigma}_i dS = \vec{0}.$$

Skutečný průběh vektorů hustoty plošných sil na jednotlivých stěnách lze podle věty o střední hodnotě integrálního počtu nahradit středními hodnotami, tj.

$$\langle \vec{\sigma} \rangle \Delta S + \sum_{i=1}^3 \langle \vec{\sigma}_i \rangle \Delta S_i = \vec{0} \implies \langle \vec{\sigma} \rangle + \sum_{i=1}^3 \langle \vec{\sigma}_i \rangle n_i = \vec{0},$$

kde $n_i = -\vec{n}\vec{n}_i$, $i = 1, 2, 3$. V limitě pro $\Delta V \rightarrow 0$ dostaneme

$$\vec{\sigma} = -n_1 \vec{\sigma}_1 - n_2 \vec{\sigma}_2 - n_3 \vec{\sigma}_3,$$

(v bodě o polohovém vektoru \vec{r}), ve složkách pak

$$\sigma_i(\vec{r}) = -n_1(\vec{r})\sigma_{1i}(\vec{r}) - n_2(\vec{r})\sigma_{2i}(\vec{r}) - n_3(\vec{r})\sigma_{3i}(\vec{r}) \implies \sigma_j(\vec{r}) = -n_j(\vec{r})\sigma_{ji}(\vec{r}).$$

Co znamená tento výsledek? Není to komplikace, když místo tří složek vektoru hustoty plošných sil $\vec{\sigma}$ působících na danou plochu máme najednou devět složek tří vektorů hustot plošných sil působících na různé orientované plochy? Naopak. Známe-li v každém bodě tělesa složky hustoty plošných sil působících na tři *speciálně orientované* elementární plochy, stačí pro zjištění hustoty plošných sil působících na *obecně orientovanou* elementární plochu zadat pouze složky její normály. Vznikla tak nová veličina $\tau = -\sigma = (\tau_{ij})$, $\tau_{ij} = -\sigma_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$, která je kartézským tenzorem. Nazývá se *tenzor mechanického napětí*. Vzhledem k závislosti na poloze v tělese jde, přesně řečeno, opět o tenzorové pole. Také tenzor napětí je symetrický, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Odkud to ale plyne? Zase z fyziky. Nejen pro elementární čtyřstěn, ale pro libovolnou část tělesa musí totiž kromě silové rovnováhy platit také rovnováha momentová.

Nejprve však formulujme podmínku silové rovnováhy pro libovolný objem tělesa V ohraničený hraniční plochou S . Za předpokladu, že na těleso nepůsobí vnější objemové síly, který jsme použili již dříve, platí

$$\int_S \vec{\sigma} dS = \vec{0} \implies \int_S \sigma_i dS = - \int_S \sigma_{ji} n_j dS = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

index j je sčítací. I když nás pořádný výklad plošných integrálů teprve čeká, přece jen o nich již něco víme z odstavce 9.4.1. Vztahem (9.68) je zde prezentována Gaussova-Ostrogradského věta, která umí převést integrál po uzavřené ploše na integrál, jehož integračním oborem je objem touto plochou ohraničený. A to je právě naše situace. Použitím Gaussovy-Ostrogradského věty dostaneme

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x^j} dV = 0.$$

Aby tato podmínka mohla být splněna pro *libovolný* objem V vymezený v tělese, musí být integrand nulový. Podmínka silové rovnováhy pro těleso bez vnějšího objemového silového působení má tvar

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x^j} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pro pohodlné vyjádření momentů sil, které jsou vektorovými součiny, zavedeme veličinu, která je rovněž tenzorem. Jedná se o *Levi-Civítův tenzor*:

$$\varepsilon_{ijk} = 1, \quad \text{resp.} \quad \varepsilon_{ijk} = -1, \quad \text{resp.} \quad \varepsilon_{ijk} = 0, \quad (12.96)$$

tvoří-li indexy $1 \leq i, j, k \leq 3$ sudou, resp. lichou permutaci, resp. jsou-li některé z nich shodné. Vektorový součin vektorů \vec{a} a \vec{b} pak lze zapsat ve složkách jako $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$. Matematické vyjádření momentové rovnováhy libovolné části tělesa o objemu V a hraniční ploše S má tvar

$$\int_S \vec{r} \times \vec{\sigma} dS = \vec{0},$$

ve složkách,

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k dS = \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dS = 0,$$

kde $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ jsou složky vnější normály k ploše S v obecném bodě \vec{r} . Podmínku momentové rovnováhy můžeme také chápat jako trojici podmínek

$$\int_S (v_{il} n_l) dS = 0, \quad v_{il} = \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Podle Gaussovy-Ostrogradského věty platí

$$\int_S v_{il} n_l dS = \int_V \frac{\partial (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk})}{\partial x_l} dV,$$

tj.

$$\int_V \frac{\partial (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk})}{\partial x_l} dV = 0 \implies \int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} dV = 0.$$

Vzhledem k podmínce silové rovnováhy je ovšem druhý integrál roven nule. Dostáváme tak

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV.$$

Protože podmínka momentové rovnováhy musí platit pro *libovolnou* část tělesa, tj. předchozí integrál je nulový pro libovolný integrační obor V , musí být nulový integrand. Odtud $\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$ pro $i = 1, 2, 3$, tj. $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$ pro $1 \leq j, k \leq 3$. Tenzor σ je symetrický a totéž platí pro tenzor mechanického napětí $\tau = -\sigma$.

Pro malé deformace je vztah mezi tenzorem napětí a tenzorem deformace lineární. Všechny složky tenzoru napětí jsou úměrné složkám tenzoru deformace a naopak. Tyto úměry jsou vyjádřeny *zobecněným Hookeovým zákonem*

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad \epsilon_{ij} = S_{ijkl} \tau_{kl},$$

opakované indexy jsou sčítací. Veličiny C_{ijkl} jsou složkami tenzoru čtvrtého řádu, zvaného *tenzor modulů pružnosti*, veličiny S_{ijkl} tvoří *tenzor elastických konstant*. Tyto tenzory mají 81 složek, vykazují však symetrii

v prvním a druhém indexu a také v třetím a čtvrtém indexu. Vypočteme-li potenciální energii pružnosti tělesa v okolí daného bodu, dostaneme kvadratickou formu

$$E = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} S_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl}.$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že tenzory $C = (C_{ijkl})$ a $S = (S_{ijkl})$ jsou symetrické také vůči záměně první a druhé dvojice indexů. Počet jejich nezávislých složek je proto pouze 21. Další symetrie vyplývají z operací geometrické symetrie materiálů, které studujeme. Jsou-li materiály krystalické, s jejich zvyšující se symetrií nezávislých složek tenzorů C a S ubývá. U trojklonných krystalů, které jsou nejméně symetrické, je jich 21, u nejsymetričtějších krystalů, kubických, jsou už jen tři. V případě kontinua mají tenzory C a S jen dvě nezávislé složky. V případě tenzoru C se jedná o modul pružnosti v tahu a modul pružnosti ve smyku.

Příklad 12.62: Tensor elektromagnetického pole

Dalším typickým příkladem tenzoru je *tenzor elektromagnetického pole*. Ten ovšem není tenzorem kartézským. Je definován na čtyřrozměrném časoprostoru $M = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ s Minkowského metrikou. (Tato metrika je příkladem pseudoriemannovské metriky, o níž bude ještě řeč později.) Body tohoto prostoru jsou *události*, definované souřadnicemi $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x^1, x^2, x^3)$, c je rychlost světla ve vakuu. Minkowského metrika je dána tenzorem $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, reprezentovaným maticí $G = (g_{ij})$, kde $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Tato matice se nemění při unitárních transformacích. Veličina

$$ds^2 = (ct)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2, \quad \text{resp.} \quad ds = \sqrt{(cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}$$

je invariant, je stejná pro všechny pozorovatele v inerciálních vztažných soustavách. Vektory tečných prostorů $T_x M$ k prostoročasu se nazývají *čtyřvektory*. „Čtverec velikosti“ čtyřvektoru A

$$(A, A) = \begin{pmatrix} A^0 & A^1 & A^2 & A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

je invariantem při Lorentzově transformaci $(A) = (A')T$, kde

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

(Tvar matice T odpovídá situaci, kdy se vztažná soustava S' pohybuje vzhledem k vztažné soustavě S rychlostí $\vec{v} = (v, 0, 0)$, přičemž stejnojmenné prostorové osy soustav jsou trvale souhlasně rovnoběžné a v okamžiku míjení počátků soustav souřadnic byly v obou soustavách vynulovány hodiny.) Pro každý bod $x \in M$ označme (e_0, e_1, e_2, e_3) bázi prostoru $T_x M$ (bod x u prvků báze nevyepisujeme) a (e^0, e^1, e^2, e^3) bázi duální. Pro libovolný bod $x \in M$ zvolme $A \in T_x M$ a hledejme lineární zobrazení $\varphi_A \in T_x^* M$, $A = A^0 e_0 + A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3$, pro které je $\varphi_A(A) = (A, A)$. To existuje jednoznačně a platí $\varphi_A = \varphi_0 e^0 + \varphi_1 e^1 + \varphi_2 e^2 + \varphi_3 e^3$, $\varphi_0 = A^0$, $\varphi_j = -A^j$ pro $1 \leq j \leq 3$. Značíme

$$(A) = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A}), \quad (\varphi_A) = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (A_0, -\vec{A}).$$

Platí

$$A_i = g_{ij}A^j, \quad A^i = g^{ij}A_j, \quad G^{-1} = (g^{ij}), \quad 0 \leq i, j \leq 3.$$

Použité operace představují snižování, resp. zvedání indexů pomocí metriky (později je přesně definujeme). Pro tenzory druhého řádu platí

$$B_{ij} = g_{ir}g_{js}B^{rs}, \quad B^{ij} = g^{ir}g^{js}B_{rs}, \quad B_i^j = g_{ir}B^{jr}, \quad \text{apod.}$$

Zobecnění na tenzory vyšších řádů je nasnadě. Nyní odvodíme tenzorový zápis pohybové rovnice relativistické částice a definujeme tenzor elektromagnetického pole. Pohybová rovnice částice s nábojem e a (klidovou) hmotností m v elektromagnetickém poli o elektrické intenzitě \vec{E} a magnetické indukci \vec{B} je

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B},$$

kde \vec{v} je rychlost částice, $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ její hybnost. Označme $(A^i) = (c^{-1}\phi, \vec{A})$ tzv. *čtyřpotenciál*, kde ϕ , resp. \vec{A} představují skalární, resp. vektorový potenciál elektromagnetického pole. Pak $(A_i) = (c^{-1}\phi, -\vec{A})$. Definujeme antisymetrické výrazy

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}.$$

Použitím vztahů

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

mezi veličinami \vec{E} a \vec{B} a čtyřpotenciálem (A_i) dostaneme

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & c^{-1}E^1 & c^{-1}E^2 & c^{-1}E^3 \\ -c^{-1}E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -c^{-1}E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -c^{-1}E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix},$$

a jistě sami snadno najdete tvar (F^{ij}) . Dále platí

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{p}}{ds} c\sqrt{1-\beta^2},$$

neboť $ds = c\sqrt{1-\beta^2} dt$. Zavedme tzv. *čtyřrychlost* a *čtyřhybnost* částice vztahy

$$(u^i) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right), \quad (p^i) = (mcu^i) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right),$$

a podobně (u_i) a (p_i) . Po úpravách dostaneme

$$mc \frac{du_i}{ds} = eF_{ij}u^j, \quad 0 \leq i, j \leq 3.$$

To jsou pohybové rovnice relativistické částice v tenzorovém zápisu, (F_{ij}) je (dvakrát kovariantní) tenzor druhého řádu (prověřte jeho vlastnosti při Lorentzově transformaci o matici T), zvaný *tenzor elektromagnetického pole*. Snadno také prověříte, že pro něj platí vztah

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ji}}{\partial x^k} = 0, \quad 0 \leq i, j, k \leq 3.$$

Příklad 12.63: Tenzor energie-impulsu

Tenzor energie-impulsu $T = (T^{ik})$, $k = 0, 1, 2, 3$, je zaváděn jako symetrický tenzor, opět ve čtyřrozměrném značení, které jsme použili v předchozím příkladu. Jeho složky jsou definovány vztahem

$$T^{ik} = \frac{1}{\mu_0} \left(-g_{lm} F^{il} F^{km} + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right), \quad 0 \leq i, k, l, m \leq 3.$$

Vyjádříme-li složky tenzoru elektromagnetického pole pomocí trojrozměrných veličin \vec{E} a \vec{B} , jako v příkladu 12.62, a za složky metrického tenzoru dosadíme metriku Minkowského $\text{diag } g = (1, -1, -1, -1)$ (nediagonální složky jsou nulové), dostaneme fyzikálně názornější zápis tenzoru energie-impulsu,

$$T = \begin{pmatrix} w & c^{-1}S_1 & c^{-1}S_2 & c^{-1}S_3 \\ c^{-1}S_1 & -\sigma_{11} & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ c^{-1}S_2 & -\sigma_{12} & -\sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ c^{-1}S_3 & -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & -\sigma_{33} \end{pmatrix},$$

kde

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right), \quad \text{resp.} \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

jsou hustota energie, resp. Poyntingův vektor, veličina o složkách

$$\sigma_{rs} = \varepsilon_0 E_r E_s + \frac{1}{\mu_0} B_r B_s - w \delta_{rs}, \quad 1 \leq r, s \leq 3,$$

je tzv. Maxwellův tenzor napětí. Příným výpočtem se snadno přesvědčíme (provedte), že platí zákon zachování momentu hybnosti $L = (L^{ijk})$, $0 \leq i, j, k \leq 3$, $L^{ijk} = x^i T^{jk} - x^j T^{ik}$, neboť $\frac{\partial L^{ijk}}{\partial x^k} = 0$.

Příklad 12.64: Vektor, nebo tenzor?

Teď jedno malé dilema ve V_3 : Antisymetrický kartézský tenzor druhého řádu v trojrozměrném prostoru má tři nezávislé složky. Co když je to vektor? Jistěže obecně není — stačí uvědomit si definici tenzoru a vektoru a transformační vztahy. Ale co když u kartézských tenzorů nastane nějaká speciální situace, díky níž bychom mohli antisymetrické tenzory a vektory nějak ztotožnit? Pro složky vektoru platí (indexy jsou dole, $T = (T_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$, je ortogonální matice přechodu)

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_j T_{ij}, \quad \alpha_i = \bar{\alpha}_j T_{ji}.$$

Pro tenzor druhého řádu je

$$\bar{\eta}_{ij} = \eta_{kl} T_{ik} T_{jl}, \quad \eta_{ij} = \bar{\eta}_{kl} T_{ki} T_{lj}.$$

Je-li antisymetrický, pak $\eta_{ij} = -\eta_{ji}$. Kdybychom chtěli antisymetrický tenzor druhého řádu zapsat jako vektor, musíme vhodně přeznačit složky, třeba pomocí cyklické záměny $v_1 = \eta_{23} = -\eta_{32}$, $v_2 = \eta_{31} = -\eta_{13}$, $v_3 = \eta_{12} = -\eta_{21}$, tj.

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\bar{v}_1 = \bar{\eta}_{23} = \eta_{kl} T_{2k} T_{3l} =$$

$$= \eta_{23} (T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32}) + \eta_{31} (T_{23}T_{31} - T_{21}T_{33}) + \eta_{12} (T_{21}T_{32} - T_{22}T_{31}) .$$

Vztahy vypadají složitě. Uvědomme si však, že v závorkách jsou postupně algebraické doplňky prvků T_{11} , T_{12} a T_{13} , tj. prvků prvního řádku matice přechodu T . Tyto prvky tvoří první sloupec matice adjungované, označme ji \tilde{T} . Pak

$$\bar{v}_1 = v_1 \tilde{T}_{11} + v_2 \tilde{T}_{21} + v_3 \tilde{T}_{31} .$$

Platí $\tilde{T} = \det T \cdot T^{-1}$ (úloha 13 ve Cvičení 12.2.8). V našem případě, kdy je matice T ortogonální, je $\tilde{T} = \det T \cdot T^T$, tj. $\tilde{T}_{ij} = T_{ji} \cdot \det T = \pm T_{ji}$, neboť $\det T = \pm 1$. Znaménko „+“ se uplatní v případě, že T je matice přechodu mezi stejně orientovanými bázemi (jsou-li výchozí i výsledná báze buď obě pravotočivé, nebo obě levotočivé). Znaménko „minus“ se použije při přechodu mezi opačně orientovanými bázemi. Podobně získáme transformační vztahy pro \bar{v}_2 a \bar{v}_3 (zkuste to). Transformační vztahy pro „vektor“ \vec{v} jsou tedy skoro stejné jako vztahy pro „opravdový“ vektor,

$$\bar{v}_i = \det T (v_j \cdot T_{ij}) = \pm (v_j T_{ij}) .$$

Při přechodu mezi stejně orientovanými bázemi je od transformačních vztahů pro vektor nepoznáme. Antisymetrický tenzor se proto někdy nazývá *pseudovektor* nebo *axiální vektor*. Typickým axiálním vektorem je vektorový součin dvou vektorů. Například pro první složku vektoru $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ platí

$$\bar{c}_1 = \varepsilon_{1jk} \bar{a}_j \bar{b}_k = \varepsilon_{123} T_{2r} T_{3s} a_r b_s + \varepsilon_{132} T_{3r} T_{2s} a_r b_s = (T_{2r} T_{3s} - T_{3r} T_{2s}) a_r b_s .$$

Další úvaha je obdobná jako v případě vektoru \vec{v} . Dokončete ji. Pojem vektorového součinu později ještě zobecníme.

Zamysleme se však nad problémem „antisymetrický tenzor druhého řádu versus vektor“ pro $n = 3$ ještě obecněji, tj. bez omezení na kartézské tenzory. Použijeme většinu předchozích úvah s tím, že umístíme „správně“ horní a dolní indexy. Označíme

$$\begin{aligned} v^1 &= \eta_{23} = -\eta_{32} , \\ v^2 &= \eta_{31} = -\eta_{13} , \\ v^3 &= \eta_{12} = -\eta_{21} . \end{aligned}$$

Při tomto přeznačení dostaneme,

$$(\bar{v}^1 \ \bar{v}^2 \ \bar{v}^3) = (v^1 \ v^2 \ v^3) \begin{pmatrix} \tilde{T}_1^1 & \tilde{T}_1^2 & \tilde{T}_1^3 \\ \tilde{T}_2^1 & \tilde{T}_2^2 & \tilde{T}_2^3 \\ \tilde{T}_3^1 & \tilde{T}_3^2 & \tilde{T}_3^3 \end{pmatrix} \quad \text{tj.} \quad (\bar{v}) = (v) \tilde{T} .$$

Vztah $\tilde{T} = (\det T) T^{-1}$ mezi maticí adjungovanou \tilde{T} a inverzní T^{-1} k matici T platí obecně, bez dalších podmínek kladených na regulární matici T . Proto

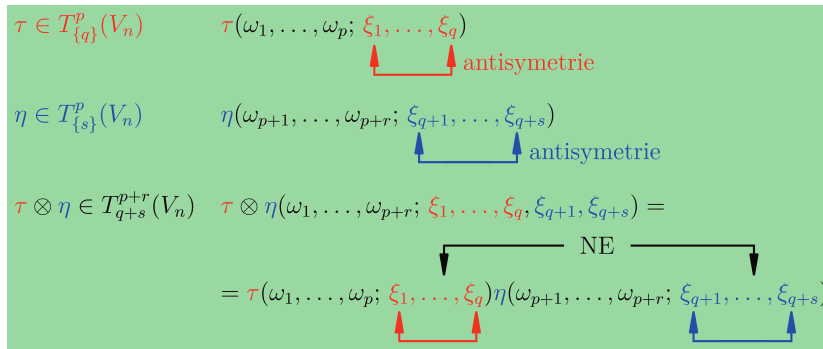
$$(\bar{v}) = (v) T^{-1} \cdot (\det T) .$$

Až na násobení determinantem matice přechodu jsou tedy transformační vztahy pro složky antisymetrických 2-tenzorů shodné s transformačními vztahy pro složky vektorů. Tento výsledek lze ještě dále zobecnit pro obecnou dimenzi vektorového prostoru V_n : transformační vztahy pro složky antisymetrických $(n-1)$ -tenzorů se až na násobení determinantem matice přechodu shodují s transformačními vztahy pro vektory. Není to nijak udivující. Vektorové prostory V_n a $\Lambda_{n-1}(V_n)$ mají stejnou dimenzi ($\dim V_n = n$, $\dim \Lambda_{n-1}(V_n) = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$) a jsou proto izomorfní.

Po malé fyzikálně-kartézské odbočce se vraťme k obecným úvahám. Označme $\mathcal{T}_{\{q\}}^p(V_n)$, resp. $\mathcal{T}_q^{\{p\}}(V_n)$ vektorový podprostor tenzorů typu (p, q) úplně antisymetrických ve vektorových, resp. kovektorových argumentech, vektorový podprostor tenzorů úplně antisymetrických jak ve vektorových, tak v kovektorových argumentech značíme $\Lambda_q^p(V_n)$. Předpokládejme, že $\tau \in \mathcal{T}_{\{q\}}^p(V_n)$ a $\eta \in \mathcal{T}_{\{s\}}^r(V_n)$. Můžeme udělat jejich tenzorový součin $\tau \otimes \eta$. Jaké budou jeho vlastnosti antisymetrie? Hodnota tohoto součinu na argumentech $(\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; \xi_1, \dots, \xi_{q+s})$ je

$$\tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) \eta(\omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}; \xi_{q+1}, \dots, \xi_{q+s}).$$

Je jasné, že výsledný tenzor je antisymetrický vzhledem k jakékoli záměně prvních q vektorových argumentů, a také antisymetrický vzhledem k jakékoli záměně posledních s vektorových argumentů. Při záměně některého ze skupiny prvních q argumentů za některý ze skupiny posledních s argumentů nemáme o jeho chování obecně žádnou informaci (viz schematický obrázek 12.35).



Obrázek 12.35 Tenzorový součin antisymetrických tenzorů.

Vzniká otázka, zda existuje nějaký rozumný způsob, jak z tenzorů τ a η vyrobit nějaký součin typu $(p+r, q+s)$, který by byl úplně antisymetrický ve vektorových argumentech. Odpověď se nabízí docela přirozeně: antisymetrizovat tenzorový součin $\tau \otimes \eta$ ve všech vektorových argumentech. A máme nový typ součinu tenzorů.

Nechť $\tau \in \mathcal{T}_{\{q\}}^p(V_n)$ a $\eta \in \mathcal{T}_{\{s\}}^r(V_n)$ jsou tenzory antisymetrické ve všech svých vektorových argumentech. Jejich *vnějším součinem* rozumíme zobrazení

$$\underbrace{V_n^* \times \dots \times V_n^*}_{(p+r)\text{-krát}} \times \underbrace{V_n \times \dots \times V_n}_{(q+s)\text{-krát}} \ni (\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; \xi_1, \dots, \xi_{q+s}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (\tau \wedge \eta)(\omega_1, \dots, \omega_{p+r}; \xi_1, \dots, \xi_{q+s}) \in \mathbf{R},$$

$$\tau \wedge \eta = \frac{(q+s)!}{q!s!} \text{alt}(\tau \otimes \eta). \quad (12.97)$$

(Alternace se týká pouze vektorových argumentů.)

Vlastnosti alternace zaručují, že $\tau \wedge \eta$ je tenzor antisymetrický ve všech svých $(q + s)$ vektorových argumentech, tj. $\tau \wedge \eta \in \mathcal{T}_{\{q+s\}}^{p+r}(V_n)$. Analogickým způsobem definujeme vnější součin tenzorů antisymetrických ve všech kovektorových argumentech. Následující tvrzení shrnuje vlastnosti vnějšího součinu.

Věta 12.21 (Vlastnosti vnějšího součinu): *Nechť*

$$\tau_1, \tau_2, \tau \in \mathcal{T}_{\{q\}}^p(V_n), \quad \eta_1, \eta_2, \eta \in \mathcal{T}_{\{s\}}^r(V_n), \quad \chi \in \mathcal{T}_{\{v\}}^u$$

jsou libovolné tenzory antisymetrické ve všech svých vektorových argumentech a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ libovolné skaláry. Platí

$$(\alpha\tau) \wedge \eta = \tau \wedge (\alpha\eta) = \alpha(\tau \wedge \eta), \quad (12.98)$$

$$(\alpha\tau_1 + \beta\tau_2) \wedge \eta = \alpha(\tau_1 \wedge \eta) + \beta(\tau_2 \wedge \eta), \quad (12.99)$$

$$\tau \wedge (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) = \alpha(\tau \wedge \eta_1) + \beta(\tau \wedge \eta_2), \quad (12.100)$$

$$\tau \wedge \eta = (-1)^{qs} \eta \wedge \tau, \quad (12.101)$$

$$(\tau \wedge \eta) \wedge \chi = \tau \wedge (\eta \wedge \chi), \quad \text{píšeme } \tau \wedge \eta \wedge \chi. \quad (12.102)$$

Zcela analogické vlastnosti má vnější součin tenzorů úplně antisymetrických v kovektorových argumentech.

Vzhledem k tomu, že operace vnějšího součinu je definována odděleně, tj. nezávisle, pro tenzory antisymetrické ve vektorových, resp. kovektorových argumentech, uvedeme praktické příklady až v odstavci 12.2.6, kdy se budeme věnovat výhradně kovariantním tenzorům.

12.2.5 Úžení, stopy, zvedání a snižování indexů

Další důležitou tenzorovou operací je *úžení*, neboli *kontrakce*. Existují dva základní typy této operace. První z nich je úžení v horním a dolním indexu, též *stopa* tenzoru. Touto operací se tenzoru typu (p, q) přiřazuje tenzor typu $(p - 1, q - 1)$, řád klesá o 2. Druhý typ je úžení vektorem ξ , případně kovektorem η . Tato operace, při níž řád výsledného tenzoru klesá o 1, přiřazuje tenzoru typu (p, q) tenzor typu $(p, q - 1)$, případně $(p - 1, q)$, a závisí na složkách kontrahujícího vektoru, resp. kovektoru. Oba typy úžení ukážeme nejprve na příkladech.

Příklad 12.65: Stopa tenzoru typu (1, 1)

Nechť $\tau \in \mathcal{T}_1^1(V_n)$. Zvolme ve V_n bázi (e_1, \dots, e_n) , (e^1, \dots, e^n) je indukovaná báze ve V_n^* . Pak $\tau = \tau_i^j e_j \otimes e^i$. Úžením tenzoru τ rozumíme zobrazení

$$\iota_1^1 : \mathcal{T}_1^1(V_n) \ni \tau \longrightarrow \iota_1^1 \tau = \tau(e^\gamma, e_\gamma) \in \mathbf{R}.$$

Ve složkách platí

$$\iota_1^1 \tau = \tau_i^j e_j(e^\gamma) e^i(e_\gamma) = \tau_\gamma^\gamma = \tau_1^1 + \dots + \tau_n^n.$$

Výsledkem operace je skalár. Snadno se přesvědčíme, že nezávisí na volbě báze. Zvolíme-li ve vektorovém prostoru V_n ještě další bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$, k níž od původní báze přejdeme maticí přechodu $T = (T_i^j)$, dostaneme

$$\bar{\tau}_\gamma^i = S_i^\gamma T_\gamma^j \tau_j^i = \delta_i^j \tau_j^i = \tau_i^i.$$

Hodnota $\frac{1}{n} \tau_\gamma^\gamma$ se nazývá *stopa* tenzoru τ . Někdy se stopa definuje přímo jako τ_γ^γ .

Definici úžení v indexech nyní zobecníme. Zvolme libovolný tenzor $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ a libovolnou bázi (e_1, \dots, e_n) ve vektorovém prostoru V_n . Pro $1 \leq \alpha \leq p$, $1 \leq \beta \leq q$ definujme zobrazení

$$\begin{aligned} \iota_\beta^\alpha \tau : \underbrace{V_n^* \times \dots \times V_n^*}_{(p-1)\text{-krát}} \times \underbrace{V_n \times \dots \times V_n}_{(q-1)\text{-krát}} &\ni (\omega_1, \dots, \omega_{p-1}; \xi_1, \dots, \xi_{q-1}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \iota_\beta^\alpha \tau(\omega_1, \dots, \omega_{p-1}; \xi_1, \dots, \xi_{q-1}) = \\ &= \tau(\omega_1, \dots, \omega_{\alpha-1}, e^\gamma, \omega_\alpha, \dots, \omega_{p-1}; \xi_1, \dots, \xi_{\beta-1}, e_\gamma, \xi_\beta, \dots, \xi_{q-1}) \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (12.103)$$

kde na pozici α -tého kovektorového argumentu stojí prvek duální báze e^γ , na pozici β -tého vektorového argumentu prvek základní báze e_γ . Pozor, index γ je sčítací. Že je toto zobrazení tenzorem typu $(p-1, q-1)$ je zřejmé ze způsobu, jakým jsme je vytvořili. Použili jsme součet (lineární operace) hodnot tenzoru τ (multilineární zobrazení) na kovektorových a vektorových argumentech. Pro složky tenzoru $\eta = \iota_\beta^\alpha \tau$ dostaneme

$$\eta_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = \tau_{j_1 \dots j_{\beta-1} \gamma j_\beta \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} \gamma i_\alpha \dots i_{p-1}}, \quad (12.104)$$

index γ je opět sčítací. Složka $\eta_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}}$ tenzoru η je součtem odpovídajících složek tenzoru τ .

Zobrazení

$$\iota_\beta^\alpha : \mathcal{T}_q^p(V_n) \ni \tau \longrightarrow \iota_\beta^\alpha \tau \in \mathcal{T}_{q-1}^{p-1}(V_n) \quad (12.105)$$

se nazývá *úžení* neboli *kontrakce tenzoru v α -tém horním a β -tém dolním indexu*. Obraz $\iota_\beta^\alpha \tau$ se nazývá *stopa* tenzoru τ v indexech α a β .

Pozn.: Někdy bývá stopa tenzoru τ v indexech α a β definována jako $\frac{1}{n} \iota_\beta^\alpha \tau$.

Operace úžení lze samozřejmě skládat, tj. postupně aplikovat tak dlouho, až „zbude“ čistě kontravariantní (pro $p > q$), nebo čistě kovariantní (pro $p < q$) tenzor, popřípadě jen skalár (pro $p = q$). Pozor: při skládání operací úžení vztahujeme označení indexových pozic (tj. pozic pro kovektorové, resp. vektorové argumenty) k původnímu tenzoru τ .

Příklad 12.66: A ještě jeden pohled na tenzory

V příkladu 12.59 jsme ukázali, že vektorové prostory tenzorů lze ztotožnit s vektorovými prostory lineárních zobrazení jiných, vhodně zvolených tenzorových prostorů. Další možnou interpretaci lineárních vztahů mezi

tenzory umožňuje operace úžení. Uvažujme o tenzoru $\eta \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ z příkladu 12.59, jehož složky zprostředkují lineární vztah mezi tenzory $\tau \in \mathcal{T}_{p-r}^{q-s}(V_n)$ a $\sigma \in \mathcal{T}_s^r(V_n)$,

$$\sigma_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \eta_{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_p} \tau_{i_{r+1} \dots i_p}^{j_{s+1} \dots j_q}.$$

Soubor veličin $\{\chi_{j_1 \dots j_{p+q-r}}^{i_1 \dots i_{p+q-s}}\}$, kde

$$\chi_{j_1 \dots j_{p+q-r}}^{i_1 \dots i_{p+q-s}} = \eta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \tau_{j_{q+1} \dots j_{p+q-r}}^{i_{p+1} \dots i_{p+q-s}}$$

tvoří složky tenzoru

$$\chi = \eta \otimes \tau, \quad \chi \in \left[\mathcal{T}_q^p(V_n) \otimes \mathcal{T}_{p-r}^{q-s}(V_n) \right].$$

Tenzor σ vzniká úžením tenzoru $\chi = \eta \otimes \tau$,

$$\sigma = \iota_q^{p+q-s} \circ \dots \circ \iota_{s+1}^{p+1} \circ \iota_{p+q-r}^p \circ \dots \circ \iota_{q+1}^{r+1} \chi = \iota_q^{p+q-s} \circ \dots \circ \iota_{s+1}^{p+1} \circ \iota_{p+q-r}^p \circ \dots \circ \iota_{q+1}^{r+1} (\eta \otimes \tau) \in \mathcal{T}_s^r(V_n)$$

a má složky

$$\sigma_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \eta_{j_1 \dots j_s \alpha_1 \dots \alpha_{q-s}}^{i_1 \dots i_r \gamma_1 \dots \gamma_{p-r}} \tau_{\gamma_1 \dots \gamma_{p-r}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{q-s}}.$$

Všimněme si v této souvislosti ještě kartézských tenzorů, protože s těmi se ve fyzice, zejména klasické, pracuje nejčastěji. Víme již, že v případě kartézských tenzorů nelze rozlišit kontravariantní a kovariantní tenzory. Proto pro jednoduchost píšeme všechny indexy dolů a modifikujeme odpovídajícím způsobem Einsteinovu symboliku: dvojitý výskyt indexu znamená, že tento index je sčítací. V případě úžení ovšem již nemůžeme hovořit o „úžení v horním a dolním indexu“, ale musíme specifikovat pořadová čísla dolních indexů. Zabývejme se konkrétně třeba vztahem mezi úhlovou rychlostí a momentem hybnosti, zprostředkovaný tenzorem momentu setrvačnosti. Pracujeme v ortonormálních bázích. Platí $L_i = J_{ik} \omega_k$, $1 \leq i, k \leq 3$. Opravdu lze tento vztah považovat za výsledek operace úžení? Moment hybnosti a úhlová rychlost jsou vektory, tj. (kartézské) tenzory prvního řádu. Moment setrvačnosti je kartézský tenzor druhého řádu. Soubor 27 veličin $\{\tau_{ikl}\}$, kde $\tau_{ikl} = J_{ik} \omega_l$, $1 \leq i, k, l \leq 3$, tvoří složky kartézského tenzoru $\tau = J \otimes \omega$ třetího řádu. Vektor momentu hybnosti vzniká úžením tenzoru τ v druhém a třetím indexu (popřípadě prvním a třetím, neboť tenzor J je symetrický), anebo úžením tenzoru $\omega \otimes J$ v prvním a druhém, či prvním a třetím indexu. Obdobné je to s tenzorem napětí. Jeho složky $\{C_{ijkl} \epsilon_{kl}\}$ vyjádřené pomocí složek tenzoru modulů pružnosti C a složek tenzoru deformace ϵ vznikají například úžením tenzoru $\chi = C \otimes \epsilon$ o složkách $\{\chi_{ijklrs}\}$, kde $\chi_{ijklrs} = C_{ijkl} \epsilon_{rs}$, v čtvrtém a šestém indexu a v třetím a pátém indexu. Tenzor napětí je tedy $\tau = \iota_{46} \circ \iota_{35} (C \otimes \epsilon)$. (Vzhledem k symetrii tenzorů C a ϵ je tento výsledek shodný s úžením v třetím a šestém indexu a čtvrtém a pátém indexu).

Nyní definujeme úžení (kontrakci) tenzoru kovektorovým, resp. vektorovým argumentem. Předpokládejme, že $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ je libovolný tenzor typu (p, q) , $\omega \in V_n^*$, resp. $\xi \in V_n$ libovolný kovektor, resp. vektor. Definujme zobrazení

$$\begin{aligned} \iota^\alpha(\omega)\tau : \underbrace{V_n^* \times \dots \times V_n^*}_{(p-1)\text{-krát}} \times \underbrace{V_n \times \dots \times V_n}_q &\ni (\omega_1, \dots, \omega_{p-1}; \xi_1, \dots, \xi_q) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \iota^\alpha \tau(\omega)(\omega_1, \dots, \omega_{p-1}; \xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

$$\iota^\alpha(\omega)\tau(\omega_1, \dots, \omega_{p-1}; \xi_1, \dots, \xi_q) = \tau(\omega_1, \dots, \omega_{\alpha-1}, \omega, \omega_\alpha, \dots, \omega_{p-1}; \xi_1, \dots, \xi_q) \quad (12.106)$$

a zobrazení

$$\begin{aligned} \iota_\beta(\xi)\tau : \underbrace{V_n^* \times \dots \times V_n^*}_{p\text{-krát}} \times \underbrace{V_n \times \dots \times V_n}_{(q-1)\text{-krát}} \ni (\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_{q-1}) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \iota_\beta(\xi)\tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_{q-1}) \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

$$\iota_\beta(\xi)\tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_{q-1}) = \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_{\beta-1}, \xi, \xi_\beta, \dots, \xi_{q-1}). \quad (12.107)$$

Z definičních vztahů je okamžitě zřejmé, že zobrazení $\iota^\alpha(\omega)$ i $\iota_\beta(\xi)$ jsou lineární ve všech svých vektorových i kovektorových argumentech. Vznikají totiž přímo vyčíslením tenzoru τ na těchto argumentech doplněných kovektorem ω , resp. vektorem ξ na pozici vyznačené indexem α , resp. β . Zobrazení $\iota^\alpha(\omega)\tau$ je proto tenzorem typu $(p-1, q)$ a zobrazení $\iota_\beta(\xi)\tau$ tenzorem typu $(p, q-1)$.

Nechť $\omega \in V_n^*$, resp. $\xi \in V_n$ je libovolný kovektor, resp. libovolný vektor. Zobrazení

$$\iota^\alpha(\omega) : \mathcal{T}_q^p(V_n) \ni \tau \longrightarrow \iota^\alpha(\omega)\tau \in \mathcal{T}_q^{p-1}(V_n) \quad (12.108)$$

se nazývá *kontrakce tenzoru kovektorem ω na α -té pozici*, zobrazení

$$\iota_\beta(\xi) : \mathcal{T}_q^p(V_n) \ni \tau \longrightarrow \iota_\beta(\xi)\tau \in \mathcal{T}_{q-1}^p(V_n) \quad (12.109)$$

se nazývá *kontrakce tenzoru vektorem ξ na β -té pozici*.

Odvodíme vztahy pro složky tenzorů $\iota^\alpha(\omega)$ a $\iota_\beta(\xi)$ v bázích indukovaných bází (e_1, \dots, e_n) zvolené libovolně v prostoru V_n . Pro zjednodušení zápisu označme $\chi = \iota^\alpha(\omega)\tau$ a $\psi = \iota_\beta(\xi)\tau$. Víme (viz vztah (12.65)), že danou složku tenzoru, tj. složku se zvolenými indexy, v bázi indukované bází (e_1, \dots, e_n) vektorového prostoru V_n dostaneme vyčíslením tenzoru na vektorech báze a kovektorech duální báze právě s těmito indexy. Je proto

$$\begin{aligned} \chi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p-1}} &= \iota^\alpha(\omega)\tau(e^{i_1}, \dots, e^{i_{p-1}}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \\ &= \tau(e^{i_1}, \dots, e^{i_{\alpha-1}}, \omega_j e^j, e^{i_\alpha}, \dots, e^{i_{p-1}}; e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \omega_j \tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} j i_\alpha \dots i_{p-1}}, \\ \psi_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_p} &= \iota_\beta(\xi)\tau(e^{i_1}, \dots, e^p; e_{j_1}, \dots, e_{j_{q-1}}) = \\ &= \tau(e^{i_1}, \dots, e^p; e_{j_1}, \dots, e_{j_{\beta-1}}, \xi^j e_j, e_{j_\beta}, \dots, e_{j_{q-1}}) = \xi^j \tau_{j_1 \dots j_{\beta-1} j j_\beta \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_p}. \end{aligned}$$

Příklad 12.67: Úžení symetrických a antisymetrických tenzorů

Předpokládejme, že tenzor $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ je úplně symetrický v kovektorových i vektorových argumentech. Výsledek jeho úžení operací ι_β^α je pak na volbě indexových pozic α a β nezávislý. V případě tenzoru, který

je v kovektorových nebo vektorových argumentech úplně antisymetrický, závisí na α , resp. β pouze znaménko tenzoru vzniklého úžením v těchto indexech. Pro symetrický tenzor τ platí

$$\iota_\beta^\alpha \tau = \iota_1^1 \tau, \quad \text{značíme } \iota \tau,$$

pro antisymetrický tenzor v kovektorových i vektorových argumentech je

$$\iota_\beta^\alpha \tau = (-1)^{\alpha+\beta} \iota_1^1 \tau, \quad \text{značíme } \iota_1^1 \tau = \iota \tau.$$

Jak je tomu v případě úžení tenzoru kovektorem, nebo vektorem? Uvažme druhý případ. Pro jednoduchost předpokládejme, že tenzor τ je čistě kovariantní, tj. $\tau \in \mathcal{T}_q^0(V_n)$. Zvolme vektor ξ libovolně. V případě, že tenzor $\tau = \tau_{j_1 \dots j_q} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$ je úplně symetrický, tj. $\tau_{j_1 \dots j_q} = \tau_{\sigma(j_1) \dots \sigma(j_q)}$ pro libovolnou permutaci indexů j_1, \dots, j_q , platí

$$\begin{aligned} \chi &= \iota_1(\xi)\tau = \iota_2(\xi)\tau = \dots = \iota_q(\xi)\tau, \\ \chi_{j_1 \dots j_{q-1}} &= \xi^i \tau_{i j_1 \dots j_{q-1}} = \xi^1 \tau_{1 j_1 \dots j_{q-1}} + \dots + \xi^n \tau_{n j_1 \dots j_{q-1}}. \end{aligned}$$

V případě úplně antisymetrického tenzoru τ pak pro $1 \leq \beta \leq q$ platí

$$\iota_\beta(\xi)\tau = (-1)^{\beta-1} \iota_1(\xi)\tau, \quad \iota_\beta(\xi)\tau(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}) = (-1)^{\beta-1} \tau(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{q-1}).$$

V uvedených případech značíme jednoduše $\iota_1(\xi)\tau = \iota_\xi \tau$ a obdobně $\iota^1(\omega)\tau = \iota^\omega \tau$ při kontrakci symetrického či antisymetrického kontravariantního tenzoru kovektorem ω .

V disciplínách teoretické fyziky se často užívá operace *zvedání*, resp. *snižování* indexu pomocí metriky. Metrikami budeme nyní rozumět tenzory druhého řádu vybavené dalšími dvěma speciálními vlastnostmi. Jednou z nich je symetrie, druhou regulárnost. Symetrii jsme již dříve definovali, všimněme si regulárnosti. Uvažujme o tenzoru g typu $(0, 2)$, tj. $g \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$. Víme, že prostor $\mathcal{T}_2^0(V_n)$ je kanonicky izomorfní s prostorem $L(V_n, V_n^*)$ všech lineárních zobrazení $V_n \rightarrow V_n^*$. Označme $\iota : \mathcal{T}_2^0(V_n) \rightarrow L(V_n, V_n^*)$ kanonický izomorfismus. Jako *regulární* jsme v druhém dílu (odstavec 4.2.3) definovali lineární zobrazení, které je izomorfismem. Existuje k němu zobrazení inverzní, které je rovněž lineární. Tenzor $g \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$ se nazývá *regulární*, je-li regulární lineární zobrazení $\iota(g) \in L(V_n, V_n^*)$. Obdobně definujeme regulárnost tenzorů typu $(2, 0)$ a $(1, 1)$.

Každý regulární symetrický kovariantní tenzor druhého řádu na vektorovém prostoru V_n se nazývá *kovariantní metrika na V_n* , každý regulární symetrický kontravariantní tenzor druhého řádu na V_n se nazývá *kontravariantní metrika na V_n* .

Pozn.: Možná si kladete otázku, zda nový pojem nějak souvisí s metrikou zavedenou v kapitole 11. V příkladu 12.47 jsme zmínili, že skalární součin ve vektorovém prostoru V_n je tenzorem typu $(0, 2)$, tj. kovariantním tenzorem druhého řádu. Klademe však na něj další požadavky – symetričnost a pozitivní definitnost. V odstavci 11.1.5 jsme ukázali, že každý takový skalární součin indukuje ve vektorovém prostoru normu vztahem (11.5), resp. metriku vztahem (11.7) ve smyslu definice (11.4). Ale pozor! Nyní upouštíme od požadavku pozitivní definitnosti a nahra-

zujeme jej slabším požadavkem regulárnosti. Pozitivně definitní symetrický kovariantní tenzor druhého řádu, tj. skalární součin (nebo ještě obecněji tenzorové pole s těmito vlastnostmi), nazýváme *riemannovskou metrikou*, je-li místo pozitivní definitnosti požadována pouze regulárnost, mluvíme o *pseudoriemannovské metrice*. Ta však již vlastnostem z kapitoly 11 neodpovídá (při této metrice může být skalární součin vektoru se sebou i záporný).

Důležitou charakteristikou metriky je její *signatura*. Na příkladu kovariantní metriky, tj. tenzoru $g \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$, vyložíme, oč se jedná. Protože je tenzor g symetrický, lze zvolit ve vektorovém prostoru V_n bázi (e_1, \dots, e_n) , v níž bude mít vyjádření

$$g = e^1 \otimes e^1 + \dots + e^k \otimes e^k - e^{k+1} \otimes e^{k+1} - \dots - e^n \otimes e^n. \quad (12.110)$$

Proč tomu tak je? Složky tenzoru g v libovolné bázi můžeme uspořádat do matice. Ta bude symetrická, neboť vlastnosti symetrie a antisymetrie tenzorů se při přechodech mezi bázemi zachovávají. V kapitole 6.3 v druhém dílu jsme se právě takovými symetrickými maticemi zabývali (když jsme studovali kvadratické formy). Víme, že existuje báze, ve které má g vyjádření (12.110), a že počet jedniček, resp. minus jedniček na diagonále je stejný ve všech takových bázích.

Dvojice $(k, n - k)$ počtu kladných a záporných složek metriky g se nazývá její *signatura*. Některé signatury jsou zvlášť významné pro fyziku. Metrika se signaturou $(n, 0)$ (tedy skalární součin) je již zmíněná metrika *riemannovská*, nebo též *euklidovská*, signaturu $(1, n - 1)$ má metrika *Minkowského*, významná pro speciální teorii relativity, kdy $n = 4$. Seznámili jsme se s ní v příkladu 12.62.

A teď už směřujeme k pojmům obsaženým v názvu tohoto odstavce, zvedání a snižování indexů. Zvolme v prostoru V_n libovolnou bázi (e_1, \dots, e_n) . Uvažujme opět o kovariantní metrice $g \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$. Její vyjádření v indukované bázi je $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$, $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Nechť $\iota : \mathcal{T}_2^0(V_n) \rightarrow L(V_n, V_n^*)$ je kanonický izomorfismus přiřazující každému prvku $e^i \otimes e^j$ indukované báze v $\mathcal{T}_2^0(V_n)$ prvek ϕ^{ij} indukované báze v $L(V_n, V_n^*)$, kde $\phi^{ij}(e_k) = \delta_k^i e^j$. Tenzor g a jeho obraz $\iota(g)$ tak budou mít v příslušných indukovaných bázích stejné složky, $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$, $\iota(g) = g_{ij} \phi^{ij}$. Proto můžeme psát

$$\iota(g) : V_n \ni \xi \longrightarrow \iota(g)(\xi) = \omega \in V_n^*, \quad \omega_i = g_{ij} \xi^j. \quad (12.111)$$

Tento výsledek lze také interpretovat tak, že tenzor $\omega \in V_n^*$ je výsledkem úžení tenzoru $g \otimes \xi = (g_{ij} \xi^k) e^i \otimes e^j \otimes e_k$ v kterémkoli kovariantním (tenzor g je symetrický) a jediném kontravariantním indexu, nebo ekvivalentně výsledkem úžení tenzoru g vektorem ξ , tj. $\omega = \iota_\xi g$. Protože vzorem při operaci (12.111) je vektor (kontravariantní tenzor prvního řádu), jehož složky se označují horními indexy, a obrazem je kovektor (kovariantní tenzor prvního řádu), jehož složky mají indexy dole, nazývá se (12.111) (především ve fyzikálních teoriích) také *snižováním indexu*. Tato terminologie není příliš vhodná. Vzniká totiž dojem, že jde o zcela novou operaci, zatímco se jedná pouze o speciální aplikaci operací již zavedených.

Vzhledem k tomu, že je tenzor g regulární, můžeme uvažovat o inverzním zobrazení

$$\iota(g)^{-1} : V_n^* \ni \omega \longrightarrow \iota(g)^{-1}(\omega) = \xi \in V_n, \quad \text{ve složkách} \quad \xi^i = \tilde{g}^{ij} \omega_j.$$

Tenzor $\tilde{g} = \tilde{g}^{ij} e_i \otimes e_j$ je kontravariantní metrikou. Vektor ξ je výsledkem úžení tenzoru $\tilde{g} \otimes \omega = (\tilde{g}^{ij} \omega_k) e_i \otimes e_j \otimes e^k$. Navíc platí

$$\omega_i = g_{ij} \xi^j = g_{ij} \tilde{g}^{jk} \omega_k \implies g_{ij} \tilde{g}^{jk} = \delta_i^k.$$

Kdybychom složky metrik g a \tilde{g} zapsali do matic, jednalo by se o inverzní matice. V praktických zápisech se složky metriky g a metriky inverzní nerozlišují vlnovkou, vzájemná inverze je zřejmá z umístění indexů. Vzhledem k tomu, že metrika \tilde{g} přiřazuje kovektoru ω (indexy jeho složek jsou dolní) vektor ξ (indexy složek jsou horní), nazývá se operace *zvedáním indexu*. Zcela analogické úvahy vedou k pojmům zvedání a snižování indexů v případě, kdy se jako výchozí bere kontravariantní metrika. Zobecnění těchto pojmů uvádí například následující definice.

Nechť $g \in \mathcal{T}_2^0(V_n)$, resp. $\tilde{g} \in \mathcal{T}_0^2(V_n)$ je kovariantní, resp. kontravariantní metrika. Zobrazení

$$\mathcal{T}_q^p(V_n) \ni \tau \longrightarrow \eta = \iota_2^\alpha(g \otimes \tau) \in \mathcal{T}_{q+1}^{p-1}(V_n), \quad 1 \leq \alpha \leq p \quad (12.112)$$

se nazývá *snížením* α -tého indexu (metrikou g). Zobrazení

$$\mathcal{T}_q^p(V_n) \ni \tau \longrightarrow \eta = \iota_\beta^2(\tilde{g} \otimes \tau) \in \mathcal{T}_{q-1}^{p+1}(V_n), \quad 1 \leq \beta \leq q \quad (12.113)$$

se nazývá *zvednutím* β -tého indexu (metrikou \tilde{g}).

Pozn. 1: Zobrazení ι_2^α , resp. ι_β^2 představují fakticky úžení tenzoru $g \otimes \tau$, resp. $\tilde{g} \otimes \tau$ v α -tém horním indexu tenzoru τ a druhém dolním indexu tenzoru g , resp. v β -tém dolním indexu tenzoru τ a druhém horním indexu tenzoru g .

Pozn. 2: Namísto operací ι_2^α , resp. ι_β^2 v předchozí definici bychom mohli použít také ι_1^α , resp. ι_β^1 , neboť tenzor g je podle předpokladu symetrický. Také bychom namísto tenzorových součinů $g \otimes \tau$, resp. $\tilde{g} \otimes \tau$ mohli použít tenzorové součiny $\tau \otimes g$, resp. $\tau \otimes \tilde{g}$ a tomu odpovídající operace úžení (zkuste je zapsat).

Pozn. 3: V konkrétních fyzikálních případech se samozřejmě pracuje s navzájem inverzními metrikami g a \tilde{g} , jimiž je opatřen výchozí vektorový prostor. Jiná možnost by nedávala geometrický ani fyzikální smysl.

Příklad 12.68: Kde a proč se ve fyzice používá zvedání a snižování indexů?

Jednoduchá odpověď by mohla znít: „Všude, kde se vyskytují kovariantní, kontravariantní a smíšené komponenty tenzorů.“ Zvedání a snižování indexů metrikou umožňuje snadno převádět jednotlivé typy, lišící se transformačními vztahy při přechodech mezi bázemi, mezi sebou. Tak třeba — v příkladu 12.63 jsme pracovali

s tenzorem energie-hybnosti $T = (T^{ik})$, $0 \leq i, k \leq 3$. Ve vyjádření složky T^{ik} vystupovaly jak kovariantní, tak kontravariantní složky tenzoru elektromagnetického pole. V příkladu 12.62, v němž jsme tenzor elektromagnetického pole zaváděli, jsme jako definici předložili vztah pro kovariantní složky pomocí kovariantních složek čtyřpotenciálu,

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = A_{j,i} - A_{i,j}.$$

(V kapitole 14 uvidíme, že složky A_i , resp. $A_{i,j}$ lze považovat za souřadnice na specificky zvoleném definičním oboru, takzvaném „fibrováném prostoru“.) Vztah pro složky tenzoru energie-hybnosti však obsahuje kromě kovariantních také kontravariantní složky tenzoru elektromagnetického pole, které pro účely praktického počítání snadno pomocí kovariantních vyjádříme:

$$F^{ij} = g^{ik} g^{jl} F_{kl}.$$

Pro práci s trojrozměrnými veličinami je třeba v případě čtyřpotenciálu přirozenější pracovat s kontravariantními složkami, tj. $A^i = g^{ij} A_j$. Samozřejmě, že dostaneme $A^0 = A_0 = c^{-1}V$, $A^1 = -A_1$, $A^2 = -A_2$, $A^3 = -A_3$, přičemž $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$ je známý vektorový potenciál. Pro zápis však stačí jediný převodní vztah pro obecnou kontravariantní složku čtyřpotenciálu. Je vidět, že převody typů složek jsou opravdu snadné.

Trpělivý čtenář, který obecné odstavce o tenzorech nepřeskočil a prošel i příklady, má v tuto chvíli základní přehled o tom, co to tenzory jsou, o některých interpretacích a ztotožněních tenzorových prostorů, a snad alespoň v obrysech i o možnostech použití tenzorů ve fyzice a technice (mechanika kontinua, teorie pružnosti, teorie elektromagnetického pole, relativita, ...).

12.2.6 Antisymetrické kovariantní tenzory aneb co potřebujeme pro integrování

Čtenář, který se prokousal, popřípadě rovnou přeskočil k tomuto odstavci, si v něm zopakuje, popřípadě v něm pozná základní vlastnosti čistě kovariantních tenzorů, které jsou potřebné pro vybudování konceptu Riemannova integrálu z diferenciálních forem. Základní pojmy týkající se tohoto typu tenzorů a základní poznatky o nich, které jsme v obecnosti probrali v odstavcích předchozích, zde stručně shrneme. Nebudeme již podrobně rozebírat problematiku prostoru V_n^* , duálního k základnímu prostoru V_n , neboť tou jsme se zabývali poměrně důkladně již v druhém dílu. Čtenář se tedy má pro případně pozapomenuté informace kam vrátit. Pro ty, kdo předchozí text o tenzorech přečetli, bude odstavec 12.2.6 už jen nenáročným opakováním. Tak tedy rovnou ke kovariantním tenzorům.

Nechť V_n je n -rozměrný vektorový prostor. *Kovariantním tenzorem k -tého řádu*, nebo též *k -tenzorem na V_n* , kde $k \in \mathbf{N}$, rozumíme zobrazení

$$\omega : \underbrace{V_n \times \cdots \times V_n}_{k\text{-krát}} \ni (\xi_1, \dots, \xi_k) \longrightarrow \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbf{R}, \quad (12.114)$$

lineární ve všech argumentech, tj.

$$\begin{aligned} \omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \alpha\xi_i + \beta\zeta_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) &= \quad (12.115) \\ &= \alpha\omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) + \beta\omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \zeta_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) \end{aligned}$$

pro libovolné vektory $\xi_1, \dots, \xi_k, \zeta_i \in V_n$, libovolné skaláry $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a libovolnou pozici $1 \leq i \leq k$ pro vektorový argument.

Z této definice plyne, že prvky prostoru V_n^* , duálního k V_n , jsou kovariantní tenzory prvního řádu, tj. 1-tenzory. (O V_n^* hovoříme jako o „prostoru“, neboť na něm máme zavedenu strukturu vektorového prostoru, jehož dimenze je n — viz odstavec 4.2.5.) Pro úplnost terminologie budeme skaláry považovat za 0-tenzory. Označme $\mathcal{T}_k(V_n)$ množinu všech k -tenzorů na V_n . Zavedeme na ní operace sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem takto: Necht $\omega, \eta \in \mathcal{T}_k(V_n)$ jsou libovolné k -tenzory a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ libovolné skaláry. Definujme zobrazení

$$\begin{aligned} \chi : \underbrace{V_n \times \dots \times V_n}_{k\text{-krát}} \ni (\xi_1, \dots, \xi_k) &\longrightarrow \chi(\xi_1, \dots, \xi_k) = \quad (12.116) \\ &\alpha\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) + \beta\eta(\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Snadno se ukáže, že také χ je prvkem množiny $\mathcal{T}_k(V_n)$, tj. k -tenzorem (úloha 15 ve Cvičení 12.2.8). Pro $\alpha = \beta = 1$ se zobrazení χ dané vztahem (12.116) nazývá *součet k -tenzorů ω a η* a značí se $\omega + \eta$. Pro $\beta = 0$ se nazývá *α -násobek k -tenzoru ω* a značí se $\alpha\omega$.

Věta 12.22: *Množina $\mathcal{T}_k(V_n)$ s operacemi součtu k -tenzorů a násobení k -tenzoru skalárem, tj. zobrazeními*

$$\mathcal{T}_k(V_n) \times \mathcal{T}_k(V_n) \ni (\omega, \eta) \longrightarrow \omega + \eta \in \mathcal{T}_k(V_n),$$

$$\mathbf{R} \times \mathcal{T}_k(V_n) \ni (\alpha, \omega) \longrightarrow \alpha\omega \in \mathcal{T}_k(V_n),$$

je vektorovým prostorem nad \mathbf{R} dimenze n^k .

Prověření vlastností vektorového prostoru je snadné, proto je ponecháno do cvičení (úloha 16 Cvičení 12.2.8). Důkaz týkající se dimenze jsme prováděli již víckrát v různých podobách. Proto stručně. Zvolme v prostoru V_n libovolnou bázi (e_1, \dots, e_n) . Indukovaná báze v prostoru duálním je (e^1, \dots, e^n) , kde $e^i(e_j) = \delta_j^i$, $1 \leq i, j \leq n$.

Definujme zobrazení

$$\phi^{i_1 \dots i_k} : \underbrace{V_n \times \dots \times V_n}_{k\text{-krát}} \longrightarrow \mathbf{R},$$

$1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, lineární ve všech argumentech vztahy

$$\phi^{i_1 \dots i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k}. \quad (12.117)$$

(Víte, proč stačí definovat hodnoty těchto zobrazení jen na vektorech báze? Jsou zobrazení $\phi^{i_1 \dots i_k}$ určena jednoznačně? Dokážete zdůvodnit, že všechna takto definovaná zobrazení jsou k -tenzory?) Soubor zobrazení $\{\phi^{i_1 \dots i_k}\}$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, je báze ve vektorovém prostoru $\mathcal{T}_k(V_n)$. Pro důkaz sledujte návod v úloze 17 cvičení 12.2.8. Dimenze vektorového prostoru je rovna počtu prvků kterékoli jeho báze. V našem případě je prvků báze tolik, kolik existuje nezávislých výběrů indexů i_1, \dots, i_k , jejichž možné hodnoty jsou 1 až n . Tento počet je roven počtu variací s opakováním k -té třídy z n prvků, tj. n^k . Proto je $\dim \mathcal{T}_k(V_n) = n^k$. To ovšem není nic, co bychom z předchozích odstavců již nevěděli.

Tensor $\omega \in \mathcal{T}_k(V_n)$ se nazývá *úplně antisymetrický*, zkráceně *antisymetrický*, jestliže pro libovolný výběr argumentů (ξ_1, \dots, ξ_k) a libovolnou permutaci $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ indexů 1 až k platí

$$\omega(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) = \operatorname{sgn} \sigma \omega(\xi_1, \dots, \xi_k). \quad (12.118)$$

U 1-tenzorů něco jako antisymetrii definovat nelze — není tam co zaměňovat. Uvidíme však, že z nich můžeme „vyrábět“ antisymetrické tenzory vyšších řádů, a proto je definitivně k antisymetrickým tenzorům řadíme. V následujícím textu zavádíme operace tenzorového součinu, alternace a vnějšího součinu. Jsou formulovány ve větě, podstatou jejíhož tvrzení je skutečnost, že výsledkem všech těchto operací je vždy tenzor.

Věta 12.23: *Nechť $\omega \in \mathcal{T}_k(V_n)$ je libovolný k -tenzor a $\eta \in \mathcal{T}_l(V_n)$ libovolný l -tenzor.*

- *Zobrazení*

$$\chi : \underbrace{V_n \times \dots \times V_n}_{(k+l)\text{-krát}} \ni (\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \longrightarrow \chi(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \in \mathbf{R},$$

kde

$$\chi(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \eta(\xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l}), \quad (12.119)$$

je $(k+l)$ -tenzor, který značíme $\chi = \omega \otimes \eta$.

- *Označme S_k množinu všech permutací indexů 1 až k . Zobrazení*

$$\chi : \underbrace{V_n \times \dots \times V_n}_{k\text{-krát}} \ni (\xi_1, \dots, \xi_k) \longrightarrow \chi(\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbf{R},$$

kde

$$\chi(\xi_1, \dots, \xi_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \omega(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}), \quad \sigma = (i_1, \dots, i_k), \quad (12.120)$$

je antisymetrický k -tenzor. Značíme jej $\operatorname{alt} \omega$.

- Množina $\Lambda_k(V_n) \subset \mathcal{T}_k(V_n)$ všech antisymetrických k -tenzorů je vektorovým podprostorem prostoru $\mathcal{T}_k(V_n)$ dimenze $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

První a druhá vlastnost jsou okamžitě zřejmé přímo z definice, stejně jako první část třetího tvrzení, že $\Lambda_k(V_n)$ je vektorovým podprostorem prostoru $\mathcal{T}_k(V_n)$. Lineární kombinace antisymetrických tenzorů je totiž opět antisymetrickým tenzorem, takže množina $\Lambda_k(V_n)$ je uzavřená na operaci sčítání tenzorů a násobení skalárem. Určení dimenze vektorového podprostoru $\Lambda_k(V_n)$ na chvíli odložíme.

Nechť $\mathcal{T}_k(V_n)$, resp. $\mathcal{T}_l(V_n)$ je prostor k -tenzorů, resp. l -tenzorů, $\Lambda_k(V_n)$, resp. $\Lambda_l(V_n)$ jejich vektorové podprostory antisymetrických tenzorů.

- Zobrazení

$$\otimes : \mathcal{T}_k(V_n) \times \mathcal{T}_l(V_n) \ni (\omega, \eta) \longrightarrow \omega \otimes \eta \in \mathcal{T}_{k+l}(V_n) \quad (12.121)$$

se nazývá *tenzorový součin*.

- Zobrazení

$$\operatorname{alt} : \mathcal{T}_k(V_n) \ni \omega \longrightarrow \operatorname{alt} \omega \in \Lambda_k(V_n) \subset \mathcal{T}_k(V_n) \quad (12.122)$$

se nazývá *alternace*.

- Zobrazení

$$\wedge : \Lambda_k(V_n) \times \Lambda_l(V_n) \ni (\omega, \eta) \longrightarrow \omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{alt}(\omega \otimes \eta) \in \Lambda_{k+l}(V_n) \quad (12.123)$$

se nazývá *vnější součin*.

Přímo z definic plynou následující důležité vlastnosti tenzorového součinu, alternace a vnějšího součinu.

Věta 12.24 (Vlastnosti tenzorového součinu, alternace a vnějšího součinu):

Předpokládejme že $\tau_1, \tau_2, \tau \in \mathcal{T}_k(V_n)$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \mathcal{T}_l(V_n)$, $\chi \in \mathcal{T}_m(V_n)$, $\omega_1, \omega_2, \omega \in \Lambda_k(V_n)$, $\eta_1, \eta_2, \eta \in \Lambda_l(V_n)$, $\vartheta \in \Lambda_m(V_n)$ jsou libovolné tenzory, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ libovolné skaláry.

- Pro tenzorový součin platí

$$\begin{aligned}(\alpha\tau_1 + \beta\tau_2) \otimes \sigma &= \alpha(\tau_1 \otimes \sigma) + \beta(\tau_2 \otimes \sigma), \\ \tau \otimes (\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2) &= \alpha(\tau \otimes \sigma_1) + \beta(\tau \otimes \sigma_2), \\ (\alpha\tau) \otimes \sigma &= \tau \otimes (\alpha\sigma) = \alpha(\tau \otimes \sigma), \\ \tau \otimes (\sigma \otimes \chi) &= (\tau \otimes \sigma) \otimes \chi, \quad \text{píšeme } \tau \otimes \sigma \otimes \chi.\end{aligned}\tag{12.124}$$

- Pro alternaci platí

$$\begin{aligned}\text{alt} \circ \text{alt } \tau &= \text{alt } \tau, \\ \text{alt } \omega &= \omega,\end{aligned}\tag{12.125}$$

tj. operace alternace je projekcí na podprostor antisymetrických tenzorů.

- Pro vnější součin platí

$$\begin{aligned}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \wedge \eta &= \alpha(\omega_1 \wedge \eta) + \beta(\omega_2 \wedge \eta), \\ \omega \wedge (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2) &= \alpha(\omega \wedge \eta_1) + \beta(\omega \wedge \eta_2), \\ (\alpha\omega) \wedge \eta &= \omega \wedge (\alpha\eta) = \alpha(\omega \wedge \eta), \\ \omega \wedge (\eta \wedge \vartheta) &= (\omega \wedge \eta) \wedge \vartheta, \quad \text{píšeme } \omega \wedge \eta \wedge \vartheta, \\ \omega \wedge \eta &= (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.\end{aligned}\tag{12.126}$$

Příklad 12.69: Tenzorové součiny a indukované báze

Připomeňme si větu 12.22 a vztahy (12.117), jimiž jsme definovali indukovanou bázi prostoru k -tenzorů $\mathcal{T}_k(V_n)$. Prvky této báze jsme nedefinovali explicitním vyjádřením pomocí prvků „indukující“ báze (e_1, \dots, e_n) v základním prostoru V_n , ale pomocí hodnot na všech možných souborech obsahujících právě k z těchto vektorů. Tenzorový součin umožňuje definici explicitní. Uvažujme o souboru

$$\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}\}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n.\tag{12.127}$$

Tento soubor k -tenzorů je bází v prostoru $\mathcal{T}_k(V_n)$.

Dokáže se to velmi snadno, proto důkaz proveďte sami podle návodu k úloze 18 Cvičení 12.2.8.

Okamžitě se nabízí otázka, zda báze $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}\}$ a $\{\phi^{i_1 \dots i_k}\}$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, jsou shodné, nebo odlišné — vždyť přece báze ve vektorovém prostoru $\mathcal{T}_k(V_n)$ je nekonečně, a dokonce nespočetně mnoho! Abychom na ni odpověděli, stačí vyčíslit prvky báze (12.127) na souborech vektorů typu $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$. Dostáváme

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k},$$

tedy stejný výsledek jako při vyčíslení prvků báze (12.117). A protože každé lineární zobrazení vektorového prostoru do jiného, v našem případě $\mathcal{T}_k(V_n)$ do \mathbf{R} , je jednoznačně určeno obrazy báze, je zřejmé, že báze (12.117) a (12.127) jsou stejné.

Obecné úvahy o tenzorech jsou jistě zajímavé, měli bychom však zkusit praktické počítání s tenzory a přesvědčit se, zda budeme umět vyčíslit výsledky jednotlivých operací na konkrétně zadaných vektorových argumentech. Budeme se věnovat jednoduchým, tj. „nízkorozměrným“

a „nízkořádoým“ situacím, samozřejmě se zaměřením na kovariantní tenzory, jak to odpovídá názvu tohoto odstavce.

Příklad 12.70: Příklady vyčíslení: tenzorový součin

Zvolme prostory $\mathcal{T}_1(V_2)$ a $\mathcal{T}_2(V_2)$ a libovolnou bázi (e_1, e_2) prostoru V_2 . Indukovaná báze v prostoru $\mathcal{T}_1(V_2)$ je (e^1, e^2) , indukovaná báze v prostoru $\mathcal{T}_2(V_2)$ je $(e^1 \otimes e^1, e^1 \otimes e^2, e^2 \otimes e^1, e^2 \otimes e^2)$. (Uvědomte si, že $\mathcal{T}_1(V_2) = V_2^*$.) Zvolme tenzory

$$\tau = 2e^1 - 3e^2 \in \mathcal{T}_1(V_2), \quad \eta = -e^1 \otimes e^1 + 2e^1 \otimes e^2 - 3e^2 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 \in \mathcal{T}_2(V_2)$$

a vektory

$$\xi_1 = -e_1 + 3e_2, \quad \xi_2 = 2e_1 + e_2, \quad \xi_3 = -2e_1 + e_2.$$

Postupně vypočteme hodnotu tenzorového součinu $\tau \otimes \eta$ na trojici zadaných vektorových argumentů. Platí

$$\begin{aligned} \tau \otimes \eta &= (2e^1 - 3e^2) \otimes (-e^1 \otimes e^1 + 2e^1 \otimes e^2 - 3e^2 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2) = \\ &= -2e^1 \otimes e^1 \otimes e^1 + 4e^1 \otimes e^1 \otimes e^2 - 6e^1 \otimes e^2 \otimes e^1 + 2e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 + 3e^2 \otimes e^1 \otimes e^1 - 6e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 + \\ &\quad + 9e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 - 3e^2 \otimes e^2 \otimes e^2 \in \mathcal{T}_3(V_n). \end{aligned}$$

Kromě definice tenzorového součinu si uvědomme ještě jeden důležitý vztah, který je dobré umět odvodit a zapamatovat si ho. Při vyčíslení i -tého prvku duální báze na vektoru $\xi = \xi^j e_j$ dostaneme

$$e^i(\xi) = e^i(\xi^j e_j) = \xi^j e^i(e_j) = \xi^j \delta_j^i = \xi^i.$$

Zjistili jsme, že i -tý prvek duální báze přiřazuje vektoru ξ jeho i -tou složku v bázi (e_1, \dots, e_n) . Proto

$$e^i \otimes e^j \otimes e^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^i(\xi_1) e^j(\xi_2) e^k(\xi_3) = \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k.$$

Vyjádřili jsme obecně hodnotu vzniklou vyčíslením obecného prvku báze prostoru kovariantních tenzorů třetího řádu na trojici vektorových argumentů a můžeme již snadno určit hodnotu libovolného tenzoru z prostoru $\mathcal{T}_3(V_2)$ na těchto argumentech. Dostaneme

$$e^1 \otimes e^1 \otimes e^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^1 \xi_2^1 \xi_3^1 = 4, \quad e^1 \otimes e^1 \otimes e^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^1 \xi_2^1 \xi_3^2 = -2,$$

$$e^1 \otimes e^2 \otimes e^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^1 \xi_2^2 \xi_3^1 = 2, \quad e^1 \otimes e^2 \otimes e^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^1 \xi_2^2 \xi_3^2 = -1,$$

$$e^2 \otimes e^1 \otimes e^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 \xi_2^1 \xi_3^1 = -12, \quad e^2 \otimes e^1 \otimes e^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 \xi_2^1 \xi_3^2 = 6,$$

$$e^2 \otimes e^2 \otimes e^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^1 = -6, \quad e^2 \otimes e^2 \otimes e^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2 = 3.$$

$$\tau \otimes \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -2 \cdot 4 + 4(-2) - 6 \cdot 2 + 2(-1) + 3(-12) - 6 \cdot 6 + 9(-6) - 3 \cdot 3 = -165.$$

Hodnotu tenzorového součinu $\eta \otimes \tau$ na zadaných vektorech ξ_1 , ξ_2 a ξ_3 určete sami.

Příklad 12.71: Příklady vyčíslení: alternace

Pro ukázkou, jak počítat alternaci tenzoru, zvolme opět příklad tenzorů nižších řádů. Dimenzi vektorového prostoru V_n však ponechme obecnou a zvolme v něm bázi (e_1, \dots, e_n) . Vyjádření tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_2(V_n)$ v indukované bázi má tvar

$$\tau = \tau_{ij} e^i \otimes e^j.$$

Označme alternaci tenzoru τ jako ω , tj. $\omega = \text{alt } \tau$. Hledáme složky tenzoru ω v bázi $\{e^i \otimes e^j\}$, $1 \leq i, j \leq n$. Složky dostaneme, jako obvykle, vyčíslením tenzoru na prvcích báze, tj.

$$\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j) = \text{alt } \tau(e_i, e_j) = \frac{1}{2!} (\tau(e_i, e_j) - \tau(e_j, e_i)) = \frac{1}{2} (\tau_{ij} - \tau_{ji}).$$

A teď označme $\omega = \text{alt } \tau$ pro $\tau \in \mathcal{T}_3(V_n)$. Budeme-li počítat složku ω_{ijk} tohoto tenzoru v bázi $\{e^i \otimes e^j \otimes e^k\}$, musíme si uvědomit, že trojici indexů (i, j, k) permutujeme šestkrát, přičemž permutace (i, j, k) , (k, i, j) a (j, k, i) jsou sudé, permutace (j, i, k) , (k, j, i) a (i, k, j) jsou liché. Dostaneme

$$\omega_{ijk} = \text{alt } \tau(e_i, e_j, e_k) = \frac{1}{3!} (\tau_{ijk} + \tau_{kij} + \tau_{jki} - \tau_{jik} - \tau_{kji} - \tau_{ikj}).$$

Jak dostaneme hodnotu alternovaného tenzoru na vektorových argumentech? Pro $\text{alt } \tau \in \Lambda_2(V_n)$ a vektorové argumenty $\xi = \xi^i e_i$, $\zeta = \zeta^j e_j$ dostaneme

$$\text{alt } \tau(\xi, \zeta) = \frac{1}{2!} (\tau(\xi, \zeta) - \tau(\zeta, \xi)) = \frac{1}{2} (\tau_{ij} \xi^i \zeta^j - \tau_{ij} \zeta^i \xi^j) = \frac{1}{2} (\tau_{ij} - \tau_{ji}) \xi^i \zeta^j = \omega_{ij} \xi^i \zeta^j.$$

Výsledek souhlasí s výsledkem výpočtu složek tenzoru $\omega = \text{alt } \tau$.

Příklad 12.72: Příklady vyčíslení: vnější součin

Vnější součin je v podstatě alternace. Alternujeme však tenzorový součin, závislý na složkách tenzorů, které do něj vstupují. Proto je vhodné vyjádřit i vnější součin pomocí těchto složek. Zkusme to opět pro nízké řády tenzorů. Zvolme $\tau, \eta \in \Lambda_1(V_n)$. Tenzorový součin $\tau \otimes \eta \in \mathcal{T}_2(V_n)$ antisymetrický obecně není, ale alternace z něj antisymetrický tenzor udělá. Označme $\omega = \tau \wedge \eta$. Platí

$$\omega = \tau \wedge \eta = \frac{(1+1)!}{1!1!} \text{alt } (\tau \otimes \eta).$$

Zvolíme-li ve V_n bázi (e_1, \dots, e_n) , pak v indukované bázi prostoru $\mathcal{T}_2(V_n)$ platí

$$\tau \otimes \eta = (\tau_i e^i) \otimes (\eta_j e^j) = \tau_i \eta_j (e^i \otimes e^j),$$

$$\omega_{ij} = 2(\text{alt } (\tau \otimes \eta))_{ij} = (\tau_i \eta_j - \tau_j \eta_i).$$

Při výpočtu jsme využili výsledky z příkladu 12.71. Při vyčíslení na vektorových argumentech dostaneme

$$(\tau \wedge \eta)(\xi, \zeta) = (\tau \wedge \eta)_{ij} \xi^i \zeta^j = (\tau_i \eta_j - \tau_j \eta_i) \xi^i \zeta^j = \tau_i \eta_j (\xi^i \zeta^j - \xi^j \zeta^i).$$

Že je to výraz antisymetrický vzhledem k záměně pořadí vektorových argumentů ξ a ζ je vidět okamžitě.

Počítat hodnoty tenzorů na vektorových argumentech není nic příjemného ani zábavného dokonce ani pro nízké dimenze a řády. Naštěstí to v úvahách týkajících se integrování nebudeme potřebovat. Je však potřeba těmto operacím porozumět. A to nejde bez praxe.

Posledním úkolem, který je třeba splnit v tomto odstavci, je konstrukce báze ve vektorových prostorech $\Lambda_k(V_n)$. Víme, že antisymetrické tenzory vznikají alternací. Vzpomeňme si na větu 12.20. Podle ní je alternace operátorem projekce ve vektorovém prostoru $\mathcal{T}_k(V_n)$. Kdybychom alternovali všechny k -tenzory, jejich obrazy by vyplnily vektorový podprostor $\Lambda_k(V_n)$. Nemohli bychom tedy dostat indukovanou bázi v $\Lambda_k(V_n)$ alternací všech prvků báze $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}\}$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$? Zkusme to nejprve opět pro tenzory druhého řádu.

Příklad 12.73: Indukovaná báze v prostoru $\Lambda_2(V_n)$

Prvky báze prostoru $\mathcal{T}_2(V_n)$ indukované bázi (e_1, \dots, e_n) zvolenou ve V_n jsou $e^i \otimes e^j$. Jejich alternací dostaneme

$$\text{alt}(e^i \otimes e^j) = \frac{1}{2!}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i) = \frac{1}{2}e^i \wedge e^j.$$

Hned vidíme, že platí $e^i \wedge e^j = -e^j \wedge e^i$, vnější součin $e^i \wedge e^i$ je nulový. Nezávislých projekcí prvků báze prostoru $\mathcal{T}_2(V_n)$ zobrazením alternace do $\Lambda_2(V_n)$ je $\frac{n^2-n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Otázkou je, zda systém tenzorů $\{e^i \wedge e^j\}$, $1 \leq i < j \leq n$, tvoří bázi v $\Lambda_2(V_n)$. Prověříme jejich nezávislost. Položme

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma_{ij} e^i \wedge e^j = 0_{\Lambda_2(V_n)}, \quad \text{tj.} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{2} \gamma_{ij} (e^i \wedge e^j - e^j \wedge e^i) = 0_{\Lambda_2(V_n)}.$$

Označíme-li $\gamma_{ji} = -\gamma_{ij}$, můžeme předchozí lineární kombinaci zapsat již bez omezující podmínky na sčítací indexy jako $\frac{1}{2} \gamma_{ij} e^i \wedge e^j = 0_{\Lambda_2(V_n)}$. Vyčíslíme-li ji na vektorech, dostaneme

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} e^i \wedge e^j(e_k, e_l) = 0 &\implies \gamma_{ij} (e^i(e_k) e^j(e_l) - e^i(e_l) e^j(e_k)) = 0 \implies \\ &\implies \gamma_{ij} [\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j] = 0 \implies \gamma_{kl} - \gamma_{lk} = 0. \end{aligned}$$

Protože je však současně $\gamma_{kl} = -\gamma_{lk}$, je $\gamma_{kl} = 0$ pro všechny hodnoty indexů k a l . Soubor vnějších součinů $e^i \wedge e^j$ pro $1 \leq i < j \leq n$ je lineárně nezávislý. Dokážeme však vyjádřit *každý* antisymetrický 2-tenzor jako lineární kombinaci prvků tohoto prostoru? Zvolme tenzor $\omega \in \Lambda_2(V_n)$ libovolně a hledejme jeho zápis ve tvaru

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{\omega}_{ij} e^i \wedge e^j = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{ij} e^i \wedge e^j,$$

kde jsme podobně jako při dokazování lineární nezávislosti označili $\tilde{\omega}_{ji} = -\tilde{\omega}_{ij}$ a ve výsledném výrazu už sčítáme přes všechny dvojice indexů i a j . Vyčíslením na prvcích báze e_k a e_l dostaneme $\omega(e_i, e_j) = \tilde{\omega}_{ij}$. Označíme-li $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{ij}$, můžeme tenzor ω zapisovat ve tvaru $\omega = \omega_{ij} e^i \wedge e^j$. Soubor prvků $\{e^i \wedge e^j\}$, $1 \leq i < j \leq n$, je nejen lineárně nezávislý, ale také úplný. Projekce $\text{alt} \mathcal{T}_2(V_n) \rightarrow \Lambda_2(V_n)$ je surjektivní (zobrazuje vektorový prostor všech k -tenzorů $\mathcal{T}_2(V_n)$ na jeho vektorový podprostor všech antisymetrických 2-tenzorů $\Lambda_2(V_n)$).

Za bázi prostoru $\Lambda_2(V_n)$ tak můžeme zvolit soubor $\{e^i \wedge e^j\}$, $1 \leq i < j \leq n$, a vyjadřovat v ní tenzor ω jako

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{\omega}_{ij} e^i \wedge e^j, \quad \text{nebo} \quad \omega = \omega_{ij} e^i \wedge e^j, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad i < j. \quad (12.128)$$

Druhé vyjádření, využívající Einsteinovy symboliky, je pohodlnější.

Příklad 12.73 je fakticky návodem, jak konstruovat indukovanou bázi $\Lambda_k(V_n)$.

Báze (e_1, \dots, e_n) ve vektorovém prostoru V_n indukuje v prostoru antisymetrických k -tenzorů $\Lambda_k(V_n)$ bázi

$$\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}\}, \quad \text{kde } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n. \quad (12.129)$$

Zápis tenzoru $\omega \in \Lambda_k(V_n)$ ve složkách v této bázi je pak

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad \text{nebo } \omega = \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad (12.130)$$

kde pro

$$i_1 < \dots < i_k \quad \text{je } \omega_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k}, \quad \omega_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)} = \text{sgn } \sigma \omega_{i_1 \dots i_k},$$

přičemž $\sigma = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k))$ je libovolná z $k!$ permutací indexů i_1 až i_k .

Dimenze vektorového podprostoru $\Lambda_k(V_n)$ je rovna počtu prvků indukované báze (12.129), tj. počtu výběrů indexů $i_1 < \dots < i_k$ z hodnot $1, \dots, n$. Těchto výběrů je tolik, kolik je kombinací bez opakování k -té třídy z n prvků, takže $\dim \Lambda_k(V_n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Příklad 12.74: Vyčíslení prvků indukované báze v $\Lambda_k(V_n)$ na vektorech

Jak jsme si už řekli, občas musíme absolvovat nezábavné vyčíslení tenzorů na jejich argumentech, abychom pomocí praxe lépe pronikli k pochopení, co to tenzor je. Zkusme teď vyčíslit obecný prvek báze prostoru $\Lambda_k(V_n)$ na vektorech ξ_1, \dots, ξ_k zadaných v bázi (e_1, \dots, e_n) prostoru V_n svými složkami, tj. $\xi_j = \xi_j^k e_k$. Počítejme pro jistotu nejprve pro $k = 2$. Platí

$$e^i \wedge e^j(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^i \xi_2^j - \xi_1^j \xi_2^i = \det \begin{pmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{pmatrix}.$$

A teď obecně pro $k \leq n$:

$$\begin{aligned} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \frac{k!}{1! \dots 1!} \text{alt}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k})(\xi_1, \dots, \xi_k) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma e^{i_1}(\xi_{\sigma(1)}) \dots e^{i_k}(\xi_{\sigma(k)}) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma \xi_{\sigma(1)}^{i_1} \dots \xi_{\sigma(k)}^{i_k} = \det \begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_1^{i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_k^{i_1} & \dots & \xi_k^{i_k} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12.131)$$

Dostali jsme subdeterminant matice typu k/n tvořené složkami vektorů ξ_1, \dots, ξ_k zapsanými do řádků. Výběr sloupců subdeterminantu je dán indexy i_1 až i_k . Označíme-li tento subdeterminant $D^{i_1 \dots i_k}(\xi_1, \dots, \xi_k)$, můžeme hned zapsat vzorec pro vyčíslení tenzoru $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ na vektorech ξ_1, \dots, ξ_k ,

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega_{i_1 \dots i_k} D^{i_1 \dots i_k}(\xi_1, \dots, \xi_k).$$

Příklad 12.75: Determinant

S dimenzemi prostorů antisymetrických tenzorů je to zajímavé. Pro dané n a $k = 1, 2, \dots$, tvoří příslušný řádek Pascalova trojúhelníka, který známe z kombinatoriky. Dimenze prostoru antisymetrických k -tenzorů je stejná jako dimenze prostoru antisymetrických $(n - k)$ -tenzorů. Prostor $\Lambda_n(V_n)$ je, stejně jako prostor $\Lambda_1(V_n)$, jednorozměrný. Pro $k > n$ žádný netriviální antisymetrický k -tenzor neexistuje. (Umíte to vysvětlit pomocí definice antisymetrického tenzoru?) Prostory $\Lambda_k(V_n)$ pro $k > n$ jsou *triviální*, obsahují pouze nulový tenzor. Všimněme si podrobněji prostoru $\Lambda_n(V_n)$. Indukovaná báze má jediný prvek $\omega_0 = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$. Každý další prvek prostoru $\Lambda_n(V_n)$ je jeho násobkem. Použijeme-li vztah (12.131) pro $k = n$, dostaneme

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n^1 & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^n \end{pmatrix}. \quad (12.132)$$

Díky vztahu (12.132) se tenzor ω_0 často nazývá determinant a značí se $\omega_0 = \det$.

Geometrický význam tenzoru \det blíže pochopíme v následujícím odstavci.

12.2.7 Objemový element v prostoru E_n , vektorový součin

Že by mohl objemový element, který potřebujeme pro integrování, souviset s tenzory, někoho možná ani nenapadne. A přece souvisí. Je to totiž speciální tenzorové pole. Nejprve jej však musíme definovat algebraicky. K zavedení (algebraického) objemového elementu použitelného později při integrování je třeba, aby vektorový prostor, v němž jej chceme definovat, byl opatřen skalárním součinem. Z kapitoly 6 víme, že takový vektorový prostor nad \mathbf{R} nazýváme *euklidovský* a značíme jej E_n . Kromě skalárního součinu v něm potřebujeme ještě další strukturu, zvanou *orientace*. Tu lze zavést obecně, tj. v každém vektorovém prostoru V_n . Souvisí totiž s přechody mezi bázemi.

Dvě báze (e_1, \dots, e_n) a $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ vektorového prostoru V_n se nazývají *ekvivalentní*, je-li determinant matice přechodu mezi nimi kladný. S touto ekvivalencí souvisí rozklad množiny všech bází na dvě třídy. Každá z nich představuje jednu ze dvou možných *orientací* prostoru V_n . Vektorový prostor, v němž je zvolena jedna z orientací, se nazývá *orientovaný*.

Že se v právě uvedené definici jedná o ekvivalenci (reflexivita, symetrie, tranzitivita) ověřte sami. Mezi bázemi téže orientace se přechází maticí s kladným determinantem, mezi bázemi náležejícími různým orientacím maticí s determinantem záporným. Každá báze náležející dané orientaci je jejím reprezentantem a generuje tuto třídu. Značíme $\mu = [e_1, \dots, e_n]$. Následující

věta je tvrzením o existenci a jednoznačnosti geometrického objektu, kterému budeme říkat *objemový element*.

Věta 12.25 (Existence a jednoznačnost objemového elementu): *Nechť E_n je orientovaný euklidovský prostor se skalárním součinem (\cdot, \cdot) a orientací μ . Pak existuje tenzor $\omega_0 \in \Lambda_n(E_n)$ tak, že pro každou ortonormální bázi (e_1, \dots, e_n) náležející orientaci μ platí $\omega_0(e_1, \dots, e_n) = 1$. Tento tenzor je určen jednoznačně a nazývá se objemový element prostoru E_n příslušný zadanému skalárnímu součinu a zvolené orientaci.*

Důkaz této závažné věty je velice jednoduchý. Existenci tenzoru požadovaných vlastností dokážeme, když nějaký takový sestrojíme. Zvolme proto v prostoru V_n libovolnou ortonormální bázi (e_1, \dots, e_n) , tj. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, náležející orientaci μ . (V euklidovském prostoru \mathbf{R}^3 se nejčastěji volí pravotočivá orientace.) Označíme-li $\omega_0 = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$, hned vidíme, že jsme se trefili. Platí totiž (viz příklad 12.75)

$$\omega_0(e_1, \dots, e_n) = e^1 \wedge \dots \wedge e^n(e_1, \dots, e_n) = \det I_n = 1,$$

kde I_n je zde jednotková matice řádu n .

Pozornější čtenáři možná už teď přemýšlejí, proč jsme se při konstrukci pojmu „objemový element“ omezili na ortonormální báze a vybrané orientace, když jsme tento předpoklad vůbec nepoužili. Předpokládali jsme sice, že zvolená báze (e_1, \dots, e_n) je ortonormální a náleží zadané orientaci μ , ale nikde se to explicitně neprojevílo. Co by se stalo, kdyby báze byla libovolná? Označme $\omega = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$. Tento tenzor vyčíslený na vektorech *jakékoli* báze (e_1, \dots, e_n) (v tomto pořadí) dává přece hodnotu 1 vždycky. Co by se stalo, kdybychom zvolili jinou libovolnou bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$? Výsledkem vyčíslení tenzoru $\bar{\omega} = \bar{e}^1 \wedge \dots \wedge \bar{e}^n$ na vektorech báze $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ je opět hodnota 1. Tenzory ω a $\bar{\omega}$ jsou ovšem obecně různé. Vyjádříme-li totiž třeba tenzor $\bar{\omega}$ v bázi (e_1, \dots, e_n) , dostaneme

$$\bar{\omega} = \bar{e}^1 \wedge \dots \wedge \bar{e}^n = (S_{i_1}^1 e^{i_1}) \wedge \dots \wedge (S_{i_n}^n e^{i_n}) = \det S e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \det S \cdot \omega.$$

Tenzor $\bar{\omega}$ je sice „jen“ násobkem tenzoru ω (jak to má být, neboť $\dim \Lambda_n(V_n) = 1$), není mu však roven. Rovnost nastane právě tehdy, bude-li determinant matice přechodu $T = S^{-1}$ mezi bázemi (e_1, \dots, e_n) a $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ roven jedné. To je zaručeno pro všechny ortonormální báze náležející zvolené orientaci vektorového prostoru V_n . Dokázali jsme tak druhou část věty 12.25, jednoznačnost objemového elementu.

Jaký je ale geometrický význam tohoto objektu? Budou jeho hodnoty na vektorech v obvyklých geometrických případech odpovídat známým výrazům pro objemy těles, která jsou těmito vektory vymezena? Například tři kolmé vektory \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} v trojrozměrném prostoru lze chápat jako hrany kváдру \bar{K} , jehož objem $v(\bar{K}) = abc$ je součinem délek těchto vektorů. Nejsou-li vektory kolmé, vymezují rovnoběžnostěn \bar{Q} o objemu $v(\bar{Q}) = abc \sin \alpha \sin \beta$, kde α je úhel mezi

vektory \vec{a} a \vec{b} a β je úhel, který svírá vektor \vec{c} s rovinou tvořenou vektory \vec{a} a \vec{b} . Než se budeme tomuto problému věnovat, podívejme se na objemový element s otázkou, zda by k vyjádření jeho hodnoty na vektorech bylo možné nějak vhodně použít skalární součin zavedený v E_n . Zvolme v E_n libovolné vektory ξ_1, \dots, ξ_n a označme A matici tvořenou jejich složkami v bázi (e_1, \dots, e_n) . Determinant této matice vystupuje ve vztahu (12.132) (n -tice $(\xi_i) = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^n)$ složek vektoru ξ_i vytvoří i -tý řádek matice A). Podle vztahu (12.132) je $\omega_0(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A$. Dále označme

$$G = (g_{ij}), \quad g_{ij} = (\xi_i, \xi_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Symetrická matice G obsahuje skalární součiny vektorů ξ_1 až ξ_n . A teď se dostaneme k tomu podstatnému: je-li báze (e_1, \dots, e_n) ortonormální, jak jsme v definici objemového elementu požadovali, dostaneme

$$g_{ij} = (\xi_i, \xi_j) = (\xi_i)(\xi_j)^T \implies G = AA^T \implies |\det A| = \sqrt{\det G}.$$

(Determinantu matice G pod odmocninou se nedivme — je nezáporný, neboť

$$\det G = \det(AA^T) = \det A^2.$$

Dovedete říci, kdy bude nulový?) A máme alternativní zápis pro hodnotu objemového elementu na vektorech,

$$\omega_0(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sqrt{\det G}. \quad (12.133)$$

Uvědomte si, že matice G se nemění při přechodech mezi bázemi. (Umíte to zdůvodnit a dokázat?) Jak uvidíme později, bude zápis (12.133) velice důležitý při integraci na „křivých“, tj. nikoli jen „placatých“ integračních oborech.

Příklad 12.76: Objemový element v \mathbf{R}^3

Z fyziky i jiných disciplín jsme zvyklí na trojrozměrný prostor \mathbf{R}^3 . Potřebujeme-li určovat polohu a vzájemné relace týkající se polohy bodů, chápeme jej jako prostor metrický s euklidovskou metrikou či prostor topologický s euklidovskou topologií otevřených kvádrů, která je touto metrikou indukována. Potřebujeme-li reprezentovat vektory jejich složkami a zjišťovat vztahy mezi vektory (lineární závislost a nezávislost), chápeme \mathbf{R}^3 jako vektorový prostor uspořádaných trojic reálných čísel s obvyklým sčítáním a násobením skalárem po složkách. V \mathbf{R}^3 také automaticky pracujeme se skalárním součinem zavedeným tak, aby souhlasil s euklidovským měřením délek a úhlů. Ortonormální vektory jsou pak ty, které jsou kolmé (jejich směry svírají úhel 90°) a jednotkové. „Fyzikální“ vektorový prostor \mathbf{R}^3 si také nedovedeme představit bez vektorového součinu. Víme, že objem rovnoběžnostěny určený vektory \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} je $V = |\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})|$. Samozřejmě i v \mathbf{R}^3 máme dvě možné orientace, říkáme jim *pravotočivá* (splňuje tzv. pravidlo pravé ruky) a *levotočivá*. Je-li báze tvořená (lineárně nezávislými) vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} pravotočivá, je přímo $V = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$, neboť *smíšený součin* $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ je kladný. Víme také (první díl), že při vyjádření vektorů jejich složkami v ortonormální pravotočivé bázi platí

$$\vec{b} \times \vec{c} = (b^2c^3 - b^3c^2, b^3c^1 - b^1c^3, b^1c^2 - b^2c^3),$$

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = a^1(b^2c^3 - b^3c^2) + a^2(b^3c^1 - b^1c^3) + a^3(b^1c^2 - b^2c^3) = \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix}.$$

Objemový element je $\omega_0 = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$. Jeho vyčíslením na vektorech \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} dostaneme stejný výsledek, na jaký jsme zvyklí z geometrie a fyziky euklidovského prostoru \mathbf{R}^3 . A všimněme si, že budou-li vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} tvořit ortogonální (ne nutně normovanou) bázi, dostaneme objem kvádrů $V = abc$. To se velmi podobá objemu $v(\bar{K})$ tzv. trojrozměrného kvádrů v \mathbf{R}^3 , který bychom definovali jako $\bar{K} = [x^1, x^1 + a] \times [x^2, x^2 + b] \times [x^3, x^3 + c]$, kde $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$ je libovolný bod. Není to náhoda. Zdá se, že tyto úvahy začínají pomalu směřovat k použití tenzorů při integrování.

Příklad 12.76 navozuje otázku, zda také v n -rozměrném euklidovském vektorovém prostoru E_n lze zavést něco jako vektorový součin, který v kombinaci se skalárním součinem dá stejný výsledek jako vyčíslení objemového elementu na n vektorech. Měli bychom tak další vyjádření n -rozměrného objemu, podobně jako tomu bylo v příkladu 12.76: jedno vyjádření pomocí objemového elementu, druhé pomocí vektorového a skalárního součinu. V trojrozměrném vektorovém prostoru máme k dispozici definici vektorového součinu jako zobrazení, které uspořádané dvojici vektorů přiřazuje vektor třetí. V n -rozměrném prostoru půjde o zobrazení přiřazující vektor uspořádané $(n - 1)$ -tici vektorů. Definice vektorového součinu v E_n je založena na následujícím tvrzení. Nebudeme je formulovat jako zvláštní větu, neboť je důsledkem souvislosti skalárního a duálního součinu.

Nechť E_n je orientovaný euklidovský prostor a ω_0 objemový element příslušný danému skalárnímu součinu (\cdot, \cdot) a zvolené orientaci μ . Zvolme libovolně vektory $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in E_n$. Definujme zobrazení

$$\varphi : E_n \ni \xi \longrightarrow \varphi(\xi) = \omega_0(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbf{R}.$$

Pak existuje jediný vektor $\zeta \in E_n$ tak, že platí $(\zeta, \xi) = \varphi(\xi)$ pro libovolný vektor ξ .

Vektor ζ se nazývá *vektorový součin* vektorů ξ_1, \dots, ξ_{n-1} a značí se

$$\zeta = \xi_1 \times \dots \times \xi_{n-1}. \quad (12.134)$$

Příklad 12.77: Je vektorový součin vektorů skutečně vektorem?

Podobnou otázku jsme si kladli a odpovídali na ni již v příkladu 12.64. Šlo o tenzorový součin v trojrozměrném vektorovém prostoru. Nyní vyvstala v obecné podobě. Pro zobrazení φ platí

$$\varphi(\alpha\xi + \beta\vartheta) = \alpha\varphi(\xi) + \beta\varphi(\vartheta)$$

pro libovolné vektory ξ a ϑ a libovolné skaláry α, β . Splňuje tedy požadavek linearity a vypadá to, že je prvkem duálního prostoru E_n^* . Pokud tomu tak opravdu je, pak $\varphi(\xi)$ představuje duální součin kovektoru φ a vektoru ξ (viz vztah (12.57)) a tvrzení, z něhož vyplývá definice vektorového součinu, dokazovat nemusíme. Důkaz jsme provedli v příkladu 12.45 pro libovolné lineární zobrazení $\omega \in V_n^*$ (v tomto příkladu je $\varphi \in E_n^*$). Může zde však být problém. Chceme-li zobrazení φ vyčíslit na vektoru ξ , dosazujeme jej jako první argument do předpisu pro objemový element. Ten je n -tenzorem. Jako další argumenty v něm figurují předem zvolené vektory ξ_1 až ξ_{n-1} .

Zobrazení φ je na těchto vektorech závislé. Objemový element musí dávat na pevně zvolených vektorech ve všech bázích stejnou hodnotu (jak objemový element, tak vektory jsou geometrické objekty nezávislé na bázi). Platí proto (s využitím výsledku příkladu 12.74)

$$\varphi(\xi) = \omega_0(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^n \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-1}^1 & \xi_{n-1}^2 & \dots & \xi_{n-1}^n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \bar{\xi}^1 & \bar{\xi}^2 & \dots & \bar{\xi}^n \\ \bar{\xi}_1^1 & \bar{\xi}_1^2 & \dots & \bar{\xi}_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\xi}_{n-1}^1 & \bar{\xi}_{n-1}^2 & \dots & \bar{\xi}_{n-1}^n \end{pmatrix},$$

kde ξ_i^j , resp. $\bar{\xi}_i^j$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n$, jsou složky vektorů ξ_1, \dots, ξ_{n-1} v bázích (e_1, \dots, e_n) , resp. $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$, ξ^j a $\bar{\xi}^j$, $1 \leq j \leq n$, pak složky vektoru ξ v těchto bázích. Provedeme-li Laplaceův rozvoj determinantů podle prvního řádku, dostaneme

$$\xi^1 \Xi_1 + \dots + \xi^n \Xi_n = \bar{\xi}^1 \bar{\Xi}_1 + \dots + \bar{\xi}^n \bar{\Xi}_n,$$

kde Ξ_i , resp. $\bar{\Xi}_i$, $1 \leq i \leq n$, jsou algebraické doplňky prvků prvního řádku v prvním, resp. druhém z determinantů. Do této rovnosti dosadíme $\xi^j = T_i^j \bar{\xi}^i$ (T je jako obvykle matice přechodu od báze (e_1, \dots, e_n) k bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$) a dostaneme

$$(T_{i_1}^1 \bar{\xi}^{i_1}) \Xi_1 + \dots + (T_{i_n}^n \bar{\xi}^{i_n}) \Xi_n = \bar{\xi}^1 \bar{\Xi}_1 + \dots + \bar{\xi}^n \bar{\Xi}_n \implies$$

$$\implies \bar{\xi}^1 (T_1^1 \Xi_1 + T_1^2 \Xi_2 + \dots + T_1^n \Xi_n) + \dots + \bar{\xi}^n (T_n^1 \Xi_1 + T_n^2 \Xi_2 + \dots + T_n^n \Xi_n) = \bar{\xi}^1 \bar{\Xi}_1 + \dots + \bar{\xi}^n \bar{\Xi}_n,$$

a odtud vzhledem k libovolnosti vektoru ξ

$$\bar{\Xi}_j = T_j^1 \Xi_1 + \dots + T_j^n \Xi_n = T_j^i \Xi_i.$$

Současně je

$$\varphi(\xi) = (\varphi_i e^i)(\xi) = \varphi_i \xi^i \implies \varphi_i = \Xi_i, \quad \text{a také} \quad \bar{\varphi}_i = \bar{\Xi}_i.$$

Složky zobrazení φ se při přechodech mezi bázemi chovají jako kovektory. Nezapomeňme však, že jsme tento výsledek získali na základě jednoznačnosti objemového elementu, která je vázána na ortonormální báze náležející předem zvolené orientaci. Vektorový součin tedy není vektorem v pravém smyslu slova, neboť transformační vztahy pro jeho složky jsou stejné jako transformační vztahy pro složky vektoru jedině tehdy, jde-li o složky v ortonormálních bázích náležejících téže orientaci.

Příklad 12.78: Co je vektorový součin, když to není vektor?

V příkladu 12.64 jsme ukázali, že transformační vztahy pro složky vektorového součinu dvou vektorů v trojrozměrném prostoru odpovídají v ortonormálních bázích transformačním vztahům antisymetrického tenzoru druhého řádu, který měl stejný počet nezávislých složek jako vektor, tj. tři. V případě vektorového prostoru V_n obecné dimenze má stejnou dimenzi n prostor antisymetrických tenzorů $(n-1)$ -tého řádu, $\Lambda_{n-1}(V_n)$. Jeho prvky mají n nezávislých složek stejně jako vektory. Pokusme se zjistit, zda vektorový součin $(n-1)$ vektorů lze ztotožnit s antisymetrickým $(n-1)$ -tenzorem, podobně, jako jsme to udělali v příkladu 12.64. Poznamenejme, že omezení na ortonormální báze znamená, že se jedná o kartézské tenzory. Nejsou rozlišovány kovariantní a kontravariantní objekty. Všechny indexy v následujících výpočtech proto budou dole. Zvolme ortonormální báze (e_1, \dots, e_n) a $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$, matici přechodu od první z nich k druhé označme jako obvykle T , inverzní matici $S = T^{-1} = T^T$. Pro antisymetrický tenzor $\eta \in \Lambda_{n-1}(V_n)$ ve složkách platí (viz vztahy (12.68))

$$\eta = \bar{\eta}_{i_1 \dots i_{n-1}} \bar{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}^{i_{n-1}} = \eta_{j_1 \dots j_{n-1}} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-1}},$$

$$\bar{\eta}_{i_1 \dots i_{n-1}} = T_{i_1 j_1} \dots T_{i_{n-1} j_{n-1}} \eta_{j_1 \dots j_{n-1}} = S_{j_1 i_1} \dots S_{j_{n-1} i_{n-1}} \eta_{j_1 \dots j_{n-1}}.$$

Označme $\bar{v}_{(i)} = \operatorname{sgn} \sigma(i_1 \dots i_{n-1}) \bar{\eta}_{i_1 \dots i_{n-1}}$, resp. $v_{(j)} = \operatorname{sgn} \sigma(j_1 \dots j_{n-1}) \eta_{j_1 \dots j_{n-1}}$, jestliže index i , resp. j chybí v $(n-1)$ -tici indexů (i_1, \dots, i_{n-1}) , resp. (j_1, \dots, j_{n-1}) . Při tomto označení dostaneme

$$\bar{v}_{(i)} = v_{(j)} A_{ji} = v_{(j)} (S^{-1})_{ij} \det S,$$

kde A je matice adjungovaná k matici S , $A_{ji} = (S^{-1})_{ij} \det S$. Náleží-li obě báze téže orientaci, je $\det T = 1$ a platí $A_{ji} = T_{ij} \det T$. Odtud pak

$$\bar{v}_{(i)} = (\det T) \cdot (v_{(j)} T_{ij})$$

a transformační vztahy odpovídají (kartézským) vektorům. Takže vektorový součin vektorem je i není. Proto se mu často říká *pseudovektor*, nebo *axiální vektor*, v analogii s názvoslovím používaným pro $n = 3$.

12.2.8 Cvičení

- Dokažte, že zobrazení χ definované vztahy (12.63) je tenzorem typu (p, q) . Dokažte také, že součet tenzorů (ve vztazích (12.63) pro $\alpha = \beta = 1$) a skalární násobení tenzoru (ve vztazích (12.63) například $\beta = 0$), splňují axiomy vektorového prostoru.
Návod: Dokažte linearitu v libovolném argumentu. Axiomy vektorového prostoru ověřte přímo.
- Odvoďte všechny transformační vztahy v příkladu 12.50.
- Odvoďte transformační vztahy pro složky tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_q^p(V_n)$ při přechodu o matici $T = (T_i^j)$, $1 \leq i, j \leq n$, od báze (e_1, \dots, e_n) k bázi $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$.
- Prozkoumejte transformační vztahy pro tenzory druhého řádu všech tří typů $((2, 0), (1, 1)$ a $(0, 2))$ a pokuste se je zapsat ve formě maticového násobení. Pomocí maticového násobení také запиšte vztahy pro výpočet hodnoty tenzoru na dvojici příslušných argumentů.
- Odvoďte transformační vztahy uvedené v příkladu 12.54 pro složky tenzoru $\tau \in \mathcal{T}_1^1(V_n)$, je-li V_n vektorový prostor nad \mathbf{C} .
- Pro případ definice tenzoru typu (p, q) nad \mathbf{C} podle vztahu (12.75) запиšte transformační vztahy pro složky v indukované bázi, je-li báze ve V_n (e_1, \dots, e_n) .
- Formulujte znovu definici tenzorového součinu pro čistě kovariantní tenzory $\tau \in \mathcal{T}_q^0(V_n)$ a $\eta \in \mathcal{T}_s^0(V_n)$ a tenzorového součinu kovariantních tenzorů jako zobrazení tenzorových prostorů. Příným dosazením argumentů rozepište podrobně důkaz všech vlastností ve větě 12.19.
- Proveďte symetrizaci a antisymetrizaci tenzorů typu $(2, 1)$ a $(1, 2)$, tj. rozložte libovolný tenzor uvedeného typu na součet tenzoru symetrického a antisymetrického ve dvojici libovolných kovektorů (u tenzorů typu $(2, 1)$), resp. vektorů (u tenzorů typu $(1, 2)$). Je-li (e_1, \dots, e_n) báze ve vektorovém prostoru V_n , najděte indukované báze v prostorech symetrických a antisymetrických tenzorů typu $(2, 1)$, resp. $(1, 2)$.
- Určete dimenze vektorových podprostorů $\mathcal{S}_3^0(V_n)_{ij}$ a $\Lambda_3^0(V_n)_{ij}$ (tenzory symetrické, resp. antisymetrické v i -tém a j -tém argumentu, $1 \leq i < j \leq n$) tenzorového prostoru $\mathcal{T}_3^0(V_n)$. Proč není součet dimenzí všech vektorových podprostorů s nějakou symetrií či antisymetrií roven dimenzi celého prostoru?
- Dokažte, že vlastnosti symetrie, resp. antisymetrie složek tenzoru se neporuší přechodem k jiné bázi.
Návod: Důkaz proveďte nejprve pro tenzory druhého řádu, potom zobecněte.
- Pomocí transformačních vztahů pro složky dokažte kanonickou izomorfnost vektorových prostorů $\mathcal{T}_0^2(V_n)$ a $L(V_n^*, V_n)$, vektorových prostorů $\mathcal{T}_1^1(V_n)$ a $L(V_n^*, V_n^*)$, resp. $L(V_n, V_n)$ (tj. prostory $L(V_n^*, V_n^*)$ a $L(V_n, V_n)$ jsou rovněž kanonicky izomorfní).

12. Dokažte, že složky veličin ϵ a τ , definované v příkladu 12.61, se transformují jako složky kartézského tenzoru. Dokažte vztah $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ pro složky vektorového součinu vektorů \vec{a} a \vec{b} , kde (ϵ_{ijk}) je Levi-Civitův tenzor (12.96).
13. Nechť T je regulární matice. Označme \tilde{T} adjungovanou matici, jejíž prvek \tilde{T}_{ij} je roven algebraickému doplňku prvku T_{ji} matice T . (První index je řádkový, druhý sloupcový). Dokažte, že $\tilde{T} = \det T \cdot T^{-1}$.
14. Proveďte transformační vlastnosti složek tenzorů vzniklých různými typy úžení tenzoru typu (p, q) .
15. Dokažte, že zobrazení χ definované vztahem (12.116) je k -tenzor.
16. Proveďte, že operace sčítání k -tenzorů a násobení k -tenzoru skalárem činí z množiny $\mathcal{T}_k(V_n)$ všech k -tenzorů vektorový prostor.
17. Dokažte, že soubor zobrazení definovaných vztahy (12.117) je báze v prostoru $\mathcal{T}_k(V_n)$.
Návod: Nejprve dokažte jejich lineární nezávislost tak, že nulovou lineární kombinací

$$\gamma_{i_1 \dots i_k} \phi^{i_1 \dots i_k} = 0_{\mathcal{T}_k(V_n)}$$

vyčíslete na k -tici vektorových argumentů $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ a využijete definičního vztahu (12.117). Dostanete hodnoty koeficientů $\gamma_{i_1 \dots i_k}$, z nichž bude lineární nezávislost zřejmá. Dále je třeba ukázat, že posuzovaný systém je tzv. úplný, tj. že na základě předpokladu, že libovolný k -tenzor ω je lineární kombinací tvaru

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} \phi^{i_1 \dots i_k},$$

dokážeme určit složky $\omega_{i_1 \dots i_k}$. Postupujte tak, že obě strany výrazu pro ω vyčíslete opět na vektorech báze $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$.

18. Dokažte, že soubor k -tenzorů definovaný vztahy (12.127) je báze v prostoru $\mathcal{T}_k(V_n)$.
Návod: Nejprve sestavte lineární kombinaci všech prvků tohoto souboru a položte ji rovnu nulovému tenzoru, tj.

$$\gamma_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} = 0_{\mathcal{T}_k(V_n)}.$$

Vyčíslete tuto rovnici na souboru vektorů $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ a pomocí definice tenzorového součinu a definice duální báze dokažte, že takovou lineární kombinaci lze sestavit právě když jsou všechny její koeficienty nulové. Dále dokažte, že soubor (12.127) je tzv. úplný, tj. že *každý* k -tenzor lze vyjádřit jako lineární kombinaci jeho prvků. Postupujte tak, že zvolíte libovolný tenzor $\omega \in \mathcal{T}_k(V_n)$ a předpokládáte, že jej lze zapsat ve tvaru

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}.$$

Vyčíslením této rovnosti na souboru $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ pak vyjádříte koeficienty $\omega_{i_1 \dots i_k}$.

19. Vyjádřete hodnotu tenzoru alt τ , kde $\tau \in \mathcal{T}_3(V_n)$ na vektorech ξ, ζ, θ pomocí jejich složek v bázi (e_1, \dots, e_n) a složek tenzoru τ v indukované bázi $\{e^i \otimes e^j \otimes e^k\}$, $1 \leq i, j, k \leq n$.
20. Nechť V_n a W_m jsou vektorové prostory (nad \mathbf{R}) a $f : V_n \rightarrow W_m$ lineární zobrazení. Definujme zobrazení f^* prostorů (kovariantních) k -tenzorů takto:

$$f^* : \mathcal{T}_k(W_m) \ni \omega \longrightarrow f^* \omega = \eta \in \mathcal{T}_k(V_n),$$

kde

$$\eta(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(f(\xi_1), \dots, f(\xi_k)), \quad \text{pro libovolné vektory } \xi_1, \dots, \xi_k \in V_n.$$

Dokažte, že platí $f^*(\tau \otimes \sigma) = f^* \tau \otimes f^* \sigma$ pro libovolné tenzory $\tau \in \mathcal{T}_k(W_m)$, $\sigma \in \mathcal{T}_l(W_m)$ a $f^*(\omega \wedge \chi) = f^* \omega \wedge f^* \chi$ pro libovolné tenzory $\omega \in \Lambda_k(W_m)$, $\sigma \in \Lambda_l(W_m)$.

230 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

21. Ve vektorovém prostoru V_4 jsou v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) zadány tři vektory takto: $\xi_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\xi_2 = (1, -1, 0, 0)$, $\xi_3 = (0, 0, 1, 1)$. Určete jejich vektorový součin, tj. $\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_3$. Vyjádřete složky vektorového součinu tří vektorů $\xi_i = (\xi_i^1, \xi_i^2, \xi_i^3, \xi_i^4)$, $i = 1, 2, 3$, ve V_4 obecně.

Výsledek: $\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_3 = (0, 0, -2, 2)$.

22. Ve vektorovém prostoru V_n se skalárním součinem a zvolenou orientací μ je zadána ortonormální báze $(e_1, \dots, e_n) \in \mu$. Objemový element označme ω_0 . Nechť ve vektorovém prostoru \mathbf{R}^n je zadána standardní báze (f_1, \dots, f_n) a skalární součin (\cdot, \cdot) rovněž standardním způsobem, tj. pro vektory $a = \alpha^j f_j$ a $b = \beta^j f_j$ platí $(a, b) = \delta_{ij} \alpha^i \beta^j$. Nechť $f : \mathbf{R}^n \rightarrow V_n$ je lineární izomorfismus zachovávající skalární součin, tj. $(f(a), f(b)) = (a, b)$ pro libovolnou dvojici vektorů $a, b \in \mathbf{R}^n$. Nechť dále $(f(f_1), \dots, f(f_n)) \in \mu$. Dokažte, že platí $f^* \omega_0 = \det f \cdot \omega_0$, kde f^* je zobrazení definované v úloze 20.

23. Nechť $\omega_0 \in \Lambda_n(\mathbf{R}^n)$ je objemový element. Označte $\zeta = \xi_1 \times \dots \times \xi_{n-1}$, kde ξ_1, \dots, ξ_{n-1} jsou libovolně zvolené vektory v \mathbf{R}^n . Dokažte, že platí $|\zeta| = |\omega_0(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \zeta)|^{1/2}$.

24. Nechť $\omega_0 \in \Lambda_n(\mathbf{R}^n)$ je objemový element. Označte $\zeta = \xi_1 \times \dots \times \xi_n$, kde ξ_1, \dots, ξ_n jsou libovolně zvolené vektory ve vektorovém podprostoru \mathbf{R}^n vektorového prostoru \mathbf{R}^{n+1} . (Jejich poslední složky jsou tedy nulové). Dokažte, že platí $|\zeta| = |\omega_0(\xi_1, \dots, \xi_n)|$, přičemž ve výrazu $\omega_0(\xi_1, \dots, \xi_n)$ jsou vektory (ξ_1, \dots, ξ_n) chápány jako prvky vektorového prostoru \mathbf{R}^n (mají n složek).

25. Pro libovolné vektory $a, b, c \in \mathbf{R}^3$ dokažte následující identity (ω_0 je objemový element ve \mathbf{R}^3):

a) $a \times (b \times c) = (a, c)b - (a, b)c$,

d) $a \times b = -b \times a$,

b) $|(a, b \times c)| = |\omega_0(a, b, c)|$,

c) $(\alpha a + \beta b) \times c = \alpha(a \times c) + \beta(b \times c)$,

e) $|a \times b| = ((a, a)(b, b) - (a, b)^2)^{1/2}$.

12.3 Od algebry k analýze:

tenzorová pole a diferenciální formy v \mathbf{R}^n

V tomto odstavci využijeme znalostí o kovariantních antisymetrických tenzorech k zavedení objektů klíčových pro teorii integrálu — diferencovatelných antisymetrických tenzorových polí (neboli diferenciálních forem) a základních operací s nimi. Kromě operací sčítání, násobení funkcí v roli skaláru a vnějšího součinu, které již dobře známe z algebry, půjde také o operace analytické, vnější derivaci a zpětný obraz. V dalším výkladu budeme zásadně pracovat s vektorovými a tenzorovými prostory na euklidovských prostorech. Připomeňme, že *euklidovským prostorem dimenze n* rozumíme *topologický* prostor \mathbf{R}^n s *přirozenou*, neboli *euklidovskou* topologií, jak jsme ji zavedli v deváté kapitole druhého dílu.

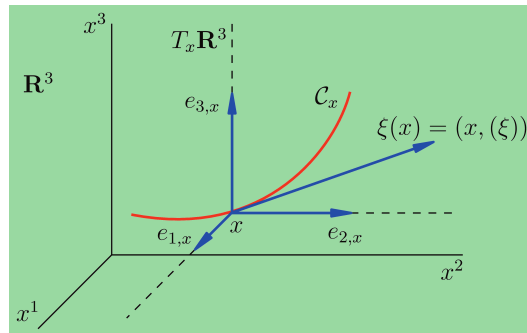
12.3.1 Od vektorových polí v \mathbf{R}^n k tenzorovým, diferenciální formy

Nechť \mathbf{R}^n je euklidovský topologický prostor. Jeho body budeme popisovat standardními souřadnicemi $x = (x^1, \dots, x^n)$ pro každé $x \in \mathbf{R}^n$, *i-tou souřadnicovou funkcí* nazveme funkci

$$x^i : \mathbf{R}^n \ni x \longrightarrow x^i(x) = x^i \in \mathbf{R}, \quad \text{pro } x = (x^1, \dots, x^n).$$

12.3. OD ALGEBRY K ANALÝZE: TENZOROVÁ POLE A DIFERENCIÁLNÍ FORMY 231

(Jak jsme rozhodli v odstavci 12.1., budeme souřadnice bodů v euklidovských prostorech číslovat horními indexy. To proto, že při přechodech mezi soustavami souřadnic v euklidovském prostoru se budou souřadnice bodů řídit transformačními vztahy pro vektory.) S každým bodem $x \in \mathbf{R}^n$ spojíme *vektorový prostor* \mathbf{R}^n dimenze n , který budeme značit $T_x\mathbf{R}^n$ a nazývat *tečný prostor k \mathbf{R}^n v bodě x* (jistě si vzpomenete, že pojmu „tečný prostor“ jsme se již dotkli v druhém dílu, v odstavci 9.3.2). Nejprve definujeme prvky budoucího vektorového prostoru $T_x\mathbf{R}^n$. Budeme je interpretovat jako tečné vektory ke křivkám. Situaci ukazuje obrázek 12.36.



Obrázek 12.36 Tečný prostor euklidovského prostoru v daném bodě.

V následující definici předpokládejme, že $\varepsilon > 0$ a standardní souřadnice v \mathbf{R}^n označme, jak bylo zmíněno, x^1, \dots, x^n .

Křivkou v \mathbf{R}^n jdoucí bodem $x \in \mathbf{R}^n$ rozumíme diferencovatelné zobrazení

$$\mathcal{C}_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \longrightarrow \mathcal{C}_x(t) = (x^1 \mathcal{C}_x(t), \dots, x^n \mathcal{C}_x(t)) \in \mathbf{R}^n, \quad \mathcal{C}_x(0) = x. \quad (12.135)$$

Křivky $\mathcal{C}_{x,1}$ a $\mathcal{C}_{x,2}$ jdoucí bodem x nazveme *ekvivalentní*, jestliže platí

$$\left. \frac{dx^i \mathcal{C}_{x,1}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^i \mathcal{C}_{x,2}(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

alternativně značíme

$$\dot{x}^i \mathcal{C}_{x,1}(t)|_{t=0} = \dot{x}^i \mathcal{C}_{x,2}(t)|_{t=0}.$$

Třída ekvivalence křivek jdoucích bodem x se nazývá *tečný vektor k \mathbf{R}^n v bodě x* . Značíme jej $\xi(x) = \dot{\mathcal{C}}_x$.

Pozn. 1: Třída ekvivalence je generována svým libovolným reprezentantem, ekvivalentní křivky tedy samozřejmě definují též vektor. Při formulaci definice vektoru jsme použili *faktorizace*. Připomeňte si ji v odstavci 4.1.1 druhého dílu prostřednictvím příkladů 4.10-4.12 na stranách 17 a 18.

Pozn. 2: O ekvivalentních křivkách jdoucích bodem x také říkáme, že mají v bodě x *kontakt prvního řádu*. Pokud pro křivky $\mathcal{C}_{x,1}$ a $\mathcal{C}_{x,2}$ platí $\left. \frac{d^j x^i \mathcal{C}_{x,1}}{dt^j} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^j x^i \mathcal{C}_{x,2}}{dt^j} \right|_{t=0}$ pro $1 \leq j \leq k$, mají křivky v bodě x *kontakt k -tého řádu*.

To, že jsme třídu ekvivalence křivek nazvali „vektorem“, ještě nic neznamena. Musíme totiž na množině $T_x \mathbf{R}^n$ zavést strukturu vektorového prostoru. To uděláme snadno. Označme $\xi(x)$ a $\zeta(x)$ dva tečné vektory v bodě x . Mějme na mysli, že jsou to třídy ekvivalence křivek. Zvolme libovolně reprezentanty $\mathcal{C}_{x,\xi}$ a $\mathcal{C}_{x,\zeta}$ těchto tříd a čísla $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Definujme vektor $\vartheta(x) = \alpha \xi(x) + \beta \zeta(x)$ jako třídu ekvivalence křivek s reprezentantem $\mathcal{C}_{x,\vartheta}$, kde $\mathcal{C}_{x,\vartheta}$ je křivka jdoucí bodem x , pro niž platí

$$\left. \frac{dx^i \mathcal{C}_{x,\vartheta}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \alpha \left. \frac{dx^i \mathcal{C}_{x,\xi}(t)}{dt} \right|_{t=0} + \beta \left. \frac{dx^i \mathcal{C}_{x,\zeta}(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Axiomy vektorového prostoru se snadno prověří (provedte). Tím je struktura vektorového prostoru na množině tečných vektorů ke křivkám zavedena. (Uvědomme si, že lineární kombinace lze provádět pouze s tečnými vektory umístěnými v jednom bodě. Nelze například sčítat vektor umístěný v bodě x_1 s vektorem umístěným v jiném bodě x_2 .) S vektory jsme zvyklí počítat pomocí jejich složek v bázi, kterou můžeme volit samozřejmě libovolně. Vhodná by však byla taková volba, která je nějak přirozeně spjatá se souřadnicovými osami v prostoru \mathbf{R}^n . Nejlépe tak, aby hodnoty derivací $\left. \frac{dx^i \mathcal{C}_{x,\xi}(t)}{dt} \right|_{t=0}$ představovaly složky vektoru $\xi(x)$ v této bázi. Je to snadné. Definujme i -tý vektor báze jako třídu křivek ekvivalentních s přímkou (na souřadnicové přímky v kapitole 5 si jistě vzpomenete)

$$\mathcal{P}_{x,i} : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \longrightarrow \mathcal{P}_{x,i}(t) \in \mathbf{R}^n, \quad x^j \mathcal{P}_{x,i}(t) = x^j + t \delta_i^j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\dot{\mathcal{P}}_{x,i} = \left(\dot{x}^1 \mathcal{P}_{x,i}(t), \dots, \dot{x}^n \mathcal{P}_{x,i}(t) \right) \Big|_{t=0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

Skutečně, je-li \mathcal{C}_x křivka jdoucí bodem x zadaná vztahem (12.135), platí

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{C}}_x &= \left(\dot{x}^1 \mathcal{C}_x(t), \dots, \dot{x}^n \mathcal{C}_x(t) \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \dot{x}^1 \mathcal{C}_x(0) \cdot (1, 0, \dots, 0) + \dots + \dot{x}^n \mathcal{C}_x(0) \cdot (0, \dots, 0, 1) = \dot{x}^i \mathcal{C}_x(0) \dot{\mathcal{P}}_{x,i}. \end{aligned}$$

Takto zavedenou bázi v $T_x \mathbf{R}^n$ označme $(e_{1,x}, \dots, e_{n,x})$, tj. $e_{x,i} = \dot{\mathcal{P}}_{x,i}$. Hned můžeme definovat duální prostor $T_x^*(\mathbf{R}^n)$ v bodě x , a duální bázi (e_x^1, \dots, e_x^n) , tenzorové prostory všech typů v bodě x a v nich indukované báze. V dalších úvahách budeme také předpokládat, že v tečných prostorech $T_x \mathbf{R}^n$ je zaveden standardně užívaný skalární součin

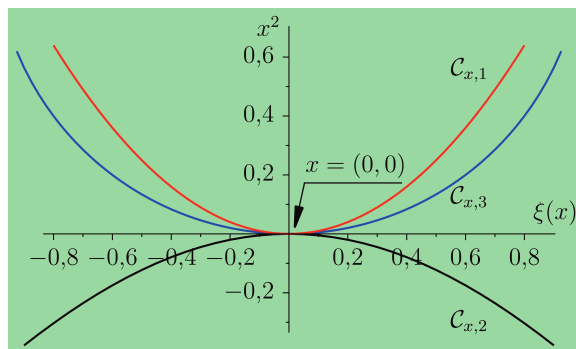
$$(\xi(x), \zeta(x)) = \delta_{ij} \xi^i(x) \zeta^j(x) = \xi^1(x) \zeta^1(x) + \dots + \xi^n(x) \zeta^n(x)$$

pro každé dva vektory $\xi(x), \zeta(x) \in T_x \mathbf{R}^n$. Připomeňme, že tento skalární součin činí bázi $(e_{1,x}, \dots, e_{n,x})$ ortonormální.

Pro účely dalších zápisů označíme $T\mathbf{R}^n = \cup_{x \in \mathbf{R}^n} T_x \mathbf{R}^n$. Jde pouze o sjednocení množin. Na množině $T\mathbf{R}^n$ je sice vhodné zavést velmi užitečnou strukturu, tzv. *strukturu fibrované variety*, kterou však v této chvíli nebudeme potřebovat.

Příklad 12.79: Vektor jako třída křivek

Abychom si nový pojem vektoru, zavedený pro některé čtenáře možná trochu neobvykle (i když z matematického hlediska standardně), lépe představili, ukažme si jej na příkladech z \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^3 . Dejme tomu, že budeme chtít popsat jako třídu ekvivalence křivek v rovině vektor $\xi(x)$ o složkách $(1, 0)$ v bodě $x = (0, 0) \in \mathbf{R}^2$. Na obrázku 12.37 jsou tři takové křivky:



Obrázek 12.37 Ekvivalentní křivky a tečný vektor.

$$C_{x,1}(t) = (t, t^2), \quad C_{x,2}(t) = (t, \cos t - 1), \quad C_{x,3}(t) = (t, 1 - \sqrt{1 - t^2}).$$

Platí

$$\dot{C}_{x,1} = (1, 2t)|_{t=0} = (1, 0), \quad \dot{C}_{x,2} = (1, -\sin t)|_{t=0} = (1, 0), \quad \dot{C}_{x,3} = \left(1, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\Big|_{t=0} = (1, 0).$$

Kromě geometrické představy může dobře (a v daném případě možná i lépe) fungovat představa fyzikální. Uvědomíme-li si ji, pocit „neobvyklosti“ definice se značně oslabí. Představme si hmotné částice pohybující se v euklidovské rovině či v trojrozměrném euklidovském prostoru. Trajektorie částic, tj. vektorové funkce $\vec{r}(t)$ popisující jejich polohu v závislosti na čase, mohou být různé, ale jejich rychlosti $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ mohou být v okamžiku $t = 0$ shodné. (Nehleďme nyní na to, že v bodě $\vec{r}(0)$ by se reálné částice „srazily“ a uplatňme pouze představu stejných rychlostí.)

Vektorovým polem na euklidovském prostoru \mathbf{R}^n rozumíme zobrazení

$$\xi : \mathbf{R}^n \ni x \longrightarrow \xi(x) = (x, (\xi^i)) \in T_x \mathbf{R}^n \subset T\mathbf{R}^n, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (12.136)$$

Vektorové pole v každém bodě x můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci báze $(e_{1,x}, \dots, e_{n,x})$,

$$\xi(x) = \xi^1(x)e_{1,x} + \dots + \xi^n(x)e_{n,x}.$$

Vidíme, že složky $\xi^i(x)$ vektorového pole ξ jsou *funkce* na \mathbf{R}^n , tj. funkce proměnných x^1, \dots, x^n . Jsou-li složky funkcemi spojitými, resp. diferencovatelnými, jedná se o *spojité*, resp. *diferencovatelné* vektorové pole.

Zobrazení $e_i : \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow e_{i,x} \in T_x \mathbf{R}^n \subset T\mathbf{R}^n$, přiřazující každému bodu $x \in \mathbf{R}^n$ i -tý vektor báze, jak jsme ji zkonstruovali výše, jsou rovněž vektorová pole. Jsou nejen spojitá, ale i diferencovatelná. V dalším výkladu tedy budeme symbolem e_i značit *i -té vektorové pole báze*, symbolem $e_{i,x}$ pak jeho „hodnotu“ v bodě x (tj. obraz bodu x zobrazením e_i). Věřme, že si čtenář dá pozor, aby nezaměňoval vektorová pole e_i s vektory báze ve vektorových prostorech, s nimiž jsme pracovali v algebře. Brzy přejdeme k jinému značení vektorových polí báze a riziko záměny bude odstraněno.

Je samozřejmé, že definičním oborem vektorového pole nemusí být nutně celý prostor \mathbf{R}^n . V řadě případů bývají vektorová pole definována pouze na jeho podmnožinách, například na otevřených množinách, na oblastech, apod. O příklady vektorových polí není ve fyzice nouze. V okolí každého hmotného tělesa (hmotného bodu) o hmotnosti M je gravitační pole o intenzitě

$$\vec{E}_g : \mathbf{R}^3 \ni \vec{r} \longrightarrow \vec{E}_g(\vec{r}) = -\frac{\kappa M}{r^3} \vec{r}, \quad \kappa \doteq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2},$$

v okolí nábojů je elektrické pole o intenzitě $\vec{E}_e(\vec{r})$, tok nábojů je popsán vektorovým polem proudové hustoty $\vec{j}(\vec{r})$, pohybující se náboje či permanentní magnety budí ve svém okolí pole magnetické, popsané magnetickou indukcí $\vec{B}(\vec{r})$, apod.

Podobně jako v případě tečných prostorů můžeme s každým bodem x euklidovského prostoru \mathbf{R}^n spojit prostory tenzorů všech typů, tj. $\mathcal{T}_q^p(T_x \mathbf{R}^n)$. Příslušné vektorové podprostory tenzorových prostorů $\mathcal{T}_k(T_x \mathbf{R}^n)$ tvořené antisymetrickými k -tenzory označíme $\Lambda_k(T_x \mathbf{R}^n)$ a jejich sjednocení $\Lambda_k(T\mathbf{R}^n) = \cup_{x \in \mathbf{R}^n} \Lambda_k(T_x \mathbf{R}^n)$. (Ještě jednou připomeňme, že k -tenzory jsou tenzory typu $(0, k)$, symbol $\mathcal{T}_k(T_x \mathbf{R}^n)$ je zjednodušením zápisu $\mathcal{T}_k^0(T_x \mathbf{R}^n)$.)

Zobrazení

$$\omega : \mathbf{R}^n \ni x \longrightarrow \omega(x) \in \Lambda_k(T_x \mathbf{R}^n) \subset \Lambda_k(T\mathbf{R}^n) \quad (12.137)$$

se nazývá *k -forma* na \mathbf{R}^n .

Pozor! Obdobně, jako je třeba rozlišovat *vektorové pole*

$$\xi : \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow \xi(x) \in T_x \mathbf{R}^n \subset T\mathbf{R}^n$$

na \mathbf{R}^n , tj. zobrazení přiřazující každému bodu euklidovského prostoru vektor z tečného prostoru k \mathbf{R}^n v tomto bodě, a vektor $\xi(x_0)$, tj. obraz *daného bodu* x_0 vektorovým polem ξ , je třeba rozlišovat *k -formy* na \mathbf{R}^n (antisymetrická kovariantní k -tenzorová pole), tj. zobrazení

$$\omega : \mathbf{R}^n \ni x \longrightarrow \omega(x) \in \Lambda_k(T_x \mathbf{R}^n) \subset \Lambda_k(T\mathbf{R}^n),$$

přirazuje každému bodu euklidovského prostoru antisymetrický kovariantní k -tenzor operující na vektorových argumentech v tomto bodě, a „hodnotu“ k -formy ω v daném *pevném* bodě $x_0 \in \mathbf{R}^n$, tj. k -tenzor $\omega(x_0) \in \Lambda_k(T_{x_0}\mathbf{R}^n)$, který je obrazem bodu x_0 při zobrazení ω . Tento k -tenzor můžeme vyjádřit pomocí jeho složek v duální bázi $(e_{x_0}^1, \dots, e_{x_0}^n)$, indukované bázi $(e_{1,x_0}, \dots, e_{n,x_0})$:

$$\omega(x_0) = \omega_{i_1 \dots i_k}(x_0) e_{x_0}^{i_1} \wedge \dots \wedge e_{x_0}^{i_k}.$$

Obecný zápis

$$\omega(x) = \omega_{i_1 \dots i_k}(x) e_x^{i_1} \wedge \dots \wedge e_x^{i_k}$$

můžeme chápat dvojím způsobem:

- Zápis představuje k -tenzor, který je obrazem bodu x formou ω . V tomto případě jsou $\omega_{i_1 \dots i_k}(x)$ čísla představující složky k -tenzoru $\omega(x)$ v bázi $\{e_x^{i_1} \wedge \dots \wedge e_x^{i_k}\}$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, indukované bázi $(e_{1,x}, \dots, e_{n,x})$ tečného prostoru $T_x\mathbf{R}^n$ v *daném bodě* x .
- Zápis představuje samotnou k -formu ve složkách. V tomto případě je třeba složky $\omega_{i_1 \dots i_k}(x)$ chápat jako *funkce*, tj. zobrazení $\omega_{i_1 \dots i_k} : \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow \omega_{i_1 \dots i_k}(x) \in \mathbf{R}$, a součiny $e_x^{i_1} \wedge \dots \wedge e_x^{i_k}$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, jako *tenzorová pole*.

k -formu ω tak můžeme zapisovat dvojím způsobem: buď bez vyznačení funkční závislosti na proměnných $x = (x^1, \dots, x^n)$, nebo s tímto vyznačením, tj.

$$\omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad \text{nebo} \quad \omega_{i_1 \dots i_k}(x) e_x^{i_1} \wedge \dots \wedge e_x^{i_k},$$

Vždy však je třeba řídit se kontextem výkladu (první z možností zápisu by také mohla, v jiné souvislosti, například při čistě algebraických úvahách, znamenat jen nějaký k -tenzor).

Jsou-li složky $\omega_{i_1 \dots i_k}(x)$ formy ω spojitými, resp. diferencovatelnými funkcemi bodu $x = (x^1, \dots, x^n)$, nazývá se forma ω *spojitou*, resp. *diferenciální k -formou*.

Podobně jako v případě bázi $(e_{1,x}, \dots, e_{n,x})$ lze i prvky indukovaných bázi v tenzorových prostorech umístěných v bodech euklidovského prostoru \mathbf{R}^n chápat jako obrazy tenzorových polí příslušného typu.

12.3.2 Operace s diferenciálními formami — součty, násobky, součiny, úžení

Operace zmíněné v názvu odstavce nepředstavují nic nového. Fakticky je už dávno umíme. Tak jako se obrazy vektorových polí stávají při pevně zvoleném bodě $x \in \mathbf{R}^n$ vektory, tj.

prvky vektorového prostoru $T_x\mathbf{R}^n$, a můžeme vytvářet jejich lineární kombinace, jsou obrazy tenzorových polí v pevném bodě x tenzory příslušného typu. Konkrétně obrazy k -forem jsou antisymetrické kovariantní tenzory k -tého řádu, které operují na k vektorových argumentech z tečného prostoru $T_x\mathbf{R}^n$ k \mathbf{R}^n v bodě $x \in \mathbf{R}^n$. Drobný definiční problém však přece jen vzniká. Tak trochu se objevil již v předchozím odstavci, kde jsme zapisovali vektorová pole a k -formy ve složkách. Vektorové pole ξ , resp. 1-formu ω v bodě x bychom podle tohoto „vzoru“ zapsali ve tvaru lineární kombinace

$$\xi(x) = \xi^1(x)e_{1,x} + \cdots + \xi^n(x)e_{n,x}, \quad \text{resp.} \quad \omega(x) = \omega_1(x)e_x^1 + \cdots + \omega_n(x)e_x^n.$$

Souřadnice (x^1, \dots, x^n) bodu x ovšem představují n -tici proměnných, na nichž závisí složky vektorového pole $\xi^i = \xi^i(x^1, \dots, x^n)$, resp. formy $\omega_i = \omega_i(x^1, \dots, x^n)$, a e_1, \dots, e_n , resp. e^1, \dots, e^n jsou vektorová a kovektorová pole, tj. zobrazení

$$e_i : \mathbf{R}^n \ni x \longrightarrow e_i(x) = e_{i,x} \in T_x\mathbf{R}^n \subset T\mathbf{R}^n,$$

$$e^i : \mathbf{R}^n \ni x \longrightarrow e^i(x) = e_x^i \in T_x^*\mathbf{R}^n \subset \Lambda_1(T\mathbf{R}^n).$$

V pevném bodě x můžeme obrazy vektorových polí ξ a ζ , tj. vektory $\xi(x)$ a $\zeta(x)$, lineárně kombinovat vztahy $\alpha\xi(x) + \beta\zeta(x)$, kde α a β jsou libovolná reálná čísla (skaláry). Podobně můžeme v pevném bodě x zacházet s obrazy diferenciálních k -forem ω a η , tj. s k -tenzory $\omega(x)$ a $\eta(x)$ a vytvářet lineární kombinace vztahem $\alpha\omega(x) + \beta\eta(x)$. To ale nestačí. Musíme připustit, že α a β by mohly být funkční hodnoty jistých funkcí $\alpha, \beta : \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow \alpha(x), \beta(x) \in \mathbf{R}$. Celá tato úvaha směřuje k tomu, abychom definovali lineární kombinace vektorových polí a k -forem pomocí funkcí definovaných na \mathbf{R}^n , popřípadě na (nejčastěji otevřených) podmnožinách prostoru \mathbf{R}^n . Množina funkcí na \mathbf{R}^n vzhledem k operacím sčítání a násobení funkcí, definovaným „bod po bodu“, tj. $(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, $(\alpha\beta)(x) = \alpha(x)\beta(x)$, je okruhem, který označme $\Omega(\mathbf{R}^n)$. (Prověřte axiomy okruhu, uvedené v odstavci 4.1.2 v druhém dílu, a zjistěte, zda je tento okruh oborem integrity, resp. polem.) Označme $\mathcal{V}(\mathbf{R}^n)$ množinu všech vektorových polí a $\Lambda_k(\mathbf{R}^n)$ množinu všech k -forem, $k = 0, 1, 2, \dots$, definovaných na \mathbf{R}^n a jeho podmnožinách. Připomeňme, že pro $k > n$ neexistují netriviální (nenulové) k -formy. Za 0-formy považujeme funkce.

Definujme zobrazení

$$\Omega(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbf{R}^n) \ni (\alpha, \xi) \longrightarrow \alpha\xi \in \mathcal{V}(\mathbf{R}^n), \quad (\alpha\xi)(x) = \alpha(x)\xi(x),$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbf{R}^n) \ni (\xi, \zeta) \longrightarrow \xi + \zeta \in \mathcal{V}(\mathbf{R}^n), \quad (\xi + \zeta)(x) = \xi(x) + \zeta(x),$$

$$\Omega(\mathbf{R}^n) \times \Lambda_k(\mathbf{R}^n) \ni (\alpha, \omega) \longrightarrow \alpha\omega \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n), \quad (\alpha\omega)(x) = \alpha(x)\omega(x),$$

$$\Lambda_k(\mathbf{R}^n) \times \Lambda_k(\mathbf{R}^n) \ni (\omega, \eta) \longrightarrow \omega + \eta \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n), \quad (\omega + \eta)(x) = \omega(x) + \eta(x),$$

$$\Lambda_k(\mathbf{R}^n) \times \Lambda_l(\mathbf{R}^n) \ni (\eta, \chi) \longrightarrow \eta \wedge \chi \in \Lambda_{k+l}(\mathbf{R}^n), \quad (\eta \wedge \chi)(x) = \eta(x) \wedge \chi(x),$$

kde $x \in \mathbf{R}^n$ je libovolný (při provádění dané operace však pevný) bod euklidovského prostoru \mathbf{R}^n .

Uvedené operace jsou tedy rovněž definovány takříkajíc „bod po bodu“, jako operace s funkcemi. Množiny $\mathcal{V}(\mathbf{R}^n)$ a $\Lambda_k(\mathbf{R}^n)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, s operacemi zavedenými v předchozích vztazích jsou tzv. *moduly nad okruhem funkcí* $\Omega(\mathbf{R}^n)$. Jsou to struktury, které se od vektorových prostorů liší tím, že v roli skalárů jsou funkce, a namísto vektorů a tenzorů se pracuje s vektorovými a tenzorovými poli. Podrobněji se moduly jako takovými nebudeme zabývat, pro počítání s vektorovými poli a formami stačí, když budeme umět používat zavedené operace. K jejich procvičení slouží následující příklad.

Příklad 12.80: Operace s vektorovými poli a diferenciálními formami prakticky

Na \mathbf{R}^2 jsou zadány diferenciální formy $\omega : x \rightarrow \omega(x)$, $\eta : x \rightarrow \eta(x)$ takto $\omega(x) = x^1 e_x^1 + x^2 e_x^2$, $\eta(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} e_x^1 + \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} e_x^2$. Určíme jejich hodnoty v (pevně zvoleném) bodě $x = (x^1, x^2) = (-1, 1)$ na vektorech $\xi(x) = (0, 1)$ a $\zeta(x) = (-1, 0)$ a hodnotu formy $\omega \wedge \eta$ v zadaném bodě x na dvojici těchto vektorových argumentů. Platí

$$\omega(x)(\xi(x)) = x^1 e_x^1(\xi(x)) + x^2 e_x^2(\xi(x)) = x^1 \xi^1(x) + x^2 \xi^2(x) = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\omega(x)(\zeta(x)) = x^1 e_x^1(\zeta(x)) + x^2 e_x^2(\zeta(x)) = x^1 \zeta^1(x) + x^2 \zeta^2(x) = -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 1,$$

$$\begin{aligned} \eta(x)(\xi(x)) &= \frac{-x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} e_x^1(\xi(x)) + \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} e_x^2(\xi(x)) = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \xi^1(x) + \frac{-1}{\sqrt{2}} \xi^2(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(x)(\zeta(x)) &= \frac{-x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} e_x^1(\zeta(x)) + \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} e_x^2(\zeta(x)) = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \zeta^1(x) + \frac{-1}{\sqrt{2}} \zeta^2(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot (-1) + \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\omega(x) \wedge \eta(x) = (x^1 e_x^1 + x^2 e_x^2) \wedge \left(\frac{-x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} e_x^1 + \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} e_x^2 \right) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} e_x^1 \wedge e_x^2$$

(podrobně propočtete na základě vlastností vnějšího součinu a s uvážením vztahů $e_x^1 \wedge e_x^1 = e_x^2 \wedge e_x^2 = 0$, $e_x^2 \wedge e_x^1 = -e_x^1 \wedge e_x^2$),

$$\omega(x) \wedge \eta(x)(\xi(x), \zeta(x)) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} (\xi^1(x)\zeta^2(x) - \xi^2(x)\zeta^1(x)) = \sqrt{2}(0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) = \sqrt{2}.$$

Další operací, kterou budeme v dalším výkladu potřebovat, je úžení (kontrakce) diferenciální k -formy vektorovým polem. Z odstavce 12.2.5 známe kontrakci tenzoru vektorem, která fakticky představuje kontrakci tenzorového pole vektorovým polem v pevném bodě x . Definujme operaci přesněji.

Nechť $\xi \in \mathcal{V}(\mathbf{R}^n)$ je vektorové pole. Kontrakcí k -formy ω vektorovým polem ξ nazýváme $(k-1)$ -formu $i_\xi\omega$ definovanou vztahem $(i_\xi\omega)(x) = i_{\xi(x)}\omega(x)$. Kontrakcí vektorovým polem ξ pak rozumíme zobrazení

$$i_\xi : \Lambda_k(\mathbf{R}^n) \ni \omega \longrightarrow i_\xi\omega \in \Lambda_{k-1}(\mathbf{R}^n),$$

definované v libovolném bodě $x \in \mathbf{R}^n$ právě vztahem $(i_\xi\omega)(x) = i_{\xi(x)}\omega(x)$, tj.

$$i_{\xi(x)}\omega(x)(\zeta_1(x), \dots, \zeta_{k-1}(x)) = \omega(x)(\xi(x), \zeta_1(x), \dots, \zeta_{k-1}(x)),$$

kde $\zeta_1(x), \dots, \zeta_{k-1}(x) \in T_x\mathbf{R}^n$ jsou libovolné vektory.

Příklad 12.81: Kontrakce k -formy vektorovým polem

Zvolme 2-formu na \mathbf{R}^n , tj. $\omega \in \Lambda_2(\mathbf{R}^n)$ a vektorové pole $\xi \in \mathcal{V}(\mathbf{R}^n)$. Ve složkách je zapíšeme takto:

$$\omega = \omega_{ij}e_x^i \wedge e_x^j, \quad \xi = \xi^i e_{i,x}, \quad \omega_{ij}, \xi^i \in \Omega(\mathbf{R}^n).$$

Zvolme pevný bod x a vektor $\zeta(x) \in T_x\mathbf{R}^n$. Platí

$$(i_{\xi(x)}\omega(x))(\zeta(x)) = \omega(x)(\xi(x), \zeta(x)) = \omega_{ij}(x)(\xi^i(x)\zeta^j(x) - \xi^j(x)\zeta^i(x)) = (\omega_{ji}(x) - \omega_{ij}(x))\xi^j(x)\zeta^i(x).$$

Uvědomíme-li si, že $\zeta^i(x) = e_x^i(\zeta(x))$, dostaneme

$$i_{\xi(x)}\omega(x) = [\omega_{ji}(x) - \omega_{ij}(x)]\xi^j(x)e_x^i.$$

Opustíme-li nakonec vypisování argumentu x (zápis pevného bodu, v němž se děje vyčíslení), získáme jednoduchý výsledek

$$i_\xi\omega = [(\omega_{ji} - \omega_{ij})\xi^j]e^i = (2\omega_{ji}\xi^j)e^i. \quad (12.138)$$

Poslední výraz je platný v případě, že složky formy ω byly antisymetrizovány, což automaticky předpokládáme. Pro praktické výpočty je velmi výhodné pracovat se vztahem

$$i_\xi\omega = i_\xi(\omega_{ij}e^i \wedge e^j) = [\omega_{ij}e^i(\xi)]e^j - [\omega_{ij}e^j(\xi)]e^i = \omega_{ij}(\xi^i e^j - \xi^j e^i). \quad (12.139)$$

Obecně pro kontrakci k -formy ω vektorovým polem ξ platí, bez psaní argumentu x ,

$$\begin{aligned} i_\xi\omega &= i_\xi(\omega_{i_1\dots i_k}e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = \\ &= \omega_{i_1\dots i_k} \left[(i_\xi e^{i_1})e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k} - (i_\xi e^{i_2})e^{i_1} \wedge e^{i_3} \wedge \dots \wedge e^{i_k} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \dots + (-1)^{k-1} (i_\xi e^{i_k}) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_{k-1}} \Big], \quad (12.140)$$

v pevném bodě x tedy

$$\begin{aligned} (i_\xi \omega)(x) &= \left[\omega_{i_1 \dots i_k}(x) e_x^{i_1}(\xi(x)) \right] e_x^{i_2} \wedge \dots \wedge e_x^{i_k} - \left[\omega_{i_1 \dots i_k}(x) e_x^{i_2}(\xi(x)) \right] e_x^{i_1} \wedge e_x^{i_3} \wedge \dots \wedge e_x^{i_k} + \\ &\quad + \dots + (-1)^{k-1} \left[\omega_{i_1 \dots i_k}(x) e_x^{i_k}(\xi(x)) \right] e_x^{i_1} \wedge \dots \wedge e_x^{i_{k-1}} = \\ &= \left[\omega_{i_1 \dots i_k}(x) \xi^{i_1}(x) \right] e_x^{i_2} \wedge \dots \wedge e_x^{i_k} - \left[\omega_{i_1 \dots i_k}(x) \xi^{i_2}(x) \right] e_x^{i_1} \wedge e_x^{i_3} \wedge \dots \wedge e_x^{i_k} + \\ &\quad + \dots + (-1)^{k-1} \left[\omega_{i_1 \dots i_k}(x) \xi^{i_k}(x) \right] e_x^{i_1} \wedge \dots \wedge e_x^{i_{k-1}}. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že složky $\omega_{i_1 \dots i_k}$ jsou standardně antisymetrické ve všech indexech. Získaný výsledek tak můžeme přepsat pomocí přechíslování indexů ve tvaru

$$(i_\xi \omega)(x) = k \left[\omega_{i_1 \dots i_k}(x) \xi^{i_1}(x) \right] e_x^{i_2} \wedge \dots \wedge e_x^{i_k}$$

a bez vypisování bodu x pak

$$i_\xi \omega = k (\omega_{i_1 \dots i_k} \xi^{i_1}) e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k}. \quad (12.141)$$

Příklad 12.82: Ještě kontrakce

Použití vztahu (12.140) vyzkoušíme na jednoduchém příkladu 3-formy v \mathbf{R}^3 . Definujme ji takto: $\omega = f e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$, kde $f \in \Omega(\mathbf{R}^3)$ je funkce. Pro vektorové pole ξ dostaneme

$$\begin{aligned} i_\xi \omega &= [f e^1(\xi)] e^2 \wedge e^3 - [f e^2(\xi)] e^1 \wedge e^3 + [f e^3(\xi)] e^1 \wedge e^2 = \\ &= f [e^1(\xi) e^2 \wedge e^3 + e^2(\xi) e^3 \wedge e^1 + e^3(\xi) e^1 \wedge e^2] = f (\xi^1 e^2 \wedge e^3 + \xi^2 e^3 \wedge e^1 + \xi^3 e^1 \wedge e^2). \end{aligned}$$

12.3.3 Derivování diferenciálních forem — vnější derivace

S derivováním funkcí již máme značnou zkušenost. Nejen že derivace umíme počítat. Víme také, že parciální derivace funkce informují o tom, „jak rychle“ se mění hodnota funkce podél souřadnicových os, derivace funkce ve směru vektoru \vec{s} zase souvisí s rychlostí změny funkční hodnoty podél přímky s tímto směrovým vektorem. Obojí uplatníme v definicích nových operací derivování — vnější derivace diferenciální formy v tomto a Lieovy derivace v odstavci přespříštím. Pojem vnější derivace se bude možná zdát trochu neobvyklý. Jsme totiž zvyklí na to, že derivace funkcí, jak je známe, jsou zase funkcemi. Čekáme proto možná, že derivace diferenciální k -formy bude zase k -forma. U Lieovy derivace, avizované pro další odstavce, tomu tak skutečně bude. Lieova derivace bude totiž určovat, jak se k -forma mění podél zadaného vektorového pole. Vnější derivace je však operace, která při použití „klasického“ derivování přiřazuje k -formě $(k+1)$ -formu. Hned uvidíme, jak. Nejprve definujeme tuto operaci pro funkce, tj. 0-formy.

Nechť $f \in \Lambda_0(\mathbf{R}^n)$ je diferenciální 0-forma (tj. diferencovatelná funkce). Její *vnější derivací* nazýváme 1-formu df definovanou takto:

$$df(x)(\xi(x)) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \right|_x \xi^i(x) \quad (12.142)$$

pro libovolný bod $x \in \mathbf{R}^n$ a libovolný vektor $\xi(x) \in T_x\mathbf{R}^n$. *Vnější derivací 0-formy* rozumíme zobrazení

$$d : \Lambda_0(\mathbf{R}^n) \ni f \longrightarrow df \in \Lambda_1(\mathbf{R}^n) \quad (12.143)$$

definované vztahem (12.142).

1-formu, kterou jsme přiřadili 0-formě f , jsme definovali pomocí „návodu“ na její vyčíslení v libovolném bodě na libovolném vektorovém argumentu. Zamyslete se, zda vám definiční vzorec něco nepřipomíná. Kdyby totiž byl vektor $\xi(x)$ jednotkový (což má dobrý smysl, neboť v odstavci 12.3.1 jsme se dohodli, že v tečných prostorech budeme pracovat se standardním skalárním součinem vektorů „po složkách“), představovala by pravá strana vztahu (12.142) derivaci funkce f v bodě x ve směru vektoru $\xi(x)$. Nebo také může představovat skalární součin vícerozměrného gradientu funkce f v bodě x s vektorem $\xi(x)$. V případě nové definice vnější derivace funkce však jde o shodu sice významnou, ale přece jen formální. Vnější derivaci funkce totiž chápeme jako zobrazení, které každé (diferencovatelné) funkci přiřazuje 1-formu, nezávisle na bodu a vektorovém argumentu, ve kterých se pak tato forma vyčísľuje. Zatímco je derivace funkce v daném směru závislá na směru derivování, závisí vnější derivace funkce pouze na funkci samé (je zadána pouze Jacobiho maticí této funkce). Hned to uvidíme, uvědomíme-li si, že složka $\xi^i(x)$ vektoru $\xi(x)$ je hodnotou získanou vyčíslením i -tého prvku duální báze v prostoru $T_x^*\mathbf{R}^n$ na vektoru $\xi(x)$, tj. $\xi^i(x) = e_x^i(\xi)$. Vztah (12.142) proto můžeme přepsat ve tvaru

$$df(x)(\xi(x)) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \right|_x e_x^i(\xi(x)).$$

Protože tento vztah platí v daném bodě x pro každý vektor $\xi(x)$, platí pro 1-tenzor $df(x)$ obecně, tj.

$$df(x) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \right|_x e_x^i.$$

A protože platí i pro každý bod $x \in \mathbf{R}^n$, platí obecně pro formu df ,

$$df = D_i f e^i.$$

V posledním vztahu jsme jako $D_i f$ označili i -tý prvek (sloupcové) Jacobiho matice Df funkce f .

12.3. OD ALGEBRY K ANALÝZE: TENZOROVÁ POLE A DIFERENCIÁLNÍ FORMY 241

Formální podobnosti vztahu (12.142) pro vyčíslení vnější derivace funkce s výrazem pro směrovou derivaci využijeme nyní k zavedení vhodnějšího (a také běžně užívaného) označení vektorových polí báze. Vyčísleme vnější derivaci funkce f v bodě x na vektoru báze $e_{i,x}$. Platí

$$df(x)(e_{i,x}) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^j} \right|_x e_x^j(e_{i,x}) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^j} \right|_x \delta_i^j = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \right|_x.$$

Získaný výsledek můžeme interpretovat jako působení operátoru $\frac{\partial}{\partial x^i}$ na funkci f (v bodě x). Využijeme-li analogie se směrovou derivací, můžeme říci, že „derivace funkce f v bodě x ve směru vektoru $e_{i,x}$ je působení operátoru $\frac{\partial}{\partial x^i}$ na funkci f “ a označit

$$e_{i,x} = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x, \quad \text{resp.} \quad e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Přejdeme-li k tomuto označení (které není nové, neboť jsme je použili už v druhém dílu v příkladu 9.67, strana 570), vyhneme se riziku záměny vektorových polí e_i s vektory e_i z algebry. Podobně vhodné označení zvolíme pro vektorová pole duálních bází na základě výsledku následujícího příkladu.

Příklad 12.83: Diferenciální formy duálních bází

Určíme vnější derivaci 0-formy představující i -tou souřadnicovou funkci $x^i : \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow x^i(x) = x^i \in \mathbf{R}$. V bodě x platí

$$dx^i(x) = \left. \frac{\partial x^i(x)}{\partial x^j} \right|_x e_x^j = \delta_j^i e_x^j = e_x^i.$$

Při tomto označení a při označení vektorů $e_{i,x}$, resp. vektorových polí e_i jako operátorů parciálních derivací můžeme psát

$$dx^i(x) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_x \right) = \delta_j^i, \quad \text{nebo obecně} \quad dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i.$$

V příkladu 12.83 jsme snadno získali „návod na označení“ vektorových polí duálních bází:

$$e_x^i = dx^i(x) \quad \text{pro libovolný bod } x \in \mathbf{R}^n, \text{ a obecně} \quad e^i = dx^i. \quad (12.144)$$

Vyjádření diferenciální k -formy ω ve složkách má při tomto označení velmi jednoduchý a sympatický tvar

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Nyní je vše připraveno pro zavedení pojmu vnější derivace k -formy obecně.

Nechť $\omega \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n)$ je diferenciální k -forma

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Její *vnější derivaci* nazýváme $(k+1)$ -formu $d\omega$ definovanou takto:

$$d\omega = d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (12.145)$$

Vnější derivaci k -forem, $k = 1, 2, \dots$, rozumíme zobrazení

$$d : \Lambda_k(\mathbf{R}^n) \ni \omega \longrightarrow d\omega \in \Lambda_{k+1}(\mathbf{R}^n) \quad (12.146)$$

definované vztahem (12.145).

Věta 12.26 (Vlastnosti vnější derivace): *Nechť $\omega, \eta \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n)$, $\chi \in \Lambda_l(\mathbf{R}^n)$, jsou libovolné diferenciální formy, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ libovolná reálná čísla. Platí*

$$\begin{aligned} d(\alpha\omega + \beta\eta) &= \alpha d\omega + \beta d\eta, \\ d(\omega \wedge \chi) &= d\omega \wedge \chi + (-1)^k \omega \wedge d\chi, \\ d(d\omega) &= 0, \quad \text{značíme } d^2\omega = 0. \end{aligned} \quad (12.147)$$

Dokázat všechny tyto vlastnosti je velmi jednoduché. Vzhledem k tomu, že vnější derivace forem je definována přímo pomocí jejich vyčíslení v daném (byť libovolně zvoleném) bodě, není u první vlastnosti v podstatě co dokazovat. Stačí napsat levou i pravou stranu pro daný bod x a porovnat, jako bychom pracovali s tenzory. Důkaz první vlastnosti ponecháme do cvičení jako nejjednodušší, dokážeme další dvě vlastnosti.

Pro důkaz druhé vlastnosti rozepíšeme obě formy do složek, tj.

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \chi = \chi_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l},$$

kde $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, $1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n$. Platí

$$\begin{aligned} \omega \wedge \chi &= (\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (\chi_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) = \\ &= (\omega_{i_1 \dots i_k} \chi_{j_1 \dots j_l}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}, \\ d(\omega \wedge \chi) &= d(\omega_{i_1 \dots i_k} \chi_{j_1 \dots j_l}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}. \end{aligned}$$

Dále je

$$d(\omega_{i_1 \dots i_k} \chi_{j_1 \dots j_l}) = \frac{\partial (\omega_{i_1 \dots i_k} \chi_{j_1 \dots j_l})}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \left(\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} \chi_{j_1 \dots j_l} + \omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial \chi_{j_1 \dots j_l}}{\partial x^\alpha} \right) dx^\alpha.$$

Dosadíme-li tento výraz do vztahu pro $d(\omega \wedge \chi)$ a vhodně přeuspořádáme činitele ve vnějším součinu (přitom hlídáme, abychom při každém přehození pořadí dvou sousedních 1-forem báze změnili znaménko, neboť $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$), dostaneme

$$d(\omega \wedge \chi) = \left(\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \wedge (\chi_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) + \\ + (-1)^k (\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge \left(\frac{\partial \chi_{j_1 \dots j_l}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \right).$$

V druhém součtu jsme formu dx^α „přehodili“ za vnější součin $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, takže jsme provedli k znaménkových změn. Odtud už je dokazované pravidlo derivování vnějšího součinu forem vidět, $d(\omega \wedge \chi) = d\omega \wedge \chi + (-1)^k \omega \wedge d\chi$. Vlastnost druhé vnější derivace je velmi přirozená. Vyplývá ze symetrie (záměnnosti) smíšených parciálních derivací funkcí druhého řádu a z antisymetrie („anti-záměnnosti“, tj. záměnnosti se změnou znaménka) vnějšího součinu. Ale dokážeme ji podrobně. Opět vyjádříme diferenciální formu ω ve složkách a budeme ji postupně dvakrát derivovat. Platí

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad d\omega = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \\ d^2\omega = \left(\frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\beta \wedge dx^\alpha \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Abychom si uvědomili vliv symetrie parciálních derivací a antisymetrie vnějšího součinu, upravíme část mnohonásobného součtu vyjadřujícího formu $d^2\omega$ pro daný výběr indexů i_1, \dots, i_k :

$$\frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ = \left(\frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^2 \partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^1 \partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \dots \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ = \left[\left(\frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^2 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^1 \partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \dots \right] \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0.$$

Součet v závorce se totiž „rozpadne“ na součet dvojic vzájemně se kompenzujících výrazů.

Skutečnost, že dvojí aplikace operátoru vnější derivace na kteroukoli diferenciální k -formu dává nulovou $(k+2)$ -formu, vede k dalším zajímavým a důležitým pojmům.

Předpokládejme, že diferenciální k -forma ω , $0 \leq k \leq n-1$, je definována na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$. Tato forma se nazývá *uzavřená* na D , je-li $d\omega = 0$ na D . k -forma η , $1 \leq k \leq n$, definovaná na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *exaktní* na D , jestliže existuje taková $(k-1)$ -forma χ definovaná na D , že na D platí $\eta = d\chi$.

Hned je vidět, že každá exaktní forma na D je také uzavřená na D . Je-li totiž $\eta = d\chi$ pro nějakou formu χ , je $d\eta = d^2\chi = 0$. Zajímavější je opačný problém: jak rozhodnout, zda forma uzavřená na D je na D také exaktní. Rozdíl obou pojmů ukážeme na příkladu.

Poznamenejme, že vnější derivace n -formy je nulová z *principu* (je to totiž $(n+1)$ -forma), a že 0-forma nemůže být exaktní.

Příklad 12.84: Uzavřené a exaktní formy

Uvažujme o diferenciální 1-formě

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

definované v celé euklidovské rovině \mathbf{R}^2 s výjimkou počátku soustavy souřadnic $O = (0, 0)$, tj. na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Vypočteme její vnější derivaci. Platí

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \wedge dx + d\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \wedge dy = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) dy\right] \wedge dx + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy\right] \wedge dy. \end{aligned}$$

Uvědomíme-li si, že vzhledem k antisymetrii vnějšího součinu platí $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ a $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$, upravíme $d\omega$ do tvaru

$$d\omega = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right] dx \wedge dy.$$

Stačí už jen vypočítat parciální derivace a dosadit:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \implies d\omega = 0.$$

Zadaná forma ω je na množině D , která je jejím definičním oborem, uzavřená. Je však také exaktní? Abychom to zjistili, hledejme 0-formu, tj. funkci $f = f(x, y)$, pro niž by platilo $df = \omega$. Parciální derivace takové funkce podle proměnných x a y by musely být rovny příslušným složkám formy ω ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

S výpočtem se nemusíme ani namáhat, vrátíme-li se k příkladům 9.41 a 9.42 v druhém dílu (strany 506 až 512). Zjistíme tam, že uvedeným podmínkám vyhovují například funkce

$$f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}, \quad \text{nebo} \quad f(x, y) = \arccos \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Žádná z nich však nespĺňuje podmínku $df = \omega$ na celé množině D . Také tato skutečnost je podrobně rozebrána v příkladech 9.41 a 9.42. Hledání 0-formy f , jejíž vnější derivace je rovna uzavřené 1-formě ω , představuje stejnou úlohu jako hledání kmenové funkce k úplnému diferenciálu. A právě tu jsme řešili v příkladech 9.41 a 9.42.

Příklad ukazuje, že ne každá uzavřená forma na množině D musí být na D také exaktní. Problém ovšem není v samotných podmínkách kladených na složky formy, ale v definičním oboru. Vzpomínáte si, že „neproblematickými“ definičními obory v případě hledání kmenové funkce k úplnému diferenciálu byly jednoduše souvislé oblasti? Totéž platí pro případ diferenciálních forem.

Je-li diferenciální k -forma, $1 \leq k \leq n - 1$, uzavřená na jednoduše souvislé oblasti $D \subset \mathbf{R}^n$, pak je na D exaktní.

Další příklady uzavřených forem, důležité pro fyzikální aplikace, uvidíme v odstavci 12.3.6.

12.3.4 Zpětný obraz (pullback) diferenciálních forem čili „stáhni zpět“

Zpětný obraz diferenciálních forem je zobrazení zcela zásadního významu pro definici integrálu, v níž formy figurují jako integrované objekty. Umožňuje „převádět“ k -formy operující v tečných prostorech euklidovských prostorů \mathbf{R}^m na k -formy operující v tečných prostorech euklidovských prostorů \mathbf{R}^n . Takový převod je zprostředkován (indukován) zobrazeními typu $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Vzhledem k tomu, že v pevně zvoleném bodě x topologického euklidovského prostoru \mathbf{R}^n se diferenciální k -forma „stává“ kovariantním k -tenzorem, který se vyčísluje na k vektorových argumentech náležejících do tečného prostoru $T_x \mathbf{R}^n$ v tomto bodě, zdá se, že by zobrazení euklidovských prostorů mělo „naindukovat“ také odpovídající zobrazení tečných prostorů. A tak to také je.

Předpokládejme, že

$$f : \mathbf{R}^n \ni x \longrightarrow y = f(x) \in \mathbf{R}^m$$

je diferencovatelné zobrazení o rovnicích $y^\alpha = y^\alpha f(x^i)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \alpha \leq m$, tj.

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1 f(x^1, \dots, x^n), \\ y^2 &= y^2 f(x^1, \dots, x^n), \\ &\vdots \\ y^m &= y^m f(x^1, \dots, x^n). \end{aligned} \tag{12.148}$$

Zobrazení

$$T_x f : T_x \mathbf{R}^n \ni \xi(x) \longrightarrow \zeta(f(x)) = T_x f(\xi(x)) \in T_{f(x)} \mathbf{R}^m,$$

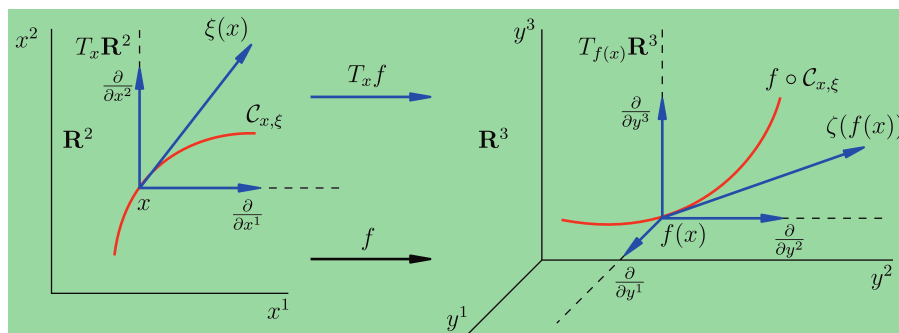
$$\zeta^\alpha(f(x)) = \left. \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \right|_x \xi^i(x), \quad \text{tj.} \quad (12.149)$$

$$(\zeta^1 \ \dots \ \zeta^m)_{f(x)} = (\xi^1 \ \dots \ \xi^n)_x Df(x), \quad (12.150)$$

kde $Df(x)$ je Jacobiho matice zobrazení f v bodě x , se nazývá *tečné zobrazení k zobrazení f v bodě x* .

Pozn. 1: Vztah (12.150) znamená maticové násobení. Řádková matice m složek vektoru $\zeta(f(x))$ je součinem řádkové matice n složek vektoru $\xi(x)$ a Jacobiho matice zobrazení f v bodě x . I když je tato definice vcelku logická, přece jen se může zdát poněkud formální. Má však velmi názorný geometrický význam, který vystihuje obrázek 12.38.

Pozn. 2: Značení složek zobrazení $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ symboly $y^1 f(x^1, \dots, x^n), \dots, y^m f(x^1, \dots, x^n)$ se někomu možná jeví zbytečně složité. Stačilo by přece $y^\alpha(x^i)$. Zkrácené označení spočívající v tom, že nebudeme vypisovat všechny proměnné, budeme využívat, ale ve tvaru $y^\alpha f(x^i)$. Proč však „komplikovat“ zápis písmenem f ? Zápis $y^\alpha f(x^1, \dots, x^n)$ specifikuje, že se jedná o složku y^α zobrazení f , která je funkcí proměnných x^1, \dots, x^n . Může se totiž stát, že budeme pracovat s více zobrazeními $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, například f, g , atd., a bude třeba složky jednotlivých zobrazení rozlišit. Je proto vhodné si na označení zvyknout.



Obrázek 12.38 Tečné zobrazení.

Vektory jsme zavedli v odstavci 12.3.1 jako třídy ekvivalentních křivek. Představme si libovolného reprezentanta třídy definující vektor $\xi(x) \in T_x \mathbf{R}^n$, tj. nějakou křivku $\mathcal{C}_{x,\xi}$. Pro složky vektoru $\xi(x) = \dot{\mathcal{C}}_{x,\xi}$ platí

$$\xi^i(x) = \left. \frac{dx^i \mathcal{C}_{x,\xi}(t)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Obrazem křivky $\mathcal{C}_{x,\xi}$ při zobrazení f je křivka

$$f \circ \mathcal{C}_{x,\xi} : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \longrightarrow f \circ \mathcal{C}_{x,\xi}(t) = (y^1 f \circ \mathcal{C}_{x,\xi}(t), \dots, y^m f \circ \mathcal{C}_{x,\xi}(t)) \in \mathbf{R}^m,$$

$$y^\alpha f \circ \mathcal{C}_{x,\xi}(t) = y^\alpha f(x^1 \mathcal{C}_{x,\xi}(t), \dots, x^n \mathcal{C}_{x,\xi}(t)),$$

kteřá leží v prostoru \mathbf{R}^m a prochází bodem $y = f(x)$. Stává se tak reprezentantem třídy křivek procházejících tímto bodem a majících kontakt prvního řádu. Tato třída představuje vektor $\zeta(f(x))$ o složkách

$$\zeta^\alpha(f(x)) = \left. \frac{dy^\alpha f \circ \mathcal{C}_{x,\xi}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial y^\alpha f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} \right|_x \cdot \left. \frac{dx^i \mathcal{C}_{x,\xi}(t)}{dt} \right|_{t=0},$$

$$\zeta^\alpha(f(x)) = \left. \frac{\partial y^\alpha f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} \right|_x \xi^i(x).$$

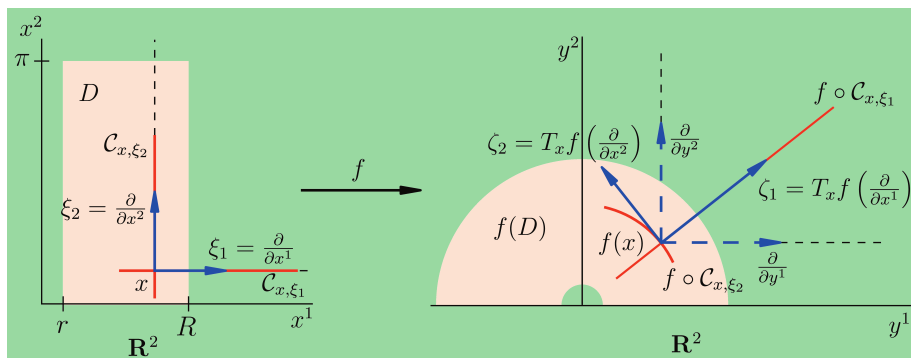
Při výpočtu jsme nepoužili nic, co bychom již neznali. Aplikovali jsme pouze pravidlo pro derivování složených funkcí $y^\alpha f \circ \mathcal{C}_{x,\xi}(t)$ s vnitřními složkami $x^i \mathcal{C}_{x,\xi}(t)$, $1 \leq i \leq n$, které jsou funkcemi jediné proměnné, parametru t , a vnější složkou $y^\alpha f(x^1, \dots, x^n)$, která je funkcí n proměnných x^1, \dots, x^n , souřadnic bodu $x \in \mathbf{R}^n$. Jednoduše řečeno, tečné zobrazení je přirozeným způsobem *indukováno* zobrazením f tak, že zobrazí tečný vektor ke křivce \mathcal{C} vedené v prostoru \mathbf{R}^n bodem x na tečný vektor k obrazu $f \circ \mathcal{C}$ této křivky při zobrazení f , ležícímu v prostoru \mathbf{R}^m a procházejícímu, jak také jinak, bodem $f(x)$.

Pozn. 3: A ještě dalším způsobem bychom mohli chápat složky vektoru $\zeta(f(x)) = T_x f(\xi(x))$. Jeho složka $\zeta^\alpha(f(x))$ je derivací funkce $y^\alpha f(x)$ v bodě x ve směru vektoru $\xi(x)$, pokud bychom pojem směrové derivace zobecnili i na vektory, které nejsou nutně jednotkové. V dalších odstavcích uvidíme, že takové zobecnění má dobrý smysl.

Pozn. 4: Definici tečného zobrazení jsme pro jednoduchost formulovali pro případ, že definičním oborem výchozího zobrazení f je celý euklidovský prostor \mathbf{R}^n . To nemusí být vždy splněno. Časté jsou situace, kdy je zobrazení f definováno na otevřených podmnožinách euklidovského prostoru. Je-li definičním oborem zobrazení f otevřená množina $D \subset \mathbf{R}^n$, stačí v definici zaměnit \mathbf{R}^n za D . Touto záměnou nevzniká žádná potíž. Díky otevřenosti množiny D je Jacobiho zobrazení reprezentované maticí parciálních derivací funkcí $y^\alpha f(x^1, \dots, x^n)$ podle jednotlivých proměnných definováno ve všech bodech množiny D standardním způsobem. Otázkou je, co se stane, když definičním oborem zobrazení f bude libovolná množina A . Pak zjistíme, zda existuje otevřená množina $D \subset \mathbf{R}^n$ obsahující množinu A a diferencovatelné zobrazení $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbf{R}^m$, jehož restrikce na množinu A splývá se zobrazením f . Zobrazení \tilde{f} nazýváme *rozšířením* zobrazení f na množinu D a v bodech množiny A definujeme $T_x f = T_x \tilde{f}$. Takové úvahy mají samozřejmě rozumný smysl pro rozumné situace, například pro kompaktní množiny A , které bývají integračními obory velmi často. Pro nějaké „divoké“ množiny, které třeba ani integračními obory být nemohou, lze definici tečného zobrazení pomocí rozšíření zobrazení f také použít, bude však samoúčelná.

Příklad 12.85: Tečné zobrazení prakticky

V tomto příkladu ukážeme praktické výpočty pomocí tečného zobrazení. Uvidíte, že i když možná o tečném zobrazení čtete poprvé, nebudete se výsledkům divit. Názorně to vidíme na obrázku 12.39.



Obrázek 12.39 Tečné zobrazení prakticky.

Zvolme otevřenou množinu $D = (r, R) \times (0, \pi) \subset \mathbf{R}^2$ a definujme na ní zobrazení

$$f : D \ni (x^1, x^2) \longrightarrow (y^1 f(x^1, x^2), y^2 f(x^1, x^2)) \in \mathbf{R}^2$$

rovnícemi

$$y^1 f(x^1, x^2) = x^1 \cos x^2, \quad y^2 f(x^1, x^2) = x^1 \sin x^2.$$

Jacobiho matice je

$$Df(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1 f}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2 f}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1 f}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2 f}{\partial x^2} \end{pmatrix} \Big|_{x=(x^1, x^2)} = \begin{pmatrix} \cos x^2 & \sin x^2 \\ -x^1 \sin x^2 & x^1 \cos x^2 \end{pmatrix}.$$

Pro tečný obraz $\zeta(x) = T_x f(\xi(x))$ vektoru

$$\xi(x) = \xi^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x + \xi^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x$$

dostaneme

$$\zeta(f(x)) = \left(\frac{\partial y^1 f}{\partial x^1} \Big|_x \xi^1(x) + \frac{\partial y^1 f}{\partial x^2} \Big|_x \xi^2(x) \right) \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_{f(x)} + \left(\frac{\partial y^2 f}{\partial x^1} \Big|_x \xi^1(x) + \frac{\partial y^2 f}{\partial x^2} \Big|_x \xi^2(x) \right) \frac{\partial}{\partial y^2} \Big|_{f(x)}.$$

Výsledek zapišeme pro přehlednost zkráceně, bez formálního vypisování bodů x a $f(x)$:

$$\zeta = (\xi^1 \cos x^2 - \xi^2 x^1 \sin x^2) \frac{\partial}{\partial y^1} + (\xi^1 \sin x^2 + \xi^2 x^1 \cos x^2) \frac{\partial}{\partial y^2}.$$

Pro lepší představu o přiřazení vektorů ζ vektorům ξ vyčíslíme obrazy vektorů $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$ a $\xi_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}$. Stačí jen do vztahu pro ζ dosadit složky $\xi_1 = (1, 0)$, $\xi_2 = (0, 1)$ a dostaneme složky vektorů ζ_1 a ζ_2 :

$$\zeta_1 = (\cos x^2, \sin x^2), \quad \zeta_2 = (-x^1 \sin x^2, x^1 \cos x^2).$$

Jestli vám získané vztahy zatím nic neříkají, zaměňte třeba označení (x^1, x^2) za (ϱ, φ) a označení (y^1, y^2) za (x, y) , prohlédněte si pořádně obrázek 12.39 a srovnajte jej s obrázkem 5.9 v druhém dílu na straně 112.

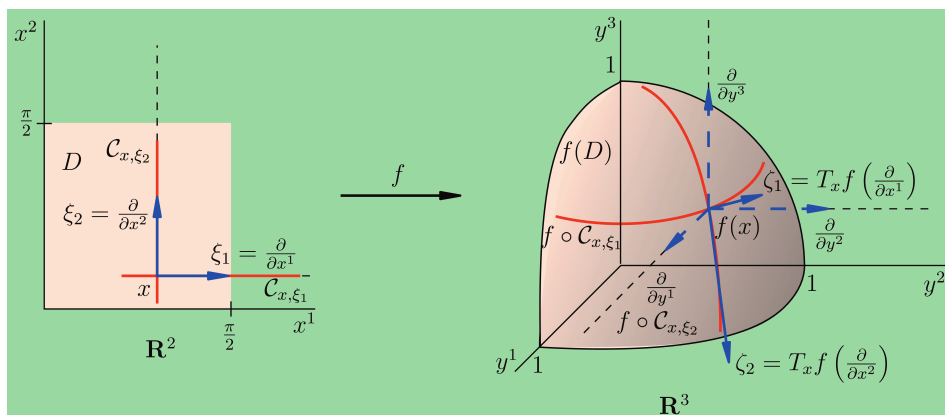
A ještě jedna typická situace, znázorněná na obrázku 12.40: Zvolme otevřenou množinu $D = (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbf{R}^2$ a zobrazení

$$f : D \ni x = (x^1, x^2) \longrightarrow f(x) = (y^1 f(x^1, x^2), y^2 f(x^1, x^2), y^3 f(x^1, x^2)) \in \mathbf{R}^3$$

12.3. OD ALGEBRY K ANALÝZE: TENZOROVÁ POLE A DIFERENCIÁLNÍ FORMY 249

definujme rovnicemi

$$y^1 f(x^1, x^2) = \cos x^1 \sin x^2, \quad y^2 f(x^1, x^2) = \sin x^1 \sin x^2, \quad y^3 f(x^1, x^2) = \cos x^2.$$



Obrázek 12.40 Tečné zobrazení prakticky — ještě jednou.

Ze zadání je zřejmé, že proměnnými x^1 a x^2 jsou azimutální úhel φ a sférický úhel ϑ kulových souřadnic (kapitola 5). Obrazem množiny D je osmina jednotkové kulové plochy bez okrajových kruhových oblouků, ležící v prvním oktantu. Jacobiho matice je

$$Df(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1 f}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2 f}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3 f}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1 f}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3 f}{\partial x^2} \end{pmatrix} \Big|_{x=(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} -\sin x^1 \sin x^2 & \cos x^1 \sin x^2 & 0 \\ \cos x^1 \cos x^2 & \sin x^1 \cos x^2 & -\sin x^2 \end{pmatrix}.$$

Tak třeba pro hodnoty $x^1 = \varphi = \frac{\pi}{3}$ a $x^2 = \vartheta = \frac{\pi}{6}$ dostaneme

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad Df\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

První řádek Jacobiho matice představuje složky vektoru $\zeta_1(f(x)) = T_x f\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x\right)$ (tečný vektor k „geografické rovnoběžce“) a druhý řádek složky vektoru $\zeta_2(f(x)) = T_x f\left(\frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x\right)$ (tečný vektor ke „geografickému poledníku“) v bázi $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial y^2}, \frac{\partial}{\partial y^3}\right)_{f(x)}$. Velikosti těchto vektorů jsou $|\zeta_1(f(x))| = \sin x^2$, $|\zeta_2(f(x))| = 1$.

V příkladu 12.85 jsme se mohli přesvědčit, že tečné zobrazení indukované zobrazením f euklidovských prostorů není nic, s čím bychom se již nesetkali. Funguje přesně tak, jak jsme zacházeli s tečnými vektory k souřadnicovým křivkám v kapitole 5. Rozdíl je pouze v tom, že jsme nyní podložili názornou představu i formálně, korektní matematickou definicí.

Všechny „přípravné práce“ pro definici zpětného obrazu forem jsou provedeny a můžeme ji rovnou formulovat.

Nechť $D \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a

$$f : D \ni x \longrightarrow y = f(x) \in \mathbf{R}^m$$

je diferencovatelné zobrazení o rovnicích $y^\alpha = y^\alpha f(x^i)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \alpha \leq m$, tj.

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1 f(x^1, \dots, x^n), \\ y^2 &= y^2 f(x^1, \dots, x^n), \\ &\vdots \\ y^m &= y^m f(x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Nechť ω je k -forma, $1 \leq k \leq m$, definovaná na otevřené množině $V \subset \mathbf{R}^m$ obsahující obraz $f(D)$ množiny D zobrazením f . Zpětným obrazem neboli pullbackem formy ω indukovaným zobrazením f rozumíme k -formu η definovanou na množině D a splňující rovnost

$$\eta(x)(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) = \omega(f(x))(T_x f(\xi_1(x)), \dots, T_x f(\xi_k(x))) \quad (12.151)$$

pro každý bod $x \in D$ a každý soubor vektorů $\xi_1(x), \dots, \xi_k(x) \in T_x \mathbf{R}^n$. Značíme $\eta = f^* \omega$. Pullbackem 0-formy ω rozumíme 0-formu $f^* \omega = \omega \circ f$.

Zobrazení

$$f^* : \Lambda_k(\mathbf{R}^m) \ni \omega \longrightarrow f^* \omega \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n), \quad 0 \leq k \leq m, \quad (12.152)$$

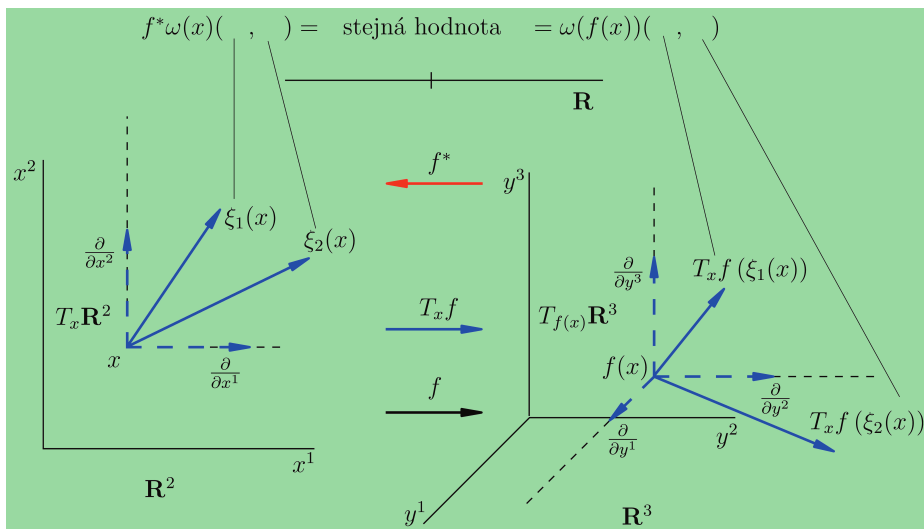
se nazývá zpětný obraz (pullback) diferenciálních forem indukovaný zobrazením f .

Pozn.: Pokud by definičním oborem zobrazení f , popřípadě formy ω , byla jiná množina než otevřená, můžeme použít rozšíření definičního oboru zobrazení f , popřípadě formy ω , na otevřenou množinu, jak je to popsáno v poznámce 4 před příkladem 12.85.

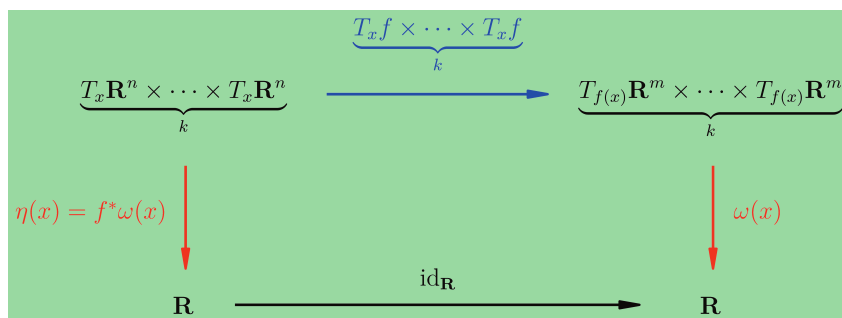
Definice zpětného obrazu (pullbacku) znamená že k -tenzor $\eta(x)$, který je obrazem bodu $x \in \mathbf{R}^n$ k -formou $\eta = f^* \omega$, a operuje tedy na tečném prostoru $T_x \mathbf{R}^n$ k \mathbf{R}^n v bodě x , přiřadí libovolné uspořádané množině k vektorů $(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x))$ z tohoto tečného prostoru k \mathbf{R}^n stejné reálné číslo, jaké přiřadí k -tenzor $\omega(f(x))$ (obraz bodu $f(x) \in \mathbf{R}^m$ k -formou ω) uspořádané množině tečných obrazů $(T_x f(\xi_1(x)), \dots, T_x f(\xi_k(x)))$ těchto vektorů. Pro 2-formy to schematicky znázorňuje obrázek 12.41.

Jiným grafickým znázorněním a pomůckou pro správnou interpretaci pullbacku je komutativní diagram na obrázku 12.42.

Označení $T_x f \times \dots \times T_x f$ v obrázku 12.42 znamená, že každé uspořádané k -tici $(\xi_1(x), \dots,$



Obrázek 12.41 K interpretaci pullbacku — 2-formy.



Obrázek 12.42 K interpretaci pullbacku — komutativní diagram.

$\xi_k(x) \in T_x \mathbf{R}^n \times \dots \times T_x \mathbf{R}^n$ je přiřazena uspořádaná k -tice tečných obrazů vektorů $\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)$, tj. $(T_x f(\xi_1(x)), \dots, T_x f(\xi_k(x))) \in T_{f(x)} \mathbf{R}^m \times \dots \times T_{f(x)} \mathbf{R}^m$.

Příklad 12.86: Pullback 1-forem báze

Zkusme přímo z definice vypočítat nejjednodušší příklad zpětného obrazu: zpětný obraz 1-formy báze $dy^\alpha \in \Lambda_1(\mathbf{R}^m)$, $1 \leq \alpha \leq m$, zobrazením $f : D \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}^m$. Jako obvykle $D \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $f(x) = (y^1 f(x^1, \dots, x^n), \dots, y^m f(x^1, \dots, x^n))$. Zvolme bod $x \in \mathbf{R}^n$ a vektor $\xi(x) \in T_x \mathbf{R}^n$ libovolně. Podle definice zpětného obrazu platí

$$(f^* dy^\alpha)(x)(\xi(x)) = dy^\alpha(f(x))(T_x f(\xi(x))).$$

Složky vektoru $\zeta(f(x)) = T_x f(\xi(x))$ jsou podle vztahu (12.149)

$$\zeta^\alpha(f(x)) = \left. \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \right|_x \xi^i(x).$$

Tenzor $dy^\alpha(f(x))$ přiřazuje vektoru $\zeta(f(x)) \in T_{f(x)}\mathbf{R}^m$ jeho α -tou složku, proto

$$(f^* dy^\alpha)(x)(\xi(x)) = \left. \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \right|_x \xi^i(x).$$

i -tou složku vektoru $\xi(x)$ však můžeme napsat ve tvaru $dx^i(x)(\xi(x))$. Odtud

$$(f^* dy^\alpha)(x)(\xi(x)) = \left. \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \right|_x dx^i(x)(\xi(x)).$$

Získaný vztah platí pro *libovolný bod* x definičního oboru zobrazení f a *libovolný vektor* $\xi(x)$ z tečného prostoru v tomto bodě. Platí tedy pro zobrazení jako taková, což znamená, že formy vystupující na jeho levé a pravé straně jsou si rovny. Přepíšeme proto vztah tak, že vypustíme psaní bodu x a vektoru $\xi(x)$:

$$f^* dy^\alpha = \frac{\partial y^\alpha f}{\partial x^i} dx^i, \quad (f^* dy^1 \dots f^* dy^m) = (dx^1 \dots dx^n) Df. \quad (12.153)$$

Druhý zápis ve vztahu (12.153) umožňuje vyjádřit formy $f^* dy^\alpha$ „souhrnně“ pomocí formálního maticového násobení.

V následující větě uvedeme vlastnosti zpětného obrazu forem.

Věta 12.27 (Vlastnosti zpětného obrazu): *Nechť $D \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f : D \rightarrow \mathbf{R}^m$ diferencovatelné zobrazení. Předpokládejme, že na otevřené množině $V \subset \mathbf{R}^m$, pro niž je $f(D) \subset V$, jsou definovány k -formy $\omega_1, \omega_2, \omega$ a l -forma η , a dále nechtě $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$ jsou libovolné skaláry. Platí*

$$f^*(\beta\omega_1 + \gamma\omega_2) = \beta f^*\omega_1 + \gamma f^*\omega_2, \quad (12.154)$$

tj. zobrazení f^ je lineární,*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta, \quad (12.155)$$

$$f^* d\omega = df^*\omega. \quad (12.156)$$

Dokázat první dvě vlastnosti přímo z definice je jednoduché, proto oba důkazy ponecháme pro cvičení a zaměříme se na třetí vlastnost. (V důkazu budeme důsledně vypisovat argumenty zúčastněných zobrazení, což sice umožní pochopit výpočty, je to však poněkud méně přehledné, než bez vypisování argumentů. Méně trpěliví čtenáři, kteří si řeknou, že vlastnosti zpětného obrazu popisované ve větě jsou tak jednoduché, že jim jistě lze věřit, mohou důkaz přeskočit a přejít rovnou k praktickým příkladům v závěru odstavce — příklad 12.89 a následující.)

Vztah (12.156) zvláště dokážeme pro 0-formy. Jako 0-formy jsme totiž dodefinovali funkce. Nejsou to tedy formy „v pravém slova smyslu“. Důkazy proto pro ně musíme vést odděleně.

12.3. OD ALGEBRY K ANALÝZE: TENZOROVÁ POLE A DIFERENCIÁLNÍ FORMY 253

Pozn.: Uvědomte si, že na základě platnosti vztahu (12.155) lze vztah (12.154) zobecnit i na případ, kdy β a γ budou funkce na V ,

$$f^*(\beta\omega_1 + \gamma\omega_2) = (\beta \circ f)f^*\omega_1 + (\gamma \circ f)f^*\omega_2.$$

Předpokládejme, že $F : V \ni y \rightarrow F(y) \in \mathbf{R}$ je diferencovatelná funkce na množině V . Pak podle definice pullbacku je $f^*F = F \circ f$. Vypočteme levou i pravou stranu vztahu (12.156). V obecném bodě x platí

$$\begin{aligned} f^* dF &= f^* \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha} dy^\alpha \right) = f^* \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha} \right) f^* dy^\alpha = \left(\frac{\partial F}{\partial y^\alpha} \circ f \right) \frac{\partial y^\alpha f}{\partial x^i} dx^i \implies \\ &\implies f^* dF|_x = \left. \frac{\partial F(y)}{\partial y^\alpha} \right|_{f(x)} \left. \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \right|_x dx^i. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme užili jednak vlastnost (12.155) zpětného obrazu, jednak vztah (12.153) pro $f^* dy^\alpha$, který jsme odvodili v příkladu 12.86. Nyní vypočteme pravou stranu rovnosti (12.156). Zde využijeme pravidlo pro derivaci složené funkce:

$$df^*F = d(F \circ f) = \frac{\partial F \circ f}{\partial x^i} dx^i \implies df^*F|_x = \left. \frac{\partial F(y)}{\partial y^\alpha} \right|_{f(x)} \left. \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \right|_x dx^i.$$

Získali jsme stejný výraz jako při úpravě levé strany vztahu (12.156), a tím jsme jej dokázali. Zatím však jen pro 0-formu. Z příkladu 12.86 máme také důkaz pro prvky báze 1-forem. Pro obecnou 1-formu provedeme důkaz (formou příkladu) rovněž z definice, abychom se s ní dobře sžili. Nejprve však provedeme „přípravný“ a zároveň „cvičný“ krok: vypočteme pullback obecné 1-formy indukovaný zobrazením f .

Příklad 12.87: Zpětný obraz obecné 1-formy

Zapišme 1-formu $\omega \in \Lambda_1(\mathbf{R}^m)$ a přílušný 1-tenzor $\omega(y) \in \Lambda_1(T_y\mathbf{R}^m)$ ve složkách:

$$\omega = \omega_\alpha dy^\alpha, \quad \omega(y) = \omega_\alpha(y) dy^\alpha(y).$$

Pozn.: Uvědomujete si dobře významový rozdíl těchto zápisů? Pro zopakování si jej připomeňme (viz též podrobnou poznámku za definicí k -formy). V souvislosti s naším důkazem je forma $\omega \in \Lambda_1(\mathbf{R}^m)$ zobrazení

$$\omega : \mathbf{R}^m \ni y \rightarrow \omega(y) \in \Lambda_1(T_y\mathbf{R}^m),$$

přiřazující bodům euklidovského prostoru \mathbf{R}^m 1-tenzory, zatímco

$$\omega(y) : T_y\mathbf{R}^m \ni \zeta(y) \rightarrow \omega(y)(\zeta(y)) \in \mathbf{R}$$

je 1-tenzor v bodě y , tj. zobrazení přiřazující jednotlivým vektorovým argumentům $\zeta(y)$ z tečného prostoru k \mathbf{R}^m v bodě y reálná čísla.

254 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

Pokračujeme v důkazu. Vyčíslíme formu ω v bodě $y = f(x) \in \mathbf{R}^m$ na vektoru $\zeta(f(x)) \in T_{f(x)}\mathbf{R}^m$. (Úmyslně vypisujeme všechny argumenty zcela důsledně.) Platí

$$\omega(f(x))(\zeta(f(x))) = \omega_\alpha(f(x)) \, dy^\alpha(f(x))(\zeta(f(x))) = (\omega_\alpha \circ f)(x) \zeta^\alpha(f(x)).$$

Je-li vektor $\zeta(f(x))$ tečným obrazem vektoru $\xi(x) \in T_x\mathbf{R}^n$, $\xi(x) = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$, pak

$$\zeta^\alpha(f(x)) = \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \Big|_x \xi^i(x).$$

Dosazením do připraveného „polotovaru“ $\omega(f(x))(\zeta(f(x)))$ dostaneme

$$\omega(f(x))(\zeta(f(x))) = \omega(f(x))(T_x f(\xi(x))) = (\omega_\alpha \circ f)(x) \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \Big|_x \xi^i(x).$$

Zapíšeme-li složku $\xi^i(x)$ vektoru $\xi(x)$ (vektor v bodě x) jako hodnotu prvku $dx^i(x)$ báze 1-tenzorů v bodě $x \in \mathbf{R}^n$ na vektoru $\xi(x)$, jako jsme to udělali v příkladu 12.86, dostaneme

$$\omega(f(x))(\zeta(f(x))) = \omega(f(x))(T_x f(\xi(x))) = (\omega_\alpha \circ f)(x) \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \Big|_x dx^i(x)(\xi(x)).$$

Podle definice pullbacku je $f^*\omega(x)(\xi) = \omega(f(x))(T_x f(\xi(x)))$. Označme $\eta = f^*\omega$ a zapišme tenzor $\eta(x)$ ve složkách (které zatím neznáme, ale nepochybně je určíme z definice pullbacku):

$$\eta(x) = \eta_i(x) dx^i(x) \implies \eta(x)(\xi(x)) = \eta_i(x) dx^i(x)(\xi(x)).$$

Srovnáním výrazů pro $\eta(x)(\xi(x))$ a $\omega(f(x))(T_x f(\xi(x)))$, jak žádá definice pullbacku, dostaneme

$$\eta_i(x) dx^i(x)(\xi(x)) = (\omega_\alpha \circ f)(x) \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^i} \Big|_x dx^i(x)(\xi(x)).$$

Tato rovnost dvou reálných čísel (tj. hodnoty formy η na levé straně v bodě x na vektoru $\xi(x)$ a hodnoty formy ω v bodě $f(x)$ na vektoru $T_x f(\xi(x))$) musí ovšem platit pro *libovolný bod x a libovolný vektor $\xi(x) \in T_x\mathbf{R}^n$* . Dostáváme tak vztah pro formu $\eta = f^*\omega \in \Lambda_1(\mathbf{R}^n)$ ve složkách, už bez vypisování bodu x ,

$$\eta = f^*\omega = \frac{\partial y^\alpha f}{\partial x^i} (\omega_\alpha \circ f) dx^i \tag{12.157}$$

resp. jen pro složky

$$\eta_i = \frac{\partial y^\alpha f}{\partial x^i} (\omega_\alpha \circ f), \quad \text{neboli} \quad \eta_i = (Df)_i^\alpha (\omega_\alpha \circ f),$$

kde Df je jako obvykle Jacobiho matice zobrazení f . Maticový zápis má tvar

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1 f}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2 f}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^m f}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1 f}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2 f}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y^m f}{\partial x^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^1 f}{\partial x^n} & \frac{\partial y^2 f}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial y^m f}{\partial x^n} \end{pmatrix}_x \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix}_{f(x)} \implies$$

12.3. OD ALGEBRY K ANALÝZE: TENZOROVÁ POLE A DIFERENCIÁLNÍ FORMY 255

$$\implies (\eta)_x = Df(x)(\omega)_{f(x)} \quad \text{nebo bez argumentů} \quad (\eta) = Df(\omega).$$

Označením $(\eta)_x$, resp. $(\omega)_{f(x)}$ máme na mysli sloupcovou matici n složek $\eta_i(x)$ formy η jako funkcí proměnných $x = (x^1, \dots, x^n)$, resp. sloupcovou matici m funkcí $(\omega_\alpha \circ f)(x)$, rovněž proměnných $x = (x^1, \dots, x^n)$. Přitom $\omega_\alpha(y)$ jsou složky formy ω v obecném bodě $y \in \mathbf{R}^m$.

Příklad 12.88: Důkaz vztahu (12.156) pro 1-formy z definice

Slíbili jsme si důkaz vlastnosti (12.156) ve větě 12.27 pro 1-formy přímo z definice. Použitím vlastností (12.154) a (12.155) a výsledku příkladu 12.87 bychom již mohli provést důkaz zcela obecně. A také to za chvíli uděláme. Porozumět důkladně definici zpětného obrazu je však pro další postup v teorii integrálu nezbytné. Nejlépe se to podaří pro formy nízkého řádu. Proto pro 1-formy provedme důkaz z definice. Nejprve budeme opět důsledně vypisovat všechny argumenty (body a vektory), abychom si dobře uvědomili, které veličiny figurují jako proměnné funkcí, které se budou ve výpočtu objevovat. Později psaní argumentů vypustíme, abychom si dobře zafixovali strukturu získaných vztahů. Čtenáři, kteří pojem zpětného obrazu dobře pochopili a nebaví je „prokousávat“ se dalšími výpočty s množstvím argumentů, mohou příklad přeskočit.

Zapišme tedy 1-formu ω ve složkách a počítejme nejprve její vnější derivaci a pak pullback indukovaný zobrazením f .

$$\omega(y) = \omega_\alpha(y) dy^\alpha(y), \quad d\omega(y) = \frac{\partial \omega_\alpha(y)}{\partial y^\beta} dy^\beta(y) \wedge dy^\alpha(y).$$

A nyní pro konkrétní bod $x \in \mathbf{R}^n$ a vektory $\xi_1(x), \xi_2(x) \in T_x \mathbf{R}^n$, tj. $y = f(x)$, $\zeta_1(f(x)) = T_x f(\xi_1(x))$, $\zeta_2(f(x)) = T_x f(\xi_2(x))$:

$$\begin{aligned} (f^* d\omega)(x)(\xi_1(x), \xi_2(x)) &= d\omega(f(x))(\zeta_1(f(x)), \zeta_2(f(x))) = \\ &= \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial y^\beta} \circ f \Big|_x dy^\beta(f(x)) \wedge dy^\alpha(f(x))(\zeta_1(f(x)), \zeta_2(f(x))) = \\ &= \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial y^\beta} \circ f \Big|_x \left(\zeta_1^\beta(f(x)) \zeta_2^\alpha(f(x)) - \zeta_2^\beta(f(x)) \zeta_1^\alpha(f(x)) \right) = \\ &= \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial y^\beta} \circ f \Big|_x \frac{\partial y^\beta f(x)}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^j} (\xi_1^i(x) \xi_2^j(x) - \xi_2^i(x) \xi_1^j(x)). \end{aligned}$$

Výsledek opět platí pro libovolný bod x a libovolné vektory $\xi_1(x)$ a $\xi_2(x)$ z tečného prostoru k \mathbf{R}^n v tomto bodě. Můžeme jej proto psát bez vypisování argumentů ve tvaru

$$f^* d\omega = \left(\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial y^\beta} \circ f \right) \frac{\partial y^\beta f}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha f}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j. \quad (12.158)$$

Získaný vztah (12.158) je levou stranou vlastnosti (12.156) pro 1-formu ω . Počítejme teď pravou stranu, nejprve opět pro konkrétní argumenty. Nejprve tedy vypočteme pullback formy ω indukovaný zobrazením f a potom vnější derivaci. Pro vyjádření pullbacku využijeme pro ten účel připraveného výsledku příklad 12.87. Platí

$$f^* \omega(x) = \omega_\alpha \circ f \Big|_x \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^j} dx^j(x).$$

Pro výpočet vnější derivace získané 1-formy použijeme vztahu (12.142). Dostaneme

$$d(f^* \omega)(x) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left[(\omega_\alpha \circ f)(x) \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^j} \right] dx^i(x) \wedge dx^j(x) =$$

$$= \frac{\partial(\omega_\alpha \circ f)(x)}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha f(x)}{\partial x^j} dx^i(x) \wedge dx^j(x) + (\omega_\alpha \circ f)(x) \frac{\partial^2 y^\alpha f(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i(x) \wedge dx^j(x).$$

Druhý člen v získaném výrazu je nulový vzhledem k záměnnosti (symetrii) smíšených parciálních derivací druhého řádu funkcí $y^\alpha f(x)$ a antisymetrii vnějšího součinu. (Vzpomenete si, kde jsme těchto vlastností již jednou využili? Bylo to při důkazu vlastnosti $d^2\omega = 0$.) Nyní už stačí si uvědomit pravidlo pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial(\omega_\alpha \circ f)(x)}{\partial x^i} = \frac{\partial\omega_\alpha(y)}{\partial y^\beta} \circ f \Big|_x \frac{\partial y^\beta f(x)}{\partial x^i}$$

a dostáváme pravou stranu dokazované vlastnosti (12.156), opět už bez vypisování bodu x

$$d(f^*\omega) = \left(\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial y^\beta} \circ f \right) \frac{\partial y^\beta f}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha f}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j. \quad (12.159)$$

Vztahy (12.158) a (12.159) jsou shodné, vlastnost (12.156) ve větě 12.27 jsme dokázali pro 1-formy.

V důkazu vlastnosti (12.156) pro obecnou k -formu bychom dále mohli pokračovat indukcí vzhledem k řádu formy k , nebo přímo, použitím vlastnosti (12.155). Zvolme druhou možnost. Budeme pracovat s „úsporným“ vyjádřením forem ve složkách, tj. bez vypisování argumentů. Pro obecnou formu $\omega \in \Lambda_k(\mathbb{R}^m)$ platí

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy^{\alpha_k}, \\ d\omega &= \frac{\partial\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial y^{\alpha_{k+1}}} dy^{\alpha_{k+1}} \wedge dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy^{\alpha_k} = \\ &= (-1)^k \frac{\partial\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial y^{\alpha_{k+1}}} dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy^{\alpha_k} \wedge dy^{\alpha_{k+1}}, \\ f^*d\omega &= (-1)^k \left(\frac{\partial\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial y^{\alpha_{k+1}}} \circ f \right) f^* dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge f^* dy^{\alpha_k} \wedge f^* dy^{\alpha_{k+1}} = \\ &= (-1)^k \left(\frac{\partial\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial y^{\alpha_{k+1}}} \circ f \right) \frac{\partial y^{\alpha_1} f}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_{k+1}} f}{\partial x^{i_{k+1}}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}. \end{aligned}$$

A teď naopak. Nejprve vypočteme $f^*\omega$ a pak $df^*\omega$:

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \circ f) f^*(dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy^{\alpha_k}) = \\ &= (\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \circ f) \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{i_k}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \\ df^*\omega &= \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} \left((\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \circ f) \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{i_k}} \right) dx^{i_{k+1}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ &= (-1)^k \left[\frac{\partial(\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \circ f)}{\partial x^{i_{k+1}}} \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{i_k}} \right] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}} + \end{aligned}$$

$$+ \left[(\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \circ f) \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} \left(\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{i_k}} \right) \right] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}}.$$

Druhý sčítanec je nulový, opět v důsledku symetrie smíšených parciálních derivací druhého řádu a antisymetrie vnějšího součinu. Proto

$$df^* \omega = (-1)^k \left[\frac{\partial (\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \circ f)}{\partial x^{i_{k+1}}} \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{i_k}} \right] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}}.$$

Použitím pravidla pro derivaci složené funkce

$$\frac{\partial (\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \circ f)}{\partial x^{i_{k+1}}} = \left(\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial y^{\alpha_{k+1}}} \circ f \right) \frac{\partial y^{\alpha_{k+1}}}{\partial x^{i_{k+1}}}$$

dostáváme konečný výraz pro $df^* \omega$

$$df^* \omega = (-1)^k \left(\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial y^{\alpha_{k+1}}} \circ f \right) \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_{k+1}}}{\partial x^{i_{k+1}}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}},$$

shodný s výrazem pro $f^* d\omega$.

Příklad 12.89: Zpětný obraz prakticky: pullback „vyrábí“ jakobiány

Praktický výpočet zpětného obrazu si zkusíme na typickém příkladu transformace souřadnic. Při integraci je obvyklé pracovat v souřadnicích, které nějakým způsobem odpovídají symetrii úlohy. V rovině jsou to často souřadnice polární. Přejít od $(\varrho, \varphi) \rightarrow (x, y)$, $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, od polárních ke kartézským souřadnicím transformuje otevřený, resp. uzavřený obdélník $(0, R) \times (0, 2\pi)$, resp. $[0, R] \times [0, 2\pi]$ na otevřený, resp. uzavřený kruh $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 < R^2\}$, resp. $\bar{K} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Také může jít o transformaci množiny $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ na euklidovskou rovinu s vyjmutou nezápornou poloosou x , či o transformaci množiny $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$ na celou euklidovskou rovinu. Jsou možné i jiné situace, lišící se výchozí volbou definičního oboru polárních souřadnic. Podívejme se na problém takové transformace z hlediska zpětného obrazu. Definujme zobrazení

$$f : D = (0, R) \times (0, 2\pi) \ni (\varrho, \varphi) \longrightarrow (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi.$$

Netriviální formy na \mathbf{R}^2 jsou pouze 0-formy, 1-formy a 2-formy. Vypočteme zpětný obraz 1-forem dx a dy a 2-formy $dx \wedge dy$ indukovaný zobrazením f . Podle vztahu (12.157) je

$$f^* dx = \frac{\partial x}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi d\varrho - \varrho \sin \varphi d\varphi,$$

$$f^* dy = \frac{\partial y}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi d\varrho + \varrho \cos \varphi d\varphi.$$

Pro výpočet zpětného obrazu formy $dx \wedge dy$ použijeme vztah (12.155), tj.

$$f^*(dx \wedge dy) = f^* dx \wedge f^* dy = (\cos \varphi d\varrho - \varrho \sin \varphi d\varphi) \wedge (\sin \varphi d\varrho + \varrho \cos \varphi d\varphi).$$

S uvážením vlastností vnějšího součinu (linearita a antisymetrie) dostaneme

$$f^*(dx \wedge dy) = \varrho d\varrho \wedge d\varphi.$$

Připomeňme si, že forma $dx \wedge dy \in \Lambda_2(\mathbf{R}^2)$ v pevně zvoleném bodě je kovariantní antisymetrický 2-tenzor, který představuje objemový element (odstavec 12.2.7). Objemový (přesněji plošný) element v polárních souřadnicích je tedy $\varrho d\varrho \wedge d\varphi$. Tento výsledek nám jistě připomíná úvahy, které jsme vedli v kapitole 5.

Inverzní zobrazení f^{-1} převádí množinu $\mathbf{R}^2 \setminus [0, \infty)$ na otevřený obdélník D . Vypočteme zpětný obraz forem $d\varrho$, $d\varphi$ a $d\varrho \wedge d\varphi$, definovaných na D , indukovaný zobrazením f^{-1} . Nejprve je třeba explicitně vyjádřit proměnné ϱ a φ jako funkce proměnných x a y . Tento problém jsme probrali podrobně v kapitole 5, uvedeme proto jen výsledek:

$$\begin{aligned}\varrho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{pro } \varphi \in (0, \pi] \\ \varphi &= 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{pro } \varphi \in (\pi, 2\pi).\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}(f^{-1})^* d\varrho &= \frac{\partial \varrho}{\partial x} dx + \frac{\partial \varrho}{\partial y} dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy, \\ (f^{-1})^* d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \\ (f^{-1})^*(d\varrho \wedge d\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \wedge dy.\end{aligned}$$

V příkladu 12.89 jsme se přesvědčili, že pullback skutečně „vyrábí jakobiány“. Platí to samozřejmě obecně. Předpokládejme například, že zobrazení f je transformací souřadnic v \mathbf{R}^3 , třeba křivčarých na kartézské. Dejme tomu, že je definováno na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^3$,

$$f : D \ni (u, v, w) \longrightarrow f(u, v, w) = (xf(u, v, w), yf(u, v, w), zf(u, v, w)) \in \mathbf{R}^3.$$

Vypočteme zpětný obraz objemového elementu $dx \wedge dy \wedge dz$. Platí

$$\begin{aligned}f^*(dx \wedge dy \wedge dz) &= f^* dx \wedge f^* dy \wedge f^* dz = \\ &= \left(\frac{\partial xf}{\partial u} du + \frac{\partial xf}{\partial v} dv + \frac{\partial xf}{\partial w} dw \right) \wedge \left(\frac{\partial yf}{\partial u} du + \frac{\partial yf}{\partial v} dv + \frac{\partial yf}{\partial w} dw \right) \wedge \\ &\quad \wedge \left(\frac{\partial zf}{\partial u} du + \frac{\partial zf}{\partial v} dv + \frac{\partial zf}{\partial w} dw \right) = (\det Df) du \wedge dv \wedge dw.\end{aligned}$$

Determinant Jacobiho matice, který se ve výsledku objevil, je jakobián, až na případné znaménko. To souvisí s tím, jaké pořadí parametrů u, v, w je „to správné“. (Tímto problémem se budeme zabývat později.) Ze struktury výpočtu je okamžitě vidět, že při *každé* transformaci $f : D \ni (u^1, \dots, u^n) \rightarrow (x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n$, kde $D \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a rovnice zobrazení f mají tvar $x^j = x^j f(u^1, \dots, u^n)$, $1 \leq j \leq n$, bude platit

$$f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (\det Df) du^1 \wedge \dots \wedge du^n. \quad (12.160)$$

Příklad 12.90: Zpětný obraz prakticky — ještě jednou

Uvažujme nyní o zobrazení představujícím převod kulových souřadnic na kartézské. Zvolme za definiční obor sférických souřadnic opět otevřenou množinu v \mathbf{R}^3 , konkrétně $D = (0, R) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. (I jiná volba definičního oboru je možná, typicky například \bar{D} .) Převod ze sférických do kartézských souřadnic je dán zobrazením

$$f : D \ni (r, \vartheta, \varphi) \longrightarrow (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \\ x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

Vypočteme postupně zpětné obrazy $f^* dx$, $f^* dy$, $f^* dz$, $f^*(dy \wedge dz)$, $f^*(dz \wedge dx)$, $f^*(dx \wedge dy)$, $f^*(dx \wedge dy \wedge dz)$. Předem tušíme, že poslední z nich, tj. pullback kartézského objemového elementu, by měl vyjít $r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi$. Vzhledem k tomu, že zde nehrozí riziko záměny zobrazení (máme jen jedno, f), budeme už jednoduše používat zápis $x = x(r, \vartheta, \varphi), \dots$ namísto podrobnějšího $x = xf(r, \vartheta, \varphi), \dots$, u parciálních derivací pak zápis $\frac{\partial x}{\partial r}$, apod. Platí

$$f^* dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi, \\ f^* dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi, \\ f^* dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Vzpomeňme si, že formálně můžeme předchozí tři rovnice zapsat ve tvaru maticového násobení

$$(f^* dx \quad f^* dy \quad f^* dz) = (dr \quad d\vartheta \quad d\varphi) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

$$f^* dx = \sin \vartheta \cos \varphi dr + r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi, \\ f^* dy = \sin \vartheta \sin \varphi dr + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi, \\ f^* dz = \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta.$$

$$f^*(dy \wedge dz) = (\sin \vartheta \sin \varphi dr + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi) \wedge (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) = \\ = (r^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi) d\vartheta \wedge d\varphi + (r \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi) d\varphi \wedge dr + (-r \sin \varphi) dr \wedge d\vartheta,$$

$$f^*(dz \wedge dx) = (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) \wedge (\sin \vartheta \cos \varphi dr + r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi) = \\ = (r^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi) d\vartheta \wedge d\varphi + (r \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi) d\varphi \wedge dr + (r \cos \varphi) dr \wedge d\vartheta,$$

$$f^*(dx \wedge dy) = (\sin \vartheta \cos \varphi dr + r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi) \wedge (\sin \vartheta \sin \varphi dr + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi) = \\ = (r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta \wedge d\varphi + (-r \sin^2 \vartheta) d\varphi \wedge dr.$$

Zpětný obraz objemového elementu můžeme počítat několika způsoby a všechny výsledky by měly být stejné. Platí totiž

$$f^*(dx \wedge dy \wedge dz) = f^*(dx \wedge dy) \wedge f^* dz = f^* dx \wedge f^*(dy \wedge dz) = \\ = f^*(dz \wedge dx) \wedge f^* dy = f^* dx \wedge f^* dy \wedge f^* dz = \dots$$

Počítejme jeden z nich, ostatní pro procvičení spočítejte sami. Platí

$$\begin{aligned} f^*(dx \wedge dy) \wedge f^* dz &= \\ &= [(r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta \wedge d\varphi + (-r \sin^2 \vartheta) d\varphi \wedge dr] \wedge (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) = r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Pullback forem definovaných na množině D indukovaný zobrazením f^{-1} vypočtete v rámci cvičení.

Příklad 12.91: Zpětný obraz prakticky — potřetí

Vraťme se k druhé části příkladu 12.85 s tím, že proměnné x^1 a x^2 označíme φ a ϑ , jak odpovídá jejich geometrickému významu, a proměnné y^1 , y^2 , y^3 označíme x , y , z , jak je u kartézských souřadnic obvyklé. Pracujeme tedy se zobrazením

$$\begin{aligned} f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ni (\varphi, \vartheta) &\longrightarrow (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \\ x &= \cos \vartheta \sin \varphi, \quad y = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Uřídíme zpětné obrazy 2-forem $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ a $dx \wedge dy$. Mají svůj geometrický význam, k němuž se vrátíme později. Nejprve vypočteme zpětné obrazy 1-forem dx , dy a dz :

$$\begin{aligned} f^* dx &= \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi, \\ f^* dy &= \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi, \\ f^* dz &= -\sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(dy \wedge dz) &= (\cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi) \wedge (-\sin \vartheta d\vartheta) = \sin^2 \vartheta \cos \varphi d\vartheta \wedge d\varphi, \\ f^*(dz \wedge dx) &= (-\sin \vartheta d\vartheta) \wedge (\cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi) = \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta \wedge d\varphi, \\ f^*(dx \wedge dy) &= (\cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi) \wedge (\cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi) = \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Hned se nabízí otázka, zda a jak souvisí koeficienty u součinu $d\vartheta \wedge d\varphi$ s Jacobiho maticí zobrazení f . Jacobiho matici snadno spočteme:

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial x f}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y f}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z f}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x f}{\partial \varphi} & \frac{\partial y f}{\partial \varphi} & \frac{\partial z f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že funkce stojící u vnějšího součinu $d\vartheta \wedge d\varphi$ při výpočtu pullbacků $f^*(dy \wedge dz)$, $f^*(dz \wedge dx)$, $f^*(dx \wedge dy)$ jsou příslušné subdeterminanty druhého řádu Jacobiho matice, tj. rovněž určité jakobiány.

Také výsledek příkladu 12.91 lze zobecnit. Nechť $D \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a

$$f : D \ni (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow (x^1, \dots, x^m) \in \mathbf{R}^m,$$

kde $n \leq m$ a $x^\alpha = x^\alpha f(u^1, \dots, u^n)$, $1 \leq \alpha \leq m$, jsou rovnice zobrazení f . Vypočteme pullback forem $dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}$ zobrazením f . Dostaneme, opět s využitím antisymetrie vnějšího součinu,

$$f^*(dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}) = f^* dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge f^* dx^{\alpha_n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial x^{\alpha_1} f}{\partial u^1} du^1 + \dots + \frac{\partial x^{\alpha_1} f}{\partial u^n} du^n \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial x^{\alpha_n} f}{\partial u^1} du^1 + \dots + \frac{\partial x^{\alpha_n} f}{\partial u^n} du^n \right) = \\
&= (\det Df)_{1 \dots n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} du^1 \wedge \dots \wedge du^n,
\end{aligned}$$

kde $(\det Df)_{1 \dots n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ je minor (subdeterminant) Jacobiho matice zobrazení f vytvořený ze všech jejích řádků a ze sloupců s indexy $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

12.3.5 Derivování diferenciálních forem — Lieova derivace

V tomto odstavci se seznámíme s dalším typem derivace diferenciálních forem. Půjde o to, jak se diferenciální forma „mění podél zadaného vektorového pole“. S něčím podobným jsme se už setkali. Šlo o směrovou derivaci funkce, jíž jsme se zabývali v odstavci 9.2.4. Její hodnota v daném bodě představovala změnu hodnoty funkce při „elementárních“ změnách (všech) proměnných vázaných na přímkou o jednotkovém směrovém vektoru \vec{s} jdoucí tímto bodem, přičemž tato změna byla vztažena k „elementární“ změně (jediné) proměnné parametrizující tuto přímkou. Co to ale znamená změna *podél vektorového pole*? Abychom to vyjasnili, vylepšíme (zpřesníme) známý pojem integrálních křivek vektorového pole. Předpokládejme, že v euklidovském prostoru je zadáno diferencovatelné vektorové pole $\xi : \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow \xi(x)$, $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. (Připomeňme, že složky ξ^i diferencovatelného vektorového pole ξ jsou diferencovatelnými funkcemi bodu x , tj. proměnných x^1, \dots, x^n .) O integrálních křivkách vektorových polí (proudnicích, siločarách, indukčních čarách, apod.) jsme už mluvili v odstavcích 9.3.2 a 9.4.1. Víme, že se jedná o jednoparametrickou soustavu křivek v prostoru takovou, že vektor $\xi(x)$ je tečným vektorem ke křivce, která prochází bodem $x \in \mathbf{R}^n$. Definice integrální křivky na straně 572 druhého dílu by pro vektorové pole, označené nyní ξ , zněla konkrétně takto:

Integrální křivkou vektorového pole $\xi(x)$ definovaného na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$ rozumíme každou křivku

$$\mathcal{C} : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}(t) = (x^1 \mathcal{C}(t), \dots, x^n \mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^n,$$

pro kterou platí

$$\frac{d\mathcal{C}(t)}{dt} = \xi(\mathcal{C}(t)), \quad \text{tj.} \quad \frac{dx^i \mathcal{C}(t)}{dt} = \xi^i(\mathcal{C}(t)), \quad 1 \leq i \leq n,$$

pro všechna $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pro která $x(t) \in D$.

Tuto myšlenku budeme nyní modifikovat do podoby vhodné pro zavedení pojmu Lieovy derivace forem.

Nechť $D \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $\{\alpha_u\}$ systém zobrazení

$$\alpha_u : D \ni x \longrightarrow \alpha_u(x) \in \mathbf{R}^n, \quad (12.161)$$

kde pro jisté $\varepsilon > 0$ a všechna $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ je $\alpha_u(x) \in D$ s vlastnostmi:

- zobrazení α_u jsou prostá a diferencovatelná, inverzní zobrazení jsou rovněž diferencovatelná (taková zobrazení se nazývají *difeomorfismy* třídy C^1),
- pro každý bod $x \in D$ je $\alpha_0(x) = x$, tj. $\alpha_0 = \text{id}_D$,
- zobrazení

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times D \ni (u, x) \longrightarrow \alpha(u, x) = \alpha_u(x) \in \mathbf{R}^n$$

je diferencovatelné,

- $\alpha_v \circ \alpha_u = \alpha_{u+v}$ pro každé dvě hodnoty $u, v \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

Zobrazení $\{\alpha_u \mid u \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ tvoří vzhledem ke skládání komutativní grupu, zvanou *lokální jednoparametrická grupa* transformací prostoru \mathbf{R}^n . V případě, že je systém zobrazení $\{\alpha_u\}$ definován na celém prostoru \mathbf{R}^n , jde o *jednoparametrickou grupu* transformací prostoru \mathbf{R}^n .

A co teď? Především prověřte pro množinu $\{\alpha_u \mid u \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ axiomy grupy. Je to jednoduché. A uvědomme si ještě jednu důležitou věc: zvolme libovolný, ale na chvíli pevný bod $x \in D$ a uvažujme o zobrazení

$$\alpha_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni u \longrightarrow \alpha_x(u) = \alpha(u, x) \in \mathbf{R}^n.$$

Toto zobrazení definuje křivku v \mathbf{R}^n , která prochází bodem x , konkrétně je $\alpha_x(0) = x$. A ke křivce můžeme sestrojit tečný vektor v bodě x ,

$$\xi(x) = \dot{\alpha}_x, \quad \text{tj.} \quad \xi^i(x) = \left. \frac{dx^i \alpha_x(u)}{du} \right|_{u=0}. \quad (12.162)$$

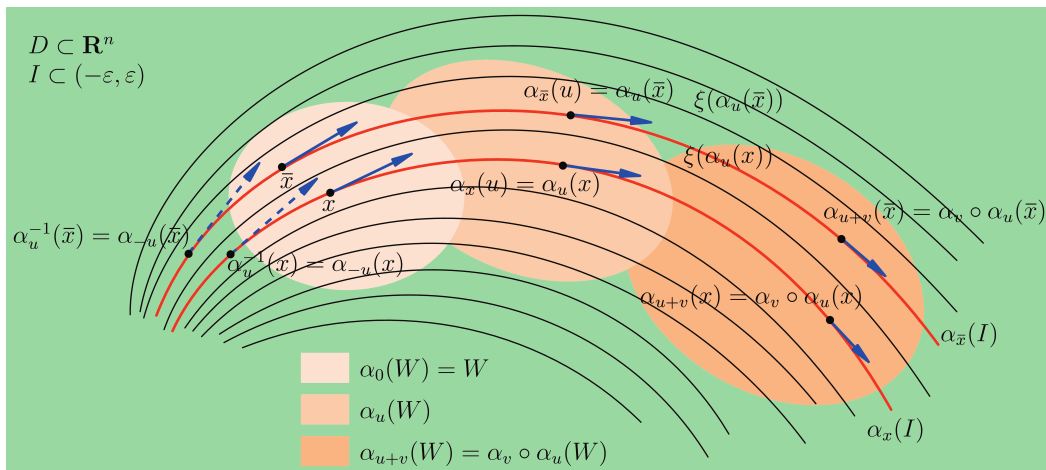
Jednoparametrická grupa tedy *generuje* diferencovatelné vektorové pole na D (popřípadě \mathbf{R}^n). A také naopak, ale jen lokálně. Je-li $\xi \in \mathcal{V}(\mathbf{R}^n)$ diferencovatelné vektorové pole na \mathbf{R}^n , popřípadě na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$, pak ke každému bodu $x_0 \in \mathbf{R}^n$, resp. $x_0 \in D$, existuje okolí W , číslo $\varepsilon > 0$ a jednoznačně určená lokální jednoparametrická grupa $\{\alpha_u\}$ tak, že pro všechna $x \in W$ a všechna $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ platí

$$\dot{\alpha}_{\alpha_u(x)} = \xi(\alpha_u(x)), \quad \text{tj.} \quad \xi^i(\alpha_u(x)) = \left. \frac{dx^i \alpha_x(u)}{du} \right|_{\alpha_u(x)}, \quad (12.163)$$

ale také

$$\xi(x) = \left. \frac{d\alpha_u(x)}{du} \right|_{u=0} \implies \xi^i(x) = \left. \frac{dx^i \alpha_u(x)}{du} \right|_{u=0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{x^i \alpha_u(x) - x^i \alpha_0(x)}{u}, \quad (12.164)$$

pro $1 \leq i \leq n$. Definici jednoparametrické grupy transformací euklidovského prostoru příslušné vektorovému poli názorně ilustruje schematický obrázek 12.43.



Obrázek 12.43 Jednoparametrická grupa transformací a vektorové pole.

V obrázku jsou vyznačeny dva různé body $x, \bar{x} \in W$, kde $W \subset D$ je otevřené okolí každého z nich (nic nebrání tomu, abychom zvolili různá otevřená okolí W , resp. \bar{W} bodů x , resp. \bar{x} , v obrázku je pro přehlednost zakresleno okolí společné). Otevřené množiny $\alpha_u(W)$ a $\alpha_v \circ \alpha_u(W) = \alpha_{u+v}(W)$ jsou obrazy množiny W zobrazeními α_u a $\alpha_v \circ \alpha_u = \alpha_{u+v}$ pro pevně zvolené hodnoty $u, v \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Červeně vyznačené křivky jsou obrazy jistého otevřeného intervalu $I \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ zobrazeními α_x a $\alpha_{\bar{x}}$ pro pevně zvolené body x a \bar{x} . V jednotlivých bodech jsou vyznačeny tečné vektory k těmto křivkám.

Vztah vektorového pole a jeho jednoparametrické grupy transformací prostoru \mathbf{R}^n ukážeme ještě na příkladu.

Příklad 12.92: Vektorové pole a jednoparametrická grupa

Uvažujme o systému zobrazení

$$\alpha_u : \mathbf{R}^2 \ni (x^1, x^2) \longrightarrow (x^1 \alpha_u(x^1, x^2), x^2 \alpha_u(x^1, x^2)) \in \mathbf{R}^2,$$

$$x^1 \alpha_u(x^1, x^2) = x^1 \cos u - x^2 \sin u, \quad x^2 \alpha_u(x^1, x^2) = x^1 \sin u + x^2 \cos u, \quad u \in (0, 2\pi).$$

Tato zobrazení jsou diferencovatelná a prostá, inverzní zobrazení jsou rovněž diferencovatelná. Skutečně, označíme-li pro jednoduchost $(x^1)' = x^1 \alpha_u(x^1, x^2)$ a $(x^2)' = x^2 \alpha_u(x^1, x^2)$, dostaneme rovnice inverzních zobrazení ve tvaru

$$x^1 = (x^1)' \cos u + (x^2)' \sin u, \quad x^2 = -(x^1)' \sin u + (x^2)' \cos u.$$

264 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

Diferencovatelnost je na první pohled zřejmá. Zobrazení α_u jsou tedy difeomorfismy. Současně je zřejmá i diferencovatelnost zobrazení

$$\alpha : (0, 2\pi) \times \mathbf{R}^2 \ni (u, x^1, x^2) \longrightarrow \alpha(u, x^1, x^2) = \alpha_u(x^1, x^2),$$

jak požaduje definice jednoparametrické grupy difeomorfismů. Jsou také splněny všechny další požadavky, konkrétně

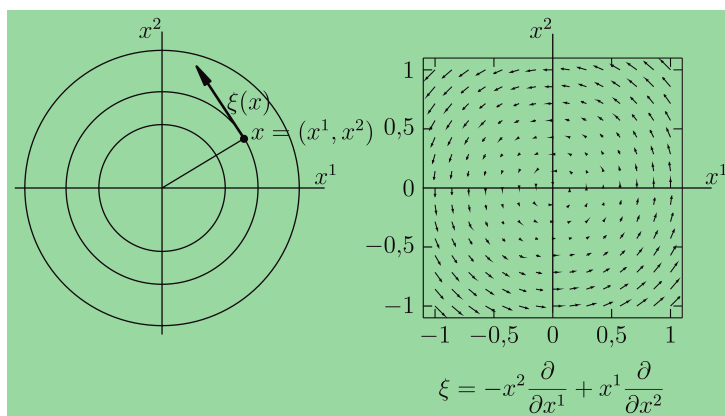
$$\begin{aligned} x^1 \alpha_{u+v}(x^1, x^2) &= x^1 \cos(u+v) - x^2 \sin(u+v) = \\ &= x^1 \cos u \cos v - x^1 \sin u \sin v - x^2 \sin u \cos v - x^2 \cos u \sin v = \\ &= (x^1 \cos u - x^2 \sin u) \cos v - (x^1 \sin u + x^2 \cos u) \sin v \\ &= (x^1 \alpha_u(x^1, x^2)) \cos v - (x^2 \alpha_u(x^1, x^2)) \sin v = x^1 (\alpha_v \circ \alpha_u)(x^1, x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \alpha_{u+v}(x^1, x^2) &= x^1 \sin(u+v) + x^2 \cos(u+v) = \\ &= x^1 \sin u \cos v + x^1 \cos u \sin v + x^2 \cos u \cos v - x^2 \sin u \sin v = \\ &= (x^1 \cos u - x^2 \sin u) \sin v + (x^1 \sin u + x^2 \cos u) \cos v \\ &= (x^1 \alpha_u(x^1, x^2)) \sin v + (x^2 \alpha_u(x^1, x^2)) \cos v = x^2 (\alpha_v \circ \alpha_u)(x^1, x^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^1 \alpha_{-u}(x^1, x^2) &= x^1 \cos(-u) - x^2 \sin(-u) = x^1 \cos u + x^2 \sin u, \\ x^2 \alpha_{-u}(x^1, x^2) &= x^1 \sin(-u) + x^2 \cos(-u) = -x^1 \sin u + x^2 \cos u. \end{aligned}$$

Tato jednoparametrická grupa, definovaná dokonce na celém prostoru \mathbf{R}^2 , generuje vektorové pole

$$\begin{aligned} \xi^1(x^1, x^2) &= \left. \frac{dx^1 \alpha_u(x^1, x^2)}{du} \right|_{u=0} = [-x^1 \sin u - x^2 \cos u]_{u=0} = -x^2, \\ \xi^2(x^1, x^2) &= \left. \frac{dx^2 \alpha_u(x^1, x^2)}{du} \right|_{u=0} = [x^1 \cos u - x^2 \sin u]_{u=0} = x^1, \\ \xi &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}. \end{aligned}$$



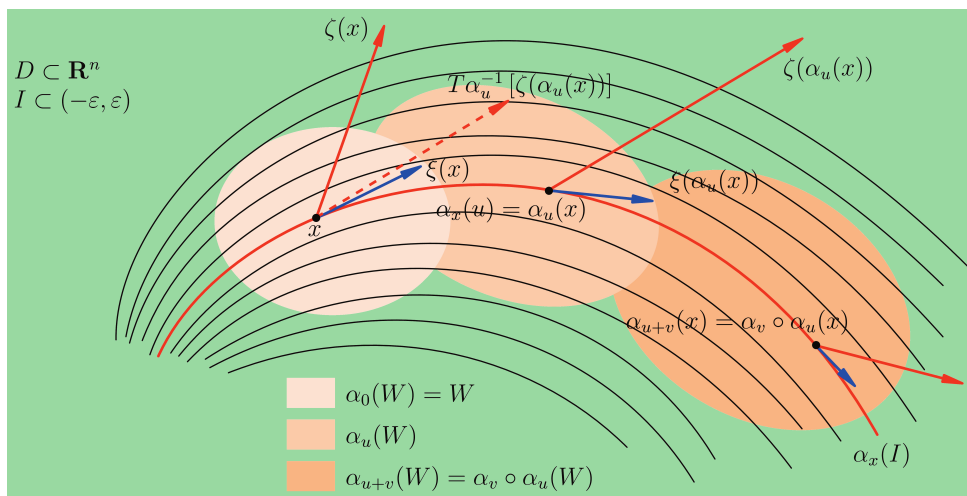
Obrázek 12.44 Generátor elementárních rotací.

12.3. OD ALGEBRY K ANALÝZE: TENZOROVÁ POLE A DIFERENCIÁLNÍ FORMY 265

Vektorové pole ξ je znázorněno na obrázku 12.44 vpravo. Jeho integrální křivky, tj. grafy zobrazení α_x , jsou pro přehlednost zakresleny zvlášť, v levé části obrázku. Jejich tvar je zřejmý jak z grafického znázornění vektorového pole, tak především z rovnic zobrazení α_x , které představují parametrické vyjádření soustředných kružnic se středy v počátku soustavy souřadnic. Každým bodem euklidovské roviny \mathbf{R}^2 s výjimkou bodu $(0,0)$ prochází právě jedna taková kružnice.

Uvědomíme-li si, že rovnice zobrazení α_u představují otočení v euklidovské rovině \mathbf{R}^2 o úhel u , nebudeme se divit, že se vektorové pole ξ nazývá *generátor elementárních rotací*.

Položme si nyní otázku: „Jak se mění vektorové pole podél vektorového pole?“ Že se ta otázka zdá divná? Ale není. Všimněme si obrázku 12.45.



Obrázek 12.45 Změny vektorového pole ζ podél vektorového pole ξ .

Vektorové pole ζ , zakreslené červenými šipkami, se mění podél integrálních křivek vektorového pole ξ , které je vyznačeno modře. V bodě x je vektorové pole ζ reprezentováno vektorem $\zeta(x)$, v bodě $\alpha_u(x)$ vektorem $\zeta(\alpha_u(x))$. Jak ale máme popsat změnu vektorového pole ζ při přechodu z bodu x do bodu $\alpha_u(x)$, když reprezentující vektory jsou umístěny v různých bodech? Potřebovali bychom nějakým rozumným způsobem „přenést“ vektor $\zeta(\alpha_u(x))$ do bodu x . Provedeme to pomocí tečného zobrazení k zobrazení $\alpha_u^{-1} = \alpha_{-u}$. Změnu, neboli *Lieovu derivaci vektorového pole ζ podél vektorového pole ξ v bodě x* , bude představovat výraz

$$\partial_\xi \zeta(x) = \left. \frac{dT_{\alpha_u(x)} \alpha_{-u} \left(\zeta(\alpha_u(x)) \right)}{du} \right|_{u=0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{T_{\alpha_u(x)} \alpha_{-u} \left(\zeta(\alpha_u(x)) \right) - \zeta(x)}{u}. \quad (12.165)$$

Označme pro zkrácení

$$\left(\tilde{\zeta}_{-u}^1, \dots, \tilde{\zeta}_{-u}^n \right) \Big|_x = \left(\zeta^1, \dots, \zeta^n \right) \Big|_{\alpha_u(x)} \cdot D\alpha_{-u} \Big|_{\alpha_u(x)}.$$

Pro Lieovu derivaci (12.165) pak platí

$$\partial_\xi \zeta(x) = \left. \frac{d\tilde{\zeta}_{-u}^i}{du} \right|_{u=0} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x.$$

Abychom ji vyjádřili pomocí složek vektorů ξ a ζ jakožto funkcí bodu x , tj. proměnných (x^1, \dots, x^n) , nepotřebujeme nic jiného než pravidlo pro derivaci součinu a pravidlo pro derivaci složené funkce. I přes tuto „myšlenkovou jednoduchost“ je vlastní výpočet tak trochu „zapeklitý“, proto jej provedeme podrobně. Především zrekapitulujeme vztah (12.164) pro vyjádření složek vektorového pole ξ pomocí jeho jednoparametrické grupy $\{\alpha_u \mid u \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$:

$$\xi(x) = \xi^i(x) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x = \left. \frac{dx^i \alpha_u(x)}{du} \right|_{u=0} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x,$$

zkráceně

$$\xi = \left. \frac{dx^i \alpha_u}{du} \right|_{u=0} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$\xi^i(x) = \left. \frac{dx^i \alpha_u(x)}{du} \right|_{u=0}, \quad -\xi^i(x) = \left. \frac{dx^i \alpha_{-u}(x)}{du} \right|_{u=0}.$$

Označme ještě $x_u^i = x^i \alpha_u(x^1, \dots, x^n)$, $1 \leq i \leq n$, souřadnice bodu $\alpha_u(x)$ v závislosti na souřadnicích bodu x . Pak

$$x^i \alpha_{-u} \Big|_{\alpha_u(x)} = x^i \alpha_{-u}(x_u^1, \dots, x_u^n).$$

A teď už derivujeme:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{\zeta}_{-u}^i}{du} \right|_{u=0} &= \left. \frac{d}{du} \left[\frac{\partial x^i \alpha_{-u}}{\partial x^j} \zeta^j \right] \right|_{\alpha_u(x)} \Big|_{u=0} = \\ &= \left[\frac{d}{du} \left(\frac{\partial x^i \alpha_{-u}}{\partial x^j} \Big|_{\alpha_u(x)} \right) \right]_{u=0} \zeta^j(\alpha_u(x)) \Big|_{u=0} + \left[\frac{\partial x^i \alpha_{-u}}{\partial x^j} \Big|_{\alpha_u(x)} \right]_{u=0} \cdot \left[\frac{d\zeta^j(\alpha_u(x))}{du} \right]_{u=0}. \end{aligned}$$

Rozebereme jednotlivé členy:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{du} \left(\frac{\partial x^i \alpha_{-u}}{\partial x^j} \Big|_{\alpha_u(x)} \right) \right]_{u=0} &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{dx^i \alpha_{-u}(x_u^1, \dots, x_u^n)}{du} \Big|_{u=0} \right) = -\frac{\partial \xi^i(x)}{\partial x^j}, \\ \zeta^j(\alpha_u(x)) \Big|_{u=0} &= \zeta^j(x), \\ \left[\frac{\partial x^i \alpha_{-u}}{\partial x^j} \Big|_{\alpha_u(x)} \right]_{u=0} &= \frac{\partial x^i \alpha_{-u}(x_u^1, \dots, x_u^n)}{\partial x^j} \Big|_{u=0} = \delta_j^i, \\ \frac{d\zeta^j(\alpha_u(x))}{du} \Big|_{u=0} &= \frac{\partial \zeta^j(x_u^1, \dots, x_u^n)}{\partial x_u^k} \cdot \frac{dx_u^k}{du} \Big|_{u=0} = \frac{\partial \zeta^j(x)}{\partial x^k} \xi^k(x). \end{aligned}$$

Dostali jsme souřadnicové vyjádření Lieovy derivace vektorového pole ζ podle vektorového pole ξ

$$\partial_\xi \zeta = \left[\xi^j \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^j} - \zeta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right] \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (12.166)$$

Ze získaného výsledku je hned vidět, že platí „antikomutační“ vztah $\partial_\xi \zeta = -\partial_\zeta \xi$.

Nechť ξ a ζ jsou vektorová pole na \mathbf{R}^n (popřípadě na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$) a $\{\alpha_u\}$, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ je jednoparametrická grupa (resp. lokální jednoparametrická grupa) transformací euklidovského prostoru \mathbf{R}^n , příslušná vektorovému poli ξ . *Lieovou derivací vektorového pole ζ podle vektorového pole ξ* , nebo též *Lieovou závorkou vektorových polí ξ a ζ* rozumíme vektorové pole

$$[\xi, \zeta] = \partial_\xi \zeta = -[\zeta, \xi] = \left(\xi^j \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^j} - \zeta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (12.167)$$

Zcela analogická je definice Lieovy derivace diferenciálních forem podle vektorového pole.

Nechť ξ je vektorové pole na \mathbf{R}^n , resp. na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$, a $\{\alpha_u \mid u \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ příslušná (lokální) jednoparametrická grupa transformací euklidovského prostoru \mathbf{R}^n . Dále předpokládejme, že $\omega \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n)$ je diferenciální k -forma definovaná na \mathbf{R}^n , resp. na D . *Lieovou derivací formy ω podle vektorového pole ξ* rozumíme k -formu

$$\partial_\xi \omega = \left. \frac{d\alpha_u^* \omega}{du} \right|_{u=0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\alpha_u^* \omega - \omega}{u}. \quad (12.168)$$

Diferenciální forma ω se nazývá *invariantní vzhledem k jednoparametrické grupě transformací* příslušné vektorovému poli ξ , je-li $\alpha_u^* \omega = \omega$, tj. $\partial_\xi \omega = 0$.

Pozn.: V dalším výkladu budeme potřebovat Lieovu derivaci diferenciálních forem, definici však lze použít pro libovolné tenzorové pole.

Z definice odvodíme vztah pro složky Lieovy derivace 1-formy $\omega = \omega_i dx^i$. Pullback formy ω indukovaný zobrazením α_u je

$$\alpha_u^* \omega(x) = \omega_j(\alpha_u(x)) \left. \frac{\partial x^j \alpha_u}{\partial x^i} \right|_x dx^i$$

a pro Lieovu derivaci pak dostaneme

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \omega(x) &= \left. \frac{d\alpha_u^* \omega}{du} \right|_{u=0} = \left[\frac{d}{du} \left(\omega_j \circ \alpha_u \frac{\partial x^j \alpha_u}{\partial x^i} \right) \right] \Big|_{x|_{u=0}} dx^i = \\
&= \left[\frac{d\omega_j(\alpha_u(x))}{du} \cdot \frac{\partial x^j \alpha_u}{\partial x^i} + (\omega_j \circ \alpha_u) \frac{d}{du} \left(\frac{\partial x^j \alpha_u}{\partial x^i} \right) \right] \Big|_{x|_{u=0}} = \\
&= \left[\frac{\partial(\omega_j \circ \alpha_u)}{\partial x_u^k} \cdot \frac{dx^k \alpha_u}{du} \cdot \frac{\partial x^j \alpha_u}{\partial x^i} + (\omega_j \circ \alpha_u) \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{dx^j \alpha_u}{du} \right) \right] \Big|_{x|_{u=0}} dx^i = \\
&= \left[\frac{\partial \omega_j(x)}{\partial x^k} \xi^k(x) \delta_i^j + \omega_j(x) \frac{\partial \xi^j(x)}{\partial x^i} \right] dx^i,
\end{aligned}$$

$$\partial_\xi \omega = \left(\omega_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + \xi^j \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \right) dx^i. \quad (12.169)$$

Příklad 12.93: Lieova derivace funkce

Lieovu derivaci funkce $f : D \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ vypočteme snadno podle definičního vzorce pro k -formy, položíme však $k = 0$. Při výpočtu opět použijeme pravidlo pro derivování složené funkce:

$$\partial_\xi f = \left. \frac{d(\alpha_u^* f)}{du} \right|_{u=0} = \left. \frac{d(f \circ \alpha_u)}{du} \right|_{u=0} = \frac{\partial f}{\partial x_u^i} \cdot \frac{dx^i \alpha_u}{du} \Big|_{u=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i.$$

Lieova derivace funkce splývá s její derivací směrovou (v zobecněném smyslu, kdy vektor ξ nemusí být jednotkový).

A ještě jedna zajímavá věc. Samozřejmě, Lieova derivace funkce je zase funkce, ale všimněme si jí lépe. Uvědomíme-li si, že $\xi^i = dx^i(\xi)$, hned vidíme, že výraz $\frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i$ vzniká také kontrakcí 1-formy df vektorovým polem ξ , tj.

$$\partial_\xi f = i_\xi df.$$

Tento výsledek za chvíli zobecníme v příkladu 12.95.

Příklad 12.94: Lieova derivace souřadnicových vektorových polí a 1-forem

Aplikací vztahů (12.167) a (12.169) na souřadnicová vektorová pole $\frac{\partial}{\partial x^j}$ a souřadnicové 1-formy dx^j dostaneme užitečné vzorce:

$$\partial_\xi \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = -\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \partial_\xi dx^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} dx^i. \quad (12.170)$$

V následující větě shrneme vlastnosti Lieových derivací, včetně jejich kombinace s dalšími operacemi s vektorovými poli a diferenciálními formami.

Věta 12.28 (Vlastnosti Lieovy derivace): Necht ξ, ζ a λ jsou libovolná vektorová pole, f libovolná funkce, $\omega, \chi, \varrho \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n)$, $\eta \in \Lambda_l(\mathbf{R}^n)$ libovolné diferenciální formy na \mathbf{R}^n (popřípadě na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$) a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Platí

- $\partial_\xi(\omega \wedge \eta) = \partial_\xi\omega \wedge \eta + \omega \wedge \partial_\xi\eta$
- $\partial_\xi(\alpha\zeta + \beta\lambda) = \alpha\partial_\xi\zeta + \beta\partial_\xi\lambda$,
- $\partial_\xi(\alpha\omega + \beta\chi) = \alpha\partial_\xi\omega + \beta\partial_\xi\chi$,
- $[\xi, \zeta] = -[\zeta, \xi]$,
- $[[\xi, \zeta], \lambda] + [[\lambda, \xi], \zeta] + [[\zeta, \lambda], \xi] = 0$ Jacobiho identita,
- $\partial_{[\xi, \zeta]}\omega = \partial_\xi\partial_\zeta\omega - \partial_\zeta\partial_\xi\omega$,
- $[f\xi, \zeta] = f[\xi, \zeta] - (\partial_\zeta f)\xi$,
- $\partial_\xi\varrho = i_\xi d\varrho + di_\xi\varrho$ pro $1 \leq k \leq n$, $\partial_\xi\varrho = i_\xi d\varrho$ pro $k = 0$,
- $\partial_\xi i_\xi\omega = i_\xi\partial_\xi\omega$,
- $d\varrho(\xi, \zeta) = \xi\varrho(\zeta) - \zeta\varrho(\xi) - \varrho([\xi, \zeta])$ pro $\varrho \in \Lambda_1(\mathbf{R}^n)$.

Důkazy těchto vlastností se snadno provedou buď přímo z definice Lieovy derivace, nebo z jejich souřadnicových vyjádření. S výjimkou jednoho, který provedeme v následujícím příkladu, je ponecháme do cvičení.

Příklad 12.95: Jeden důkaz

Dokážeme velmi důležitou a pro praktické počítání nepostradatelnou vlastnost Lieovy derivace k -forem pro $1 \leq k \leq n$, $\partial_\xi\omega = i_\xi d\omega + di_\xi\omega$, uvedenou ve větě 12.28. Pro funkce jsme ji dokázali v příkladu 12.93. Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k řádu k diferenciální formy ϱ . Nejprve vztah dokážeme pro $k = 1$, tj. pro 1-formu $\omega = \omega_i dx^i$. Použijeme souřadnicového vyjádření (12.169). Vypočteme pravou stranu dokazovaného vztahu a porovnáme s pravou stranou vyjádření (12.169):

$$\begin{aligned} i_\xi d(\omega_i dx^i) + di_\xi(\omega_i dx^i) &= i_\xi \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \right) + d(\omega_i \xi^i) = \\ &= \frac{\partial\omega_i}{\partial x^j} (\xi^j dx^i - \xi^i dx^j) + \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j} \xi^i + \omega_i \frac{\partial\xi^i}{\partial x^j} \right) dx^j = \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j} \xi^j + \omega_j \frac{\partial\xi^j}{\partial x^i} \right) dx^i. \end{aligned}$$

Pro 1-formu ω tedy vztah platí. Předpokládejme (indukční předpoklad), že platí pro k -formu η , zvolenou libovolně. Pak $\varrho = \omega \wedge \eta$ je $(k+1)$ -forma. Vypočteme pro ni levou i pravou stranu dokazovaného vztahu a porovnáme s využitím indukčního předpokladu a také toho, že jsme jej právě dokázali pro 1-formy. Pro úpravu levé strany použijeme vztah pro Lieovu derivaci vnějšího součinu forem (věta 12.28). Platí

$$\partial_\xi\varrho = \partial_\xi(\omega \wedge \eta) = \partial_\xi\omega \wedge \eta + \omega \wedge \partial_\xi\eta = i_\xi d\omega \wedge \eta + di_\xi\omega \wedge \eta + \omega \wedge i_\xi d\eta + \omega \wedge di_\xi\eta,$$

a na druhé straně

$$i_\xi d(\omega \wedge \eta) + di_\xi(\omega \wedge \eta) = i_\xi (d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta) + d(i_\xi\omega \wedge \eta - \omega \wedge i_\xi\eta) =$$

$$\begin{aligned}
&= i_\xi d\omega \wedge \eta + d\omega \wedge i_\xi \eta - i_\xi \omega \wedge d\eta + \omega \wedge i_\xi d\eta + di_\xi \omega \wedge \eta + i_\xi \omega \wedge d\eta - d\omega \wedge i_\xi \eta + \omega \wedge di_\xi \eta = \\
&= i_\xi d\omega \wedge \eta + \omega \wedge i_\xi d\eta + di_\xi \omega \wedge \eta + \omega \wedge di_\xi \eta.
\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili pravidel pro vnější derivaci a kontrakci vnějšího součinu forem a skutečnosti, že $i_\xi \omega$ je 0-forma a $d\omega$ je 2-forma. Oba získané výrazy jsou shodné, dokazovaný vztah proto platí. Znovu zdůrazněme důležitost tohoto vztahu pro praktické výpočty, zejména v souřadnicích.

Pozn.: Pečlivý čtenář může namítnout, že přece libovolnou $(k+1)$ -formu ϱ nemusí být možné vyjádřit ve tvaru $\varrho = \omega \wedge \eta$, kde ω je 1-forma a η je k -forma. Dovedete se s touto námitkou vypořádat?

Příklad 12.96: Výpočet Lieovy závorky

Zkusíme zjistit, jak se zadané vektorové pole mění podél generátoru elementárních rotací, který jsme studovali v příkladu 12.92, vektorové pole ζ zadejme zatím obecně:

$$\xi = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \zeta = \zeta^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Dosazením obecného vyjádření vektorových polí ξ a ζ ve složkách do vztahu (12.167) dostaneme

$$\partial_\xi \zeta = \left(\xi^j \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^j} - \zeta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\partial_\xi \zeta = \left(\xi^1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^2} - \zeta^1 \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} - \zeta^2 \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\xi^1 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^2} - \zeta^1 \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - \zeta^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Po dosazení složek generátoru rotace $\xi^1 = -x^2$, $\xi^2 = x^1$ dostaneme

$$\partial_\xi \zeta = \left(-x^2 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^2} + \zeta^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(-x^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^2} - \zeta^1 \right) \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Hledáme-li vektorová pole ζ , která jsou invariantní při transformacích α_u tvořících jednoparametrickou grupu příslušnou vektorovému poli ξ , položíme $\partial_\xi \zeta = 0$. Dostaneme parciální diferenciální rovnice pro složky takových invariantních vektorových polí ζ . Snadno zjistíme, že invariantní je například samo vektorové pole ξ . Tento závěr je samozřejmě triviální, okamžitě totiž plyne z antikomutativity Lieovy závorky (čtvrtá vlastnost ve větě 12.28): $[\xi, \xi] = -[\xi, \xi] \Rightarrow [\xi, \xi] = \partial_\xi \xi = 0$. Invariantní bude také radiální vektorové pole $\zeta = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$. To ověříme přímým dosazením do výrazu pro $\partial_\xi \zeta$. Dostaneme nulu. Intuitivně jsme takový výsledek jistě čekali. Abychom však našli *všechna* vektorová pole ζ , která jsou invariantní při transformacích α_u , museli bychom umět vyřešit *parciální diferenciální rovnice*

$$-x^2 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^2} + \zeta^2 = 0, \quad -x^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^2} - \zeta^1 = 0,$$

tj.

$$\zeta^1 = -x^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^2}, \quad \zeta^2 = x^2 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x^2} = 0.$$

12.3.6 Trocha počítání pro fyziku — vektorové identity pomocí forem

Tento odstavec bude docela zábavný. Budeme se v něm zabývat praktickým počítáním s formami a vektorovými poli v \mathbf{R}^3 užitečným pro fyziku. Elegantním způsobem pomocí diferenciálních forem dokážeme identity pro vektorová pole a diferenciální operátory, které jsme uvedli už v odstavci 9.4. V euklidovském prostoru \mathbf{R}^3 budeme pracovat s kartézskými souřadnicemi. Znamená to, že v tečných prostorech k \mathbf{R}^3 je zaveden skalární součin standardním způsobem $(\xi, \zeta) = \xi^1 \zeta^1 + \xi^2 \zeta^2 + \xi^3 \zeta^3$ a tenzory, o nichž budeme uvažovat, budou kartézské. Složky vektorových polí a 1-form se budou transformovat shodně. Vektory a vektorová pole budeme nyní označovat symboly obvyklými ve fyzice a psát je se šipkami, jak jsme byli zvyklí v algebře, šlo-li o vektory v jednorozměrných, dvojrozměrných a trojrozměrných prostorech. Předpokládejme, že

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F^1(x^1, x^2, x^3), F^2(x^1, x^2, x^3), F^3(x^1, x^2, x^3))$$

je vektorové pole a $\Phi(\vec{r}) = \Phi(x^1, x^2, x^3)$ skalární pole (tj. funkce) na \mathbf{R}^3 . Definujme čtyři typy diferenciálních forem spjatých s těmito poli:

$$\omega_{\Phi}^{(0)} = \Phi, \quad (12.171)$$

$$\omega_{\vec{F}}^{(1)} = \delta_{ij} F^i dx^j = F^1 dx^1 + F^2 dx^2 + F^3 dx^3, \quad (12.172)$$

$$\omega_{\vec{F}}^{(2)} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^i dx^j \wedge dx^k = F^1 dx^2 \wedge dx^3 + F^2 dx^3 \wedge dx^1 + F^3 dx^1 \wedge dx^2, \quad (12.173)$$

$$\omega_{\Phi}^{(3)} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \Phi dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \Phi dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad (12.174)$$

kde $\epsilon = (\epsilon_{ijk})$, $1 \leq i, j, k \leq 3$, je Levi-Civitův tenzor. (Připomeňme, že se jedná o kartézský tenzor třetího řádu, jehož složka ϵ_{ijk} je nulová, jsou-li některé z indexů shodné, rovna jedné, resp. minus jedné, tvoří-li indexy sudou, resp. lichou permutaci.) Tyto formy mají svůj fyzikální význam: forma $\omega_{\vec{F}}^{(1)}$ představuje *elementární práci*, je-li \vec{F} silové pole, forma $\omega_{\vec{F}}^{(2)}$ elementární tok vektorového pole \vec{F} plochou, forma $\omega_{\Phi}^{(3)}$ je funkční násobek objemového elementu, konkrétní význam souvisí s funkcí Φ . Vypočteme vnější derivace forem $\omega_{\vec{F}}^{(1)}$ a $\omega_{\vec{F}}^{(2)}$ (vnější derivace formy $\omega_{\Phi}^{(3)}$ je automaticky nulová — zdůvodněte). Počítejme:

$$\begin{aligned} d\omega_{\Phi}^{(0)} &= d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} dx^3 = \delta_{ij} (\text{grad}^j \Phi) dx^i = \omega_{\text{grad} \Phi}^{(1)}, \\ d\omega_{\vec{F}}^{(1)} &= \delta_{ij} \frac{\partial F^i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^j = \frac{\partial F^j}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^j = \\ &= \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} G^i dx^j \wedge dx^k = \omega_{\vec{G}}^{(2)}, \quad G^i = \epsilon_k^{ij} \frac{\partial F^k}{\partial x^j}.$$

Vzpomeneme-li si na diferenciální operátory z odstavce 9.4, vidíme, že $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$, tj. $d\omega_{\vec{F}}^{(1)} = \omega_{\text{rot } \vec{F}}^{(2)}$. Dále je

$$d\omega_{\vec{F}}^{(2)} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial F^i}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^j \wedge dx^k = \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \omega_{\text{div } \vec{F}}^{(3)}.$$

Shrňme získané výsledky:

$$d\omega_{\Phi}^{(0)} = \omega_{\text{grad } \Phi}^{(1)}, \quad d\omega_{\vec{F}}^{(1)} = \omega_{\text{rot } \vec{F}}^{(2)}, \quad d\omega_{\vec{F}}^{(2)} = \omega_{\text{div } \vec{F}}^{(3)}. \quad (12.175)$$

Víme také, že dvojitá aplikace operátoru vnější derivace dává nulu, tj. $d(d\omega) = 0$ pro libovolnou formu ω . Pro formy $\omega^{(0)}$, $\omega^{(1)}$ a $\omega^{(2)}$ dostaneme

$$d^2\omega_{\Phi}^{(0)} = d\omega_{\text{grad } \Phi}^{(1)} = \omega_{\text{rot grad } \Phi}^{(2)} = 0, \quad (12.176)$$

$$d^2\omega_{\vec{F}}^{(1)} = d\omega_{\text{rot } \vec{F}}^{(2)} = \omega_{\text{div rot } \vec{F}}^{(3)} = 0. \quad (12.177)$$

Odtud hned plynou dvě nejznámější vektorové identity $\text{rot grad } \Phi = \vec{0}$ a $\text{div rot } \vec{F} = 0$ pro libovolné skalární pole Φ a libovolné vektorové pole \vec{F} . Další identity nejsou pravděpodobně již tak známé, jsou však ve fyzice rovněž užitečné. Nejprve je uvedeme a potom dokážeme. Vystupuje v nich vektorový součin $\vec{F} \times \vec{G}$, jehož složky vyjadřujeme v ortonormální bázi náležející pravotočivé orientaci, $(\vec{F} \times \vec{G})^i = \epsilon_{jk}^i F^j G^k$. (Víme, že vektorový součin není, přísně vzato, vektorem, nýbrž antisymetrickým tenzorem druhého řádu, jehož složky se však při přechodech mezi ortonormálními bázemi téže orientace chovají jako složky vektoru.) Nyní avizované identity:

$$\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = (\text{rot } \vec{F}, \vec{G}) - (\text{rot } \vec{G}, \vec{F}), \quad (12.178)$$

$$\text{rot}(f\vec{F}) = \text{grad } f \times \vec{F} + f \text{rot } \vec{F}, \quad (12.179)$$

$$\text{div}(f\vec{F}) = (\text{grad } f, \vec{F}) + f \text{div } \vec{F}. \quad (12.180)$$

Pro důkaz použijeme „pomocnou“ identitu, kterou si dokažte sami přímým rozepsáním do složek:

$$\omega_{\vec{F} \times \vec{G}}^{(2)} = \omega_{\vec{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\vec{G}}^{(1)}.$$

Využijeme také identit dokázaných před chvílí. Počítejme:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{div}(\vec{F} \times \vec{G})}^{(3)} &= d\omega_{\vec{F} \times \vec{G}}^{(2)} = d(\omega_{\vec{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\vec{G}}^{(1)}) = d\omega_{\vec{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\vec{G}}^{(1)} - \omega_{\vec{F}}^{(1)} \wedge d\omega_{\vec{G}}^{(1)} = \\ &= \omega_{\text{rot } \vec{F}}^{(2)} \wedge \omega_{\vec{G}}^{(1)} - \omega_{\vec{F}}^{(1)} \wedge \omega_{\text{rot } \vec{G}}^{(2)}. \end{aligned}$$

Dosažením definičních vztahů pro formy typu $\omega^{(1)}$ a $\omega^{(2)}$ dostaneme

12.3. OD ALGEBRY K ANALÝZE: TENZOROVÁ POLE A DIFERENCIÁLNÍ FORMY 273

$$\omega_{\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G})}^{(3)} = \omega_{\Psi}^{(3)}, \quad \text{kde } \Psi = (\operatorname{rot} \vec{F}, \vec{G}) - (\operatorname{rot} \vec{G}, \vec{F}).$$

Tím jsme dokázali první z identit (12.178, 12.179, 12.180). Ostatní dokažte sami v rámci cvičení (úloha 19 ve Cvičení 12.3.7).

12.3.7 Cvičení

1. Necht $f : \mathbf{R}^n \ni x \rightarrow f(x) = f(x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}$ je diferencovatelná funkce. Definujme operátor ∇ vztahem

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right).$$

Dokažte, že ∇f lze interpretovat jako kovektorové pole na \mathbf{R}^n a vyjádřete je ve složkách. Je nějaká souvislost mezi ∇f a df ?

2. Je dána rovinná křivka

$$C_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \rightarrow C_x(t) = (x^1 C_x(t), x^2 C_x(t)) = (\cos t, \sin t) \in \mathbf{R}^2.$$

- Je-li C_x křivka procházející bodem x ve smyslu zavedené definice, určete bod x .
- Najděte alespoň jednu další křivku, která má s křivkou C_x v bodě x kontakt prvního řádu.
- Určete tečný vektor $\xi(x) = \dot{C}_x$ k \mathbf{R}^2 v bodě x generovaný křivkou C_x (jako reprezentantem příslušné třídy ekvivalence křivek). Rozumí se určení složek tečného vektoru v bázi $(e_{1,x}, e_{2,x})$ v tečném prostoru $T_x \mathbf{R}^2$, tj. vyjádření

$$\xi(x) = \xi^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x + \xi^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x.$$

- Vypočtěte hodnoty forem dx^1 a dx^2 v bodě x na vektoru $\xi(x)$.

Výsledky: a) $x = C_x(0) = (1, 0)$, b) např. $\bar{C}_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \rightarrow \bar{C}_x(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)$, c) $\dot{C}_x = \xi(x) = \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x$, d) $dx^1(\xi(x)) = 0$, $dx^2(\xi(x)) = 1$.

3. Necht $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^2$ jsou body euklidovského (topologického) prostoru, $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (2, 2)$ V tečném prostoru $T_{x_1} \mathbf{R}^2$ je zadán vektor $\xi(x_1) = (0, 1)$, v tečném prostoru $T_{x_2} \mathbf{R}^2$ jsou zadány vektory $\zeta(x_2) = (-1, -1)$ a $\vartheta(x_2) = (1, -1)$. Dále jsou zadány diferenciální formy $\omega = dx^1$, $\eta = x^1 dx^2$, $\chi = d(r^2)$, kde $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$. Vyplňte následující tabulku:

	ω	η	χ
$\xi(x_1)$			
$\zeta(x_2)$			
$\vartheta(x_2)$			

Výsledky:

	ω	η	χ
$\xi(x_1)$	0	0	0
$\zeta(x_2)$	-1	-2	-8
$\vartheta(x_2)$	1	-2	0

274 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

4. Necht $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}^2$ jsou body euklidovského (topologického) prostoru, $x_1 = (1, 1)$, $x_2 = (0, 1)$, $x_3 = (2, 2)$. V tečném prostoru $T_{x_1}\mathbf{R}^2$ jsou zadány vektory $\xi_1(x_1) = (1, 0)$ a $\xi_2(x_1) = (1, 1)$, v tečném prostoru $T_{x_2}\mathbf{R}^2$ vektory $\zeta_1(x_2) = (1, -1)$ a $\zeta_2(x_2) = (0, 1)$ a v tečném prostoru $T_{x_3}\mathbf{R}^2$ $\vartheta_1(x_3) = (-1, 0)$ a $\vartheta_2(x_3) = (0, 1)$. Dále jsou zadány diferenciální formy $\omega = dx^1 \wedge dx^2$, $\eta = x^1 dx^1 \wedge dx^2 - x^2 dx^2 \wedge dx^1$, $\chi = r dr \wedge d\varphi$, kde $x^1 = r \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \varphi$. Vyplňte následující tabulku:

	ω	η	χ
$\xi_1(x_1), \xi_2(x_1)$			
$\zeta_1(x_2), \zeta_2(x_2)$			
$\vartheta_1(x_3), \vartheta_2(x_3)$			

Návod: Vyjádřete formy η a χ pomocí formy ω .

Výsledky:

	ω	η	χ
$\xi_1(x_1), \xi_2(x_1)$	1	2	1
$\zeta_1(x_2), \zeta_2(x_2)$	1	1	1
$\vartheta_1(x_3), \vartheta_2(x_3)$	-1	-4	-1

5. Necht \mathbf{R}^3 je euklidovský (topologický) prostor a $\omega, \eta, \chi \in \Lambda_2(\mathbf{R}^3)$ diferenciální formy,

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2, \quad \eta = dx^3 \wedge d(r^2), \quad \chi = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

kde $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. Vypočtete hodnoty tenzorů $\omega(x)$, $\eta(x)$ a $\chi(x)$ v bodě $x = (2, 0, 0)$ na vektorech $\xi(x), \zeta(x) \in T_x\mathbf{R}^n$, $\xi(x) = (1, 1, 1)$, $\zeta(x) = (1, 2, 3)$ a hodnotu tenzoru $\chi(x)$ v tomto bodě na vektorech $\xi(x)$, $\zeta(x)$ a $\vartheta(x)$, kde $\vartheta(x) = (-1, 2, 0)$.

Výsledky: $\omega(x)(\xi, \zeta) = 1$, $\eta(x)(\xi, \zeta) = -8$, $\chi(x)(\xi, \zeta, \vartheta) = -5$.

6. Jaké zobrazení indukuje forma $\omega = (x^1)^{-1} dx^1 + x^2 dx^2 \in \Lambda_1(\mathbf{R}^2)$ v bodě $x = (x^1, x^2) = (t, 0) \in \mathbf{R}^2$?

Výsledek: $\omega(x) = t^{-1} dt|_{x=(t,0)}$, $\omega(x)(\xi) = t^{-1}\xi^1(t, 0)$.

7. Dokažte přímo z definice první vlastnost vnější derivace uvedenou ve větě 12.26.

8. Vypočtete vnější derivace následujících forem definovaných v euklidovském prostoru \mathbf{R}^3 .

a)

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz,$$

b)

$$\omega = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy,$$

c)

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

d)

$$\omega = \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx + \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz,$$

e)

$$\omega = (y^2 z^2) dy \wedge dz + (x^2 z^2) dz \wedge dx + (x^2 y^2) dx \wedge dy,$$

12.3. OD ALGEBRY K ANALÝZE: TENZOROVÁ POLE A DIFERENCIÁLNÍ FORMY 275

f)

$$\omega = \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy \wedge dz + \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz \wedge dx + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx \wedge dy.$$

Výsledky: a) $d\omega = 0$, b) $d\omega = \frac{dx \wedge dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, c) $d\omega = 3 dx \wedge dy \wedge dz$, d) $d\omega = \frac{x(z^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy \wedge dz + \frac{y(x^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dz \wedge dx + \frac{z(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx \wedge dy$, e) $d\omega = 0$, f) $d\omega = -\frac{3xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx \wedge dy \wedge dz$.

9. Určete definiční obory následujících diferenciálních forem ω , rozhodněte, zda jsou tyto formy uzavřené, popřípadě exaktní. Pro každou exaktní formu najděte formu η , pro kterou je $\omega = d\eta$. Neexistuje-li forma η na celém definičním oboru formy ω , proveďte potřebné zúžení definičního oboru tak, aby na něm platilo $\omega = d\eta$.

a)

$$\omega = 4(x^2 - y^2)(x dx - y dy), \quad \omega \in \Lambda_1(\mathbf{R}^2),$$

b)

$$\omega = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1 + x^2} dy, \quad \omega \in \Lambda_1(\mathbf{R}^2),$$

c)

$$\omega = \frac{xz dy + xy dz - yz dx}{(x - yz)^2}, \quad \omega \in \Lambda_1(\mathbf{R}^3),$$

d)

$$\omega = \frac{dx - 3 dy}{z} + \frac{3y - x}{z^2} dz, \quad \omega \in \Lambda_1(\mathbf{R}^3),$$

e)

$$-\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dz \wedge dy + \frac{2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dy \wedge dx, \quad \omega \in \Lambda_2(\mathbf{R}^3),$$

f)

$$x^2 y dy \wedge dz + y^2 z dz \wedge dx + x z^2 dx \wedge dy, \quad \omega \in \Lambda_2(\mathbf{R}^3),$$

g)

$$\omega = (-x^1 \cos x^3) dx^2 \wedge dx^1 + ((x^1)^2 \sin x^3 \sin^2 x^2) dx^3 \wedge dx^2 - \\ - (x^1 \sin x^3 \sin x^2 \cos x^2) dx^3 \wedge dx^1, \quad \omega \in \Lambda_2(\mathbf{R}^3).$$

Výsledky: V pořadí definiční obor, $d\omega$, pro $d\omega = 0$ η , kde $\omega = d\eta$. K je ve všech případech reálná konstanta.

a) \mathbf{R}^2 , $d\omega = 0$, $\eta = x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 + K$,

b) \mathbf{R}^2 , $d\omega = 0$, $\eta = -\frac{1 - e^y}{1 + x^2} + K$,

c) $\mathbf{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = yz\}$, $d\omega \neq 0$,

d) $\mathbf{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0\}$, $d\omega = 0$, $\eta = \frac{x - 3y}{z} + K$,

e) $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $d\omega \neq 0$,

f) \mathbf{R}^3 , $d\omega \neq 0$,

g) \mathbf{R}^3 , $d\omega \neq 0$.

276 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

10. Je dána otevřená množina $D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \infty) \subset \mathbf{R}^3$ a zobrazení

$$f : D \ni x \longrightarrow f(x) \in \mathbf{R}^3,$$

$$f(x^1, x^2, x^3) = (y^1 f(x^1, x^2, x^3), y^2 f(x^1, x^2, x^3), y^3 f(x^1, x^2, x^3)),$$

zadané rovnicemi

$$y^1 f(x^1, x^2, x^3) = x^1 \cos x^2,$$

$$y^2 f(x^1, x^2, x^3) = x^1 \sin x^2,$$

$$y^3 f(x^1, x^2, x^3) = x^3.$$

- a) Zapište Jacobiho matici tohoto zobrazení v obecném bodě $x = (x^1, x^2, x^3)$.
- b) Vyjádřete tečný obraz libovolného vektoru $\xi(x)$, tj. $\zeta(f(x)) = T_x f(\xi(x))$, v bázi $\left(\frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_{f(x)}, \frac{\partial}{\partial y^2} \Big|_{f(x)}, \frac{\partial}{\partial y^3} \Big|_{f(x)} \right)$ tečného prostoru $T_{f(x)}\mathbf{R}^3$.
- c) Vypočtěte tečné obrazy bázových vektorů $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial x^3} \Big|_x$ tečného prostoru $T_x\mathbf{R}^3$ a jejich velikosti.
- d) V kapitole 5 vyhledejte odpovídající situaci.

Výsledky:

a)

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \cos x^2 & \sin x^2 & 0 \\ -x^1 \sin x^2 & x^1 \cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b) $\zeta(f(x)) = \zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Big|_{f(x)}, \zeta^1 = \xi^1 \cos x^2 - \xi^2 x^1 \sin x^2, \zeta^2 = \xi^1 \sin x^2 + \xi^2 x^1 \cos x^2, \zeta^3 = \xi^3,$

c) $T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) = (\cos x^2, \sin x^2, 0)$, velikost 1, $T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right) = (-x^1 \sin x^2, x^1 \cos x^2, 0)$, velikost x^1 , $T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \right) = (0, 0, 1)$, velikost 1.

11. Je dána otevřená množina $D = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \subset \mathbf{R}^3$ a zobrazení

$$f : D \ni x \longrightarrow f(x) \in \mathbf{R}^3,$$

$$f(x^1, x^2, x^3) = (y^1 f(x^1, x^2, x^3), y^2 f(x^1, x^2, x^3), y^3 f(x^1, x^2, x^3)),$$

zadané rovnicemi

$$y^1 f(x^1, x^2, x^3) = x^1 \sin x^2 \cos x^3,$$

$$y^2 f(x^1, x^2, x^3) = x^1 \sin x^2 \sin x^3,$$

$$y^3 f(x^1, x^2, x^3) = x^1 \cos x^2.$$

- a) Zapište Jacobiho matici tohoto zobrazení v obecném bodě $x = (x^1, x^2, x^3)$.
- b) Vyjádřete tečný obraz libovolného vektoru $\xi(x)$, tj. $\zeta(f(x)) = T_x f(\xi(x))$, v bázi $\left(\frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_{f(x)}, \frac{\partial}{\partial y^2} \Big|_{f(x)}, \frac{\partial}{\partial y^3} \Big|_{f(x)} \right)$ tečného prostoru $T_{f(x)}\mathbf{R}^3$.

12.3. OD ALGEBRY K ANALÝZE: TENZOROVÁ POLE A DIFERENCIÁLNÍ FORMY 277

- c) Vypočítejte tečné obrazy bázových vektorů $\frac{\partial}{\partial x^1}|_x, \frac{\partial}{\partial x^2}|_x, \frac{\partial}{\partial x^3}|_x$ tečného prostoru $T_x\mathbf{R}^3$ a jejich velikosti.
d) V kapitole 5 vyhledejte odpovídající situaci.

Výsledky:

a)

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \sin x^2 \cos x^3 & \sin x^2 \sin x^3 & \cos x^2 \\ x^1 \cos x^2 \cos x^3 & x^1 \cos x^2 \sin x^3 & -x^1 \sin x^2 \\ -x^1 \sin x^2 \sin x^3 & x^1 \sin x^2 \cos x^3 & 0 \end{pmatrix},$$

b) $(\xi^1 \ \xi^2 \ \xi^3)Df|_x$,

c) $T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) = (\sin x^2 \cos x^3, \sin x^2 \sin x^3, \cos x^2)$, velikost 1,

$T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right) = (x^1 \cos x^2 \cos x^3, x^1 \cos x^2 \sin x^3, -x^1 \sin x^2)$, velikost x^1 ,

$T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \right) = (-x^1 \sin x^2 \sin x^3, x^1 \sin x^2 \cos x^3, 0)$, velikost $x^1 \sin x^2$.

12. Je dána kompaktní množina $A = [1, 2] \times [1, 3] \subset \mathbf{R}^2$ a zobrazení

$$f: D \ni p \longrightarrow f(p) \in \mathbf{R}^2, \quad p = (u, v), \quad f(u, v) = (xf(u, v), yf(u, v)),$$

(při zjednodušeném zápisu $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$) zadané rovnicemi $y = ux^2$, $y = vx^{-1}$.

- a) Vyjádřete ze zadaných rovnic x a y jako funkce proměnných u a v a rozhodněte, zda lze toto zobrazení rozšířit na otevřenou množinu D obsahující definiční obor A .
b) Zapište Jacobiho matici tohoto zobrazení v obecném bodě $x = (u, v)$.
c) Vyjádřete tečný obraz libovolného vektoru $\xi(u, v) \in T_{(u,v)}\mathbf{R}^2$, tj. $\zeta(f(u, v)) = T_{(u,v)}f(\xi(u, v))$, v bázi $\left(\frac{\partial}{\partial x}|_{f(u,v)}, \frac{\partial}{\partial y}|_{f(u,v)} \right)$ tečného prostoru $T_{f(u,v)}\mathbf{R}^2$.
d) Vypočítejte tečné obrazy bázových vektorů $\frac{\partial}{\partial u}|_{(u,v)}, \frac{\partial}{\partial v}|_{(u,v)}$, tečného prostoru $T_{f(u,v)}\mathbf{R}^2$ a jejich velikosti.

Výsledky:

a) $x = u^{-1/3}v^{1/3}$, $y = u^{1/3}v^{2/3}$ (lze rozšířit na otevřenou množinu D obsahující A),

b)

$$Df(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} \\ \frac{1}{3}u^{-1/3}v^{-2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \end{pmatrix}, \quad \det Df(u, v) = -\frac{1}{3}u^{-1},$$

c) $(\zeta^1 \ \zeta^2) = (\xi^1 \ \xi^2)Df$,

d) $T_{(u,v)}f \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \left(-\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{1/3}, \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} \right)$, $T_{(u,v)}f \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = \left(\frac{1}{3}u^{-1/3}v^{-2/3}, \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \right)$.

13. Přímo z definice dokažte vlastnosti (12.154) a (12.155) ve větě 12.27.

14. Vypočítejte zpětný obraz forem dr , $d\vartheta$, $d\varphi$, $dr \wedge d\vartheta$, $d\varphi \wedge d\vartheta$, $d\varphi \wedge dr$, $dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi$ indukovaný zobrazením f^{-1} z příkladu 12.90.

Výsledky:

$$(f^{-1})^* dr = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (f^{-1})^* d\vartheta = \frac{xz dx + yz dy - (x^2 + y^2) dz}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)}, \quad (f^{-1})^* d\varphi = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

$$(f^{-1})^* dr \wedge d\varphi = \frac{-xz dy \wedge dz - yz dz \wedge dx + (x^2 + y^2) dx \wedge dy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$(f^{-1})^* dr \wedge d\vartheta = \frac{-y dy \wedge dz + x dz \wedge dx}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$(f^{-1})^* d\vartheta \wedge d\varphi = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$(f^{-1})^* dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi = \frac{dx \wedge dy \wedge dz}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

15. Transformace souřadnic v \mathbf{R}^2 , $f : (1, 2) \times (1, 3) \ni (u, v) \rightarrow (x, y) \in \mathbf{R}^2$ je dána vztahy $y = ux^2$, $y = vx^{-1}$.

Určete rovnice zobrazení f a vypočtete pullbacky f^*dx , f^*dy , $f^*dx \wedge dy$.

Výsledky: $f^* dx = -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{1/3} du + \frac{1}{3}u^{-1/3}v^{-2/3} dv$, $f^* dy = \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} du + \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} dv$,
 $f^*(dx \wedge dy) = -\frac{1}{3}u^{-1} du \wedge dv$.

16. Necht $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ a $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$ jsou diferencovatelná zobrazení. Dokažte:

- $T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f$,
- $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

17. Dokažte vlastnosti Lieovy derivace uvedené ve větě 12.28.

18. V euklidovském prostoru \mathbf{R}^2 je dáno vektorové pole $\xi = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$. Zapište obecně rovnice pro složky 1-formy $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2$, která je invariantní vzhledem k jednoparametrické grupě transformací $\{\alpha_u\}$ prostoru \mathbf{R}^2 příslušné vektorovému poli ξ . Zapište tyto rovnice pro případ, kdy vektorové pole ξ bude

- a) generátor elementární rotace $-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$,
- b) generátor elementární translace $\frac{\partial}{\partial x^1}$,
- c) generátor elementární translace $\frac{\partial}{\partial x^2}$.

Najděte alespoň některá řešení získaných rovnic v případech a), b), c).

Výsledky:

- a) $\omega_2 - x^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2}$, $-\omega_1 - x^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2}$,
- b) $\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} = 0$, $\frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} = 0$, $\omega = f(x^2) dx^1 + g(x^2) dx^2$, f, g jsou libovolné funkce,
- c) $\frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} = 0$, $\omega = \varphi(x^1) dx^1 + \psi(x^1) dx^2$, φ, ψ jsou libovolné funkce,

19. Dokažte vektorové identity (12.178, 12.179, 12.180).

12.4 Integrál z diferenciálních forem

V tuto chvíli máme připraveno vše potřebné, co se týká integrovaných objektů (integrandů). Pokud však jde o integrační obory, je co dohánět. Zatím jsme integrovali pouze na kvádrech a n -rozměrných jordanovsky měřitelných množinách v \mathbf{R}^n (nepočítáme-li zobecnění v odstavcích 12.1.11 a 12.1.12). V tomto odstavci dále rozšíříme „zásobník“ možných integračních oborů a definujeme integrál z diferenciálních forem.

12.4.1 Integrační obory hranaté i šišaté, placaté i křivé — singulární krychle a řetězce v \mathbf{R}^n , křivky, plochy a objemy v \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^3

Typicky „hranatými“ integračními obory jsou pochopitelně n -rozměrné kvádry v \mathbf{R}^n . Ty jsou současně i „placaté“. Mají totiž stejnou dimenzi jako euklidovský prostor, jehož jsou podmnožinami — například úsečku na přímce či obdélník v rovině jistě schválíme jako útvary „hrnaté“ i „placaté“. Kruh či jiný dvojrozměrný útvar v rovině je rovněž „placatý“, ale není již „hrnatý“. Integrovat se však dá po křivce v rovině či trojrozměrném euklidovském prostoru (to jsme viděli dokonce už v prvním dílu v odstavcích 2.3.5 a 2.3.6, a pak v druhém dílu v odstavci 9.3.3), nebo po dvojrozměrné ploše v trojrozměrném prostoru (vzpomeňte na tok vektorového pole plochou v odstavci 9.4.1 a na úvahy v odstavci 12.1.10). A samozřejmě lze integrál zobecnit na n -rozměrný útvar v m -rozměrném prostoru pro $n < m$. Takové útvary mohou být i „křivé“. Samozřejmě, že takovou „klasifikaci“ nemůže matematik brát vážně. Je třeba integrační obory pořádně definovat. Hned k tomu přistoupíme.

Spojité diferencovatelné prosté zobrazení

$$c: [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow c(u) = (x^1 c(u), \dots, x^m c(u)) \in \mathbf{R}^m, \quad (12.181)$$

$m \geq n$, se nazývá *hladký kousek n -rozměrné plochy v \mathbf{R}^m* . Zobrazení c se také nazývá *parametrizace* kousku plochy. (Poznamenejme, že zobrazení se nazývá *spojitě diferencovatelné*, jsou-li parciální derivace jeho složek spojité.)

Diferencovatelné zobrazení

$$c: [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow c(u) = (x^1 c(u), \dots, x^m c(u)) \in \mathbf{R}^m, \quad (12.182)$$

$m \geq n$, jehož Jacobiho matice má v každém bodě $u \in [0, 1]^n$ hodnost n , se nazývá *n -rozměrná singulární krychle v \mathbf{R}^m* . Zobrazení c se také nazývá *parametrizace n -rozměrné singulární krychle*.

Zobrazení

$$I^n: [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow I^n(u) = (x^1 I^n(u), \dots, x^n I^n(u)) \in \mathbf{R}^n \quad (12.183)$$

o rovnicích

$$x^i I^n(u^1, \dots, u^n) = u^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

se nazývá *n -rozměrná standardní krychle v \mathbf{R}^n* , zobrazení

$$I^n : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow I^n(u) = (x^1 I^n(u), \dots, x^m I^n(u)) \in \mathbf{R}^m \quad (12.184)$$

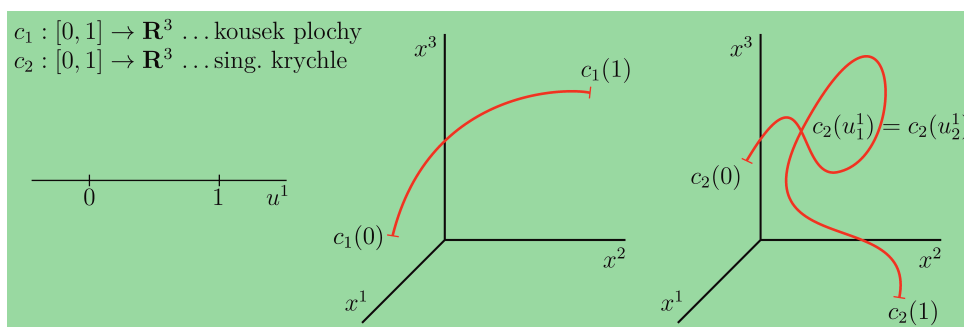
o rovnicích

$$x^{i_k} I^n(u^1, \dots, u^n) = u^{i_k}, \quad x^j I^n(u^1, \dots, u^n) = \alpha, \quad \alpha = 0 \text{ nebo } 1,$$

pro libovolný výběr n indexů $i_k \in \{1, \dots, m\}$, $1 \leq k \leq n$ a $j \neq i_1, \dots, i_n$, se nazývá n -rozměrná standardní krychle v \mathbf{R}^m , $m > n$.

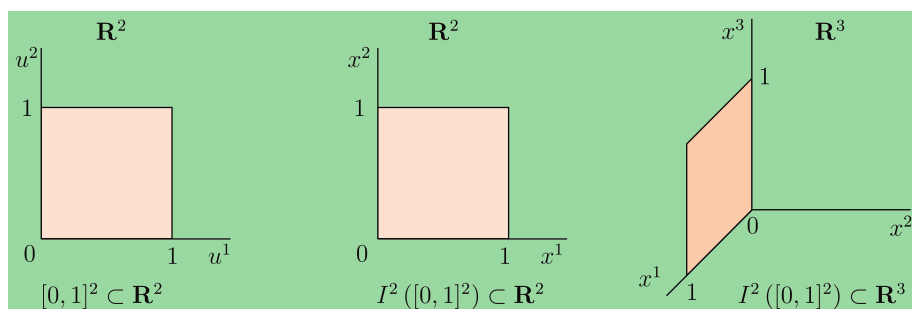
Pozn.: V symbolu I^n pro zápis n -rozměrné standardní krychle nebudeme nijak rozlišovat, jakou dimenzi má euklidovský prostor \mathbf{R}^m , $m \geq n$, v němž je standardní krychle vnořena. Poznáme to z kontextu problému.

Definice kousku plochy a singulární krychle vypadají tak trochu podobně. Rozdíly názorně ukazuje obrázek 12.46. V jeho levé části je hladký kousek jednorozměrné plochy v \mathbf{R}^3 , který spolu jeho parametrizací můžeme nazvat *oblouk* (odstavec 2.3.5). V pravé části obrázku je jednorozměrná singulární krychle v \mathbf{R}^3 . Obrázek 12.47 znázorňuje dvojrozměrnou standardní krychli v \mathbf{R}^2 (vlevo), resp. v \mathbf{R}^3 (vpravo).



Obrázek 12.46 Kousek plochy a singulární krychle.

Kousek plochy jsme definovali jako hladký, zatímco singulární krychli stačí diferencovatelnost. Bude-li zobrazení c parametrizující singulární krychli dokonce spojitě diferencovatelné, půjde o hladkou singulární krychli. Kousek plochy se nesmí uzavírat, ani sám sebe protínat (to plyne z požadavku, že zobrazení c je prosté). U n -rozměrné singulární krychle požadavek prostého zobrazení chybí, je nahrazen slabším požadavkem maximální hodnoty Jacobiho matice, $hDc(u) = n$ pro libovolný bod $u \in [0, 1]^n$. Singulární krychle se tedy uzavírat, resp. sama sebe protínat může, avšak v žádné části definičního oboru nesmí „zdegenerovat“ v útvar nižší dimenze než n . I když je názvosloví možná neobvyklé, má svou logiku. Definičním oborem zobrazení c je skutečná (jednotková) n -rozměrná krychle v \mathbf{R}^n — odtud název „krychle“. „Singulární“ proto, že obraz $c([0, 1]^n)$ má nižší (v krajním případě stejný) rozměr než eukli-



Obrázek 12.47 Standardní krychle.

dovský prostor \mathbf{R}^m , v němž je vnořen. Všimněte si, že hladký n -rozměrný kousek plochy v \mathbf{R}^m splňuje i definici spojitě diferencovatelné n -rozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^m .

Některé čtenáře jistě napadne otázka, proč jsou definiční obory parametrizací hladkých kousků ploch a singulárních krychlí omezeny na „skutečnou“ krychli $[0, 1]^n \subset \mathbf{R}^n$. Vždyť třeba v případě parametrizace povrchu koule se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R jsme zvyklí použít jako parametrů sférického úhlu $u^1 = \vartheta \in [0, \pi]$ a azimutálního úhlu $u^2 = \varphi \in [0, 2\pi]$. Parametrizace povrchu koule při této volbě parametrů je

$$\mathcal{S} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \ni (\vartheta, \varphi) \longrightarrow (x\mathcal{S}(\vartheta, \varphi), y\mathcal{S}(\vartheta, \varphi), z\mathcal{S}(\vartheta, \varphi)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$x = x\mathcal{S}(\vartheta, \varphi) = R \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = y\mathcal{S}(\vartheta, \varphi) = R \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$z = z\mathcal{S}(\vartheta, \varphi) = R \cos \vartheta.$$

Chceme-li však povrch koule parametrizovat tak, aby definičním oborem parametrizace byl čtverec $[0, 1]^2$, situace se poněkud zkomplikuje:

$$c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow (xc(u, v), yc(u, v), zc(u, v)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$x = xc(u, v) = R \sin \pi u \cos 2\pi v,$$

$$y = yc(u, v) = R \sin \pi u \sin 2\pi v,$$

$$z = zc(u, v) = R \cos \pi u.$$

Parametrizaci \mathcal{S} snadno převedeme na parametrizaci c a nazpět lineární transformací

$$\vartheta = \pi u, \quad \varphi = 2\pi v, \quad u = \frac{\vartheta}{\pi}, \quad v = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

V obecném případě lze „přeparametrizování“, tj. přechod od definičního oboru $[0, 1]$ k definičnímu oboru $[a, b]$ provést lineární transformací

$$\alpha : [0, 1] \ni u \longrightarrow \alpha(u) = w \in [a, b], \quad w = a + (b - a)u, \quad u = -\frac{a}{b - a} + \frac{w}{b - a}.$$

Definiční obor parametrizace odpovídající geometrickému významu parametrů (například úhlů) je vhodný pro praktické počítání. Definiční obor $[0, 1]$ a jeho kartézské mocniny se zase velmi pohodlně použijí při důkazech obecných tvrzení. V obecných postupech budeme proto používat parametrizaci tak, jak je zavedena v definici hladkého kousku plochy, resp. singulární krychle. Při výpočtech integrálů budeme pracovat s parametrizacemi odpovídajícími geometrickému významu parametrů. Věta o transformaci integrálu (pro jednonásobný integrál věta o substituční metodě) zajišťuje, že uvedená transformace nemá vliv na výsledek integrace:

$$\int_{[a,b]} f(w) dw = \int_{[0,1]} f[a + (b - a)u] \cdot (b - a) du, \quad [a, b] = \alpha([0, 1]).$$

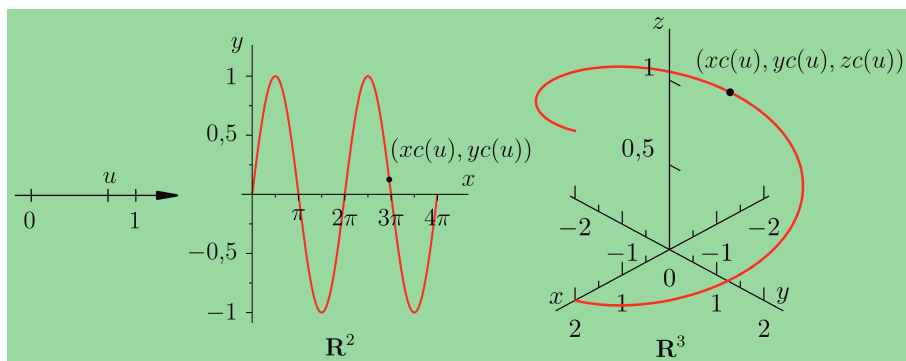
V další části tohoto odstavce uvedeme několik příkladů parametrizací hladkých kousků ploch, resp. singulárních krychlí v \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^3 .

Příklad 12.97: Oblouky a křivky

Uvedeme několik parametrizací známých oblouků a křivek v \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^3 , a to jednak v obvyklém tvaru respektujícím geometrický význam (jediného) parametru, jednak ve tvaru, kdy je obor parametru „redukován“ na interval $[0, 1]$.

$$\mathcal{C} : [0, 4\pi] \ni w \longrightarrow (x\mathcal{C}(w), y\mathcal{C}(w)) \in \mathbf{R}^2, \\ x\mathcal{C}(w) = w, \quad y\mathcal{C}(w) = \sin w.$$

Jedná se o část grafu sinusovky (obrázek 12.48).



Obrázek 12.48 Oblouky a křivky.

Zobrazení je spojitě diferencovatelné a prosté. Je to však jednorozměrný hladký kousek plochy, resp. jednorozměrná singulární krychle v \mathbf{R}^2 ? Podle definic nikoli, protože oborem parametru w není interval $[0, 1]$, nýbrž interval $[0, 4\pi]$. Parametrizace

$$c : [0, 1] \ni u \longrightarrow (xc(u), yc(u)) \in \mathbf{R}^2, \quad xc(u) = 4\pi u, \quad yc(u) = \sin 4\pi u$$

již splňuje jak definici hladkého jednorozměrného kousku „plochy“ v \mathbf{R}^2 , tak definici (spojitě diferencovatelné) jednorozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^2 . Obrazy $\mathcal{C}([0, 4\pi])$ a $c([0, 1])$ jsou shodné množiny. Zobrazení

$$\mathcal{C} : [0, 4\pi] \ni w \longrightarrow (x\mathcal{C}(w), y\mathcal{C}(w)) \in \mathbf{R}^2,$$

$$x = x\mathcal{C}(w) = \cos w, \quad y = y\mathcal{C}(w) = \sin w.$$

rovněž není parametrizací oblouku ani jednorozměrné singulární krychle. Je parametrizací jednotkové kružnice v rovině se středem v počátku soustavy souřadnic, která počátek „obíhá“ dvakrát. Přeparametrizováním $w = 4\pi u$ získáme parametrizaci jednorozměrné singulární krychle, nikoli však oblouku (pro hodnoty parametru $u \in [0, \frac{1}{2})$ a $u + \frac{1}{2}$ dostaneme stejný bod v rovině, parametrizaci, která by byla prostá, nenajdeme). Dalším příkladem oblouku a jednorozměrné singulární krychle, tentokrát v \mathbf{R}^3 , je zobrazení

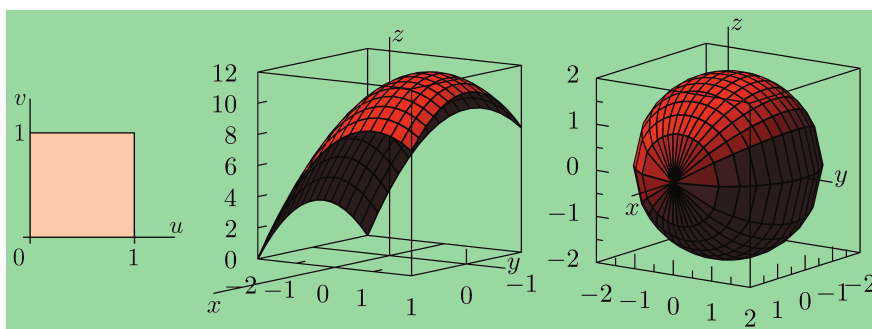
$$c : [0, 1] \ni u \longrightarrow (xc(u), yc(u), zc(u)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$x = xc(u) = R \cos 2\pi u, \quad y = yc(u) = R \sin 2\pi u, \quad z = zc(u) = bu,$$

parametrizující jeden závit šroubovice (obrázek 12.48). Jejím kolmým průmětem do souřadnicové roviny xy je kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R . Výška jejího závitu je b .

Příklad 12.98: Plochy a objemy

Obrázek 12.49 znázorňuje graf funkce $z = f(x, y) = 12 - 3x^2 - (y - 1)^2$ pro $(x, y) \in [-1, 1] \times [-2, 2]$, jíž jsme se zabývali v odstavci 12.1.1, a povrch koule se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem $R = 2$.



Obrázek 12.49 Plochy a objemy.

Tyto plochy se nyní pokusíme parametrizovat tak, abychom je mohli popsat jako kousek plochy, popřípadě dvojrozměrnou singulární krychli v \mathbf{R}^3 . Pro parametrizaci první z obou ploch použijeme lineární transformaci $x = -1 + 2u$, $y = -2 + 4v$. Plocha je tak hladkým kouskem dvojrozměrné plochy v \mathbf{R}^3 parametrizovaným rovnicemi

$$c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow (xc(u, v), yc(u, v), zc(u, v)) \in \mathbf{R}^3$$

$$x = -1 + 2u, \quad y = -2 + 4v, \quad z = 12u(1 - u) + 8v(3 - 2v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2,$$

a současně i dvojrozměrnou singulární krychlí v \mathbf{R}^3 . Parametrizovaný povrch koule je dvojrozměrnou singulární krychlí, parametrizovat jej lze například takto:

$$c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow (xc(u, v), yc(u, v), zc(u, v)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$\begin{aligned}x &= xc(u, v) = 2 \cos \pi u, \\y &= yc(u, v) = 2 \sin \pi u \cos 2\pi v, \\z &= zc(u, v) = 2 \sin \pi u \sin 2\pi v.\end{aligned}$$

Celou kouli, včetně jejího povrchu, lze popsat jako trojrozměrnou singulární krychli v \mathbf{R}^3 ,

$$c : [0, 1]^3 \ni (r, u, v) \longrightarrow (xc(r, u, v), yc(r, u, v), zc(r, u, v)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$x = 2r \cos \pi u, \quad y = 2r \sin \pi u \cos 2\pi v, \quad z = 2r \sin \pi u \sin 2\pi v, \quad (r, u, v) \in [0, 1]^3.$$

Povrch a objem elipsoidu o poloosách a, b, c bychom jako dvojrozměrnou, resp. trojrozměrnou singulární krychli v \mathbf{R}^3 parametrizovali pomocí *zobecněných sférických souřadnic*

$$c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow (xc(u, v), yc(u, v), zc(u, v)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$\begin{aligned}x &= xc(u, v) = a \sin \pi u \cos 2\pi v, \\y &= yc(u, v) = b \sin \pi u \sin 2\pi v, \\z &= zc(u, v) = c \cos \pi u,\end{aligned}$$

resp.

$$c : [0, 1]^3 \ni (r, u, v) \longrightarrow (xc(r, u, v), yc(r, u, v), zc(r, u, v)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$\begin{aligned}x &= xc(u, v) = ar \sin \pi u \cos 2\pi v, \\y &= yc(u, v) = br \sin \pi u \sin 2\pi v, \\z &= zc(u, v) = cr \cos \pi u.\end{aligned}$$

I když jsou hladké kousky ploch a singulární krychle již dost obecné pro vyjádření integračních oborů, přece jen ještě nevystihují všechny možnosti. Představme si jako integrační obor třeba obvod čtverce $[0, 1]^2$ v \mathbf{R}^2 . Každou z jeho stran lze sice parametrizovat jako standardní jednorozměrnou krychli v \mathbf{R}^2 , pro jejich sjednocení však parametrizaci odpovídající jednorozměrné singulární krychli nenajdeme. Přesto křivkový integrál po „obvodové“ křivce čtverce počítat umíme: jednoduše sečteme integrály po jednotlivých hranách. Dokonce jsme tak i postupovali v odstavci 9.4.1 v příkladu 9.79. Integračními obory, které jsou obecnější než n -rozměrné singulární krychle a zahrnují i takové útvary, jakým je třeba právě obvod „obyčejného“ čtverce nebo povrch „obyčejné“ krychle, jsou n -rozměrné singulární řetězce. Zavádíme je jako formální celočíselné lineární kombinace libovolného konečného počtu s n -rozměrných singulárních krychlí c_1, c_2, \dots, c_s vztahem typu

$$\Gamma = k_1 c_1 + k_2 c_2 + \dots + k_s c_s, \quad k_j \in \mathbf{Z}, \quad 1 \leq j \leq s.$$

Je ovšem třeba vysvětlit, co vlastně takový vztah znamená. Nejprve nepřesně, ale názorně. Zatím jsme sice integrál z diferenciálních forem ještě nezavedli, ale směřujeme k takové definici, v níž diferenciální n -formy budou integrovanými objekty a n -rozměrné hladké kousky ploch

a n -rozměrné singulární krychle integračními obory. Integrál pak budeme označovat symbolem $\int_c \omega$. Budeme potřebovat, aby n -rozměrný singulární řetězec Γ „fungoval“ tak, abychom mohli psát

$$\int_{\Gamma} \omega = k_1 \int_{c_1} \omega + k_2 \int_{c_2} \omega + \cdots + k_s \int_{c_s} \omega.$$

Definici integrálu však zatím nemáme. Definujeme proto n -rozměrný singulární řetězec jinak a později uvidíme, že bude mít i z hlediska integrování potřebné vlastnosti.

Označme $\mathcal{C}_{n,m}$ množinu všech n -rozměrných singulárních krychlí v \mathbf{R}^m , $m \geq n$. n -rozměrným singulárním řetězcem v \mathbf{R}^m rozumíme funkci

$$\Gamma : \mathcal{C}_{n,m} \ni c \longrightarrow \Gamma(c) \in \mathbf{Z},$$

kde \mathbf{Z} je množina všech celých čísel, takovou, že $\Gamma(c) = 0$ s výjimkou konečného počtu s singulárních krychlí c_1, \dots, c_s . Pro každou singulární krychli $c \in \mathcal{C}_{n,m}$ označme Γ_c takový řetězec, pro který $\Gamma_c(c) = 1$ a $\Gamma_c(c') = 0$ pro každou krychli $c' \in \mathcal{C}_{n,m}$, pro kterou je $c' \neq c$.

Definice sama se nejeví příliš průhledná. Uvědomme si však vlastnosti řetězců, které z ní vyplývají. Předpokládejme, že Γ a Γ' jsou dva řetězce (samozřejmě máme na mysli n -rozměrné v \mathbf{R}^m). Nechť c_1 až c_s jsou n -rozměrné singulární krychle, pro něž je hodnota řetězce Γ nenulová, a c'_1 až c'_r n -rozměrné singulární krychle, pro něž je nenulová hodnota řetězce Γ' . Z definice je zřejmé, že funkce $\Gamma + \Gamma'$ a $k\Gamma$, $k \in \mathbf{Z}$ (v obvyklém smyslu součtu funkcí a číselného násobku funkce) jsou také řetězce. Předpokládejme například, že řetězce Γ a Γ' přiřazují singulárním krychlím celá čísla podle následující tabulky, přičemž jejich hodnota na krychlích, které v tabulce nejsou zapsány, je nulová. Poslední řádek tabulky udává hodnoty řetězce $-\Gamma + 2\Gamma'$ na uvedených krychlích, přičemž jeho hodnota na krychlích, které v tabulce uvedeny nejsou, je rovněž nulová.

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
Γ	-1	3	0	2	-4
Γ'	0	1	5	0	-2
$-\Gamma + 2\Gamma'$	1	-1	10	-2	0

Speciálním případem řetězce je řetězec typu Γ_c . Nechť Γ je libovolný řetězec a nechť $\Gamma(c_j) = k_j$, $1 \leq j \leq s$, kde c_1, \dots, c_s jsou singulární krychle, pro něž je hodnota řetězce Γ nenulová. Je zřejmé, že platí

$$\Gamma = k_1 \Gamma_{c_1} + \cdots + k_s \Gamma_{c_s}.$$

Vzhledem k definici řetězce Γ_c můžeme rovnou označit $\Gamma_c = c$ a psát

$$\Gamma = k_1 c_1 + \cdots + k_s c_s.$$

Význam pojmu n -rozměrný singulární řetězec v \mathbf{R}^m se později vyjasní ještě lépe.

12.4.2 Stěny a hranice (okraje) singulárních krychlí a řetězců

Nyní využijeme pojmu singulárního řetězce k tomu, abychom jako integrační obory popsali i útvary ohraničující singulární krychle: již dříve zmíněnou uzavřenou lomenou čáru na obvodu čtverce, plochu tvořenou stěnami trojrozměrné krychle, apod. Obecně tedy půjde především o útvar ∂c ohraničující n -rozměrnou singulární krychli, tj. její $(n - 1)$ -rozměrný *okraj*, zvaný také *hranice*. Uvědomme si znovu, že nestačí specifikovat okraj singulární krychle jako množinu bodů, ale je třeba jej popsat buď také jako singulární krychli, bude-li to možné, nebo jako $(n - 1)$ -rozměrný singulární řetězec daný celočíselnou formální lineární kombinací singulárních krychlí. Jejich parametrizace budou přímo „indukovány“ parametrizací samotné původní singulární krychle. Nejprve uvedeme příklad, který je názorný a předjímá, jak bude vypadat obecný postup.

Pozn.: Hned úvodem jedna terminologická poznámka: název „hranice“ pro útvary ohraničující integrační obory nemusejí být jejich hranicemi v topologickém smyslu. Například křivka \mathcal{C} ohraničující plochu S v trojrozměrném euklidovském prostoru není její topologickou hranicí. Plocha S v \mathbf{R}^3 sama, včetně této křivky, je totiž z topologického hlediska množinou, jejíž vnitřek je prázdná množina, vnějšek je $\mathbf{R}^3 \setminus S$ a hranicí je množina $h(S) = \bar{S}$, tj. uzávěr množiny S . V případě, že množina S obsahuje hraniční křivku, je $h(S) = S$. Název „okraj“ pro křivku \mathcal{C} by proto byl pro odlišení vhodnější. V literatuře je však přesto název „hranice plochy“ obvyklejší, zřejmě proto, že z věcného hlediska záměna pojmů „okraj“ a „hranice“ nehrozí. I my zůstaneme u termínu „hranice“.

Příklad 12.99: Hranice čtverce a „obyčejné“ krychle

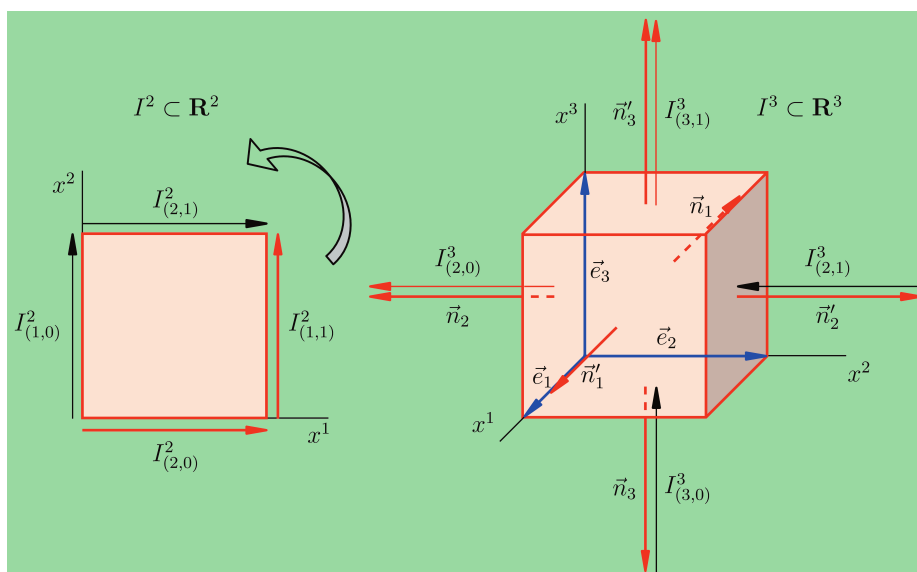
Strany čtverce, resp. stěny krychle lze parametrizovat, tj. popsat jako jednorozměrné, resp. dvojrozměrné singulární krychle. Jde tedy o to, jak z nich „poskládat“ správný řetězec. Formální postup ukážeme na případech dvojrozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^2 (tj. čtverce) a trojrozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^3 (tj. „obyčejné“ krychle). Situaci zachycuje obrázek 12.50.

Všimněme si jeho levé části. Je v ní znázorněna dvojrozměrná standardní krychle v \mathbf{R}^2 , tj. jednotkový čtverec, s parametrizací

$$I^2 : [0, 1]^2 \ni (u^1, u^2) \longrightarrow (x^1 I^2(u^1, u^2), x^2 I^2(u^1, u^2)) \in \mathbf{R}^2,$$

$$x^1 = x^1 I^2(u^1, u^2) = u^1, \quad x^2 = x^2 I^2(u^1, u^2) = u^2, \quad \text{zjednodušeně } x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2.$$

(Definiční obor zobrazení I^2 , tj. čtverec $[0, 1]^2$, není v obrázku zakreslen, je to zbytečné.) Ze čtyř stran ohraničujících obor hodnot dvojrozměrné standardní krychle, tj. obrazec $I^2([0, 1]^2)$, potřebujeme vytvořit jednorozměrný singulární řetězec tak, aby na sebe navazovaly a vytvořily uzavřenou křivku orientovanou v kladném geometrickém směru (proti chodu hodinových ručiček), jak znázorňuje bílá šipka. Všimněme si, že bodům ležícím na dolní a horní straně čtverce odpovídá pevná hodnota parametru u^2 , konkrétně $u^2 = 0$ na dolní a $u^2 = 1$ na



Obrázek 12.50 Hranice standardních krychlí jako singulární řetězce.

horní straně. Obdobná je situace na bočních stranách, kde $u^1 = 0$ (vlevo) a $u^1 = 1$ (vpravo). Na základě toho vytvoříme pomocí zobrazení I^2 parametrizace jednotlivých stran tak, aby to byly jednorozměrné singulární krychle. K tomu stačí jediný parametr, který označíme t^1 . Hned je vidět, že zobrazení

$$I^1_{\text{dolní}} : [0, 1] \ni t^1 \longrightarrow I^1_{\text{dolní}}(t^1) = I^2(t^1, 0) \in \mathbf{R}^2,$$

$$I^1_{\text{horní}} : [0, 1] \ni t^1 \longrightarrow I^1_{\text{horní}}(t^1) = I^2(t^1, 1) \in \mathbf{R}^2$$

jsou jednorozměrné standardní krychle v \mathbf{R}^2 parametrizující dolní a horní stranu čtverce. Obdobně

$$I^1_{\text{levá}} : [0, 1] \ni t^1 \longrightarrow I^1_{\text{levá}}(t^1) = I^2(0, t^1) \in \mathbf{R}^2,$$

$$I^1_{\text{pravá}} : [0, 1] \ni t^1 \longrightarrow I^1_{\text{pravá}}(t^1) = I^2(1, t^1) \in \mathbf{R}^2$$

jsou jednorozměrné standardní krychle v \mathbf{R}^2 parametrizující levou a pravou stranu čtverce. Označovat zobrazení parametrizující strany tak, jak jsme to právě udělali, není příliš vhodné — čím bychom nahradili indexy „horní“, „dolní“, „levá“, „pravá“ v případě vícerozměrných útvarů? Zvolíme proto logičtější označení, které bude obsahovat jak informaci o dimenzi původní krychle, tak informaci o tom, o kterou „stěnu“ se jedná a jaké hodnoty (z možností 0, resp. 1) nabývá parametr, který je na ní konstantní. Pro dvojrozměrnou standardní krychli (čtverec) na obrázku 12.50 vlevo označíme

$$I^1_{\text{levá}} = I^2_{(1,0)}, \quad I^1_{\text{pravá}} = I^2_{(1,1)}, \quad I^1_{\text{dolní}} = I^2_{(2,0)}, \quad I^1_{\text{horní}} = I^2_{(2,1)}. \quad (12.185)$$

Označení $I^2_{i,\alpha}$, kde $i = 1, 2$, $\alpha = 0, 1$, znamená, že na i -té pozici v zápisu stěny pomocí zobrazení I^2 je pevná hodnota $\alpha = 0$, nebo $\alpha = 1$, na zbývajících pozicích je jediný parametr t^1 . Konkrétně

$$I^2_{(1,0)}(t^1) = I^2(0, t^1), \quad I^2_{(1,1)}(t^1) = I^2(1, t^1), \quad I^2_{(2,0)}(t^1) = I^2(t^1, 0), \quad I^2_{(2,1)}(t^1) = I^2(t^1, 1).$$

Podle tohoto vzoru už snadno popíšeme stěny trojrozměrné standardní krychle

$$I^3 : [0, 1]^3 \ni (u^1, u^2, u^3) \longrightarrow I^3(u^1, u^2, u^3) = \\ = (x^1 I^3(u^1, u^2, u^3), x^2 I^3(u^1, u^2, u^3), x^3 I^3(u^1, u^2, u^3)) = (u^1, u^2, u^3).$$

Definičním oborem parametrizace všech stěn je $[0, 1]^2$, parametry označíme třeba $t^1, t^2 \in [0, 1]^2$:

$$I_{(1,0)}^3(t^1, t^2) = I^3(0, t^1, t^2), \quad I_{(1,1)}^3(t^1, t^2) = I^3(1, t^1, t^2), \quad I_{(2,0)}^3(t^1, t^2) = I^3(t^1, 0, t^2), \\ I_{(2,1)}^3(t^1, t^2) = I^3(t^1, 1, t^2), \quad I_{(3,0)}^3(t^1, t^2) = I^3(t^1, t^2, 0), \quad I_{(3,1)}^3(t^1, t^2) = I^3(t^1, t^2, 1).$$

Všimněme si nyní orientace stěn. Nejprve u čtverce na obrázku 12.50 vlevo. Jediná proměnná t^1 , která parametrizuje každou ze stran čtverce, roste vždy od nuly do jedné v kladném směru souřadnicové osy, podél níž se mění. U stěn $I_{(1,1)}^2$ (pravá) a $I_{(2,0)}^2$ (dolní) to odpovídá směru, v němž potřebujeme mít orientovanou celou hranici (označeno červenými šipkami). Naopak u stěn $I_{(1,0)}^2$ (levá) a $I_{(2,1)}^2$ (horní) vzniká orientace opačná (černé šipky). Tyto stěny je třeba „přeorientovat“. Formálně se tak stane pomocí znaménka „minus“. Hranici tak můžeme zapsat jako jednorozměrný singulární řetězec

$$\partial I^2 = -I_{(1,0)}^1 + I_{(1,1)}^2 + I_{(2,0)}^2 - I_{(2,1)}^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I_{(i,\alpha)}^2.$$

V tomto zápisu jsou již všechny strany čtverce „přeorientovány“ tak, aby celá hranice byla orientována „žádoucím směrem“, tj. proti chodu hodinových ručiček.

Jak je to s orientací povrchu trojrozměrné krychle? Zde samozřejmě nemáme něco jako „kladný, resp. záporný směr“ jako tomu bylo u křivky. Můžeme však použít normálu v povrchu (s výjimkou hran, kde má vektorové pole normály nespojitosti — „přeskok z jedné stěny na jinou“). V každém bodě stěny (s již zmíněnou výjimkou bodů na hranách) můžeme zvolit buď normálu směřující z krychle ven, nebo normálu směřující dovnitř. Obvyklé je orientovat trojrozměrná tělesa *vnější jednotkovou normálou*. Vnější normály jsou také zakresleny v obrázku 12.50. Orientaci pomocí jednotkové vnější normály považujeme tedy za „správnou“ a podívejme se, jak jsou s ní v souladu orientace jednotlivých stěn, které jsou indukovány jejich parametrizací $I_{(i,\alpha)}^3(t^1, t^2)$. Vezměme třeba stěnu $I_{(3,0)}^3(t^1, t^2) = I^3(0, t^1, t^2)$, tj. dolní stěnu krychle. Platí

$$x^1 I_{(3,0)}^3(t^1, t^2) = x^1 I^3(t^1, t^2, 0) = t^1, \quad x^2 I_{(3,0)}^3 = x^2 I^3(t^1, t^2, 0) = t^2, \quad x^3 I_{(3,0)}^3 = x^3 I^3(t^1, t^2, 0) = 0.$$

Parametr t^1 (první v pořadí) roste podél vektoru \vec{e}_1 , parametr t^2 (druhý v pořadí) podél vektoru \vec{e}_2 . Vektorový součin vektorů \vec{e}_1 a \vec{e}_2 (v tomto pořadí) je roven jednotkové normále ke stěně $I_{(3,0)}^3$, avšak směřující *dovnitř* (černá šipka v obrázku 12.50). Nedává tedy správnou orientaci normály \vec{n}_3 , která je vyznačena červenou šipkou. Takto si můžete vyzkoušet i další stěny a zjistíte, že je-li součet indexů i a α odpovídající stěně $I_{(i,\alpha)}^3$ sudý, dává parametrizace stěny správnou (vnější) normálu, je-li lichý, vzniká orientace nesprávná (vnitřní). Tyto stěny je třeba přeorientovat. Hranice trojrozměrné standardní krychle je tak dvojrozměrným singulárním řetězcem tvaru

$$\partial I^3 = \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I_{(i,\alpha)}^3.$$

Tento řetězec je formálním součtem „správně orientovaných“ stěn.

Pojmy zavedené v předchozím příkladu snadno zobecníme.

(i, α) -stěnou n -rozměrné standardní krychle v \mathbf{R}^n

$$I^n : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow (x^1 I^n(u^1, \dots, u^n), \dots, x^n I^n(u^1, \dots, u^n)) \in \mathbf{R}^n,$$

$$x^i I^n(u^1, \dots, u^n) = u^i,$$

rozumíme zobrazení

$$I_{(i,\alpha)}^n : [0, 1]^{n-1} \ni t = (t^1, \dots, t^{n-1}) \longrightarrow \quad (12.186)$$

$$\longrightarrow (x^1 I_{(i,\alpha)}^n(t^1, \dots, t^{n-1}), \dots, x^n I_{(i,\alpha)}^n(t^1, \dots, t^{n-1})) \in \mathbf{R}^n,$$

$$x^j = x^j I_{(i,\alpha)}^n(t^1, \dots, t^{n-1}) = t^j, \quad 1 \leq j < i,$$

$$x^i = x^i I_{(i,\alpha)}^n(t^1, \dots, t^{n-1}) = \alpha, \quad \alpha = 0 \text{ nebo } 1, \quad (12.187)$$

$$x^j = x^j I_{(i,\alpha)}^n(t^1, \dots, t^{n-1}) = t^{j-1}, \quad i < j \leq n.$$

Hranicí n -rozměrné standardní krychle v \mathbf{R}^n rozumíme $(n-1)$ -rozměrný singulární řetězec

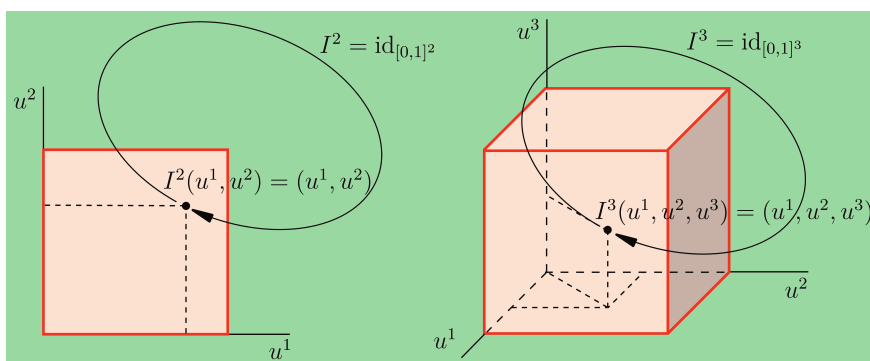
$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I_{(i,\alpha)}^n. \quad (12.188)$$

Příklad 12.100: Standardní krychle jako identita

Z definice n -rozměrné standardní krychle v \mathbf{R}^n je vidět, že toto zobrazení je v podstatě identita. Proto není nutné, abychom jeho složky značili jinak než proměnné. Můžeme proto psát

$$I^n : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow I^n(u) \in \mathbf{R}^n, \quad u^i I^n(u^1, \dots, u^n) = u^i,$$

Formální rozdíl ukazuje obrázek 12.51, vlevo pro I^2 , vpravo pro I^3 .



Obrázek 12.51 Standardní krychle jako identita.

Této interpretace a zjednodušeného označení využijeme v následující definici stěn a hranice n -rozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^m .

Nechť

$$c : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \rightarrow c(u) = (x^1 c(u^1, \dots, u^n), \dots, x^m c(u^1, \dots, u^n)) \in \mathbf{R}^m,$$

kde $m \geq n$, je n -rozměrná singulární krychle v \mathbf{R}^m . Zobrazení

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I_{(i,\alpha)}^n, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \alpha = 0 \text{ nebo } 1, \quad (12.189)$$

se nazývá (i, α) -stěna n -rozměrné singulární krychle c , $(n-1)$ -rozměrný singulární řetězec

$$\partial c = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)} \quad (12.190)$$

je hranice singulární krychle c . Nechť $\Gamma = k_1 c_1 + \dots + k_s c_s$ je n -rozměrný singulární řetězec v \mathbf{R}^m . Jeho hranici definujeme jako $(n-1)$ -rozměrný singulární řetězec

$$\partial \Gamma = k_1 \partial c_1 + \dots + k_s \partial c_s. \quad (12.191)$$

Příklad 12.101: Hranice hranice

Hranice n -rozměrné singulární krychle c je, jak jsme viděli, $(n-1)$ -rozměrný singulární řetězec ∂c . Ten však je formálním součtem (celkového počtu $2n$) $(n-1)$ -rozměrných krychlí, a podle předchozí definice můžeme zkonstruovat i jeho hranici $\partial(\partial c) = \partial^2 c$. Když se díváme na obrázky dvojrozměrných a trojrozměrných singulárních krychlí, vidíme, že jejich hranice jsou uzavřené. Například hranici čtverce je orientovaná uzavřená lomená čára tvořená jeho stranami, hranici „obyčejné“ trojrozměrné krychle je orientovaná uzavřená plocha tvořená jejími stěnami. Zdá se tedy, že na „hranici hranice“ už nic nezůstává, tj. že hranice neobsahuje žádný bod. Tento závěr opravdu platí obecně, jak hned uvidíme. Předpokládejme, že

$$c : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \rightarrow c(u) = (x^1 c(u^1, \dots, u^n), \dots, x^m c(u^1, \dots, u^n)) \in \mathbf{R}^m$$

je n -rozměrná singulární krychle v \mathbf{R}^m . Její hranice je tvořena stěnami. Stěna $c_{(i,\alpha)}$ je zobrazení $c_{(i,\alpha)} = c \circ I_{(i,\alpha)}^n$, tj.

$$\begin{aligned} c_{(i,\alpha)} : [0, 1]^{n-1} \ni t = (t^1, \dots, t^{n-1}) &\rightarrow c_{(i,\alpha)}(t) = \\ &= (x^1 c_{(i,\alpha)}(t^1, \dots, t^{n-1}), \dots, x^m c_{(i,\alpha)}(t^1, \dots, t^{n-1})) \in \mathbf{R}^m, \\ c_{(i,\alpha)}(t^1, \dots, t^{n-1}) &= c(t^1, \dots, t^{i-1}, \alpha, t^i, \dots, t^{n-1}), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Toto zobrazení parametrizuje $(n-1)$ -rozměrnou singulární krychli v \mathbf{R}^m . Můžeme definovat stěny i této krychle. Její stěna (j, β) , nejprve například pro $j < i-1$, je zobrazení

$$\begin{aligned} (c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} : [0, 1]^{n-2} \ni w = (w^1, \dots, w^{n-2}) &\rightarrow (c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(w) = \\ &= (x^1 (c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(w^1, \dots, w^{n-2}), \dots, x^m (c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(w^1, \dots, w^{n-2})) \in \mathbf{R}^m, \end{aligned}$$

$$(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = c(w^1, \dots, w^{j-1}, \beta, w^j, \dots, w^{i-2}, \alpha, w^{i-1}, \dots, w^{n-2}).$$

Hodnota β je umístěna na j -té pozici pro argumenty, hodnota α na pozici i -té. Na zbývajících $n - 2$ pozicích figurují parametry w_1, \dots, w_{n-2} . Parametry w_1, \dots, w_{j-1} jsou na prvních $j - 1$ pozicích, parametry w_j, \dots, w_{i-2} na pozicích $j + 1$ až $i - 1$, parametry w_{i-1}, \dots, w_{n-2} na zbývajících pozicích $i + 1$ až n . Do $(n - 2)$ -rozměrného singulárního řetězce $\partial(\partial c)$, tj. hranice krychle c , se stěna $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ započte se znaménkem $(-1)^{i+\alpha+j+\beta}$. Zabývejme se nyní stěnou $(c_{(j,\beta)})_{(i-1,\alpha)}$:

$$c_{(j,\beta)}(t^1, \dots, t^{n-1}) = c(t^1, \dots, t^{j-1}, \beta, t^j, \dots, t^{n-1}),$$

$$(c_{(j,\beta)})_{(i-1,\alpha)}(w^1, \dots, w^{n-2}) = c(w^1, \dots, w^{j-1}, \beta, w^j, \dots, w^{i-2}, \alpha, w^{i-1}, \dots, w^{n-2}).$$

V tomto zápisu je β na j -té pozici pro argumenty zobrazení c , α je na $(i - 1)$ -té pozici pro argumenty zobrazení $c_{(j,\beta)}$, tj. na i -té pozici ve výčtu parametrů t^1, \dots, t^{n-1} . Neboli $(t^1, \dots, t^{n-1}) \rightarrow (w^1, \dots, w^{i-2}, \alpha, w^{i-1}, \dots, w^{n-2})$. Tato pozice ovšem odpovídá pozici i -té ve výčtu parametrů (u^1, \dots, u^n) parametrizujících zobrazení c . Je tedy vidět, že

$$(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (c_{(j,\beta)})_{(i-1,\alpha)}.$$

Stěna $(c_{(j,\beta)})_{(i-1,\alpha)}$ se však do výsledného řetězce započte se znaménkem $(-1)^{j+\beta+i-1+\alpha}$, tedy opačným než stěna $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$. Takto postupně se „vyruší“ ostatní dvojice stěn. Příklad $j \geq i - 1$ prodiskutujte sami.

Výsledek příkladu 12.101 potvrzuje představu, že hranice libovolné n -rozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^m je $(n - 2)$ -rozměrný singulární řetězec, který je „nulový“. Z pohledu definice řetězce je to zobrazení, které každé $((n - 2)$ -rozměrné) singulární krychli přiřazuje nulu množiny celých čísel.

Příklad 12.102: Hranice teď už prakticky

Dvojměrná singulární krychle v \mathbf{R}^3

$$c : [0, 1]^2 \ni u = (u^1, u^2) \longrightarrow c(u) = (x^1 c(u^1, u^2), x^2 c(u^1, u^2), x^3 c(u^1, u^2)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$x^1 = x^1 c(u^1, u^2) = \sin \frac{\pi u^1}{2} \cos \frac{\pi u^2}{2},$$

$$x^2 = x^2 c(u^1, u^2) = \sin \frac{\pi u^1}{2} \sin \frac{\pi u^2}{2},$$

$$x^3 = x^3 c(u^1, u^2) = \cos \frac{\pi u^1}{2},$$

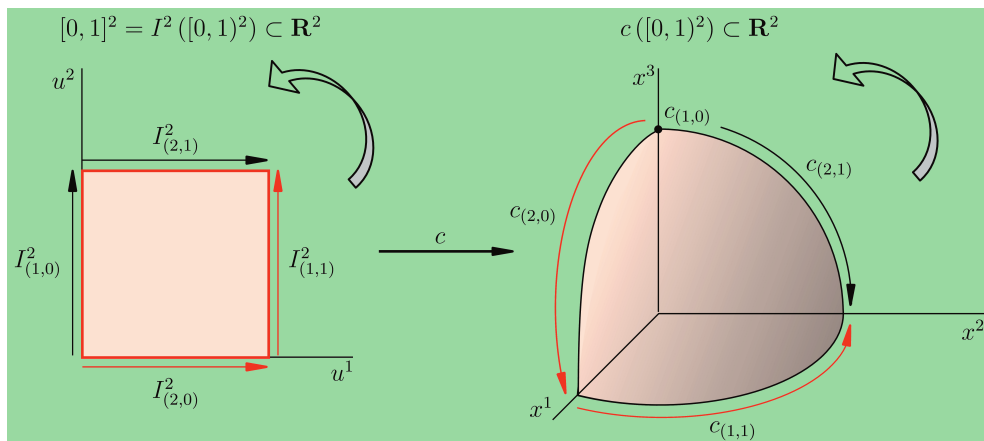
je znázorněna na obrázku 12.52. Obrazem čtverce $[0, 1]^2$ zobrazením c je osmina jednotkové sféry (povrchu koule) ležící v prvním oktantu kartézské soustavy souřadnic. Určíme její stěny a hranici.

V případě stěny $c_{(1,0)}$ dosadíme $u^1 = 0$, $u^2 = t^1$, tj.

$$x^1 c_{(1,0)}(t^1) = x^1 c(0, t^1) = 0,$$

$$x^2 c_{(1,0)}(t^1) = x^2 c(0, t^1) = 0,$$

$$x^3 c_{(1,0)}(t^1) = 1.$$



Obrázek 12.52 Hranice prakticky.

Pro stěnu $c_{(1,1)}$ je $u^1 = 1$, $u^2 = t^1$,

$$\begin{aligned} x^1 c_{(1,1)}(t^1) &= x^1 c(1, t^1) = \cos \frac{\pi t^1}{2}, \\ x^2 c_{(1,1)}(t^1) &= x^2 c(1, t^1) = \sin \frac{\pi t^1}{2}, \\ x^3 c_{(1,1)}(t^1) &= 0, \end{aligned}$$

stěnu $c_{(2,0)}$ získáme pro $u^1 = t^1$, $u^2 = 0$,

$$\begin{aligned} x^1 c_{(2,0)}(t^1) &= x^1 c(t^1, 0) = \sin \frac{\pi t^1}{2}, \\ x^2 c_{(2,0)}(t^1) &= x^2 c(t^1, 0) = 0, \\ x^3 c_{(2,0)}(t^1) &= \cos \frac{\pi t^1}{2}, \end{aligned}$$

a konečně stěnu $c_{(2,1)}$ pro $u^1 = t^1$, $u^2 = 1$,

$$\begin{aligned} x^1 c_{(2,1)}(t^1) &= x^1 c(t^1, 1) = 0, \\ x^2 c_{(2,1)}(t^1) &= x^2 c(t^1, 1) = \sin \frac{\pi t^1}{2}, \\ x^3 c_{(2,1)}(t^1) &= \cos \frac{\pi t^1}{2}. \end{aligned}$$

Na obrázku 12.52 jsou červenými šipkami vyznačeny orientace stěn přímo naindukované „správně“ zobrazeními $I_{(i,\alpha)}^2$, resp. $c_{(i,\alpha)} = c \circ I_{(i,\alpha)}^2$, černé šipky odpovídají orientaci stěn, které je třeba přeorientovat. Hranice zadané dvojrozměrné singulární krychle c je jednorozměrný singulární řetězec

$$\partial c = -c_{(1,0)} + c_{(1,1)} + c_{(2,0)} - c_{(2,1)}.$$

Pozor: všimněte si, že stěna $c_{(1,0)}$ zobrazuje interval $[0, 1]$ na bod. Co myslíte, bude později při integraci na závadu, že nesplňuje definici jednorozměrné singulární krychle?

V příkladu 12.102 jsme viděli, že prostřednictvím formalismu stěn a řetězců se „správně“ naindukují orientace hranice singulární krychle. Slovem „správně“ zde rozumíme orientaci, která je kompatibilní (slučitelná) s přirozenou orientací samotné singulární krychle. V příkladu 12.102 je „přirozená“ orientace kulové plochy (resp. její části) dána volbou *vnější* jednotkové normály k této ploše, tj. normály směřující *ven* z objemu tělesa ohraničeného touto plochou a souřadnicovými rovinami.

12.4.3 Integrál diferenciální n -formy na n -rozměrné singulární krychli, integrály druhého druhu

Konečně je vše připraveno k definici integrálu z n -formy na n -rozměrné singulární krychli či n -rozměrném singulárním řetězci. Za chvíli se pustíme rovnou do definice. Samozřejmě že v ní využijeme n -násobného Riemannova integrálu z funkce n proměnných. Uvažujme, jak „propojit“ diferenciální formy s funkcemi. Předpokládejme, že diferenciální n -forma ω je definována na \mathbf{R}^n , popřípadě na nějaké otevřené podmnožině $D \subset \mathbf{R}^n$. Pak pro libovolně, ale pevně zvolený bod $x \in D$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, je $\omega(x) \in \Lambda_n(T_x \mathbf{R}^n)$. Vektorové prostory $\Lambda_n(T_x \mathbf{R}^n)$, $x \in \mathbf{R}^n$ jsou jednorozměrné, a proto má každá taková forma ω *jedinou* složku, jíž je jistá funkce $f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$. Konkrétně je

$$\omega(x) = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Jestliže je forma ω definována na celém prostoru \mathbf{R}^n nebo její definiční obor obsahuje kvádr $[0, 1]^n$ (který můžeme chápat jako n -rozměrnou standardní krychli v \mathbf{R}^n), je přirozené definovat integrál z formy ω na této krychli jako Riemannův integrál z funkce f na uzavřeném n -rozměrném kvádru $\bar{K} = [0, 1]^n \subset \mathbf{R}^n$. Tato představa je také součástí následující definice.

Předpokládejme, že diferenciální n -forma $\omega = f du^1 \wedge \dots \wedge du^n$ je definována na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$ obsahující množinu $[0, 1]^n$. *Integrálem z formy ω na n -rozměrné standardní krychli I^n , $I^n([0, 1]^n) = [0, 1]^n$, v \mathbf{R}^n rozumíme Riemannův integrál z funkce f na množině $[0, 1]^n$.* Značíme

$$\int_{I^n=[0,1]^n} \omega = \int_{[0,1]^n} f du^1 \wedge \dots \wedge du^n = \int_{[0,1]^n} f(u^1, \dots, u^n) du^1 \dots du^n. \quad (12.192)$$

Nechť

$$c: [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \rightarrow c(u) = (x^1 c(u^1, \dots, u^n), \dots, x^m c(u^1, \dots, u^n)) \in \mathbf{R}^m$$

je n -rozměrná singulární krychle v \mathbf{R}^m a $\omega \in \Lambda_n(\mathbf{R}^m)$ je n -forma definovaná na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^m$ obsahující množinu $c([0, 1]^n)$. *Integrálem z formy ω na n -rozměrné singulární krychli c rozumíme*

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^n} c^* \omega. \quad (12.193)$$

Je-li $\Gamma = k_1 c_1 + \dots + k_s c_s$ n -rozměrný singulární řetězec v \mathbf{R}^m , definujeme

$$\int_{\Gamma} \omega = k_1 \int_{c_1} \omega + \dots + k_s \int_{c_s} \omega = \int_{[0,1]^n} (k_1 c_1^* \omega + \dots + k_s c_s^* \omega). \quad (12.194)$$

Nakonec tedy riemannovsky integrujeme funkce. Konkrétně, jsou-li v případě řetězce $\Gamma = k_1 c_1 + \dots + k_s c_s$ jednotlivé pullbacky $c_j^* \omega$ tvaru $c_j^* \omega = f_j du^1 \wedge \dots \wedge du^n$, $f_j = f_j(u^1, \dots, u^n)$, pak

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{[0,1]^n} (k_1 f_1(u^1, \dots, u^n) + \dots + k_s f_s(u^1, \dots, u^n)) du^1 \dots du^n.$$

Integrály zavedené v předchozí definici nazýváme *integrály druhého druhu*. Pro $n = 1$ se jedná o *křivkový* integrál druhého druhu, pro $n = 2$ a $m = 3$ o *plošný* integrál druhého druhu. O integrálech prvního druhu budeme hovořit v dalších odstavcích. Jsou vázány na speciální typ diferenciálních forem.

Pozor! Dimenze integračního oboru (kousku plochy, singulární krychle, singulárního řetězce) musí být shodná s řádem integrovaného objektu (diferenciální formy).

Příklad 12.103: Křivkový integrál druhého druhu

Možná si vzpomenete na tzv. *elementární práci silového pole* \vec{F} z fyziky. Předpokládejme, že silové pole \vec{F} závisí pouze na souřadnicích (pracujeme v souřadnicích kartézských), tj. $\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$. Jeho elementární práci jsme definovali jako skalární součin vektoru síly a vektoru posunutí, tj. $\vec{F} d\vec{r} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$. Co kdybychom ji chápali jako diferenciální 1-formu $\omega_F^{(1)}$ zavedenou v odstavci 12.3.6? Pak by křivkový integrál druhého druhu z formy $\omega_F^{(1)}$ po jednorozměrné singulární křivce parametrizující určitou křivku $c : [0, 1] \ni t \rightarrow (xc(t), yc(t), zc(t))$ představoval celkovou práci vykonanou silovým polem \vec{F} po dané křivce. Vypočteme tento integrál podle nové definice.

$$\int_c \omega_F^{(1)} = \int_{[0,1]} c^* \omega_F^{(1)} = \int_{[0,1]} \left[(F_1 \circ c) \frac{dxc(t)}{dt} + (F_2 \circ c) \frac{dyc(t)}{dt} + (F_3 \circ c) \frac{dzc(t)}{dt} \right] dt.$$

Jistě jste si všimli, že jsme (jediný) parametr označili t . U křivkových integrálů je to zvykem. Ve fyzice, při výpočtu práce silového pole, může být parametrem t čas. Pak můžeme psát předchozí integrál ve tvaru (už jako Riemannův)

$$\int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \vec{v}(t) dt.$$

Práce vychází jako časový integrál veličiny $\vec{F}\vec{v}$, která představuje výkon. Kromě toho jsme pro ni dostali úplně stejný vztah jako vztah (9.59) v odstavci 9.3.3. Křivkový integrál druhého druhu ze silového pole \vec{F} v \mathbf{R}^3 je skutečně prací tohoto pole po dané trajektorii a diferenciální forma $\omega_F^{(1)}$ představuje *elementární práci*.

Obecně, je-li $c: [0, 1] \ni u \rightarrow c(t) = (x^1 c(t), \dots, x^m c(t)) \in \mathbf{R}^m$ jednorozměrná singulární krychle (parametrizovaná křivka) v \mathbf{R}^m , a $\omega \in \Lambda_1(\mathbf{R}^m)$ diferenciální 1-forma definovaná na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^m$ obsahující obor hodnot této krychle $c([0, 1])$, přičemž $\omega = \omega_1 dx^1 + \dots + \omega_m dx^m$, má křivkový integrál druhého druhu z formy ω na c tvar

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]} c^* \omega = \int_0^1 \left[(\omega_1 \circ c) \frac{dx^1 c(t)}{dt} + \dots + (\omega_m \circ c) \frac{dx^m c(t)}{dt} \right] dt. \quad (12.195)$$

Příklad 12.104: Plošný integrál druhého druhu

V tomto příkladu budeme integrovat 2-formu $\omega \in \Lambda_2(\mathbf{R}^3)$ po parametrizované ploše v \mathbf{R}^3 , tj. dvojrozměrné singulární krychli

$$c: [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow c(u, v) = (xc(u, v), yc(u, v), zc(u, v)) \in \mathbf{R}^3.$$

2-formu na \mathbf{R}^3 můžeme zapsat jako formu $\omega_F^{(2)}$, kde $\vec{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$. Platí

$$\int_c \omega_F^{(2)} = \int_{[0,1]^2} c^* (F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy).$$

Vypočteme naznačený pullback (provedte krok za krokem):

$$\begin{aligned} c^* \omega_F^{(2)} = & \left[(F_1 \circ c) \left(\frac{\partial yc(u, v)}{\partial u} \frac{\partial zc(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial yc(u, v)}{\partial v} \frac{\partial zc(u, v)}{\partial u} \right) + \right. \\ & + (F_2 \circ c) \left(\frac{\partial xc(u, v)}{\partial v} \frac{\partial zc(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial xc(u, v)}{\partial u} \frac{\partial zc(u, v)}{\partial v} \right) + \\ & \left. + (F_3 \circ c) \left(\frac{\partial xc(u, v)}{\partial u} \frac{\partial yc(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial xc(u, v)}{\partial v} \frac{\partial yc(u, v)}{\partial u} \right) \right] du \wedge dv, \end{aligned}$$

zkráceně

$$c^* \omega_F^{(2)} = \left[(F_1 \circ c) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial yc}{\partial u} & \frac{\partial zc}{\partial u} \\ \frac{\partial yc}{\partial v} & \frac{\partial zc}{\partial v} \end{pmatrix} + (F_2 \circ c) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial zc}{\partial u} & \frac{\partial xc}{\partial u} \\ \frac{\partial zc}{\partial v} & \frac{\partial xc}{\partial v} \end{pmatrix} + (F_3 \circ c) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial xc}{\partial u} & \frac{\partial yc}{\partial u} \\ \frac{\partial xc}{\partial v} & \frac{\partial yc}{\partial v} \end{pmatrix} \right] du \wedge dv,$$

a ještě zkráceněji, uvědomíme-li si, že subdeterminanty Jacobiho matice $Dc(u, v)$ zobrazení c jsou složkami vektorového součinu vektorů

$$\vec{\xi}_u = \left(\frac{\partial xc}{\partial u}, \frac{\partial yc}{\partial u}, \frac{\partial zc}{\partial u} \right), \quad \vec{\xi}_v = \left(\frac{\partial xc}{\partial v}, \frac{\partial yc}{\partial v}, \frac{\partial zc}{\partial v} \right),$$

$$c^* \omega_F^{(2)} = (\vec{F} \circ c)(\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v) du \wedge dv. \quad (12.196)$$

Plošný integrál druhého druhu z vektorového pole \vec{F} , reprezentující *tok* tohoto vektorového pole zadanou plochou (ukážeme později), má tvar

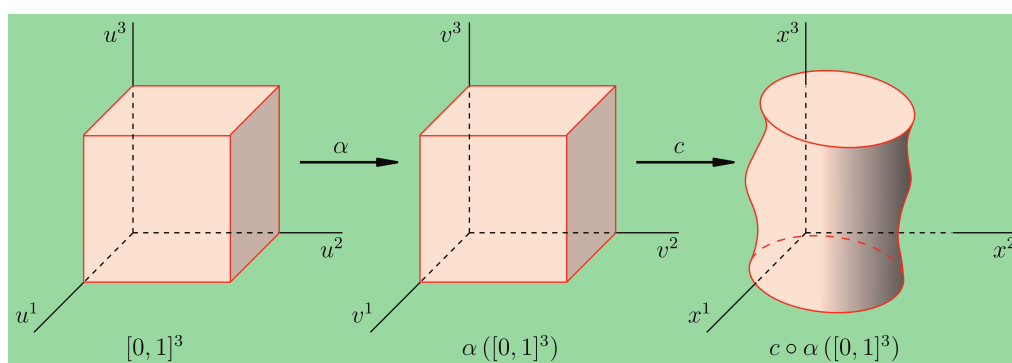
$$\int_c \omega_F^{(2)} = \int_{[0,1]^2} (\vec{F} \circ c)(\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v) du dv, \quad (12.197)$$

kde výsledný zápis je již Riemannovým integrálem. Forma $\omega_F^{(2)}$ představuje *elementární tok* vektorového pole \vec{F} .

V odstavci 9.3.3 jsme se zabývali problémem závislosti křivkového integrálu na parametrizaci křivky, která byla integračním oborem. Teď je třeba vyřešit tento problém obecně. V odstavci 12.4.1 jsme viděli, že změna parametrizace z definičního oboru $[0, 1]$ na definiční obor $[a, b]$, $a < b$, lineární transformací nemá vliv na výsledek integrálu. Že je tento závěr platný i pro vícenásobný integrál plyne z Fubiniovy věty. Je třeba už jen zjistit, jaký vliv má na výsledek integrálu z n -formy ω změna parametrizace určené prostým vzájemně diferencovatelným zobrazením

$$\alpha : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow \alpha(u) = (v^1 \alpha(u^1, \dots, u^n), \dots, v^n \alpha(u^1, \dots, u^n)) \in [0, 1]^n.$$

Situaci vidíme na obrázku 12.53 pro $n = 3$.



Obrázek 12.53 Změna parametrizace integračního oboru.

Předpokládejme, že n -forma ω je definována na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^n$ obsahující množinu $c \circ \alpha([0, 1]^n)$. Platí

$$\int_{c \circ \alpha} \omega = \int_{[0,1]^n} (c \circ \alpha)^* \omega = \int_{[0,1]^n} \alpha^* c^* \omega.$$

Forma $c^* \omega$ je n -forma na \mathbf{R}^n a její souřadnicové vyjádření má proto tvar

$$c^* \omega = f dv^1 \wedge \dots \wedge dv^n, \quad f = f(v^1, \dots, v^n).$$

Pak

$$\begin{aligned}\alpha^* c^* \omega &= (f \circ \alpha) \alpha^* dv^1 \wedge \dots \wedge \alpha^* dv^n = (f \circ \alpha) \left(\frac{\partial v^1 \alpha}{\partial u^{i_1}} \dots \frac{\partial v^n \alpha}{\partial u^{i_n}} \right) du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_n} = \\ &= (f \circ \alpha) \det D\alpha du^1 \wedge \dots \wedge du^n = \pm (f \circ \alpha) |\det D\alpha| du^1 \wedge \dots \wedge du^n.\end{aligned}$$

Znaménko „plus“, resp. „minus“ odpovídá situaci, kdy $\det D\alpha > 0$, resp. $\det D\alpha < 0$. Dostáváme tedy

$$\int_{c \circ \alpha} \omega = \int_{[0,1]^n} (c \circ \alpha)^* \omega = \pm \int_{[0,1]^n} (f \circ \alpha) |\det D\alpha| du^1 \dots du^n.$$

Poslední výraz je Riemannovým integrálem. Použijeme-li větu o transformaci integrálu, získáme výsledek

$$\int_{c \circ \alpha} \omega = \pm \int_{[0,1]^n} f(v^1, \dots, v^n) dv^1 \dots dv^n.$$

Na druhé straně je

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^n} c^* \omega = \int_{[0,1]^n} f(v^1, \dots, v^n) dv^1 \dots dv^n,$$

takže

$$\int_{c \circ \alpha} \omega = \pm \int_c \omega.$$

Parametrizace n -rozměrné singulární krychle nemá vliv na výsledek integrace, až na znaménko v případě, že $\det D\alpha < 0$. Tento důležitý obecný výsledek shrneme v následujícím tvrzení.

Věta 12.29 (nezávislost integrálu na parametrizaci): *Nechť $c_1 : [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ a $c_2 : [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $n \leq m$, jsou n -rozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^m takové, že existuje vzájemně jednoznačné diferencovatelné zobrazení $\alpha : [0, 1]^n \rightarrow \alpha([0, 1]^n)$, $c_2 = c_1 \circ \alpha$ a platí $c_1([0, 1]^n) = c_2([0, 1]^n)$. (Zobrazení c_1 a c_2 jsou různé parametrizace téhož n -rozměrného útvaru v \mathbf{R}^m .) Předpokládejme, že diferenciální n -forma ω je definována na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^m$ obsahující (společný) obor hodnot zobrazení c_1 a c_2 . Pak platí*

$$\int_{c_1} \omega = \text{sgndet } D\alpha \int_{c_2} \omega, \quad (12.198)$$

kde $\text{sgndet } D\alpha$ je znaménko determinantu Jacobiho matice zobrazení α .

Příklad 12.105: Pozor na pořadí parametrů

Vraťme se ještě na chvíli k příkladu 12.104. Odvodili jsme v něm vztah (12.197) pro výpočet plošného integrálu druhého druhu z formy $\omega_F^{(2)}$,

$$\int_c \omega_F^{(2)} = \int_{[0,1]^2} c^* \omega_F^{(2)} = \int_{[0,1]^2} (\vec{F} \circ c)(\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v) du \wedge dv = \int_{[0,1]^2} (\vec{F} \circ c)(\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v) du dv$$

(poslední integrál je Riemannův). Co kdybychom však zapsali formu $c^* \omega_F^{(2)}$ ve tvaru

$$c^* \omega_F^{(2)} = -(\vec{F} \circ c)(\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v) dv \wedge du ?$$

To by přece také bylo správně, ne? Když však budeme riemannovsky integrovat funkci $-\vec{F}(\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v)$, která je (jedinou) složkou formy $c^* \omega_F^{(2)}$ při tomto zápisu, dostaneme výsledek s opačným znaménkem, než při zápisu původním. Je to proto, že jsme nyní zapsali vnější součin 1-forem du a dv v opačném pořadí. Tomu však odpovídá výměna řádků v Jacobiho matici zobrazení c a odpovídající záměna pořadí činitelů ve vektorovém součinu vektorů $\vec{\xi}_u$ a $\vec{\xi}_v$. Jestliže jsme předem zvolili parametr u jako „první“ a parametr v jako „druhý“, znamená to, že vektor $\vec{\xi}_u$ je ve vektorovém součinu prvním činitelem a vektor $\vec{\xi}_v$ činitelem druhým. Toto pořadí pak musíme dodržet i u činitelů du a dv ve vnějším součinu. Záměna pořadí parametrů znamená změnu parametrizace. Volbou pořadí parametrů současně volíme *orientaci* integračního oboru.

Příklad 12.106: A teď už prakticky

V příkladu 12.102 jsme konstruovali hranici dvojrozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^3 (osminy jednotkové sféry v prvním oktantu — obrázek 12.52).

$$c : [0, 1]^2 \ni u = (u^1, u^2) \longrightarrow c(u) = (x^1 c(u^1, u^2), x^2 c(u^1, u^2), x^3 c(u^1, u^2)),$$

kteřou jsme parametrizovali takto:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1 c(u^1, u^2) = \sin \frac{\pi u^1}{2} \cos \frac{\pi u^2}{2}, \\ x^2 &= x^2 c(u^1, u^2) = \sin \frac{\pi u^1}{2} \sin \frac{\pi u^2}{2}, \\ x^3 &= x^3 c(u^1, u^2) = \cos \frac{\pi u^1}{2}. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že 2-forma ω je definována na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^3$ obsahující $c([0, 1]^2)$ a má souřadnicové vyjádření

$$\omega = \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3 + \omega_{31} dx^3 \wedge dx^1 + \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2, \quad \text{nebo} \quad \omega = \omega_F^{(2)},$$

označíme-li $\omega_{23} = F_1$, $\omega_{31} = F_2$, $\omega_{12} = F_3$. Zvolme třeba radiální vektorové pole $\vec{F} = (x, y, z)$. Vypočteme pullback této formy zobrazením c . Nejprve Jacobiho matice zobrazení c a vektory ξ_1 a ξ_2 :

$$Dc(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi u^1}{2} \cos \frac{\pi u^2}{2} & \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi u^1}{2} \sin \frac{\pi u^2}{2} & -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi u^1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi u^1}{2} \sin \frac{\pi u^2}{2} & \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi u^1}{2} \cos \frac{\pi u^2}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Její první řádek obsahuje složky vektoru $\vec{\xi}_1$, druhý složky vektoru $\vec{\xi}_2$. Jejich vektorový součin je

$$\vec{\xi}_1 \times \vec{\xi}_2 = \left(\frac{\pi^2}{4} \sin^2 \frac{\pi u^1}{2} \cos \frac{\pi u^2}{2}, \frac{\pi^2}{4} \sin^2 \frac{\pi u^1}{2} \sin \frac{\pi u^2}{2}, \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi u^1}{2} \cos \frac{\pi u^1}{2} \right),$$

pullback formy ω_F^2 zobrazením c je

$$c^* \omega_F^{(2)} = \left(\frac{\pi^2}{4} \sin^3 \frac{\pi u^1}{2} \cos^2 \frac{\pi u^2}{2} + \frac{\pi^2}{4} \sin^3 \frac{\pi u^1}{2} \sin^2 \frac{\pi u^2}{2} + \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi u^1}{2} \cos^2 \frac{\pi u^1}{2} \right) du^1 \wedge du^2 = \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi u^1}{2} du^1 \wedge du^2,$$

a integrál

$$\int_c \omega_F^{(2)} = \int_{[0,1]^2} c^* \omega_F^{(2)} = \frac{\pi^2}{4} \int_{[0,1]^2} \sin \frac{\pi u^1}{2} du^1 du^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Výsledek představuje osminu plošného obsahu jednotkové sféry. Je to náhoda? Později uvidíme, že není.

Příklad 12.107: Jeden fyzikální křivkový ...

Vypočteme práci jednoho molu van der Waalsova plynu při izotermické expanzi z objemu V_1 na objem V_2 . Van der Waalsův plyn se při vratných dějích řídí stavovou rovnicí

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = nRT,$$

kde n je látkové množství (v našem případě $n = 1$ mol), p , V , T jsou tlak, objem a teplota plynu, a a b jsou kladné konstanty, $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ je univerzální plynová konstanta. Elementární práce plynu při změně objemu je dána 1-formou

$$\omega^{(1)} = p dV = \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV.$$

Integračním oborem je interval $[V_1, V_2]$, tj. $\mathcal{C} : [V_1, V_2] \ni V \rightarrow \mathcal{C}(V) = V \in \mathbf{R}^1$. Víme, že nemusíme měnit parametrizaci tak, aby integračním oborem byl interval $[0, 1]$, a můžeme integrovat rovnou:

$$A = \int_c \omega^{(1)} = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV = RT \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

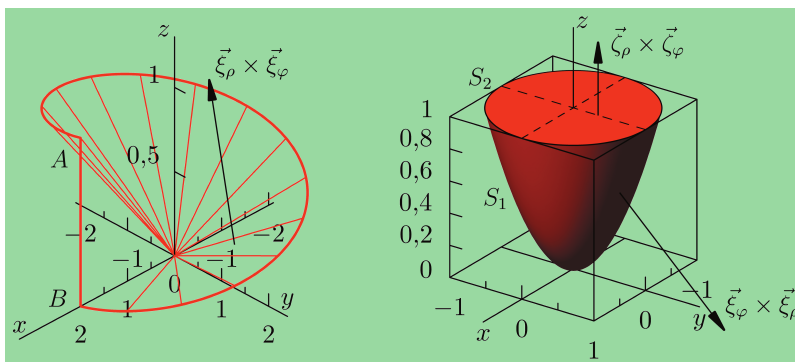
(Pro pořádek jsme parametrizaci označili \mathcal{C} a nikoli symbolem c . Ten máme rezervován pro singulární krychle, jejichž oborem parametrů jsou intervaly $[0, 1]$.) Při výpočtu jsme respektovali skutečnost, že se jedná o izotermický děj, tj. $T = \text{konst.}$

Příklad 12.108: ... a jeden plošný

Teď něco „méně tradičního“. Vypočteme tok vektorového pole $\vec{F} = (-xy, 0, yz)$ plochou tvořenou částí přímkové plochy $z = \frac{1}{4\pi} \varrho \varphi$, $0 \leq \varrho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Parametry ϱ a φ jsou polární souřadnice. Nejprve promysleme, o jakou plochu se jedná (pro $R = 2$ ji vidíme na obrázku 12.54 vlevo).

Označme tuto plochu S . Ve válcových souřadnicích $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = z$ má rovnici $z = \frac{1}{4\pi} \varrho \varphi$. Pro $\varrho = R$ dostaneme parametrické rovnice části křivky, která plochu S ohraničuje: $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = \frac{R\varphi}{4\pi}$. Tato křivka je šroubovice. Parametrizaci plochy S můžeme zvolit ve tvaru

$$S : [0, R] \times [0, 2\pi] \ni (\varrho, \varphi) \longrightarrow (xS(\varrho, \varphi), yS(\varrho, \varphi), zS(\varrho, \varphi)) \in \mathbf{R}^3,$$



Obrázek 12.54 K příkladům 12.108 a 12.109.

$$\begin{aligned} xS &= xS(\varrho, \varphi) = \varrho \cos \varphi, \\ yS &= yS(\varrho, \varphi) = \varrho \sin \varphi, \\ zS &= zS(\varrho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \varrho \varphi. \end{aligned}$$

(Opět pro parametrizaci úmyslně nepoužíváme symbol c , neboť obory parametrů nejsou intervaly $[0, 1]$. Víme však, že na výsledek integrálu to nebude mít vliv.) K pochopení názvu „přímková plocha“ si stačí uvědomit, že tato plocha je vytvářena přínými spojnicemi (úsečkami) počátku soustavy souřadnic s body na šroubovici. Jednou částí hranice plochy S je oblouk šroubovice

$$\mathcal{C} : [0, 2\pi] \ni \varphi \longrightarrow (x\mathcal{C}(\varphi), y\mathcal{C}(\varphi), z\mathcal{C}(\varphi)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$x\mathcal{C}(\varphi) = R \cos \varphi, \quad y\mathcal{C}(\varphi) = R \sin \varphi, \quad z\mathcal{C}(\varphi) = \frac{1}{4\pi} R \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

druhou částí je svislá úsečka spojující body $A = (R, 0, \frac{R}{2})$ a $B = (R, 0, 0)$. Z příkladu 12.105 víme, že výsledek integrace závisí na volbě pořadí parametrů. Zvolme je třeba tak, že parametr ϱ bude jako první. Jak takovou volbu interpretovat? Vektorový součin $\vec{\xi}_\varrho \times \vec{\xi}_\varphi$ (je kolmý k ploše S) míří „dovnitř“ prostoru vymezeného plochou S a obsahujícího osu z . Řečeno nepřiliš přesně, zato však názorně: integrál z formy $\omega_F^{(2)}$ po ploše S bude představovat množství integrálních křivek (v případě silového pole \vec{F} množství siločar), které touto plochou „proteče“ ve směru normály $\vec{\xi}_\varrho \times \vec{\xi}_\varphi$. Počítejme:

$$DS(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & \frac{\varphi}{4\pi} \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & \frac{\varrho}{4\pi} \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_\varrho \times \vec{\xi}_\varphi = \left(\frac{1}{4\pi} \varrho \sin \varphi - \frac{1}{4\pi} \varrho \varphi \cos \varphi, -\frac{1}{4\pi} \varrho \varphi \sin \varphi - \frac{1}{4\pi} \varrho \cos \varphi, \varrho \right),$$

$$S^* \omega_F^{(2)} = (\vec{F} \circ S)(\vec{\xi}_\varrho \times \vec{\xi}_\varphi) d\varrho \wedge d\varphi = \frac{1}{4\pi} \varrho^3 [-\sin^2 \varphi \cos \varphi + \varphi \sin \varphi (1 + \cos^2 \varphi)] d\varrho \wedge d\varphi,$$

Následující integrály propočítejte krok za krokem sami.

$$\int_S \omega_F^{(2)} = \int_{[0, R] \times [0, 2\pi]} S^* \omega_F^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^R \varrho^3 d\varrho \right) \left(\int_0^{2\pi} (-\sin^2 \varphi \cos \varphi + \varphi \sin \varphi + \varphi \sin \varphi \cos^2 \varphi) d\varphi \right),$$

po výpočtu dostaneme

$$\int_S \omega_F^{(2)} = -\frac{1}{6} R^4.$$

K tomuto příkladu se později ještě vrátíme.

Příklad 12.109: A pro jistotu ještě jeden

Vypočteme tok vektorového pole $\vec{F} = (0, -(x+y)y, z)$ povrchem tělesa omezeného paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 1$. V podstatě je to už „rutina“.

$$\omega_F^{(2)} = -(x+y)y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

Integrační obor je na obrázku 12.54 vpravo.

$$S_1 : [0, 1] \times [0, 2\pi] \ni (\varrho, \varphi) \longrightarrow (xS_1(\varrho, \varphi), yS_1(\varrho, \varphi), zS_1(\varrho, \varphi)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$xS_1 = xS_1(\varrho, \varphi) = \varrho \cos \varphi, \quad yS_1 = yS_1(\varrho, \varphi) = \varrho \sin \varphi, \quad zS_1 = zS_1(\varrho, \varphi) = \varrho^2,$$

$$S_2 : [0, 1] \times [0, 2\pi] \ni (\varrho, \varphi) \longrightarrow (xS_2(\varrho, \varphi), yS_2(\varrho, \varphi), zS_2(\varrho, \varphi)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$xS_2 = xS_2(\varrho, \varphi) = \varrho \cos \varphi, \quad yS_2 = yS_2(\varrho, \varphi) = \varrho \sin \varphi, \quad zS_2 = zS_2(\varrho, \varphi) = 1.$$

Nyní máme plochu složenou ze dvou různě parametrizovaných částí a musíme zvolit pořadí parametrů. Plocha je uzavřená, obepíná trojrozměrné těleso. Zvolíme pořadí parametrů tak, aby vektorový součin odpovídajících tečných vektorů (samozřejmě v pořadí činitelů shodným s pořadím parametrů) směřoval v obou případech ven z objemu tohoto tělesa. Toto pořadí je standardní. V případě plochy S_1 odpovídá náš požadavek pořadí parametrů φ (jako první) a ϱ (jako druhý). V případě plochy S_2 je pořadí opačné, ϱ je prvním parametrem, φ druhým. Situace je jasná z obrázku 12.54. Jacobiho matice zobrazení S_1 a S_2 (se správným pořadím řádků, odpovídajícím zvolenému pořadí parametrů) jsou

$$DS_1(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 2\varrho \end{pmatrix}, \quad DS_2(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

vektorové součiny vektorů $\vec{\xi}_\varrho$ a $\vec{\xi}_\varphi$, odpovídajících zobrazení S_1 , a vektorů $\vec{\zeta}_\varrho$ a $\vec{\zeta}_\varphi$, odpovídajících zobrazení S_2 , pak

$$\vec{\xi}_\varphi \times \vec{\xi}_\varrho = (2\varrho^2 \cos \varphi, 2\varrho^2 \sin \varphi, -\varrho), \quad \vec{\zeta}_\varrho \times \vec{\zeta}_\varphi = (0, 0, \varrho).$$

Vypočteme pullbacky formy $\omega_F^{(2)}$ zobrazení S_1 a S_2 ,

$$S_1^* \omega_F^{(2)} = (\vec{F} \circ S_1)(\vec{\xi}_\varphi \times \vec{\xi}_\varrho) d\varphi \wedge d\varrho = -[2\varrho^4 \sin^2 \varphi (\cos \varphi + \sin \varphi) + \varrho^3] d\varphi \wedge d\varrho,$$

$$S_2^* \omega_F^{(2)} = (\vec{F} \circ S_2)(\vec{\zeta}_\varrho \times \vec{\zeta}_\varphi) d\varrho \wedge d\varphi = \varrho d\varrho \wedge d\varphi,$$

a nakonec integrály,

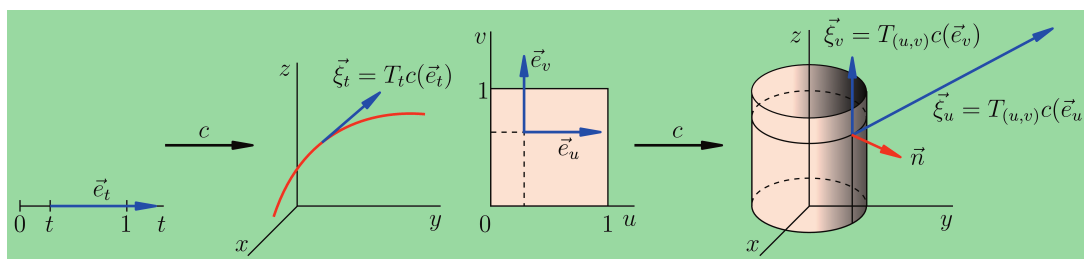
$$\int_{S_1} \omega_F^{(2)} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -[2\varrho^4 \sin^2 \varphi (\cos \varphi + \sin \varphi) + \varrho^3] d\varphi d\varrho = -\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{S_2} \omega_F^{(2)} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varrho d\varrho d\varphi = \pi, \quad \int_{S_1+S_2} \omega_F^{(2)} = \frac{\pi}{2}.$$

V textu tohoto odstavce se několikrát objevil pojem *orientace* křivky, resp. plochy. U plochy jsme hovořili o *orientaci normálou*. I když je intuitivně jasné, o co se jedná, přece jen je třeba se pojmu orientace věnovat podrobněji a matematicky jej popsat. V odstavci 12.2.7 jsme zavedli pojem orientace vektorového prostoru. Vzpomeňte si, že v každém vektorovém prostoru jsou dvě možné orientace. Každá z nich obsahuje všechny báze, mezi nimiž se uskutečňují přechody s maticemi o kladném determinantu, matice přechodu mezi bázemi náležejícími do různých tříd mají determinant záporný. Přemýšlejme, jak toho využít pro zavedení orientace křivky v \mathbf{R}^1 , \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^3 a obecně v \mathbf{R}^m , plochy v \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^3 , a obecně n -rozměrného kousku plochy, resp. n -rozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^m . Začneme názornými situacemi, kdy si orientaci dovedeme představit: křivkou a plochou v \mathbf{R}^3 .

Příklad 12.110: Orientace křivky a plochy v \mathbf{R}^3

Věnujme se hned obrázku 12.55, který pojem orientace názorně ukazuje.



Obrázek 12.55 Orientace křivky a plochy v \mathbf{R}^3 .

Uvažujme nejprve o křivce v \mathbf{R}^3 jako o jednorozměrné singulární krychli,

$$c : [0, 1] \ni t \rightarrow c(t) = (xc(t), yc(t), zc(t)) \in \mathbf{R}^3,$$

jak odpovídá obrázku. (Víme už, že hodnota integrálu bude stejná, ať již bude definičním oborem parametrizace interval $[0, 1]$, nebo obecný interval $[a, b]$.) Na reálné ose, jejíž podmnožinou je definiční obor zobrazení c , je definováno vektorové pole $\vec{e}_t = \frac{\partial}{\partial t}$. V bodech $c(t) \in \mathbf{R}^3$ křivky je zobrazením c indukováno vektorové pole $\vec{\xi}_t$ podél této křivky, které je spojitě *vzhledem k množině* $c([0, 1])$. (Spojitost vzhledem k množině jsme probírali v druhém dílu.) Platí

$$\vec{\xi}_t = T_t c(\vec{e}_t) = \frac{dx(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial z}.$$

V každém bodě křivky $c([0, 1])$ generuje vektor $\vec{\xi}_t$ jednorozměrný vektorový prostor a tvoří bázi tohoto vektorového prostoru. Současně je reprezentantem jedné ze dvou možných orientací (druhou reprezentuje vektor opačný). Orientace daná vektorem $\vec{\xi}_t$ je *kompatibilní*, neboli *souhlasná* s parametrizací c , orientace daná vektorem opačným je s parametrizací *nekompatibilní*, neboli *nesouhlasná*. Zadaná parametrizace křivky tedy indukuje její orientaci. Jiná situace nastává, je-li orientace předem zadána spojitým vektorovým polem $\vec{\zeta}$ podél křivky. Vektor $\vec{\zeta}$ generuje v každém bodě $c(t)$ křivky vektorový prostor $T_{c(t)}c$, který je vektorovým podprostorem tečného prostoru $T_{c(t)}\mathbf{R}^3$. Nazývá se *tečný prostor ke křivce* a vektor $\vec{\zeta}$ reprezentuje jednu z možných orientací tohoto tečného prostoru. Možné parametrizace křivky se pak rovněž roztrídí do dvou tříd: na parametrizace kompatibilní a nekompatibilní se zadanou orientací. Při praktických výpočtech je vhodné pracovat s takovou

parametrizací, která náleží do třídy parametrizací kompatibilních se zadanou orientací. Úvaha, kterou jsme právě provedli pro křivku v \mathbf{R}^3 , se dá snadno zobecnit na křivku v \mathbf{R}^m , $m \geq 1$.

Obdobně uvažujeme v případě plochy. Parametrizujeme ji jako dvojrozměrnou singulární krychli v \mathbf{R}^3 ,

$$c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow (xc(u, v), yc(u, v), zc(u, v)) \in \mathbf{R}^3.$$

Zobrazením c je opět indukováno tečné zobrazení, které každému vektoru \vec{e} v bodě $(u, v) \in [0, 1]^2$ přiřadí vektor $\vec{\xi} = T_{(u,v)}c(\vec{e})$ v bodě $c(u, v) \in c([0, 1]^2)$. Vektory \vec{e}_u a \vec{e}_v tvoří bázi v bodech $(u, v) \in [0, 1]^2$, vektory $\vec{\xi}_u = T_{(u,v)}c(\vec{e}_u)$ a $\vec{\xi}_v = T_{(u,v)}c(\vec{e}_v)$ jsou lineárně nezávislé (víte proč?) a generují v bodě $c(u, v)$ dvojrozměrný vektorový prostor $T_{c(u,v)}c \subset T_{c(u,v)}\mathbf{R}^3$ — *tečný prostor* k zadané ploše. Báze $(\vec{\xi}_u, \vec{\xi}_v)$ reprezentuje v každém bodě $c(u, v)$ třídu bází vektorového prostoru $T_{c(u,v)}c$, tj. *orientaci* tohoto prostoru, *kompatibilní* se zadanou parametrizací.

Orientaci tečných prostorů v jednotlivých bodech dvojrozměrné plochy v \mathbf{R}^3 můžeme vyjádřit také alternativně, pomocí vektorového součinu $\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v$. (Pozor na dodržení pořadí činitelů ve vektorovém součinu podle pořadí parametrů.) Tento vektorový součin generuje ortogonální doplněk k podprostoru $T_{c(u,v)}c$. Vektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v}{|\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v|}$$

se nazývá *jednotková normála* k ploše v bodě $c(u, v)$. Můžeme říci, že tato normála je kompatibilní s parametrickým vyjádřením, normála opačná, tj. vektor $-\vec{n}$, je nekompatibilní s parametrickým vyjádřením. Je-li c parametrizovaný kousek plochy, vzniká na této ploše spojitě vektorové pole jednotkové normály (opět jde o spojitost vzhledem k množině, v tomto případě $c([0, 1]^2)$). Podobně jako u křivky můžeme i v případě kousku (dvojrozměrné) plochy v \mathbf{R}^3 zadat předem některou z orientací spojitým vektorovým polem jednotkové normály. Možné parametrizace se pak roztrídí do dvou tříd, na třídu parametrizací kompatibilních se zvolenou orientací a třídu parametrizací s touto orientací nekompatibilních. Jak je tomu však s orientací dvojrozměrné plochy v \mathbf{R}^3 , která sice je dvojrozměrnou singulární krychlí v \mathbf{R}^3 , není však parametrizovaným kouskem plochy (zobrazení c nesplňuje podmínku vzájemné jednoznačnosti)? V takovém případě nemusí být možné plochu orientovat. Na obrázku 12.55 je znázorněna plocha, na níž lze zadat spojitě vektorové pole jednotkové normály. Je to válcová plocha, kterou můžeme parametrizovat třeba zobrazením

$$c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow c(u, v) = (xc(u, v), yc(u, v), zc(u, v)) \in \mathbf{R}^3,$$

kde $x = xc(u, v) = \cos 2\pi u$, $y = yc(u, v) = \sin 2\pi u$, $z = zc = v$. Pak

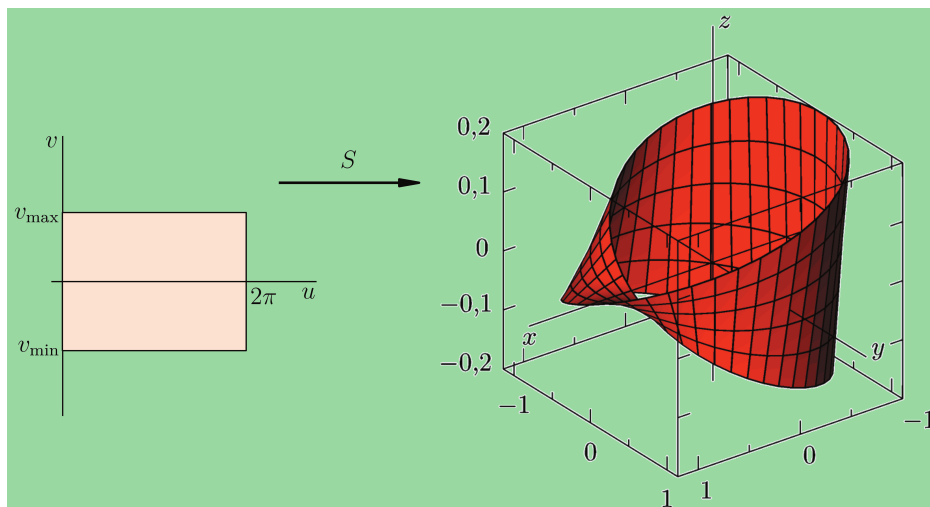
$$\begin{aligned} \vec{\xi}_u &= T_{(u,v)}c\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = (-2\pi \sin 2\pi u, 2\pi \cos 2\pi u, 0), & \vec{\xi}_v &= T_{(u,v)}c\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = (0, 0, 1), \\ \vec{n} &= \frac{\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v}{|\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v|} = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, 0) = \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right]_{c([0,1]^2)}. \end{aligned}$$

Toto vektorové pole je spojitě (vzhledem k množině $c([0, 1]^2)$) a definuje orientaci plochy. Velmi známou plochou, kterou orientovat nelze, je Möbiova páska (viz obrázek 12.56).

Její parametrizaci lze zvolit třeba takto:

$$S : [0, 2\pi] \times [v_{\min}, v_{\max}] \ni (u, v) \longrightarrow (xS(u, v), yS(u, v), zS(u, v)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$\begin{aligned} x &= xS(u, v) = \cos u + v \cos \frac{u}{2} \cos u, \\ y &= yS(u, v) = \sin u + v \cos \frac{u}{2} \sin u, \\ z &= zS(u, v) = v \sin \frac{u}{2}. \end{aligned}$$



Obrázek 12.56 Möbiova páska.

(Graf na obrázku 12.56 je sestaven pro $v_{\min} = -0,2$, $v_{\max} = 0,2$.)

Nyní formulujeme pojem orientace n -rozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^m obecně.

Nechť

$$c : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow c(u) = (x^1 c(u^1, \dots, u^n), \dots, x^m c(u^1, \dots, u^n)) \in \mathbf{R}^m,$$

kde $n \leq m$, je n -rozměrná singulární krychle, resp. n -rozměrný parametrizovaný kousek plochy v \mathbf{R}^m (zkráceně n -rozměrná plocha v \mathbf{R}^m). Její *orientací indukovanou parametrizací* c rozumíme zobrazení

$$\mu : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow \mu(u) = \left[(\xi_1(u), \dots, \xi_n(u)) \right],$$

$$\xi_i(u) = T_u c \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right), \quad (12.199)$$

kde $\left[(\xi_1(u), \dots, \xi_n(u)) \right]$ je třída bází vektorového podprostoru $T_{c(u)}c \subset T_{c(u)}\mathbf{R}^m$ ekvivalentních s bází $(\xi_1(u), \dots, \xi_n(u))$. Je-li zobrazení μ spojitě, jedná se o *orientovanou* n -rozměrnou singulární krychli, resp. *orientovaný* n -rozměrný parametrizovaný kousek plochy v \mathbf{R}^m .

Zobrazení $\xi_i : c([0, 1]^n) \ni c(u) \longrightarrow \xi_i(u) \in T_{c(u)}c \subset T_{c(u)}\mathbf{R}^m$ jsou spojitá vektorová pole na dané ploše (spojitost vzhledem k množině $c([0, 1]^n)$).

Pro $m = n + 1$ můžeme orientaci definovat ekvivalentně pomocí normály.

Předpokládejme, že

$$c : [0,1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow c(u) = (x^1 c(u^1, \dots, u^n), \dots, x^{n+1} c(u^1, \dots, u^n)) \in \mathbf{R}^{n+1}$$

je n -rozměrná singulární krychle, resp. n -rozměrný parametrizovaný kousek plochy v \mathbf{R}^{n+1} (zkráceně n -rozměrná plocha v \mathbf{R}^{n+1}). *Polem jednotkové normály indukovaným parametrizací c* rozumíme vektorové pole na této ploše dané vztahem

$$n = \frac{\xi_1 \times \dots \times \xi_n}{|\xi_1 \times \dots \times \xi_n|}, \quad \xi_i = T_u c \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right). \quad (12.200)$$

Je-li vektorové pole normály n spojitě, jedná se o n -rozměrnou plochu v \mathbf{R}^{n+1} *orientovanou vektorovým polem normály*.

Poznamenejme, že pokud na dané ploše neexistuje spojitá orientace μ , nelze plochu orientovat. V takovém případě ji nazýváme *neorientabilní*. V případě, že spojitě zobrazení μ existuje, jedná se o plochu *orientabilní*, neboli *orientace schopnou*. V případě $n = m - 1$ je definice orientace plochy pomocí vektorového pole normály ekvivalentní s definicí pomocí zobrazení μ .

Zbývá odpovědět na otázku, jak postupovat, máme-li zadaný nějaký n -rozměrný geometrický útvar v \mathbf{R}^m , na němž je již *předem* zadána jedna ze dvou možných orientací, a potřebujeme jej parametrizovat. Ukážeme to opět nejprve na příkladech.

Příklad 12.111: Parametrizace indukovaná orientací

Zadáním geometrického útvaru, třeba křivky nebo plochy v \mathbf{R}^3 , rozumíme specifikaci určité podmnožiny prostoru \mathbf{R}^3 třeba pomocí rovnic a nerovností ve standardních souřadnicích — například takto:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, y = x, 0 \leq z \leq 2\},$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

Prvním z útvarů je křivka vzniklá průnikem povrchu rotačního paraboloidu a roviny rovnoběžné s osou z a omezená nerovností $0 \leq z \leq 2$. Druhým útvarem je část jednotkové sféry ležící v horní polorovině soustavy souřadnic.

Křivku můžeme orientovat například tak, že na ní zadáme spojitě vektorové pole $\vec{\zeta}$ (jako obvykle u jednorozměrných, dvojrozměrných a trojrozměrných případů píšeme nad vektory šipky). Tím je v každém bodě $x = (x, y, z) \in C$ křivky C zadána (rovněž spojitá) orientace $\mu(x) = [\vec{\zeta}(x)]$ tečného prostoru $T_x C \subset T_x \mathbf{R}^3$. Zvolíme-li parametrizaci $c : [0, 1] \ni u \rightarrow c(t) \in \mathbf{R}^3$ křivky C tak, že $T_{c(t)}(\vec{e}_t) \in \mu(c(t))$, jedná se o parametrizaci *kompatibilní* neboli *souhlasnou* s danou orientací. Je-li $T_{c(t)}(\vec{e}_t) \in -\mu(c(t))$, je parametrizace c *nekompatibilní*, neboli *nesouhlasná* se zadanou orientací. Poznamenejme, že v případě křivky lze orientaci jednoduše zadat i tak, že řekneme, který bod křivky je počáteční a který koncový. Pokusíme se takové zadání orientace ekvivalentně vyjádřit pomocí vhodného spojitě vektorového pole na křivce. Křivku C jsme zadali rovnicemi rotačního paraboloidu a roviny, které můžeme přepsat takto:

$$f_1(x, y, z) \equiv -x^2 - y^2 + z = 0, \quad f_2(x, y, z) \equiv x - y = 0.$$

Vektory $\vec{g}_1 = \text{grad } f_1 = (-2x, -2y, 1)$ a $\vec{g}_2 = \text{grad } f_2 = (1, -1, 0)$ jsou ke křivce \mathcal{C} v každém jejím bodě kolmé (vzpomeňte na geometrický význam gradientu). Jejich vektorový součin $\vec{\zeta} = \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = (1, 1, 2(x+y))$ je spojitým vektorovým polem na křivce \mathcal{C} , přičemž vektor $\vec{\zeta}$ je v každém bodě vektorem je křivce tečným. Totéž platí pro vektorový součin $-\vec{\zeta} = \vec{g}_2 \times \vec{g}_1$. Definovali jsme tak dvě navzájem opačné orientace křivky \mathcal{C} . Zvolme parametrizaci křivky třeba takto: $c: [0, 1] \ni t \rightarrow c(t) \in \mathbf{R}^3$, $x = xc(t) = t$, $y = yc(t) = t$, $z = zc(t) = 2t^2$, $2t^2 \leq 2$, tj. $t \in [0, 1]$. Tečné vektorové pole na křivce \mathcal{C} pak je

$$\vec{\xi}_t = T_{c(t)}(\vec{e}_t) = \left(\frac{\partial xc(t)}{\partial t}, \frac{\partial yc(t)}{\partial t}, \frac{\partial zc(t)}{\partial t} \right) = (1, 1, 4t).$$

Hned vidíme, že platí $\vec{\xi}_t = \vec{\zeta}(xc(t), yc(t), zc(t))$, tj. vektor $\vec{\xi}_t$ v každém bodě křivky \mathcal{C} náleží orientaci $\mu(c(t))$. Parametrizace c je proto souhlasná s předem zvolenou orientací. Parametrizace $\bar{c}: [0, 1] \ni t \rightarrow \bar{c}(t) \in \mathbf{R}^3$, $x = xc(t) = 1-t$, $y = yc(t) = 1-t$, $z = zc(t) = 2(1-t)^2$, $t \in [0, 1]$, indukuje tečné vektorové pole $\vec{\bar{\xi}}_t = T_{\bar{c}(t)}(\vec{e}_t) = (-1, -1, -4(1-t))$. Platí $\vec{\bar{\xi}}_{1-t} = -\vec{\xi}_t = -\vec{\zeta}(xc(t), yc(t), zc(t))$. Parametrizace \bar{c} je nesouhlasná s předem zadanou orientací.

Nyní definujeme orientaci plochy S pomocí jednotkové normály. Spojité vektorové pole jednotkové normály na ploše S je například $\vec{n} = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$. Zvolme parametrizaci plochy S třeba takto:

$$S: [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ni (u, v) \longrightarrow S(u, v) = (xS(u, v), yS(u, v), zS(u, v)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$x = xS(u, v) = \cos u \sin v, \quad y = yS(u, v) = \sin u \sin v, \quad z = zS(u, v) = \cos v.$$

Pro tečná vektorová pole indukovaná touto parametrizací platí

$$\vec{\xi}_u = T_{c(u,v)}S(\vec{e}_u) = (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0),$$

$$\vec{\xi}_v = T_{c(u,v)}S(\vec{e}_v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v).$$

Vektorové pole jednotkové normály odpovídající této parametrizaci je (provedte výpočet)

$$\begin{aligned} \vec{n}'(u, v) &= \frac{\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v}{|\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v|} = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, -\cos v) = \\ &= \left(-xc(u, v), -yc(u, v), -\sqrt{1 - (xc(u, v))^2 - (yc(u, v))^2} \right). \end{aligned}$$

Vidíme, že $\vec{n}'(u, v) = -\vec{n}(S(u, v))$. Parametrizace c je nesouhlasná s předem zvolenou orientací zadanou vektorovým polem \vec{n} . Volba souhlasné parametrizace by odpovídala opačnému pořadí parametrů, tj. opačnému pořadí činitelů ve vektorovém součinu definujícím normálu indukovanou parametrizací.

Uvažujme nyní o obecném případě, tj. o n -rozměrném útvaru Σ v \mathbf{R}^m , $n < m$, zadaném $(m-n)$ rovnicemi

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x^1, \dots, x^m) = 0, \\ f_2(x) &= f_2(x^1, \dots, x^m) = 0, \\ &\vdots = \vdots \\ f_{m-n}(x) &= f_{m-n}(x^1, \dots, x^m) = 0, \end{aligned} \tag{12.201}$$

kde funkce $f_\alpha(x^1, \dots, x^m)$, $1 \leq \alpha \leq m - n$ jsou diferencovatelné a hodnota matice $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i}\right)$ je maximální, tj. rovna $m - n$.

Nechť množina $\Sigma \subset \mathbf{R}^m$ je zadána (nezávislými) rovnicemi (12.201). Označme $N_x \Sigma \subset T_x \mathbf{R}^m$ $(m - n)$ -rozměrný vektorový podprostor tečného prostoru $T_x \mathbf{R}^m$ generovaný v každém bodě $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbf{R}^m$ vektory

$$\zeta_\alpha = \text{grad } f_\alpha(x^1, \dots, x^m) = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^m} \right).$$

Jeho ortogonální doplněk $T_x \Sigma$ v prostoru $T_x \mathbf{R}^m$ je *tečný prostor* k Σ v bodě x . Označme $\text{Or}(x)$ (dvouprvkovou) množinu orientací vektorového prostoru $T_x \Sigma$ v bodě $x \in \mathbf{R}^m$. Předpokládejme, že existuje spojitě zobrazení

$$\mu : \mathbf{R}^m \supset \Sigma \ni x \longrightarrow \mu(x) \in \text{Or}(x)$$

přiřazující každému bodu $x \in \Sigma$ orientaci tečného prostoru $T_x \Sigma$ útvaru Σ . Takové zobrazení se nazývá *orientace útvaru* Σ a útvar Σ se nazývá *orientovaný*. Parametrizace

$$c : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \rightarrow c(u) = (x^1 c(u^1, \dots, u^n), \dots, x^m c(u^1, \dots, u^n)) \in \mathbf{R}^m,$$

kde $c([0, 1]^n) = \Sigma$, útvaru Σ se nazývá *kompatibilní* neboli *souhlasná* s předem zvolenou orientací, jestliže báze $(T_{c(u)}(e_1), \dots, T_{c(u)}(e_n))$ náleží orientaci $\mu(c(u))$. Náleží-li zmíněná báze orientaci opačné, je parametrizace *nekompatibilní* neboli *nesouhlasná* s předem zvolenou orientací.

Ve speciálním případě $n = m - 1$, kdy je množina Σ zadána jedinou rovnicí $f(x^1, \dots, x^m) = 0$ a prostor $N_x \Sigma$ je jednorozměrný, můžeme orientaci množiny Σ alternativně zadat pomocí některého ze dvou vektorových polí jednotkové normály na množině Σ ,

$$n = \pm \text{grad } f = \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m} \right),$$

(resp. pomocí normály opačné, $-n$), a to za předpokladu, že je toto vektorové pole spojitě. Parametrizace $c : [0, 1]^{m-1} \ni u \rightarrow c(u) \in \mathbf{R}^m$ útvaru Σ je pak *kompatibilní* neboli *souhlasná*, resp. *nekompatibilní* neboli *nesouhlasná* s předem zadanou orientací, je-li

$$n = \frac{\xi_1 \times \dots \times \xi_{m-1}}{|\xi_1 \times \dots \times \xi_{m-1}|}, \quad \text{resp.} \quad n = -\frac{\xi_1 \times \dots \times \xi_{m-1}}{|\xi_1 \times \dots \times \xi_{m-1}|},$$

kde $\xi_i = T_u c(e_i)$, $1 \leq i \leq m - 1$. Útvar Σ , na němž lze zadat spojitou orientaci, resp. spojitě vektorové pole normály, je *orientabilní*, v opačném případě *neorientabilní*.

12.4.4 Obecný Stokesův teorém — základ integrálních vět

Po důkladné přípravě všech potřebných pojmů konečně formulujeme a dokážeme jedno ze základních tvrzení integrálního počtu — obecný Stokesův teorém. Je velmi důležitý pro praktické výpočty. Pomocí něj totiž budeme umět převádět integrály z daného integračního oboru c , resp. Γ , na jeho hranici ∂c , resp. $\partial\Gamma$ a naopak.

Věta 12.30 (Stokesův teorém): *Nechť c je n -rozměrná singulární krychle v \mathbf{R}^m , $2 \leq n \leq m$. Nechť $\omega \in \Lambda_{n-1}(\mathbf{R}^m)$ je $(n-1)$ -forma definovaná spolu se svou vnější derivací $d\omega$ na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^m$ obsahující $c([0, 1]^{n-1})$. Platí*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega. \quad (12.202)$$

Věta zní velmi jednoduše a také její důkaz je snadný. Provedeme jej ve dvou krocích. Nejprve předpokládejme, že integračním oborem pravé strany vztahu (12.202) je standardní n -rozměrná krychle I^n v \mathbf{R}^n , a ∂I^n její hranice, tj.

$$I^n : [0, 1]^n \ni t = (t^1, \dots, t^n) \longrightarrow I^n(t) = (u^1 I^n(t), \dots, u^n I^n(t)) \in \mathbf{R}^n,$$

$$u^i(t^1, \dots, t^n) = t^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\partial I^n = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} I_{(j,\alpha)}^n.$$

Předpokládejme, že $\omega \in \Lambda_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ je forma definovaná na otevřené podmnožině prostoru \mathbf{R}^n obsahující $I^n([0, 1]^n)$. Její souřadnicové vyjádření má tvar součtu forem typu

$$\eta = f(u^1, \dots, u^n) du^1 \wedge \dots \wedge du^{i-1} \wedge du^{i+1} \wedge \dots \wedge du^n.$$

Vzhledem k linearitě integrálu (integrál součtu forem je roven součtu integrálů z jednotlivých sčítanců) stačí provést důkaz pro formu η . Provedeme to výpočtem a porovnáním obou stran dokazované věty. Platí

$$\int_{\partial I^n} \eta = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I_{(j,\alpha)}^n} \eta = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{n-1}} I_{(j,\alpha)}^{n*} \eta.$$

Vypočteme pullback $I_{(j,\alpha)}^{n*} \eta$:

$$I_{(j,\alpha)}^{n*} \eta = [f \circ I_{(j,\alpha)}^n] (I_{(j,\alpha)}^{n*} du^1) \wedge \dots \wedge (I_{(j,\alpha)}^{n*} du^{i-1}) \wedge (I_{(j,\alpha)}^{n*} du^{i+1}) \wedge \dots \wedge (I_{(j,\alpha)}^{n*} du^n).$$

Připomeňme definici zobrazení (j, α) -stěny $I_{(j,\alpha)}^n$:

$$I_{(j,\alpha)}^n : [0, 1]^{n-1} \ni v = (v^1, \dots, v^{n-1}) \longrightarrow I_{(j,\alpha)}^n(v) = (u^1 I_{(j,\alpha)}^n(v), \dots, u^n I_{(j,\alpha)}^n(v)) \in \mathbf{R}^n,$$

kde

$$\begin{aligned} u^s &= u^s I_{(j,\alpha)}^n(v^1, \dots, v^{n-1}) = v^s \quad \text{pro } 1 \leq s \leq j-1, \\ u^s &= u^s I_{(j,\alpha)}^n(v^1, \dots, v^{n-1}) = \alpha \quad \text{pro } s = j, \\ u^s &= u^s I_{(j,\alpha)}^n(v^1, \dots, v^{n-1}) = v^{s-1} \quad \text{pro } j+1 \leq s \leq n. \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} I_{(j,\alpha)}^{n*} du^s &= dv^s \quad \text{pro } 1 \leq s \leq j-1, \\ I_{(j,\alpha)}^{n*} du^s &= 0 \quad \text{pro } s = j, \\ I_{(j,\alpha)}^{n*} du^s &= dv^{s-1} \quad \text{pro } j+1 \leq s \leq n. \end{aligned}$$

Vnější součin forem typu $I_{(j,\alpha)}^{n*} du^s$ je nenulový jedině tehdy, neobsahuje-li činitel $I_{(j,\alpha)}^{n*} du^j$. Ten je totiž nulový a anuloval by celý výraz $I_{(j,\alpha)}^n \eta$. Proto je forma $I_{(j,\alpha)}^n \eta$ nenulová jedině pro $j = i$. V tomto případě je rovna

$$\begin{aligned} [f \circ I_{(j,\alpha)}^n] (I_{(j,\alpha)}^{n*} du^1) \wedge \dots \wedge (I_{(j,\alpha)}^{n*} du^{i-1}) \wedge (I_{(j,\alpha)}^{n*} du^{i+1}) \wedge \dots \wedge (I_{(j,\alpha)}^{n*} du^n) = \\ = (f \circ I_{(i,\alpha)}^n) dv^1 \wedge \dots \wedge dv^{n-1}. \end{aligned}$$

Integrál z formy η po hranici ∂I^n n -rozměrné standardní krychle je

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^n} \eta &= \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{n-1}} (f \circ I_{(i,\alpha)}^n) dv^1 \wedge \dots \wedge dv^{n-1} = \\ &= (-1)^i \int_{[0,1]^{n-1}} f(v^1, \dots, v^{i-1}, 0, v^i, \dots, v^{n-1}) dv^1 \dots dv^{n-1} + \\ &+ (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{n-1}} f(v^1, \dots, v^{i-1}, 1, v^i, \dots, v^{n-1}) dv^1 \dots dv^{n-1} = \end{aligned}$$

$$= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{n-1}} [f(v^1, \dots, v^{i-1}, 1, v^i, \dots, v^{n-1}) - f(v^1, \dots, v^{i-1}, 0, v^i, \dots, v^{n-1})] dv^1 \dots dv^{n-1},$$

přičemž se již jedná o Riemannův integrál. Počítejme nyní pravou stranu Stokesova teorému pro formu η . Platí

$$d\eta = df \wedge du^1 \wedge \dots \wedge du^{i-1} \wedge du^{i+1} \wedge \dots \wedge du^n = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial u^i} du^1 \wedge \dots \wedge du^n,$$

$$\int_{I^n} d\eta = (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^n} \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \circ I^n \right) dt^1 \dots dt^n.$$

Tento Riemannův integrál upravíme pomocí Fubiniovy věty na tvar

$$\begin{aligned} & (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^n} \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \circ I^n \right) dt^1 \dots dt^n = \\ & = (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{n-1}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \circ I^n \right) dt^i \right] dt^1 \dots dt^{i-1} dt^{i+1} \dots dt^n = \\ & = (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{n-1}} \left[f(v^1, \dots, v^{i-1}, 1, v^i, \dots, v^{n-1}) - f(v^1, \dots, v^{i-1}, 0, v^i, \dots, v^{n-1}) \right] dv^1 \dots dv^{n-1}, \end{aligned}$$

kde jsme provedli substituci $v^j = t^j$ pro $1 \leq j \leq i-1$, $v^{j-1} = t^j$ pro $i+1 \leq j \leq n$. Hned vidíme, že výsledné výrazy získané pro $\int_{\partial I^n} \eta$ a $\int_{I^n} d\eta$ jsou shodné. Pro standardní krychli jsme tedy Stokesův teorém dokázali pro libovolnou $(n-1)$ -formu ω . Uvažujme teď o obecné situaci, tj. n -rozměrné singulární krychli $c: [0,1]^n \ni u \rightarrow c(u) \in \mathbf{R}^m$, zadané rovnicemi $x^j = x^j c(u^1, \dots, u^n)$, $1 \leq j \leq m$. O $(n-1)$ -formě ω předpokládejme, podle požadavků věty 12.30, že je definována na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^m$ obsahující obraz krychle $[0,1]^n$ zobrazením c , tj. $c([0,1]^n) \subset D$. Pomocí definice integrálu, platnosti Stokesova teorému pro standardní krychli a použitím záměnnosti pullbacku a vnější derivace dostaneme

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^n} c^* \omega = \int_{I^n} dc^* \omega = \int_{I^n} c^*(d\omega) = \int_c d\omega.$$

Na následujícím příkladu ukážeme, jak Stokesův teorém „funguje“ a jak si pomocí něj usnadnit výpočty.

Příklad 12.112: Jak funguje Stokesův teorém — poprvé

Na konci příkladu 12.108 jsme slíbili, že se k němu ještě vrátíme. Teď je ten správný okamžik. Snadno ověříme (provedte), že forma $\omega = \omega_F^{(2)} = -xy \, dy \wedge dz + yz \, dx \wedge dy$ z příkladu 12.108 je uzavřená, tj. $d\omega = 0$. Je definována na celém prostoru \mathbf{R}^3 , je proto také exaktní. To znamená, že existuje 1-forma η , pro niž je $d\eta = \omega$. Na ni lze aplikovat Stokesův teorém ve tvaru

$$\int_{\partial S} \eta = \int_S d\eta = \int_S \omega.$$

Hledejme formu $\eta = \omega_G^{(1)} = G_1 \, dx + G_2 \, dy + G_3 \, dz$. Víme, že ze vztahu $d\omega_G^{(1)} = \omega_F^{(2)}$ vyplývá, že vektorové pole \vec{F} je rotací vektorového pole \vec{G} (viz odstavec 12.3.6). Hledáme proto řešení rovnic

$$F_1 = \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -xy, \quad F_2 = \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = 0, \quad F_3 = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = yz.$$

Uvedené podmínky splňuje například vektorové pole $\vec{G} = (0, xyz, 0)$ (ověřte). Jemu odpovídá forma $\omega_G^{(1)} = xyz dy$. Podle Stokesova teoremu bychom měli integrací této formy po hranici plochy S dostat stejný výsledek jako v příkladu 12.108. Hranice plochy S je složena z části šroubovice $\mathcal{C} : [0, 2\pi] \ni \varphi \rightarrow \mathcal{C}(\varphi) \in \mathbf{R}^3$ o rovnicích

$$x = x\mathcal{C}(t) = R \cos \varphi, \quad y = y\mathcal{C}(t) = R \sin \varphi, \quad z = z\mathcal{C}(t) = \frac{R\varphi}{4\pi}$$

a z úsečky \mathcal{U} spojující body $A = (R, 0, \frac{R}{2})$ a $B = (R, 0, 0)$ (v tomto pořadí, A je počátečním a B koncovým bodem úsečky \mathcal{U}). Parametrizovat ji lze třeba zobrazením $\mathcal{U} : [0, 1] \ni t \rightarrow \mathcal{U}(t) \in \mathbf{R}^3$, kde

$$x = x\mathcal{U}(t) = R, \quad y = y\mathcal{U}(t) = 0, \quad z = z\mathcal{U}(t) = \frac{R}{2}(1 - t).$$

Platí

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \omega_G^{(1)} &= \int_{\mathcal{C}} \omega_G^{(1)} + \int_{\mathcal{U}} \omega_G^{(1)} = \int_{[0, 2\pi]} \mathcal{C}^* \omega_G^{(1)} + \int_{[0, 1]} \mathcal{U}^* \omega_G^{(1)} = \frac{R^4}{4\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi + \int_0^1 0 dt = \\ &= \frac{R^4}{4\pi} \left[-\frac{1}{3} \varphi \cos^3 \varphi + \frac{1}{3} \sin \varphi \left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \varphi \right) \right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{6} R^4. \end{aligned}$$

Výsledek je skutečně shodný s příkladem 12.108.

Příklad 12.113: Je tu ale nejednoznačnost

Zůstaňme ještě chvíli u předchozího příkladu. Hledali jsme v něm formu $\omega_G^{(1)}$, jejíž vnější derivace je rovna zadané formě $\omega_F^{(2)} = -xy dy \wedge dz + yz dx \wedge dy$. Jednu takovou jsme našli, konkrétně $\omega_G^{(1)} = xyz dy$. Je to však jediné řešení rovnice $d\omega_G^{(1)} = \omega_F^{(2)}$? Jistě ne. Přičteme-li k formě $\omega_G^{(1)}$ vnější derivaci libovolné funkce $f = f(x, y, z)$, bude požadovaná rovnost rovněž splněna, neboť $d^2 f = 0$. Vektorové pole odpovídající této situaci je $\vec{G}' = \vec{G} + \text{grad } f$ a platí

$$\int_{\partial S} \omega_G^{(1)} = \int_{\partial S} \omega_{G'}^{(1)} = \int_{\partial S} (\omega_G^{(1)} + df), \quad \int_{\partial S} df = 0.$$

V předchozím příkladu se objevil integrál z exaktní 1-formy df na jednorozměrné singularní krychli. Vzniká otázka, zda i pro takový případ lze použít Stokesův teorem. Ten by pak měl tvar

$$\int_c df = \int_{\partial c} f.$$

Co je však hranicí jednorozměrné singularní krychle či jednorozměrného singularního řetězce? (0-rozměrnou singularní krychli jsme zatím nedefinovali.) A jak je definován integrál z 0-formy? (To jsme také zatím nedefinovali — pozor, není to Riemannův integrál z funkce. Víte proč?) Stokesův teorem formulovaný ve větě 12.30 se na uvedený případ nevztahoval. Měli bychom proto definici v uvedeném smyslu doplnit. 0-rozměrnou singularní krychli v \mathbf{R}^m definujeme

312 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

jako zobrazení $c_0 : \{t_0\} \ni t_0 \rightarrow c_0(t_0) \in \mathbf{R}^m$, kde $\{t_0\} \subset \mathbf{R}$ je jednoprvková množina. Integrál z 0-formy ω po 0-rozměrné singulární křivce zavedeme vztahem

$$\int_{c_0} \omega = \omega(c_0(t_0)).$$

Předpokládejme, že

$$c : [0, 1] \ni t \rightarrow c(t) = (x^1 c(t), \dots, x^m c(t)) \in \mathbf{R}^m$$

je jednorozměrná singulární křivka. Co je její hranicí? Podle definice by to mohl být 0-rozměrný singulární řetězec

$$\partial c = \sum_{i=1}^1 \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)} = \sum_{i=1}^1 \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c \circ I_{(i,\alpha)}^1 = c(1) - c(0).$$

Hranicí jednorozměrné singulární křivky tedy fakticky tvoří její krajní body, jen se při výpočtu musí vzít v úvahu se správným znaménkem. Nechť ω je 0-forma, tj. funkce. Platí

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]} c^* d\omega = \int_{[0,1]} d(\omega \circ c) = \int_0^1 \frac{d(\omega \circ c)(t)}{dt} dt = \omega(c(1)) - \omega(c(0)).$$

Poslední integrální výraz je již Riemannův integrál. Dostali jsme

$$\int_c d\omega = \omega(c(1)) - \omega(c(0)) = \int_{\partial c} \omega.$$

Vidíme, že Stokesův teorém platí, po správném dodefinování chybějících pojmů, také pro případ jednorozměrné singulární křivky (resp. jednorozměrného singulárního řetězce) a odpovídající 0-rozměrné hranice.

Příklad 12.114: Jak funguje Stokesův teorém — podruhé

Máme-li počítat integrál z $(n-1)$ -formy ω po hranici n -rozměrné singulární křivky, resp. řetězce, v \mathbf{R}^m , můžeme si vybrat. Buď provedeme výpočet přímo z definice, nebo použijeme Stokesova teorému. Často dovedeme odhadnout, který výpočet bude pohodlnější, a ten použijeme. „Ideální“ pro tak trochu lenivé počtáře je situace, kdy $d\omega = 0$, tj. forma ω je uzavřená. To pak nemusejí počítat vůbec nic, neboť je jasné, že $\int_c d\omega = 0$, takže by integrál $\int_c \omega$ i přímým výpočtem vyšel nulový. Takhle snadno ale příklad na použití Stokesova teorému neobudeme.

Když jsme se vrátili k příkladu 12.108 a vypočetli plošný integrál (druhého druhu) pomocí křivkového, vraťme se i k příkladu 12.109, kde jsme rovněž počítali plošný integrál druhého druhu. Ten však nebudeme převádět na integrál křivkový (víte proč?), ale na integrál objemový. Plocha S , která byla integračním oborem v příkladu 12.109, je hranicí množiny (objemu) $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, tj. $S = \partial V$. Počítali jsme integrál

formy $\omega_F^{(2)} = (-xy - y^2) dz \wedge dx + z dx \wedge dy$. Její vnější derivace je $d\omega_F^{(2)} = \omega_{\text{div } F}^{(3)} = (-x - 2y + 1) dx \wedge dy \wedge dz$. Platí

$$\int_S \omega_F^{(2)} = \int_{\partial V} \omega_F^{(2)} = \int_V \omega_{\text{div } F}^{(3)} = \int_V (-x - 2y + 1) dx dy dz,$$

poslední integrál je trojnásobným Riemannovým integrálem. Převedeme jej do válcových souřadnic ($x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = z$, jakobián ϱ) a postupnou integrací (použitím Fubiniovy věty) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_S \omega_F^{(2)} &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left[\int_{\varrho^2}^1 (-\varrho \cos \varphi - 2\varrho \sin \varphi + 1) dz \right] \varrho d\varrho \right\} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 (-\varrho \cos \varphi - 2\varrho \sin \varphi + 1)(1 - \varrho^2) \varrho d\varrho \right\} d\varphi = 2\pi \int_0^1 (\varrho - \varrho^3) d\varrho = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vyšlo to — srovnajte s výsledkem příkladu 12.109. Zdá se, že nahrazení přímého výpočtu plošného integrálu z definice integrálem objemovým s použitím Stokesova teorému bylo snazší cestou k výsledku.

Příklad 12.115: Jak funguje Stokesův teorém — potřetí

Možná, že se vám v předchozím příkladu nezdálo, že by převod plošného integrálu na objemový pomocí Stokesova teorému byl nějakým velkým usnadněním. Tak ukážeme další. Máme určit tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y, z)$ povrchem jednotkové krychle $\bar{K} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x, y, z \leq 1\}$ orientované vnější normálou. Integrovaným objektem bude forma

$$\omega_F^{(2)} = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

Útvar \bar{K} lze parametrizovat jako trojrozměrnou standardní krychli I^3 . Integračním oborem bude hranice ∂I^3 standardní krychle, která je složena ze šesti stěn. Vyjádření hranice jako dvojrozměrného singulárního řetězce v souladu s definicí hranice (12.188), tj. jako formálního součtu stěn (s patřičnými znaménky) je kompatibilní s orientací povrchu krychle vnější normálou. Pozorný čtenář možná namítne, že vektorové pole vnější normály k povrchu krychle není spojitě. Na hranách krychle totiž normála není vůbec definována. O tomto problému jsme však již mluvili: vzhledem k tomu, že množina bodů na hranách krychle je zanedbatelná, není tento „nedostatek“ na závadu. Přímý výpočet integrálu z formy $\omega_F^{(2)}$ po hranici krychle je součtem tvaru

$$\int_{\partial I^3} \omega_F^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \int_{I_{(i,\alpha)}^3} \omega_F^{(2)}.$$

Vypočteme všech šest integrálů. Platí (parametrizujte jednotlivé stěny parametry u a v a proveďte podrobně všechny výpočty)

$$\begin{aligned} I_{(1,0)}^{3*} \omega_F^{(2)} &= I_{(1,0)}^{3*} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) = 0, \\ I_{(1,1)}^{3*} \omega_F^{(2)} &= I_{(1,1)}^{3*} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) = du \wedge dv, \\ I_{(2,0)}^{3*} \omega_F^{(2)} &= I_{(2,0)}^{3*} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) = 0, \\ I_{(2,1)}^{3*} \omega_F^{(2)} &= I_{(2,1)}^{3*} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) = -du \wedge dv, \\ I_{(3,0)}^{3*} \omega_F^{(2)} &= I_{(3,0)}^{3*} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) = 0, \\ I_{(3,1)}^{3*} \omega_F^{(2)} &= I_{(3,1)}^{3*} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) = du \wedge dv. \end{aligned}$$

314 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

Nenulové jsou pouze integrály na stěnách $I_{(1,1)}^3$, $I_{(2,1)}^3$ a $I_{(3,1)}^3$. Platí

$$\int_{\partial I^3} \omega_F^{(2)} = (-1)^{1+1} \int_{[0,1]^2} du \wedge dv + (-1)^{2+1} \int_{[0,1]^2} -du \wedge dv + (-1)^{3+1} \int_{[0,1]^2} du \wedge dv = 3.$$

Tok daného vektorového pole \vec{F} povrchem krychle orientované vnější normálou je $\Phi_F = 3$. Použitím Stokesova teorému však dostaneme výsledek okamžitě:

$$\int_{\partial I^3} \omega_F^{(2)} = \int_{I^3} d\omega_F^{(2)} = \int_{I^3} 3 dx \wedge dy \wedge dz = \int_{[0,1]^3} dx dy dz = 3.$$

Účinné, že?

Příklad 12.116: Jak (ne)funguje Stokesův teorém — poprvé

V rovině xy je zadáno silové pole $\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$. Máme určit práci, kterou toto silové pole vykoná při působení na částici, která se pohybuje po elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < b < a$, orientované v kladném geometrickém smyslu (proti chodu hodinových ručiček). Víme, že elementární práci pole \vec{F} představuje forma

$$\omega_F^{(1)} = F_1 dx + F_2 dy = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

a celková práce je jejím integrálem po zadané křivce. Čtenář, který raději derivuje než integruje, může zkusit, zda nebude vhodnější provést výpočet pomocí Stokesova teorému, tj. spočítat místo křivkového integrálu z formy $\omega_F^{(1)}$ po zadané elipse integrál z formy $d\omega_F^{(1)} = \omega_{\text{rot } F}^{(2)}$ na množině $M = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, jejíž hranici elipsa tvoří. Vypočte proto vnější derivaci formy $\omega_F^{(1)}$ (provedte podrobně):

$$d\omega_F^{(1)} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy = 0.$$

Vypadá to, že práce silového pole \vec{F} po elipse je nulová. Neradujme se však předčasně. Pečlivější čtenář raději ověří předpokládaný výsledek přímým výpočtem. Provedme jej. Parametrizujme elipsu tak, aby parametrizace byla souhlasná se zadanou orientací, třeba takto:

$$\mathcal{E} : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow \mathcal{E}(t) = (x\mathcal{E}(t), y\mathcal{E}(t)) \in \mathbf{R}^2,$$

$$x = x\mathcal{E}(t) = a \cos t, \quad y = y\mathcal{E}(t) = b \sin t.$$

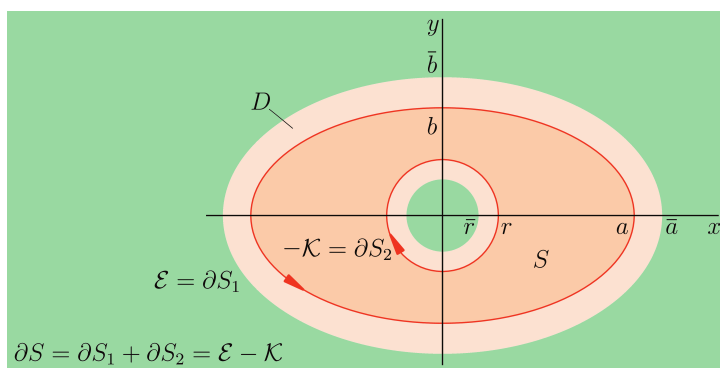
Platí (provedte podrobný výpočet)

$$\mathcal{E}^* dx = -a \sin t dt, \quad \mathcal{E}^* dy = b \cos t dt, \quad \mathcal{E}^* \omega_F^{(1)} = -\frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt,$$

$$A = \int_0^{2\pi} -\frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt.$$

Práce A je již vyjádřena Riemannovým integrálem. Ten je rozhodně nenulový, neboť integrovaná funkce je na celém integračním oboru záporná. Jak je to ale s platností Stokesova teorému? Vždyť přece podle něj měla

práce vyjít nulová. Zamysleme se nad tím, zda v této situaci vůbec lze Stokesův teorém použít. Jsou splněny jeho předpoklady? Podle nich mají být integrované formy definovány na otevřené množině obsahující integrační obor a jeho hranici. V našem případě to však neplatí. Předpoklady jsou sice porušeny v jediném bodě (forma $\omega_F^{(1)}$ není definována v počátku soustavy souřadnic), ale i to stačí k tomu, abychom Stokesův teorém nemohli použít. Přesto se nemusíme vzdát úplně. Práci se nám podaří spočítat i bez přímého výpočtu integrálu. Jen se nějak musíme „zbavit“ počátku soustavy souřadnic, který aplikaci Stokesova teorému v podobě, v jaké jsme jej chtěli použít, vadí. Zvolme plochu S v rovině xy tak, aby byla omezena elipsou, po které máme počítat práci silového pole \vec{F} , a malou kružnicí \mathcal{K} o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$, $r < b$, (obrázek 12.57).



Obrázek 12.57 K příkladu 12.116.

Pokusme se parametrizovat plochu S jako dvojrozměrnou singulární krychli. Vyplníme ji uzavřenými křivkami tak, aby hraniční kružnice \mathcal{K} přešla spojitě v hraniční elipsu \mathcal{E} . Parametrické vyjádření obou křivek zvolíme ve tvaru jednorozměrných singulárních krychlí v \mathbf{R}^2 :

$$\mathcal{K} \dots c_1 : [0, 1] \ni v \longrightarrow (xc_1(v), yc_1(v)) = (r \cos 2\pi v, r \sin 2\pi v) \in \mathbf{R}^2,$$

$$\mathcal{E} \dots c_2 : [0, 1] \ni v \longrightarrow (xc_2(v), yc_2(v)) = (a \cos 2\pi v, b \sin 2\pi v) \in \mathbf{R}^2.$$

(Všimněme si, že parametrizace obou křivek jsou souhlasné s jejich orientací v kladném geometrickém smyslu.) Od kružnice k elipse přejdeme spojitým zobrazením

$$c_v : [0, 1] \ni u = c_v(u) = (1 - u)c_1(v) + uc_2(v) \in \mathbf{R}^2, \quad \text{tj.} \quad c_v(0) = c_1, \quad c_v(1) = c_2,$$

přičemž (a to je podstatné) každá z křivek daná parametrizací c_v , $v \in [0, 1]$, leží v oblasti D obsahující plochu S i její hranici $\partial S = \mathcal{E} - \mathcal{K}$. (Křivky ležící v oblasti D , které lze jednu v druhou deformovat spojitým zobrazením tak, že všechny „mezikřivky“ leží v této oblasti, jsou takzvaně homotopické. Tento pojem budeme potřebovat v kapitole 13.) Parametrizaci plochy S lze zvolit ve tvaru

$$c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow c(u, v) = (xc(u, v), yc(u, v)) \in \mathbf{R}^2,$$

$$x = xc(u, v) = r(1 - u) \cos 2\pi v + au \cos(2\pi v), \quad y = yc(u, v) = r(1 - u) \sin 2\pi v + bu \sin 2\pi v.$$

Stěny singulární krychle c jsou

$$c_{(1,0)} : [0, 1] \ni t \longrightarrow (xc_{(1,0)}, yc_{(1,0)}) = (r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t) \in \mathbf{R}^2,$$

$$c_{(1,1)} : [0, 1] \ni t \longrightarrow (xc_{(1,1)}, yc_{(1,1)}) = (a \cos 2\pi t, b \sin 2\pi t) \in \mathbf{R}^2,$$

$$c_{(2,0)} : [0, 1] \ni t \longrightarrow (xc_{(2,0)}, yc_{(2,0)}) = (r(1 - t) + at, 0) \in \mathbf{R}^2,$$

$$c_{(2,1)} : [0, 1] \ni t \longrightarrow (xc_{(2,1)}, yc_{(2,1)}) = (r(1 - t) + at, 0) \in \mathbf{R}^2.$$

Hranicí krychle c je jednorozměrný singulární řetězec v \mathbf{R}^2

$$\partial c = -c_{(1,0)} + c_{(1,1)} + c_{(2,0)} - c_{(2,1)} = -(r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t) + (a \cos 2\pi t, b \sin 2\pi t).$$

Stěny $c_{(2,0)}$ a $c_{(2,1)}$ se ve formálním součtu vynuřily. Na singulární křivce c a její hranici Stokesův teorém aplikovat můžeme, neboť forma $\omega_F^{(2)}$ je definována na otevřené podmnožině prostoru \mathbf{R}^2 , která již počátek soustavy souřadnic neobsahuje. Může to být třeba množina

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 > \bar{r}, \frac{x^2}{\bar{a}^2} + \frac{y^2}{\bar{b}^2} < 1, \bar{r} < r, a < \bar{a}, b < \bar{b} \right\}.$$

Protože je vnější derivace formy $d\omega_F^{(1)}$ na množině D nulová a množina D obsahuje dvojrozměrnou singulární křivku c , platí podle Stokesova teorému

$$\int_{\partial c} \omega_F^{(1)} = \int_c d\omega_F^{(1)} = 0 \implies \int_{-c_{(1,0)}} \omega_F^{(1)} + \int_{c_{(1,1)}} \omega_F^{(1)} = 0.$$

Odtud

$$\int_{c_{(1,1)}} \omega_F^{(1)} = - \int_{-c_{(1,0)}} \omega_F^{(1)} = \int_{c_{(1,0)}} \omega_F^{(1)}.$$

Uvědomíme-li si, že $c_{(1,0)}$ je parametrizace kružnice \mathcal{K} a $c_{(1,1)}$ parametrizace elipsy \mathcal{E} , můžeme psát

$$\int_{\mathcal{E}} \omega_F^{(1)} = \int_{\mathcal{K}} \omega_F^{(1)}.$$

Tento výsledek je velmi důležitý. Zatímco integrál z formy $\omega_F^{(1)}$ po elipse \mathcal{E} se zrovna jednoduše spočítat nedal, integrál po kružnici \mathcal{K} spočteme snadno:

$$\int_{\mathcal{K}} \omega_F^{(1)} = \int_0^1 -2\pi \frac{r^2}{r^2 \cos^2 2\pi t + r^2 \sin^2 2\pi t} dt = - \int_0^1 2\pi dt = -2\pi.$$

Význam našeho výsledku je ještě dalekosáhlejší než odpovídá původnímu zadání spočítat integrál z dané formy po elipse. I když \mathcal{C} nebude zrovna elipsa, ale libovolná křivka obíhající počátek soustavy souřadnic (bod, v němž integrovaná forma „kazuje“ předpoklady Stokesova teorému) jednou v kladném geometrickém smyslu, bude výsledek stále platit. Z toho vyplývá, že integrál z dané formy bude mít stejnou hodnotu po všech uzavřených křivkách, které obíhají počátek soustavy souřadnic jednou v kladném geometrickém smyslu. A co kdyby křivka obíhala počátek třeba v záporném smyslu, popřípadě několikrát? I tento problém vyřešíme. Označme k počet oběhů křivky \mathcal{C} kolem počátku soustavy souřadnic, přičemž k bude záporné, děje-li se obíhání v záporném smyslu. Kružnici \mathcal{K} parametrizujeme tak, aby obíhala počátek soustavy souřadnic stejněkrát, tj.

$$c_1 : [0, 1] \ni v \longrightarrow (r \cos 2k\pi v, r \sin 2k\pi v) \in \mathbf{R}^2.$$

Křivku \mathcal{C} můžeme převést v kružnici \mathcal{K} spojitým zobrazením

$$c_v : [0, 1] \ni u \longrightarrow (1-u)c_1(v) + uc_2(v) \in \mathbf{R}^2,$$

kde c_2 je parametrizace křivky \mathcal{C} respektující daný počet k oběhů počátku soustavy souřadnic. Integrál je potom roven $-2k\pi$ (spočtete jej).

Přemýšlivý čtenář si jistě položí otázku, co by se stalo, kdybychom nedodrželi stejný počet oběhů křivek s parametrizacemi c_1 a c_2 , ležících v oblasti D , kolem bodu, v němž integrovaná forma není definována. Představme si pro jednoduchost, že těmito dvěma křivkami jsou kružnice o poloměrech r a R , $r < R$, se středy v počátku soustavy souřadnic, přičemž malá kružnice obíhá počátek soustavy souřadnic dvakrát v kladném smyslu a velká jen jednou, tj.

$$c_1 : [0, 1] \ni v \longrightarrow (r \cos 4\pi v, r \sin 4\pi v) \in \mathbf{R}^2,$$

$$c_2 : [0, 1] \ni v \longrightarrow (R \cos 2\pi v, R \sin 2\pi v) \in \mathbf{R}^2.$$

Pak zobrazení

$$c_v : [0, 1] \ni v \longrightarrow c_v(u) = (1-u)c_1(v) + uc_2(v) \in \mathbf{R}^2$$

je spojitě a převádí menší kružnici (pro $u = 0$) ve větší ($u = 1$). Parametrizujeme rovinnou plochu mezi křivkami jako dvojrozměrnou singulární krychli pomocí zobrazení

$$c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow (xc(u, v), yc(u, v)) \in \mathbf{R}^2,$$

$$xc(u, v) = r(1-u) \cos 4\pi v + Ru \cos 2\pi v, \quad yc(u, v) = r(1-u) \sin 4\pi v + Ru \sin 2\pi v.$$

Její stěny jsou

$$c_{(1,0)} : [0, 1] \ni t \longrightarrow (xc_{(1,0)}, yc_{(1,0)}) = (r \cos 4\pi t, r \sin 4\pi t) \in \mathbf{R}^2,$$

$$c_{(1,1)} : [0, 1] \ni t \longrightarrow (xc_{(1,1)}, yc_{(1,1)}) = (R \cos 2\pi t, R \sin 2\pi t) \in \mathbf{R}^2,$$

$$c_{(2,0)} : [0, 1] \ni t \longrightarrow (xc_{(2,0)}, yc_{(2,0)}) = (r(1-t) + Rt, 0) \in \mathbf{R}^2,$$

$$c_{(2,1)} : [0, 1] \ni t \longrightarrow (xc_{(2,1)}, yc_{(2,1)}) = (r(1-t) + Rt, 0) \in \mathbf{R}^2.$$

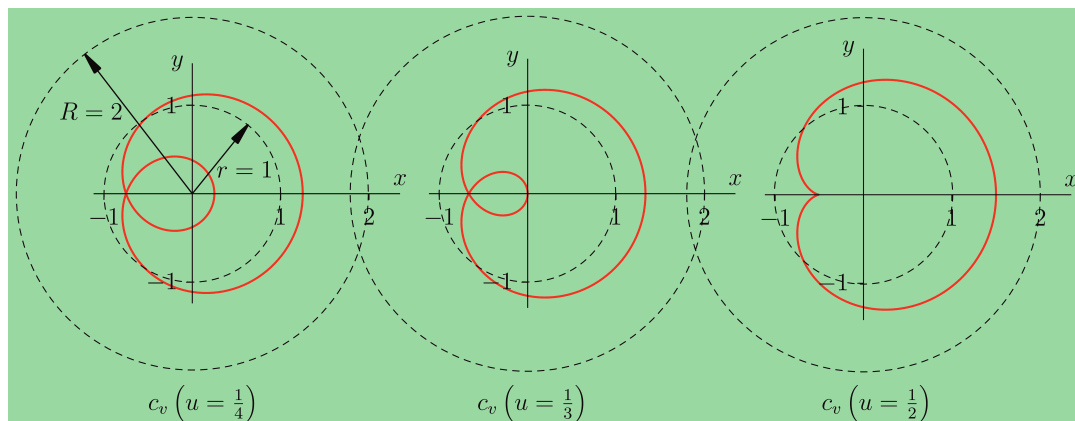
Vypočteme-li integrál z formy $\omega_F^{(1)}$ po hranici ∂c krychle c , dostaneme (propočtěte)

$$\int_{\partial c} \omega_F^{(1)} = - \int_0^1 -4\pi \frac{r^2}{r^2 \cos^2 4\pi t + r^2 \sin^2 4\pi t} dt + \int_0^1 -2\pi \frac{R^2}{R^2 \cos^2 2\pi t + R^2 \sin^2 2\pi t} dt = 2\pi.$$

Integrál zase vyšel nenulový a přitom víme, že $d\omega_F^{(1)} = 0$. Jak je to možné? Všechno jsme přece spočítali správně a hranice krychle c leží v oblasti, v níž je integrovaná forma definována! Touto oblastí je například mezikružší o poloměrech r' a R' , $r' < r < R < R'$. Problém je v tom, že zobrazení c nepředstavuje nyní parametrizaci mezikružší o poloměrech r a R . Deformujeme-li spojitým zobrazením $c_v(u)$ malou kružnici ve velkou, „vyběhnou“ některé z křivek z oblasti D ven a některá z nich projde počátkem soustavy souřadnic, v němž ovšem, jak víme, není forma $\omega_F^{(1)}$ definována.

Je tak opět porušen jeden z předpokladů Stokesova teorému. Kružnice parametrizované zobrazeními c_1 a c_2 nejsou homotopické v oblasti D . Situaci názorně ukazuje obrázek 12.58 zobrazující křivky c_v pro $u = \frac{1}{4}$, $u = \frac{1}{3}$ a $u = \frac{1}{2}$ (je sestaven pro $r = 1$, $R = 2$). Protože zobrazení $c_v(u)$ převádějí kružnici $c_1 = c_v(0)$ v kružnici $c_2 = c_v(1)$ je spojitě, je zřejmé, že některá z křivek „mezi“ těmi, které jsou na obrázku znázorněny, musela projít počátkem soustavy souřadnic. A výpočtem se to dá snadno ověřit: pro $(u, v) = \left(\frac{r}{r+R}, \frac{1}{2}\right)$ dostaneme $(x, y) = (0, 0)$. Při volbě poloměrů odpovídající obrázku nastane tato situace pro $u = \frac{1}{3}$. (Abychom našli spojitě zobrazení převádějí malou kružnici ve velkou tak, aby žádná z křivek „mezi nimi“ neprošla počátkem soustavy souřadnic, je třeba, aby počet oběhů kružnic kolem počátku byl shodný.)

K problematice homotopických křivek v rovině, kterou jsme tímto příkladem naznačili, se podrobněji vrátíme v kapitole 13.



Obrázek 12.58 Ještě k příkladu 12.116.

Příklad 12.117: Jak (ne)funguje Stokesův teorém — podruhé

Příklad 12.116 nyní obměníme tak, že se budeme zabývat prací centrálního silového pole $\vec{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ v rovině xy . Máme opět určit práci, kterou toto silové pole vykoná při působení na částici, která se pohybuje po kladně orientované elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < b < a$. Elementární práci tohoto silového pole představuje forma

$$\omega_F^{(1)} = F_1 dx + F_2 dy = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2},$$

která, podobně jako v příkladu 12.116, nespĺňuje požadavky Stokesova teorému. Její vnější derivace je opět nulová (provedte výpočet). Z předchozího příkladu víme, že práce po zadané elipse (a také po jakékoli jiné uzavřené křivce obíhající v kladném smyslu jednotlivý bod, který předpoklady Stokesova teorému kazí, tj. počátek soustavy souřadnic) je rovna práci po stejně orientované kružnici. Vypočteme ji. Kružnici \mathcal{K} parametrizujeme tentokrát vztahy

$$\mathcal{K} : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow \mathcal{K}(t) = (x\mathcal{K}(t), y\mathcal{K}(t)) = (r \cos t, r \sin t) \in \mathbf{R}^2.$$

Pak

$$\mathcal{K}^* \omega_F^{(1)} = \mathcal{K}^* \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = 0 \implies \int_{\mathcal{K}} \omega_F^{(1)} = \int_{\mathcal{E}} \omega_F^{(1)} = 0.$$

V tomto případě jsou si integrály vystupující ve Stokesově teorému rovny. Není to nic podivného. Předpoklady věty představují podmínku *postačující*, nikoli však nutnou. Proto se může stát, že v konkrétní situaci je tvrzení věty splněno, aniž jsou splněny předpoklady. (S podobnou situací jsme se již setkali víckrát. Třeba v odstavcích 5.2.3 a 9.2.2, kde jsme se zabývali záměnností smíšených parciálních derivací funkce — Schwartzova věta 5.1 a její zobecnění 9.4. Postačující, nikoli však nutnou podmínkou záměnnosti smíšených parciálních derivací byla jejich spojitost.)

V několika předchozích příkladech jsme viděli, jak Stokesův teorém používat, ale také jak se vyhnout jeho nesprávnému použití.

12.4.5 Objemové elementy a integrály prvního druhu

S pojmem „objemový element“ jsme se setkali v páté kapitole v druhém dílu, kdy jsme „odvozovali“ vztahy pro element délky křivky, element rovinné plochy a objemový element v kartézských, polárních, válcových, kulových (odstavec 5.2), ale také v obecných křivočarých souřadnicích (odstavec 5.3). Slovo „odvozovali“ je v uvozovkách úmyslně — šlo o úvahy geometricky sice názorné, ale z hlediska „správné“ matematiky jim přece jen cosi chybělo. Pojem „integrál prvního druhu“ se pro případ křivky objevil dokonce už v prvním dílu, v odstavcích 2.3.5, 2.3.6 a 2.3.7. Umožnil nám provádět výpočty geometrických a fyzikálních charakteristik těles tvaru křivek, ale také speciálních ploch (šlo o plochy rotační). V odstavci 9.4.1 jsme sice také používali zápisy ve tvaru integrálů, dokonce po obecných křivkách, plochách a objemech, ale byly to zápisy, které jsme mohli chápat spíše intuitivně, než pořádně matematicky. Teď nastala chvíle, kdy můžeme pojem objemového elementu a integrálu prvního druhu definovat zcela obecně. Algebraický základ pro zavedení objemového elementu máme připraven v odstavci 12.2.7.

Předpokládejme, že $c : [0, 1]^n \ni u \rightarrow c(u) \in \mathbf{R}^m$ je n -rozměrná singulární krychle (nebo parametrizovaný kousek plochy) v \mathbf{R}^m . Z odstavce 12.4.3 víme, že pomocí tečného zobrazení $T_u c$ indukovaného zobrazením c můžeme získat n lineárně nezávislých vektorů generujících tečný prostor $T_{c(u)}c \subset T_{c(u)}\mathbf{R}^m$ k c v bodě $c(u)$. Tyto vektory jsou tečné obrazy k vektorům $\frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}$ standardní báze tečného prostoru $T_u\mathbf{R}^n$, tj.

$$T_{c(u)}c = [\xi_1, \dots, \xi_n]_{c(u)}, \quad \xi_j(c(u)) = T_u c \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) \Big|_u.$$

Zobrazení $c([0, 1]^n) \ni c(u) \rightarrow \xi_j(c(u)) \in T_{c(u)}\mathbf{R}^m$ jsou vektorová pole na množině $c([0, 1]^n)$. Dále víme, že v tečném prostoru $T_{c(u)}c \subset \mathbf{R}^m$ generuje báze $(\xi_1(c(u)), \dots, \xi_n(c(u)))$ orientaci $\mu(c(u))$ souhlasnou s parametrizací c . Ve vektorových prostorech $T_y\mathbf{R}^m$ je definován skalární součin standardním způsobem, konkrétně pro $\xi(y) = (y, (\xi^j)) \in T_y\mathbf{R}^m$ a $\zeta(y) = (y, (\zeta^j)) \in T_y\mathbf{R}^m$, $1 \leq j \leq m$, je $(\xi, \zeta) = \xi^1\zeta^1 + \dots + \xi^m\zeta^m$. Pro $y = c(u) \in c([0, 1]^n)$ dostaneme jeho restrikci na $T_{c(u)}c$ skalární součin ve vektorovém prostoru $T_{c(u)}c$. Tečné prostory k množině $c([0, 1]^n)$ ve všech jejích bodech jsou vektorové prostory se skalárním součinem a orientací. Proto v každém z nich existuje jednoznačně objemový element $\omega_0(c(u)) \in \Lambda_n(T_{c(u)}c)$. Díky platnosti následujícího tvrzení můžeme definovat objemový element na n -rozměrné singulární krychli, resp. n -rozměrném parametrizovaném kousku plochy v \mathbf{R}^m .

Věta 12.31: *Nechť*

$$c : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow c(u) = (x^1 c(u^1, \dots, u^n), \dots, x^m c(u^1, \dots, u^n)) \in \mathbf{R}^m$$

je orientabilní n -rozměrná singulární krychle, resp. orientabilní parametrizovaný kousek n -rozměrné plochy v \mathbf{R}^m . Necht' pro každý bod $c(u) \in c([0, 1]^n) \subset \mathbf{R}^m$ je v tečném prostoru $T_{c(u)}c \subset T_{c(u)}\mathbf{R}^m$ k $c([0, 1]^n)$ zadán skalární součin restrikcí skalárního součinu v tečném prostoru $T_{c(u)}\mathbf{R}^m$ k \mathbf{R}^m . Dále předpokládejme, že μ je spojitě zobrazení definované na množině $c([0, 1]^n)$, které každému bodu $c(u) \in c([0, 1]^n)$ přiřazuje orientaci tečného prostoru $T_{c(u)}c$. Pak existuje zobrazení spojitě na c

$$\omega_0 : c([0, 1]^n) \ni c(u) \longrightarrow \omega_0(c(u)) \in \Lambda_n(T_{c(u)}c), \quad (12.203)$$

kde $\omega_0(c(u))$ je objemový element ve vektorovém prostoru $T_{c(u)}c$ příslušný zadanému skalárnímu součinu a zvolené orientaci. Toto zobrazení je určeno jednoznačně.

Pozn. 1: Spojitostí zobrazení μ a ω_0 definovaných na množině $c([0, 1]^n)$ rozumíme spojitost vzhledem k této množině.

Pozn. 2: Připomeňme, že objemovým elementem příslušným zadanému skalárnímu součinu a zvolené orientaci rozumíme n -tenzor $\omega_0(c(u))(\epsilon_{1,c(u)}, \dots, \epsilon_{n,c(u)}) = 1$, kde $(\epsilon_{1,c(u)}, \dots, \epsilon_{n,c(u)})$ je báze v prostoru $T_{c(u)}c$ ortonormální vzhledem k zadanému skalárnímu součinu a náležející orientaci $\mu(c(u))$.

Zobrazení ω_0 definované ve větě 12.31 se nazývá *objemový element* na n -rozměrné singulární krychli, resp. n -rozměrném parametrizovaném kousku plochy c v \mathbf{R}^m *kompatibilní* neboli *souhlasný* s parametrizací c .

Spojitost zobrazení ω_0 zavedeného ve větě 12.31 je zřejmá. V případě, že je n -rozměrná singulární krychle (resp. kousek plochy) orientabilní, jsou vektorová pole ξ_j , kde $\xi_j(c(u)) = T_u c(\frac{\partial}{\partial u^j})|_u$, $u \in [0, 1]^n$, spojitá na množině $c([0, 1]^n)$ (ve smyslu předchozí Pozn. 1), stejně jako orientace μ , která je indukována bázemi $(\xi_1(c(u)), \dots, \xi_n(c(u)))$. Funkce

$$\mathcal{D} : [0, 1]^n \ni u = (u^1, \dots, u^n) \longrightarrow \mathcal{D}(u) \in \mathbf{R},$$

$$\mathcal{D}(u) = \omega_0(\xi_1, \dots, \xi_n)|_{c(u)} = \det \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1^1 & \bar{\xi}_1^2 & \dots & \bar{\xi}_1^n \\ \bar{\xi}_2^1 & \bar{\xi}_2^2 & \dots & \bar{\xi}_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\xi}_n^1 & \bar{\xi}_n^2 & \dots & \bar{\xi}_n^n \end{pmatrix}_{c(u)},$$

kde $(\bar{\xi}_j^1(c(u)), \dots, \bar{\xi}_j^n(c(u)))$ jsou složky vektoru $\xi_j(c(u))$ v ortonormální bázi $(\epsilon_{1,c(u)}, \dots, \epsilon_{n,c(u)})$ tečného prostoru $T_{c(u)}c$ k $c([0, 1]^n)$ v bodě $c(u)$, je proto rovněž spojitá (vzhledem k množině $c([0, 1]^n)$).

Je-li Σ n -rozměrný útvar v \mathbf{R}^m (ne nutně zadaný jako n -rozměrná singulární krychle, resp. n -rozměrný parametrizovaný kousek plochy v \mathbf{R}^m), na němž je zadána spojitá orientace μ , definujeme objemový element ω_0 na Σ stejně, tj. jako spojitě zobrazení ω_0 přiřazující každému bodu $x \in \Sigma \subset \mathbf{R}^m$ objemový element $\omega_0(x) \in \Lambda_n(T_x\Sigma)$ příslušný skalárnímu součinu definovanému na tečném prostoru $T_x\Sigma$ k Σ restrikcí skalárního součinu standardně zavedeného na \mathbf{R}^m a orientaci μ .

Pozn.: Je-li $n = 1$ (křivka v \mathbf{R}^m), značíme obvykle $\Sigma = \mathcal{C}$, $\omega_0 = dl$, pro $n = 2$ a $m = 3$ (plocha v \mathbf{R}^3) značíme $\Sigma = S$, $\omega_0 = dS$, v případě trojrozměrného útvaru v \mathbf{R}^3 značíme $\Sigma = V$, $\omega_0 = dV$. Obecně pro $n = m$ používáme často značení $\Sigma = \Omega$, $\omega_0 = d\Omega$.

Jsme připraveni formulovat definici integrálu prvního druhu.

Nechť c je n -rozměrná singulární krychle, resp. kousek plochy v \mathbf{R}^m , ω_0 objemový element a $f : D \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbf{R}$ funkce definovaná na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^m$ obsahující $c([0, 1]^n)$. *Integrálem prvního druhu z funkce f na c , resp. objemem množiny $c([0, 1]^n)$ rozumíme*

$$I = \int_c f\omega_0, \quad \text{resp.} \quad v(c) = \int_c \omega_0. \quad (12.204)$$

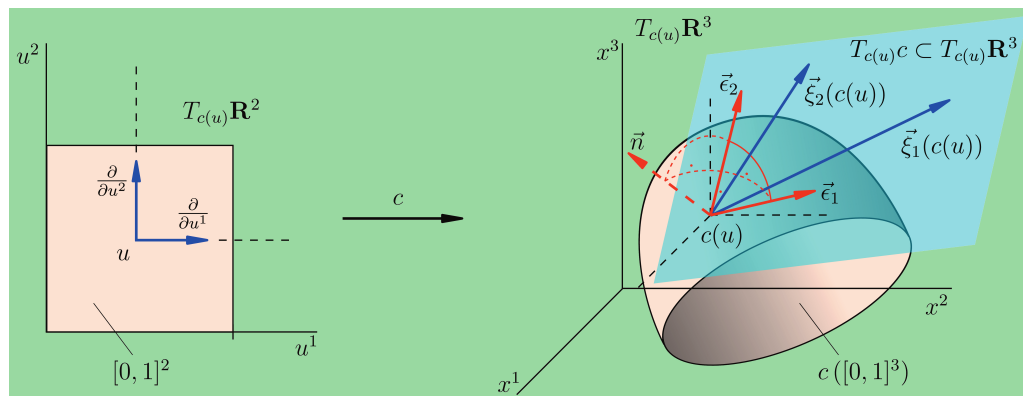
Objemem množiny $c([0, 1]^n)$ je tedy integrál prvního druhu z identicky jednotkové funkce. Je-li Σ n -rozměrný útvar v \mathbf{R}^m (ne nutně parametrizovaný jako n -rozměrná singulární krychle, resp. kousek plochy v \mathbf{R}^m), na němž je definován objemový element ω_0 , rozumíme integrálem prvního druhu z funkce f definované na otevřené množině $D \subset \mathbf{R}^m$ obsahující útvar Σ , resp. objemem množiny Σ

$$I = \int_{\Sigma} f\omega_0, \quad \text{resp.} \quad v(\Sigma) = \int_{\Sigma} \omega_0. \quad (12.205)$$

Definice je sice velice jasná a pochopitelná, vyvstávají však dvě otázky:

- jak počítat integrály prvního druhu prakticky, tj. jak vyjádřit (a zda je to vůbec potřeba) objemový element ω_0 jako n -formu v \mathbf{R}^m , pomocí standardních souřadnic (x^1, \dots, x^m) v \mathbf{R}^m ,
- zda je objem n -rozměrné množiny $c([0, 1]^n)$, resp. Σ v \mathbf{R}^n (tj. pro $n = m$) shodný s objemem jordanovsky měřitelné n -rozměrné množiny v \mathbf{R}^n , který jsme definovali v odstavci 12.1.7 pomocí Riemannova integrálu z její charakteristické funkce.

Na obě postupně odpovíme. K odpovědi na první otázku využijeme obrázek 12.59.



Obrázek 12.59 K integrálu prvního druhu.

Z odstavce 12.2.7 víme, že objemový element operující na vektorových argumentech tečného prostoru $T_{c(u)}c$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\omega_0(c(u)) = \epsilon_{c(u)}^1 \wedge \dots \wedge \epsilon_{c(u)}^n,$$

kde $(\epsilon_{c(u)}^1, \dots, \epsilon_{c(u)}^n)$ je duální báze k ortonormální bázi $(\epsilon_{1,c(u)}, \dots, \epsilon_{n,c(u)})$ v bodě $c(u)$ náležející orientaci $\mu(c(u))$, nebo také $\omega_0 = d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n$ už bez vypisování argumentu $c(u)$ a při označení $\epsilon^j = d\bar{x}^j$, $1 \leq j \leq n$. Abychom však mohli objemový element takto vyjádřit, potřebovali bychom mít v každém bodě $c(u) \in c([0, 1]^n)$ ortonormální bázi $(\epsilon_{1,c(u)}, \dots, \epsilon_{n,c(u)})$, tj. znát vektorová pole $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. Snadno však získáme pouze vektorová pole ξ_1, \dots, ξ_n , která vznikají jako tečné obrazy souřadnicových vektorových polí $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}$. Vektory ξ_1, \dots, ξ_n sice v každém bodě $c(u)$ generují tečný prostor $T_{c(u)}c$, nemusí však tvořit ortonormální bázi. Napadne nás ovšem, že z nich můžeme vytvořit ortonormální bázi ortogonalizačním procesem, který umíme z druhého dílu (odstavec 6.1.2). Jenže to je poměrně pracná procedura. Nemůžeme se jí nějak vyhnout? Můžeme, uvědomíme-li si, že podle definice integrálu n -formy na n -rozměrné singulární krychli platí

$$\int_c f \omega_0 = \int_{[0,1]^n} (f \circ c) c^* \omega_0.$$

Pro praktický výpočet integrálu tedy stačí umět vyjádřit pullback objemového elementu zobrazením c . Platí

$$c^* \omega_0(u) \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \right) \Big|_u = \omega_0(c(u)) (\xi_1, \dots, \xi_n) \Big|_{c(u)}, \quad \xi_j(c(u)) = T_u c \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) \Big|_u,$$

tj.

$$c^* \omega_0(u) \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \right) \Big|_u = \det(\bar{\xi}_j^i) \Big|_{c(u)}.$$

Zdá se, že jsme tam, kde jsme před chvílí byli, neboť veličiny $\bar{\xi}_j^i$, $1 \leq i, j \leq n$, jsou složky vektorů $\xi_1(c(u)), \dots, \xi_n(c(u))$ v ortonormální bázi $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)_{c(u)}$, kterou nemáme. Připomeňme si však vztah (12.133), podle něhož platí $\det(\bar{\xi}_j^i) = \sqrt{\det G}$, kde matice $G = (g_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, je tvořena skalárními součiny vektorů ξ_1, \dots, ξ_n , tj. $g_{ij} = (\xi_i, \xi_j)$. Máme „vyhráno“. Protože skalární součin je invariantní vzhledem k volbě báze (je ve všech bázích stejný), nepotřebujeme složky $\bar{\xi}_j^i$ vektorů ξ_1, \dots, ξ_n v bázi, kterou nemáme, stačí nám jejich složky ve standardní bázi tečného prostoru $T_{c(u)}\mathbf{R}^m$,

$$\xi_j = (\xi_j^1, \dots, \xi_j^m), \quad g_{ij} = (\xi_i, \xi_j) = \xi_i^1 \xi_j^1 + \dots + \xi_i^m \xi_j^m.$$

Pro integrál prvního druhu z funkce f na oboru c dostaneme

$$\int_c f \omega_0 = \int_{[0,1]^n} (f \circ c) \sqrt{\det G}. \quad (12.206)$$

Ze vztahu (12.206) je hned vidět, že pro výpočet integrálu prvního druhu explicitní vyjádření objemového elementu vůbec nepotřebujeme. A všimli jste si jedné zajímavé věci plynoucí z tohoto vztahu?

Na rozdíl od integrálu druhého druhu, který nezávisí na parametrizaci integračního oboru až na znaménko, nezávisí integrál prvního druhu na parametrizaci vůbec.

Pozn. 1: V obrázku 12.59 je kromě ortonormální báze tečného prostoru k ploše (pro $n = 2$ a $m = 3$) čárkovaně vyznačena ještě jednotková normála souhlasná s parametrizací. tj. $\vec{n} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{\vec{\xi}_1 \times \vec{\xi}_2}{|\vec{\xi}_1 \times \vec{\xi}_2|}$. Víme, že pro obecné dimenze m a n , pro něž je $m = n + 1$, lze normálu odpovídající dané orientaci zavést rovněž, a to vztahem (12.200). Explicitní vyjádření normály v případě $n = 2$, $m = 3$ nám přijde velice vhod při interpretaci klasických integračních vět — klasické Stokesovy věty a věty Gaussovy-Ostrogradského.

Pozn. 2: Pozor na značení: v algebraických kapitolách prvního a druhého dílu jsme zavedli úmluvu, že v jednorozměrném, dvojrozměrném a trojrozměrném případě budeme nad vektory psát šipky, jak je to obvyklé ve fyzice, v případech vícerozměrných šipky psát nebudeme. Tuto úmluvu dodržujeme i nyní. Samozřejmě se očekává, že čtenář, který rozumí tomu, co čte, nezamění dimenzi n za standardní označení vektoru normály, které v případě $m > 3$ používá rovněž symbolu n bez šipky.

V následujícím příkladu vyzkoušíme funkčnost nové definice integrálu prvního druhu.

Příklad 12.118: Je obsah povrchu koule opravdu $4\pi R^2$?

Jistěže je. Musíme však prověřit, zda nám takto vyjde pomocí nové definice jako integrál z odpovídajícího objemového elementu. Kulovou plochu (sféru) S o poloměru R parametrizujeme rovnicemi

$$c: [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow (xc(u, v), yc(u, v), zc(u, v)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$\begin{aligned}x &= xc(u, v) = R \sin \pi u \cos 2\pi v, \\y &= yc(u, v) = R \sin \pi u \sin 2\pi v, \\z &= zc(u, v) = R \cos \pi u.\end{aligned}$$

Vektory generující tečný prostor k $c([0, 1]^2)$, tj. ke sféře S , v bodě $c(u, v)$ jsou

$$\begin{aligned}\xi_u(u, v) &= \left(\frac{\partial xc(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial yc(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial zc(u, v)}{\partial u} \right) = (\pi R \cos \pi u \cos 2\pi v, \pi R \cos \pi u \sin 2\pi v, -\pi R \sin \pi u), \\ \xi_v(u, v) &= \left(\frac{\partial xc(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial yc(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial zc(u, v)}{\partial v} \right) = (-2\pi R \sin \pi u \sin 2\pi v, 2\pi R \sin \pi u \cos 2\pi v, 0).\end{aligned}$$

Matice G je

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} (\xi_u, \xi_u) & (\xi_u, \xi_v) \\ (\xi_v, \xi_u) & (\xi_v, \xi_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^2 R^2 & 0 \\ 0 & 4\pi^2 R^2 \sin^2 \pi u \end{pmatrix}$$

a její determinant $\det G = (2\pi^2 R^2 \sin 2\pi u)^2$. Proto

$$v(S) = \int_c \omega_0 = \int_{[0, 1]^2} \sqrt{\det G(u, v)} \, du \, dv = \int_{[0, 1]^2} 2\pi^2 R^2 \sin \pi u \, du \, dv = 4\pi R^2.$$

Z nové definice objemu množiny dostáváme očekávaný výsledek.

A teď se vraťme k otázce shody objemu množiny na základě definice pomocí objemového elementu a definice pomocí charakteristické funkce. Toto srovnání má samozřejmě smysl pouze v případech, kdy jsou oba typy objemu množiny definovány (existují). V případě definice pomocí integrálu z charakteristické funkce se jedná o jordanovsky měřitelnou množinu, tj. o ohraničenou množinu, jejíž hranice je zanedbatelná. Uvažujme o takové množině $A \subset \bar{K}$, kde $\bar{K} = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n]$ je uzavřený kvádr v \mathbf{R}^n . Charakteristickou funkci množiny A označme jako obvykle χ_A a připomeňme, že v bodech $x \in A$ je $\chi_A(x) = 1$, v bodech $x \in \bar{K} \setminus A$ je $\chi_A(x) = 0$. Zároveň musíme požadovat, aby byl objem množiny A definován také pomocí objemového elementu. Je proto třeba, aby množina A byla parametrizovatelná jako n -rozměrný kousek plochy, resp. n -rozměrná singulární krychle $c : [0, 1] \ni u \rightarrow c(u) \in c([0, 1]^n) \subset \mathbf{R}^n$, tj. $c([0, 1]^n) = A \subset \bar{K} \subset \mathbf{R}^n$. V tomto případě je tečný prostor v bodě $c(u)$ k c totožný s tečným prostorem k \mathbf{R}^n v tomto bodě, $T_{c(u)}c = T_{c(u)}\mathbf{R}^n$. Tečné vektory $\xi_1(c(u)), \dots, \xi_n(c(u))$, kde $\xi_j(c(u)) = T_u c \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) \Big|_u$, generující tento vektorový prostor, jsou představovány řádky Jacobiho matice zobrazení c v bodě u , tj.

$$\omega_0(c(u))(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det Dc(u) \implies c^* \omega_0(u) \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \right) \Big|_u = \det Dc(u).$$

Tento determinant je kladný (zdůvodněte). Pak

$$v(A) = \int_c \omega_0 = \int_{[0, 1]^n} c^* \omega_0 = \int_{[0, 1]^n} \det Dc(u) \, du, \quad du = du^1 \dots du^n.$$

Poslední integrál je Riemannův a můžeme jej přepsat pomocí věty o transformaci:

$$\int_{[0,1]^n} \det Dc(u) \, du = \int_A du = \int_{\bar{K}} \chi_A \, du.$$

Objem množiny A vyjádřený pomocí objemového elementu je shodný s jejím jordanovským objemem.

Pomocí integrálu prvního druhu můžeme počítat také geometrické a fyzikální charakteristiky lineárních, plošných a prostorových útvarů v \mathbf{R}^3 , které často potřebujeme při řešení fyzikálních úloh. Předpokládejme, že takový útvar můžeme parametrizovat jako jednorozměrnou (křivka), dvojrozměrnou (plocha), či trojrozměrnou (objem) singulární krychli v \mathbf{R}^3 , parametrizaci označme jako obvykle $c : [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}^3$, $n = 1, 2, 3$. Jedná-li se o hmotný útvar, označme jeho hustotu $s(\vec{r})$, kde $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ je polohový vektor obecného bodu útvaru. Je-li útvar jednorozměrný, dvojrozměrný, či trojrozměrný, představuje $s(\vec{r})$ lineární, plošnou, či objemovou hustotu. Základními fyzikálními charakteristikami útvaru jsou, jak již víme, hmotnost m , poloha středu hmotnosti \vec{r}_T a tenzor momentu setrvačnosti (J_{ij}) , $1 \leq i, j \leq 3$, vzhledem k dané soustavě souřadnic. Vypočteme je pomocí následujících vztahů, v nichž používáme označení integračního oboru písmenem V (namísto c) a označení objemového elementu dV (namísto ω_0), jak je ve fyzice běžným zvykem (označení dV zastupuje jak skutečný objemový element, tak element plochy dS či křivky dl , obdobně je tomu s označením integračního oboru):

$$m = \int_V s(x, y, z) \, dV, \quad (12.207)$$

$$x_T = \frac{1}{m} \int_V x s(x, y, z) \, dV,$$

$$y_T = \frac{1}{m} \int_V y s(x, y, z) \, dV, \quad (12.208)$$

$$z_T = \frac{1}{m} \int_V z s(x, y, z) \, dV,$$

$$J_{11} = \int_V (y^2 + z^2) s(x, y, z) \, dV,$$

$$J_{12} = J_{21} = - \int_V xy s(x, y, z) \, dV,$$

$$J_{13} = J_{31} = - \int_V xz s(x, y, z) \, dV, \quad (12.209)$$

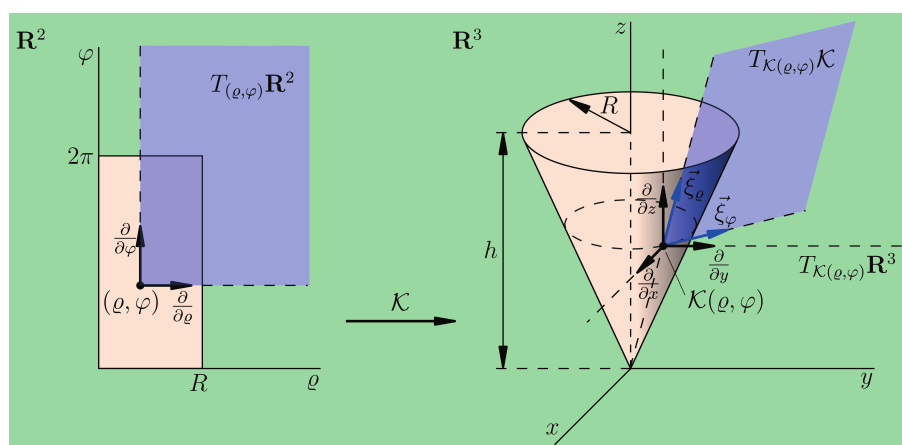
$$J_{22} = \int_V (x^2 + z^2) s(x, y, z) dV,$$

$$J_{23} = J_{32} = - \int_V yz s(x, y, z) dV,$$

$$J_{33} = \int_V (x^2 + y^2) s(x, y, z) dV.$$

Příklad 12.119: Fyzikální charakteristiky kuželové plochy

Vypočteme všechny fyzikální charakteristiky, které jsme uvedli ze vztazích (12.207), (12.208) a (12.209) pro část kuželové plochy $\mathcal{K} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2 + y^2}{R^2} = \frac{z^2}{h^2}, 0 \leq z \leq h \right\}$ (obrázek 12.60).



Obrázek 12.60 Rotační kuželová plocha — k příkladu 12.119.

Máme ji také na obrázku 12.22. Předpokládejme, že útvar je homogenní, tj. plošná hustota s je konstantní. Nejprve útvar parametrizujeme. Bude vhodné použít polárních souřadnic. (Využijeme již dříve dokázané nezávislosti integrálu na parametrizaci a nebudeme se namáhat s hledáním takové parametrizace, jejíž definiční obor bude právě čtverec $[0, 1]^2$).

$$\mathcal{K} : [0, R] \times [0, 2\pi] \ni (\varrho, \varphi) \longrightarrow (x\mathcal{K}(\varrho, \varphi), y\mathcal{K}(\varrho, \varphi), z\mathcal{K}(\varrho, \varphi)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$x = x\mathcal{K}(\varrho, \varphi) = \varrho \cos \varphi,$$

$$y = y\mathcal{K}(\varrho, \varphi) = \varrho \sin \varphi,$$

$$z = z\mathcal{K}(\varrho, \varphi) = \frac{h}{R}\varrho.$$

Vektory generující tečné prostory v bodech plochy \mathcal{K} jsou ve standardních bázích $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ prostorů $T_{\mathcal{K}(\varrho, \varphi)} \mathbf{R}^3$

reprezentovány řádky Jacobiho matice zobrazení \mathcal{K} ,

$$\begin{aligned}\xi_\varrho(\varrho, \varphi) &= \left(\frac{\partial x\mathcal{K}(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho}, \frac{\partial y\mathcal{K}(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho}, \frac{\partial z\mathcal{K}(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} \right) = \left(\cos \varphi, \sin \varphi, \frac{h}{R} \right), \\ \xi_\varphi(\varrho, \varphi) &= \left(\frac{\partial x\mathcal{K}(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi}, \frac{\partial y\mathcal{K}(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi}, \frac{\partial z\mathcal{K}(\varrho, \varphi)}{\partial \varphi} \right) = (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 0),\end{aligned}$$

matice G a její determinant jsou

$$G(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} (\xi_\varrho, \xi_\varrho) & (\xi_\varrho, \xi_\varphi) \\ (\xi_\varphi, \xi_\varrho) & (\xi_\varphi, \xi_\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h^2}{R^2} & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}, \quad \det G(\varrho, \varphi) = \varrho^2 \left(1 + \frac{h^2}{R^2} \right).$$

Pro výpočet fyzikálních charakteristik útvaru je vše připraveno. Provedeme jej.

$$\begin{aligned}m &= \int_{\mathcal{K}} s \omega_0 = s \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{\det G} \, d\varrho \, d\varphi = s \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \varrho \, d\varrho \right] d\varphi = \pi R^2 s \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}}, \\ x_T &= \frac{1}{m} \int_{\mathcal{K}} x s \omega_0 = \frac{s}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^R \varrho \cos \varphi \sqrt{\det G} \, d\varrho \, d\varphi = \frac{s}{m} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \left[\int_0^R \varrho^2 \, d\varrho \right] d\varphi = 0, \\ y_T &= \frac{1}{m} \int_{\mathcal{K}} y s \omega_0 = \frac{s}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^R \varrho \sin \varphi \sqrt{\det G} \, d\varrho \, d\varphi = \frac{s}{m} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \left[\int_0^R \varrho^2 \, d\varrho \right] d\varphi = 0, \\ z_T &= \frac{1}{m} \int_{\mathcal{K}} z s \omega_0 = \frac{s}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{h\varrho}{R} \sqrt{\det G} \, d\varrho \, d\varphi = \frac{hs}{mR} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \varrho^2 \, d\varrho \right] d\varphi = \\ &= \frac{hs}{mR} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \left(2\pi \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2h}{3}, \\ J_{11} &= \int_{\mathcal{K}} s(y^2 + z^2) \omega_0 = s \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\varrho^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2 \frac{h^2}{R^2} \right) \sqrt{\det G} \, d\varrho \, d\varphi = \\ &= s \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\varrho^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2 \frac{h^2}{R^2} \right) \varrho \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \, d\varrho \, d\varphi = s \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \left[\int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \varphi + \frac{h^2}{R^2} \right) d\varphi \right] \cdot \left[\int_0^R \varrho^3 \, d\varrho \right] = \\ &= \frac{1}{4} s R^4 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \left(\pi + 2\pi \frac{h^2}{R^2} \right) = \frac{1}{4} \pi R^4 s \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \left(1 + \frac{2h^2}{R^2} \right) = \frac{1}{4} m R^2 \left(1 + \frac{2h^2}{R^2} \right), \\ J_{12} &= J_{21} = - \int_{\mathcal{K}} s x y \omega_0 = -s \int_0^{2\pi} \int_0^R \varrho^2 \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{\det G} \, d\varrho \, d\varphi = \\ &= -s \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2\varphi \, d\varphi \right] \cdot \left[\int_0^R \varrho^3 \, d\varrho \right] = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{13} &= J_{31} = - \int s x z \omega_0 = -s \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{h}{R} \varrho^2 \cos \varphi \sqrt{\det G} \, d\varrho \, d\varphi = \\
&= -\frac{sh}{R} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \left[\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \right] \cdot \left[\int_0^R \varrho^3 \, d\varrho \right] = 0, \\
J_{22} &= J_{11} = \frac{1}{4} m R^2 \left(1 + \frac{2h^2}{R^2} \right) \quad (\text{zdůvodněte rovnost } J_{11} = J_{22}), \\
J_{23} &= J_{32} = - \int_{\mathcal{K}} s y z \omega_0 = -\frac{sh}{R} \int_0^{2\pi} \int_0^R \varrho^2 \sin \varphi \sqrt{\det G} \, d\varrho \, d\varphi = \\
&= -\frac{sh}{R} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \left[\int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi \right] \cdot \left[\int_0^R \varrho^3 \, d\varrho \right] = 0, \\
J_{33} &= \int s(x^2 + y^2) \omega_0 = s \int_0^{2\pi} \int_0^R \varrho^2 \sqrt{\det G} \, d\varrho \, d\varphi = \\
&= s \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \right] \cdot \left[\int_0^R \varrho^3 \, d\varrho \right] = \frac{1}{2} \pi s R^4 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} = \frac{1}{2} m R^2.
\end{aligned}$$

Tenzor momentu setrvačnosti útvaru \mathcal{K} vzhledem k soustavě souřadnic, v níž má útvar zadanou rovnicí, je diagonální. to znamená, že souřadnicové osy této soustavy jsou hlavními osami tenzoru momentu setrvačnosti (vzpomínáte si ještě na algebru?).

Pozn. 1: Při výpočtech integrálů v tomto příkladu jsme používali Fubiniovu větu. Pro osvěžení praxe jsme někdy provedli postupnou integraci, jindy jsme využili skutečnosti, že integrovaná funkce dvou proměnných ϱ a φ byla součinem dvou funkcí, z nichž každá závisela pouze na jedné proměnné. Vraťte se k výpočtům a identifikujte v nich oba způsoby.

Pozn. 2: Ještě jedna malá kontrola. Kdybychom ve výrazu pro hmotnost útvaru \mathcal{K} položili $s = 1$, měli bychom dostat plošný obsah zadané části kuželové plochy $v(\mathcal{K})$, tj. obsah pláště kužele. Spočteme jej elementárně a porovnáme s výsledkem získaným integrací objemového elementu. Představte si, že plášť rozstříhneme podél povrchové přímky a narovnáme (položíme do roviny). Dostaneme kruhovou výseč o poloměru r rovnému délce úsečky spojující vrchol kuželové plochy s libovolným bodem na obvodu podstavy, tj. $r = \sqrt{h^2 + R^2}$. Neznáme sice vrcholový úhel α této výseče, ale víme, že délka jejího obvodového oblouku je $2\pi R$ (obvod podstavy kužele před rozvinutím pláště). Platí proto

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{2\pi R}{2\pi r} \implies \alpha = 2\pi \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}}}.$$

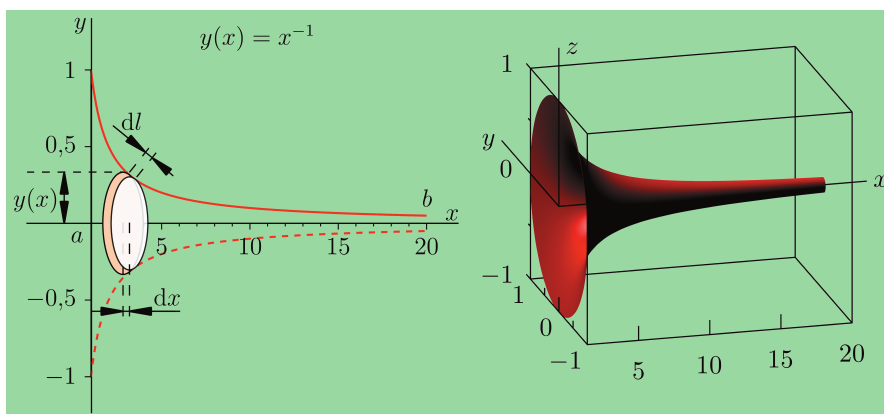
Plošný obsah výseče je

$$P = \pi r^2 \frac{\alpha}{2\pi} = \pi R^2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} = v(\mathcal{K}).$$

Znovu jsme se přesvědčili, že integrál prvního druhu funguje, jak má.

Příklad 12.120: Příklad tak trochu neobvyklý

Slyšeli jste už, že by nějaké těleso mohlo mít konečný objem a nekonečný povrch, resp. plášť? V reálném životě jistě taková tělesa nejsou, můžeme však na ně narazit v matematických i fyzikálních teoretických úvahách, v nichž třeba představují nějaké modely skutečnosti. Výpočty jejich charakteristik pak mohou vést k nevlastním integrálům, s nimiž jsme se už setkali v odstavci 12.1.11 o vícenásobném Riemannově integrálu, nebo si s nekonečny „poradíme“ vhodnou parametrizací. Těleso vzniklé rotací hyperboly o rovnici $xy = 1$ pro $x \geq a > 0$ se nazývá *Torricelliho trychtýř*. Je na obrázku 12.61.



Obrázek 12.61 Torricelliho trychtýř.

Jeho objem a obsah pláště můžeme určit třeba elementárně, pomocí úvah a vztahů z odstavce 2.3.4 prvního dílu. Pro objem platí vztah (2.58), vztah pro plášť odvodíme:

$$V = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \pi y^2(x) dx, \quad S = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b 2\pi y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Ke druhému vztahu dojdeme snadno, představíme-li si plášť rotačního tělesa jako složený z jakýchsi „elementárních kruhových obroučič“ o poloměru $y(x)$ (tj. obvodu $2\pi y(x)$) a tloušťce rovné elementu délky křivky C představující graf funkce $y(x)$, tj. (viz kapitolu 5)

$$S = \int_c 2\pi y dl = \int_c 2\pi y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Pro Torricelliho trychtýř dostaneme

$$V = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\pi}{x^2} dx = \frac{\pi}{a},$$

$$S = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{2\pi}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{2\pi}{x^3} \sqrt{1 + x^4} dx.$$

Integrál spočteme pomocí substituce $t^2 = 1 + x^{-4}$, v dalším postupu použijeme rozklad na parciální zlomky. Postupně dostaneme

$$\int \frac{2\pi}{x^3} \sqrt{1 + x^4} dx = -\pi \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = -\frac{\pi}{2} \int \left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= -\pi \left(t + \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} \right) = -\pi \left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^4}-x^2}{\sqrt{1+x^4}+x^2} \right), \quad \text{označme } S(x).$$

Obsah pláště trychtýře dostaneme jako limitu $\lim_{b \rightarrow \infty} (S(b) - S(a))$. Tato limita je nevlastní, je rovna $+\infty$ (spočtete si ji). Můžeme tedy říci, že obsah pláště je nekonečný.

A teď zkusme Torricelliho trychtýř a jeho plášť parametrizovat jako trojrozměrnou a dvojrozměrnou singulární krychli v \mathbf{R}^3 . Omezíme-li se na hodnoty proměnné x v intervalu $[a, b]$ (po výpočtu integrálů provedeme limitní přechod $b \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} c_V : [0, 1]^3 \ni (u, v, w) &\longrightarrow (x_{c_V}(u, v, w), y_{c_V}(u, v, w), z_{c_V}(u, v, w)) \in \mathbf{R}^3, \\ x = x_{c_V}(u, v, w) &= a + (b-a)u, \\ y = y_{c_V}(u, v, w) &= \frac{v \cos 2\pi w}{a + (b-a)u}, \\ z = z_{c_V}(u, v, w) &= \frac{v \sin 2\pi w}{a + (b-a)u}. \end{aligned}$$

Jacobiho matice tohoto zobrazení a matice skalárních součinů tečných vektorů jsou

$$\begin{aligned} Dc_V(u, v, w) &= \begin{pmatrix} b-a & -\frac{v(b-a) \cos 2\pi w}{[a+(b-a)u]^2} & -\frac{v(b-a) \sin 2\pi w}{[a+(b-a)u]^2} \\ 0 & \frac{\cos 2\pi w}{a+(b-a)u} & \frac{\sin 2\pi w}{a+(b-a)u} \\ 0 & -\frac{2\pi v \sin 2\pi w}{a+(b-a)u} & \frac{2\pi v \cos 2\pi w}{a+(b-a)u} \end{pmatrix}, \\ G(u, v, w) &= \begin{pmatrix} (b-a)^2 \left\{ 1 + \frac{v^2}{[a+(b-a)u]^4} \right\} & -\frac{v(b-a)}{[a+(b-a)u]^3} & 0 \\ -\frac{v(b-a)}{[a+(b-a)u]^3} & \frac{1}{[a+(b-a)u]^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\pi^2 v^2}{[a+(b-a)u]^2} \end{pmatrix}, \\ \sqrt{\det G(u, v, w)} &= \frac{2\pi v(b-a)}{[a+(b-a)u]^2}. \end{aligned}$$

Objem trychtýře je dán integrálem prvního druhu z objemového elementu, který označíme dV , tj.

$$\begin{aligned} V &= \int_{c_V} dV = \int_{[0,1]^3} c_V^* dV = \int_{[0,1]^3} \sqrt{\det G(u, v, w)} du dv dw = \\ &= 2\pi(b-a) \int_{[0,1]^3} \frac{v}{[a+(b-a)u]^2} du dv dw = \pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \end{aligned}$$

Poslední Riemannův integrál jste jistě snadno zvládli. Pro $b \rightarrow \infty$ dostaneme stejný výsledek jako zjednodušeným výpočtem. Povrch trychtýře již jako dvojrozměrnou singulární krychli parametrizujeme snadno. Je totiž (2,1)-stěnou trojrozměrné singulární krychle c_V . Cvičně spočtete všechny stěny a vyjádříme hranici jako dvojrozměrný singulární řetězec. Parametry označíme (pro odlišení od u, v a w) jako r a s , $(r, s) \in [0, 1]^2$. Nebudeme stále dokola vyznačovat obory jednotlivých zobrazení popisujících stěny, napíšeme rovnou jejich rovnice ve standardních souřadnicích (x, y, z) v \mathbf{R}^3 jako funkce parametrů r a s :

$$\begin{aligned}
(c_V)_{(1,0)}(r, s) &= \left(a, \frac{r}{a} \cos 2\pi s, \frac{r}{a} \sin 2\pi s \right), \\
(c_V)_{(1,1)}(r, s) &= \left(b, \frac{r}{b} \cos 2\pi s, \frac{r}{b} \sin 2\pi s \right), \\
(c_V)_{(2,0)}(r, s) &= (a + (b-a)r, 0, 0), \\
(c_V)_{(2,1)}(r, s) &= \left(a + (b-a)r, \frac{\cos 2\pi s}{a + (b-a)r}, \frac{\sin 2\pi s}{a + (b-a)r} \right), \\
(c_V)_{(3,0)}(r, s) &= \left(a + (b-a)r, \frac{s}{a + (b-a)r}, 0 \right), \\
(c_V)_{(3,1)}(r, s) &= \left(a + (b-a)r, \frac{s}{a + (b-a)r}, 0 \right).
\end{aligned}$$

Geometrická představa o stěnách je velmi názorná. Představíme-li si trychtýř jako zužující se potrubí podél osy x , jak je znázorněn na obrázku 12.61, vidíme, že $(1, 0)$ -stěna je kruh ohraničující trychtýř vlevo, $(1, 1)$ -stěna jej ohraničuje vpravo. $(2, 0)$ -stěna je část osy x mezi body $x = a$ a $x = b$ (množina míry nula), $(2, 1)$ -stěna je plášť trychtýře, $(3, 0)$ -stěna a $(3, 1)$ -stěna jsou shodné množiny, představují plochu pod grafem funkce $y = \frac{1}{x}$ mezi body $x = a$ a $x = b$. Věnujme se nyní výpočtu obsahu pláště. Jeho parametrizace, jak víme, má tvar

$$c_S : [0, 1]^2 \ni (r, s) \longrightarrow (x_{c_S}(r, s), y_{c_S}(r, s), z_{c_S}(r, s)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$\begin{aligned}
x &= x_{c_S}(r, s) = a + (b-a)r, \\
y &= y_{c_S}(r, s) = \frac{\cos 2\pi s}{a + (b-a)r}, \\
z &= z_{c_S}(r, s) = \frac{\sin 2\pi s}{a + (b-a)r}.
\end{aligned}$$

Jacobiho matice a matice G jsou

$$\begin{aligned}
Dc_S(r, s) &= \begin{pmatrix} b-a & -\frac{b-a}{[a+(b-a)r]^2} \cos 2\pi s & -\frac{b-a}{[a+(b-a)r]^2} \sin 2\pi s \\ 0 & -\frac{2\pi}{a+(b-a)r} \sin 2\pi s & \frac{2\pi}{a+(b-a)r} \cos 2\pi s \end{pmatrix}, \\
G(r, s) &= \begin{pmatrix} (b-a)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{[a+(b-a)r]^4} \right\} & 0 \\ 0 & \frac{4\pi^2}{[a+(b-a)r]^2} \end{pmatrix}, \\
\sqrt{\det G(r, s)} &= \frac{2\pi(b-a)}{[a+(b-a)r]^3} \sqrt{1 + [a+(b-a)r]^4}.
\end{aligned}$$

Označíme-li objemový element plochy S jako dS , je její obsah dán integrálem

$$\begin{aligned}
\int_{c_S} dS &= \int_{[0,1]^2} c_S^* dS = \int_{[0,1]^2} \sqrt{\det G(r, s)} dr ds = \\
&= \int_{[0,1]^2} \frac{2\pi(b-a)}{[a+(b-a)r]^3} \sqrt{1 + [a+(b-a)r]^4} dr ds = \int_a^b \frac{2\pi}{x^3} \sqrt{1 + x^4} dx.
\end{aligned}$$

Poslední (již jen jednonásobný) integrál je shodný s výsledkem výpočtu elementární metodou. Získali jsme jej zavedením substituce $x = a + (b-a)r$ a integrací podle proměnné $s \in [0, 1]$, která se v integrandu nakonec

nevyskytuje. Jistě si každý všiml, že zjednodušený postup z prvního dílu vedl k cíli mnohem rychleji než výpočty pomocí integrálů z forem na singulárních krychlích. To je sice pravda, na druhé straně je však třeba si uvědomit, že výpočty pomocí forem na krychlích jsou univerzální, zatímco metoda z prvního dílu byla použitelná pouze pro rotační tělesa.

Úlohy na výpočty geometrických a fyzikálních charakteristik lineárních, plošných a objemových útvarů přináší cvičení.

12.4.6 Klasické integrální věty v aparátu forem a fyzikální aplikace

Takřka „zlatým hřebem“ klasického integrálního počtu jsou tři slavné integrální věty, často používané i ve fyzice, které představují vztah mezi integrálem po určité množině a integrálem po její hranici:

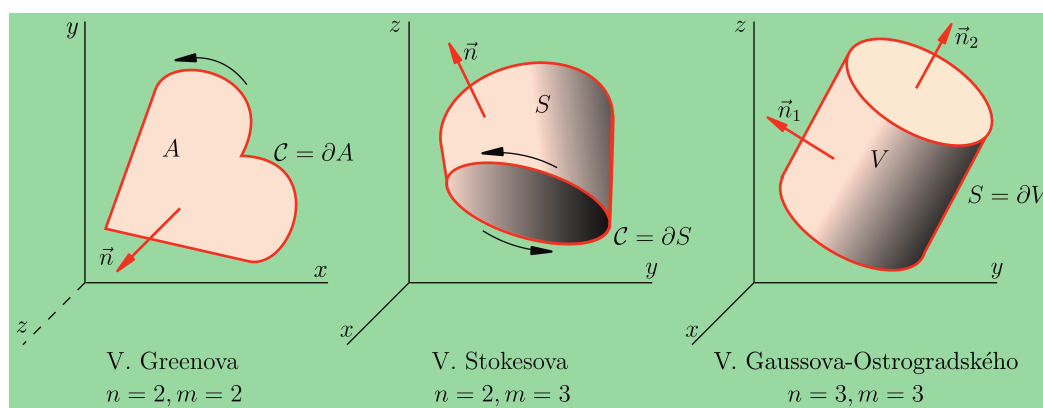
- vztah integrálu po rovinné ploše a integrálu po její hraniční křivce (Greenova věta),
- vztah integrálu po obecné ploše v trojrozměrném prostoru a její hraniční křivce (klasická Stokesova věta),
- vztah mezi integrálem po objemové oblasti v trojrozměrném prostoru a její hraniční ploše (Gaussova-Ostrogradského věta).

Pozorný čtenář nepochybně tuší, že se jedná „pouze“ o speciální případy obecného Stokesova teorému, který jsme dokázali v odstavci 12.4.4 (věta 12.30). Uvedeme nyní zmíněné věty v jejich klasické podobě. Formulace jsou založeny na předpokladu, že je předem zadána orientace integračních oborů. Znamená to, že parametrizaci integračních oborů je při důkazech a výpočtech vhodné volit tak, aby byla s předem zadanou orientací souhlasná, při volbě parametrizace nesouhlasné s orientací pak myslet na to, že výsledek integrování získá opačné znaménko. (Už teď vidíme, jak výhodná je definice integrálu forem na singulárních krychlích: vše se „udělá správně samo“). Řečeno s mírnou nadsázkou, drobně se lišících formulací integrálních vět najdeme v klasické literatuře v podstatě tolik, kolik najdeme knih. Všechny však říkají totéž, co obecný Stokesův teorém. Pro další čtení si z odstavce 9.1.4 druhého dílu připomeňte definici k -násobně souvislé množiny (str. 453). Jinou (obecnější) definici jednoduše souvislé množiny si uvedeme také v následující kapitole.

Věta 12.32 (Greenova): *Nechť A je uzavřená jednoduše (jednonásobně) souvislá oblast v \mathbf{R}^2 , jejíž hranicí je po částech hladká uzavřená křivka $C = \partial A$ orientovaná v kladném geometrickém smyslu. Nechť $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je vektorové pole definované na otevřené množině D obsahující A , jehož složky mají na D spojitě parciální derivace. Pak platí*

$$\int_A \left(\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \int_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy. \quad (12.210)$$

Na pravé straně rovnosti (12.210) je křivkový integrál druhého druhu, jak jsme jej definovali v odstavci 9.3.3, na levé straně Riemannův dvojnásobný integrál funkce přes rovinnou oblast. Jaká je ale souvislost Greenovy věty s obecným Stokesovým teorémem uvedeným ve větě 12.30? Abychom na ni přišli, stačí si terminologii z věty 12.32 „přeložit“ do řeči parametrizovaných kousků ploch, singulárních krychlí, singulárních řetězců a diferenciálních forem. Názorně pomůže obrázek 12.62.



Obrázek 12.62 Klasické integrální věty.

Tak tedy:

- *Hladkou křivkou* v \mathbf{R}^2 rozumíme diferencovatelné, či dokonce spojitě diferencovatelné zobrazení

$$\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow \mathcal{C}(t) = (x\mathcal{C}(t), y\mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^2.$$

Slovní spojení „spojitě diferencovatelné“ znamená, že derivace složek zobrazení \mathcal{C} podle proměnné t jsou spojitě — viz definici hladkého kousku n -rozměrné plochy v \mathbf{R}^m . Vyskytují se totiž při výpočtu integrálu ve výsledném integrandu a jejich spojitost zaručuje integrabilitu. Víme z dřívějšíka, že takovou křivku lze přeparametrizovat na jednorozměrnou singulární krychli v \mathbf{R}^2 .

- *Po částech hladká* křivka je sjednocením konečného počtu hladkých úseků. V naší terminologii se jedná o jednorozměrný singulární řetězec.
- *Uzavřeností křivky* se zde nerozumí uzavřenost množiny v topologickém smyslu (v tomto smyslu je křivka v \mathbf{R}^2 uzavřenou množinou vždy), nýbrž skutečnost, že koncový bod křivky splývá s bodem počátečním, tj. $\mathcal{C}(\beta) = \mathcal{C}(\alpha)$.

- Předpoklad jednoduché souvislosti oblasti A je v použité formulaci Greenovy věty zjednodušujícím omezením oproti obecnému Stokesovu teorému (z tohoto hlediska nejsou obě formulace ekvivalentní). Je-li oblast A jednoduše souvislá, znamená to, že její hranice ∂A je tvořena jedinou křivkou. Předpokládejme, že oblast A lze parametrizovat jako dvojrozměrný kousek plochy, resp. dvojrozměrnou singulární krychli v \mathbf{R}^2

$$c_A : [0, 1]^2 \ni (u, v) \longrightarrow c_A(u, v) = (x_{c_A}(u, v), y_{c_A}(u, v)) \in \mathbf{R}^2, \quad c_A([0, 1]^2) = A,$$

tak, aby tato parametrizace byla souhlasná s orientací oblasti A indukovanou předem zadanou orientací hraniční křivky \mathcal{C} . Můžeme si třeba představit prostor \mathbf{R}^2 , v němž oblast A leží, jako podprostor v \mathbf{R}^3 , doplnit osu z tak, aby soustava souřadnic tvořená osami x , y a z byla pravotočivá, a orientovat oblast A vektorovým polem jednotkové normály $\vec{n}(x, y, z) = (0, 0, 1)$, $(x, y, z) \in A$. Takto je to znázorněno i na obrázku 12.62 vlevo, doplněná osa z je znázorněna čárkovaně. Pak ∂c_A je jednorozměrný singulární řetězec

$$\partial c_A = \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} (c_A)_{(i,\alpha)}.$$

- Hranice dvojrozměrné singulární krychle c v \mathbf{R}^2 je vždy uzavřená křivka, tj. jednorozměrný uzavřený singulární řetězec v \mathbf{R}^2 . Platí totiž $\partial(\partial c) = 0$, jak jsme se přesvědčili v příkladu 12.101.
- Požadavek diferencovatelnosti, resp. spojitě diferencovatelnosti vektorového pole \vec{F} na otevřené množině obsahující A je totožný se stejným požadavkem týkajícím se formy $\omega_F^{(1)}$, neboť $\omega_F^{(1)} = F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$.
- Teď už lze aplikovat obecný Stokesův teorém:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy &= \int_{\partial c_A} \omega_F^{(1)} = \int_{c_A} d\omega_F^{(1)} = \\ &= \int_{c_A} \left(\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{[0,1]^2} \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \circ c_A \right] \det Dc_A(u, v) du dv. \end{aligned}$$

Poslední integrál je již Riemannův a lze jej rovnou přepsat pomocí věty o transformaci. (Determinant $\det Dc_A(u, v)$ je totiž kladný, neboť parametrizace c_A je souhlasná s orientací oblasti A):

$$\int_{[0,1]^2} \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \circ c_A \right] \det Dc_A(u, v) du dv = \int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Nakonec dostaneme tvrzení Greenovy věty

$$\int_c F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

- Zobecnění na případ, kdy oblast A lze popsat jako dvojrozměrný singulární řetězec v \mathbf{R}^2 , je zřejmé, neboť obecný Stokesův teorém pro takový případ rovněž platí.

Další dvě klasické integrální věty, Stokesovu a Gaussovu-Ostrogradského, formulujeme sice přesně, ale komentář bude jen stručný. Vše podstatné jsme totiž komentovali už v případě věty Greenovy. K formulaci zmíněných klasických vět však potřebujeme „klasické“ definice integrálů, které se v nich vyskytují: křivkový integrál druhého druhu (tuto definici známe z druhého dílu — odstavec 9.3.3), integrál, jehož oborem je trojrozměrný útvar v \mathbf{R}^3 (tuto definici jsme formulovali v odstavci 12.1.7) a plošný integrál prvního nebo druhého druhu (jeho klasickou definici zatím nemáme). Různé formulace definic jsou více či méně obecné a nebudeme se jimi zabývat podrobně. Vybereme možnosti spíše názorné než zcela obecné a abstraktní. První z nich bude předpokládat, že (dvojrozměrná) plocha v \mathbf{R}^3 , která je integračním oborem, je zadána parametricky. V druhém případě si připomeneme zadání n -rozměrného útvaru v \mathbf{R}^m pomocí $m - n$ rovnic $f_i(x^1, \dots, x^m) = 0$ ve standardních souřadnicích, které jsme použili v závěru odstavce 12.4.3 (vztah (12.191)). V případě (dvojrozměrné) plochy v \mathbf{R}^3 půjde o jednu rovnici $g(x, y, z) = 0$, kde předpokládáme, že g je spojitě diferencovatelná funkce.

Nechť $A \subset \mathbf{R}^2$ je jordanovsky měřitelná uzavřená množina, S plocha parametrizovaná spojitě diferencovatelným zobrazením

$$S : A \ni (u, v) \longrightarrow (xS(u, v), yS(u, v), zS(u, v)) \in \mathbf{R}^3$$

a $f : D \ni (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) \in \mathbf{R}$ spojitá funkce definovaná na oblasti D obsahující plochu S . *Plošným integrálem prvního druhu* z funkce f na ploše S rozumíme Riemannův integrál

$$\int_A (f \circ S) \sqrt{\det G} du dv, \quad \text{značíme} \quad \int_S f dS, \quad (12.211)$$

kde

$$G = \begin{pmatrix} \vec{\xi}_u \vec{\xi}_u & \vec{\xi}_u \vec{\xi}_v \\ \vec{\xi}_u \vec{\xi}_v & \vec{\xi}_v \vec{\xi}_v \end{pmatrix},$$

$$\vec{\xi}_u = \left(\frac{\partial xS(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial yS(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial zS(u, v)}{\partial u} \right),$$

$$\vec{\xi}_v = \left(\frac{\partial x S(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial y S(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial z S(u, v)}{\partial v} \right).$$

Nechť $\vec{F} : D \ni (x, y, z) \rightarrow \vec{F}(x, y, z) \in \mathcal{V}(\mathbf{R}^3)$ je spojité vektorové pole definované na oblasti D obsahující plochu S . *Plošným integrálem druhého druhu* z vektorového pole \vec{F} na ploše S rozumíme Riemannův integrál

$$\int_A [(F_1 \circ S)\nu^1 + (F_2 \circ S)\nu^2 + (F_3 \circ S)\nu^3] du dv, \quad \text{značíme} \quad \int_S \vec{F} d\vec{S}, \quad (12.212)$$

kde $\vec{\nu} = \vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v$. (Formální zápis „elementární plochy“ ve tvaru $d\vec{S}$ souvisí s „rozkladem“ ($\vec{F}\vec{n}$) $dS = (\vec{F})(\vec{n} dS)$ a označením $d\vec{S} = \vec{n} dS$.)

Nechť $A \subset \mathbf{R}^2$ je jordanovsky měřitelná uzavřená množina, S hladká plocha v \mathbf{R}^3 daná zobrazením rovnicí $g(x, y, z) = z - h(x, y) = 0$, kde

$$h : A \ni (x, y) \rightarrow h(x, y) \in \mathbf{R}$$

je spojitě diferencovatelná funkce. (Plocha S je tedy grafem funkce h .) Nechť dále $f : D \ni (x, y, z) \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkce definovaná na oblasti D obsahující plochu S . *Integrálem prvního druhu* z funkce f na ploše S rozumíme Riemannův integrál

$$\int_A (f \circ h) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad \text{značíme} \quad \int_S f dS. \quad (12.213)$$

Nechť $\vec{F} : D \ni (x, y, z) \rightarrow \vec{F}(x, y, z) \in \mathcal{V}(\mathbf{R}^3)$ je spojité vektorové pole definované na oblasti D obsahující plochu S . *Plošným integrálem druhého druhu* z vektorového pole \vec{F} na ploše S rozumíme Riemannův integrál

$$\int_A \left(F_1 \frac{\partial h}{\partial x} + F_2 \frac{\partial h}{\partial y} + F_3 \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy, \quad \text{značíme} \quad \int_S \vec{F} d\vec{S}. \quad (12.214)$$

První z klasických definic plošných integrálů nás jistě nijak nepřekvapuje a dovedeme si ji porovnat s definicí založenou na singulárních krychlích jako integračních oborech a diferenciálních formách jako integrovaných objektech. Obecnější je v tom, že definičním oborem parametrizace nemusí nutně být obdélník, ale jordanovsky měřitelná uzavřená množina v rovině. Druhá definice využívá kartézské rovnice plochy ve speciálním případě $g(x, y, z) = z - h(x, y) = 0$, kdy hladká plocha S je grafem funkce $h(x, y)$. K čemu je tento předpoklad a co se stane, nebude-li

splněn? V případě, že splněn je, představuje zobrazení

$$A \ni (x, y) \longrightarrow (x, y, h(x, y)) \in \mathbf{R}^3$$

parametrizaci plochy S . Proti definici může vzniknout námitka, že se může stát, že parciální derivace funkce $h(x, y)$ nebudou v některých bodech plochy S definovány. Stane se to v bodech, v nichž je vektor normály k ploše rovnoběžný se souřadnicovou rovinou xy . (Stačí si uvědomit, že vektorové pole $\vec{g} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right)$ je gradientem funkce g , a tedy vektorovým polem normály (obecně nikoli jednotkové) k ploše S .) Je-li však S grafem funkce $h(x, y)$, nastane taková situace nanejvýš v bodech zanedbatelné množiny (zdůvodněte), což neovlivní integrál. Jestliže plocha S není grafem nějaké funkce h (například kulová plocha), rozdělíme ji na části, které jsou grafy funkcí $P(y, z)$, $Q(x, z)$ a $R(x, y)$ a výsledný integrál z funkce f či vektorového pole \vec{F} vypočteme jako součet odpovídajících integrálů. V případě zmíněné kulové plochy, například $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bychom počítali zvlášť integrál po dolní polokouli $z = h_1(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ a po horní polokouli $z = h_2(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ a oba výsledky sečetli. V případě množiny $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$ bychom vyjádřili funkci $g(x, y, z) = y - \sqrt{1 - x^2 - z^2} = 0$ a integrovali podle proměnných x a z . Aníž bychom se dále podrobněji zabývali úvahami o klasických definicích, přistoupíme k formulacím zbývajících klasických integrálních vět, Stokesovy a Gaussovy-Ostrogradského.

Věta 12.33 (Stokesova): *Nechť S je hladká plocha v \mathbf{R}^3 orientovaná spojitým vektorovým polem jednotkové normály \vec{n} . Nechť její hranice $C = \partial S$ (hladká uzavřená křivka) je orientována souhlasně s orientací plochy S , tj. v kladném geometrickém smyslu při pohledu proti směru normály \vec{n} . Dále předpokládejme, že $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole v \mathbf{R}^3 definované na oblasti $D \subset \mathbf{R}^3$ obsahující S . Pak platí*

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) \, dS = \int_C F_1(x, y, z) \, dx + F_2(x, y, z) \, dy + F_3(x, y, z) \, dz, \quad (12.215)$$

zkráceně

$$\int_S \vec{n} \operatorname{rot} \vec{F} \, dS = \int_C \vec{F} \, d\vec{r}, \quad \text{resp.} \quad \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \, d\vec{S} = \int_C \vec{F} \, d\vec{r}.$$

Věta 12.34 (Gaussova-Ostrogradského): *Nechť V je uzavřená jordanovsky měřitelná množina v \mathbf{R}^3 , jejíž hranicí je po částech hladká plocha v \mathbf{R}^3 orientovaná spojitým vektorovým polem jednotkové normály \vec{n} . Předpokládejme, že $\vec{F}(x, y, z) =$*

$= (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole v \mathbf{R}^3 definované na oblasti $D \subset \mathbf{R}^3$ obsahující V . Pak platí

$$\int_S \vec{F}(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) dS = \int_V \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) dx dy dz, \quad (12.216)$$

zkráceně

$$\int_S (\vec{F} \vec{n}) dS = \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV \quad \text{resp.} \quad \int_S \vec{F} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

K tomu, abychom si uvědomili, že věta 12.32 (Greenova) je speciálním případem obecného Stokesova teorému pro $n = m = 2$, stačilo, abychom si vzpomněli na vztah (12.177), $d\omega_F^{(1)} = \omega_{\operatorname{rot} F}^{(2)}$ a aplikovali jej právě na tento případ. Věty 12.33 (Stokesova) a 12.34 (Gaussova-Ostrogradského) jsou zase speciální případy obecného Stokesova teorému pro $n = 2, m = 3$ a $n = m = 3$. Zdá se však, že je tu problém: v klasické Stokesově větě sice vystupuje křivkový integrál druhého druhu z vektorového pole \vec{F} (v integrandu je výraz $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$) odpovídající integrálu z formy $\omega_F^{(1)}$, nevidíme tam však přímo formu $\omega_{\operatorname{rot} F}^{(2)}$. Ve větě Gaussově-Ostrogradského je zase integrál odpovídající formě $\omega_{\operatorname{div} F}^{(3)}$, forma $\omega_F^{(2)}$ zde však opět nějak viditelně nevystupuje. V obou případech se ovšem vyskytuje integrál tvaru $\int_S (\vec{G} \vec{n}) dS = \int_S \vec{G} d\vec{S}$, přičemž ve Stokesově větě je $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$ a v Gaussově-Ostrogradského větě je $\vec{G} = \vec{F}$. Vypadá to, že tento integrál odpovídá integrálu z formy $\omega_G^{(2)}$. Musíme to ale prověřit. Pomůže obrázek 12.59. Zabývejme se integrálem $\int_S (\vec{F} \vec{n}) dS$ a uveďme jej do kontextu s integrálem prvního druhu definovaným pomocí objemového elementu. Symbol dS reprezentuje objemový element definovaný na ploše $S = c([0, 1]^2)$. Jsou-li (\vec{e}_1, \vec{e}_2) vektorová pole tvořící v každém bodě tečného prostoru k ploše S ortonormální bázi náležející orientaci souhlasné s parametrizací plochy, platí

$$dS(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1, \quad dS(\vec{\xi}, \vec{\zeta}) = \det \begin{pmatrix} \vec{\xi}^1 & \vec{\xi}^2 \\ \vec{\zeta}^1 & \vec{\zeta}^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{\xi}^1 & \vec{\xi}^2 & 0 \\ \vec{\zeta}^1 & \vec{\zeta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\vec{\xi} = \vec{\xi}^1 \vec{e}_1 + \vec{\xi}^2 \vec{e}_2$ a $\vec{\zeta} = \vec{\zeta}^1 \vec{e}_1 + \vec{\zeta}^2 \vec{e}_2$ jsou libovolné vektory ležící v tomto tečném prostoru — jsou lineárními kombinacemi vektorů báze \vec{e}_1 a \vec{e}_2 . (Při praktických výpočtech je volíme tak, že $\vec{\xi} = \vec{\xi}_u$ a $\vec{\zeta} = \vec{\xi}_v$, jak je také vyznačeno v obrázku 12.59.) Vektory \vec{e}_1, \vec{e}_2 a \vec{n} , kde \vec{n} je jednotková normála k ploše S souhlasná s parametrizací, současně tvoří ortonormální bázi tečného prostoru k \mathbf{R}^3 v daném bodě. V této bázi je $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Vektory $\vec{\xi}, \vec{\zeta}$ a \vec{n} jsou však také lineárními kombinacemi standardní báze tečného prostoru k \mathbf{R}^3 v tomtéž bodě, tj.

$$\vec{\xi} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}\vec{\zeta} &= \zeta^1 \frac{\partial}{\partial x} + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial y} + \zeta^3 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \vec{n} &= n^1 \frac{\partial}{\partial x} + n^2 \frac{\partial}{\partial y} + n^3 \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}$$

Označme T matici přechodu od standardní báze k bázi $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{n})$. Pak

$$\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}^1 & \bar{\xi}^2 & 0 \\ \bar{\zeta}^1 & \bar{\zeta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T.$$

Matice T je však ortogonální maticí s jednotkovým determinanem (zdůvodněte), proto

$$\begin{aligned}dS(\vec{\xi}, \vec{\zeta}) &= \det \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \end{pmatrix} = \\ &= \vec{n}(\vec{\xi} \times \vec{\zeta}) = \frac{\vec{\xi} \times \vec{\zeta}}{|\vec{\xi} \times \vec{\zeta}|} (\vec{\xi} \times \vec{\zeta}) = |\vec{\xi} \times \vec{\zeta}| \implies \vec{n} dS(\vec{\xi}, \vec{\zeta}) = \vec{\xi} \times \vec{\zeta}.\end{aligned}$$

Po složkách dostaneme

$$\begin{aligned}n^1 dS(\vec{\xi}, \vec{\zeta}) &= \xi^2 \zeta^3 - \xi^3 \zeta^2 \implies n^1 dS = dy \wedge dz, \\ n^2 dS(\vec{\xi}, \vec{\zeta}) &= \xi^3 \zeta^1 - \xi^1 \zeta^3 \implies n^2 dS = dz \wedge dx, \\ n^3 dS(\vec{\xi}, \vec{\zeta}) &= \xi^1 \zeta^2 - \xi^2 \zeta^1 \implies n^3 dS = dx \wedge dy,\end{aligned} \tag{12.217}$$

a odtud

$$(\vec{F}\vec{n}) dS = (F_1 n^1 + F_2 n^2 + F_3 n^3) dS = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy = \omega_F^{(2)}.$$

Nyní už je role obecného Stokesova teorému pro důkaz Stokesovy a Gaussovy-Ostrogradského věty zřejmá, neboť

$$\int_S \vec{F} d\vec{S} = \int_S \omega_F^{(2)}.$$

V případě Stokesovy věty, kdy hraniční křivkou plochy S je správně orientovaná křivka \mathcal{C} , dostáváme

$$\int_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_{\partial S} \omega_F^{(1)} = \int_S d\omega_F^{(1)} = \int_S \omega_{\text{rot } F}^{(2)} = \int_S \text{rot } \vec{F} d\vec{S}. \tag{12.218}$$

V případě věty Gaussovy-Ostrogradského je naopak plocha S hranicí objemového útvaru V , takže

$$\int_S \vec{F} d\vec{S} = \int_{\partial V} \omega_F^{(2)} = \int_V d\omega_F^{(2)} = \int_V \omega_{\operatorname{div} F}^{(3)} = \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV. \quad (12.219)$$

Pozn. 1: Znovu připomeňme, že vektor jednotkové normály souhlasné s parametrizací v praxi počítáme jako normovaný vektorový součin vektorů $\vec{\xi}_u$ a $\vec{\xi}_v$, které jsou tečnými obrazy vektorů $\vec{e}_u = \frac{\partial}{\partial u}$ a $\vec{e}_v = \frac{\partial}{\partial v}$ indukovanými parametrizací c .

Pozn. 2: V předpokladech některých formulací klasických integrálních vět se vyžaduje, aby integrační obor byl souvislý, někdy dokonce jednoduše souvislý. Vzhledem k tomu, že umíme integrovat na singulárních řetězcích, nemusíme tímto předpokladem tvrzení „oslabovat“. Důležité je, aby diferenciální forma, která je integrovaným objektem, byla definována a měla patřičné vlastnosti na oblasti (otevřené souvislé podmnožině prostoru \mathbf{R}^m) obsahující integrační obor. Ukázkou „opatrného“ použití Greenovy věty v situaci, kdy integračním oborem byla dvojnásobně souvislá uzavřená oblast v \mathbf{R}^2 , jsme viděli v příkladu 12.116.

Další fyzikální aplikace křivkových a plošných integrálů prvního i druhého druhu včetně použití integrálních vět ukážeme na několika příkladech.

Příklad 12.121: Práce silového pole v rovině

V druhém dílu jsme práci silového pole počítali „klasickým“ způsobem. Připomeňte si příklady 9.72 a 9.73 v odstavci 9.3.3. V prvním případě se jednalo o silové pole

$$\vec{F}_1 = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right),$$

v druhém o silové pole

$$\vec{F}_2 = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

V obou případech jsme počítali práci tohoto pole po kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R . V prvním případě vyšla nula, v druhém 2π , pokud kružnice „obíhala“ počátek soustavy souřadnic jedenkrát. Pokud by obíhala k -krát, $k \in \mathbf{Z}$, dostaneme výsledek $2\pi k$ (ověřte). A přidejme ještě třetí silové pole, třeba

$$\vec{F}_3 = (2xy + y^2, x^2 + 2xy).$$

Jeho práce po stejné kružnici jako v předchozích situacích je rovněž nulová. Jak souvisejí tyto situace s našimi současnými úvahami o integrálu a integrálních větách? Hned uvidíme. Víme už, že elementární práce silového pole je dána formou $\omega_F^{(1)}$, celková práce po křivce $C = \partial S$, která je orientovanou hranicí uzavřené rovinné oblasti S , je určena integrálem

$$A_C = \int_C \omega_F^{(1)}.$$

Vypočítejte vnější derivaci formy $\omega_F^{(1)}$ pro všechna tři zadaná silová pole. Uvidíte, že forma $\omega_F^{(1)}$ je ve všech případech uzavřená, tj. $d\omega_F^{(1)} = 0$. Přes tuto společnou vlastnost všech tří vektorových polí se práce, kterou vykonají po téže trajektorii (kladně orientované kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R), liší. V prvním a třetím případě je nulová, v druhém nenulová. Přitom formy $\omega_F^{(1)}$ v prvním a druhém případě

mají další společnou vlastnost — nejsou definovány v bodě $O = (0, 0)$. Následující tabulka shrnuje výsledek posouzení všech tří situací z hlediska použití Greenovy věty.

	A_C	předpoklady GV	GV použit
\vec{F}_1	0	nejsou splněny	nelze
\vec{F}_2	2π	nejsou splněny	nelze
\vec{F}_3	0	jsou splněny	lze

Proč tabulka vypadá právě takto? Předpoklady Greenovy věty jsou podmínkami *postačujícími* pro to, aby platilo její tvrzení. Tyto předpoklady jsou z našich tří případů splněny pouze pro vektorové pole \vec{F}_3 . Proto ze skutečnosti, že forma $\omega_F^{(1)}$ odpovídající tomuto vektorovému poli je uzavřená, *vyplývá*, že práce tohoto silového pole nejen po zadané kružnici, ale po jakékoli uzavřené křivce, pro niž předpoklady platí, je nulová. V případě vektorových polí \vec{F}_1 a \vec{F}_2 předpoklady věty splněny nejsou (jsou porušeny v bodě $(0, 0)$). Proto z uzavřenosti odpovídajících forem $\omega_F^{(1)}$ nemůžeme a priori usoudit na nulovost integrálu. To, že je v případě vektorového pole \vec{F}_1 rovněž nulový, je důsledkem konkrétního tvaru tohoto vektorového pole, nikoli důsledkem Greenovy věty.

Příklad 12.122: Rovnice kontinuity

V odstavci 9.4 jsme se zabývali rovnicí kontinuity, vyjadřující zákon zachování hmotnosti v proudící tekutině o hustotě $s(\vec{r}, t)$ a rychlosti $\vec{v}(\vec{r}, t)$. V příkladu 9.74 jsme ji odvodili na základě fyzikální argumentace v integrálním tvaru, který jsme pak přibližnými úvahami pro objem V tvaru elementárního kváдру (hranice $\partial V = S$ byla tvořena stěnami kváдру) „převodli“ na tvar diferenciální, tj.

$$\int_V \frac{\partial s}{\partial t} dV = \int_{S=\partial V} s\vec{v} d\vec{S} \implies \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(s\vec{v}) = 0.$$

Se znalostí integrálních vět, konkrétně věty Gaussovy-Ostrogradského, odvodíme diferenciální tvar z integrálního okamžitě. Pokud integrační obory V a $\partial V = S$ a diferenciální forma

$$s\vec{v} d\vec{S} = s(v_1 dy \wedge dz + v_2 dz \wedge dx + v_3 dx \wedge dy) = \omega_{sv}^{(2)}$$

splňují předpoklady této věty, pak platí

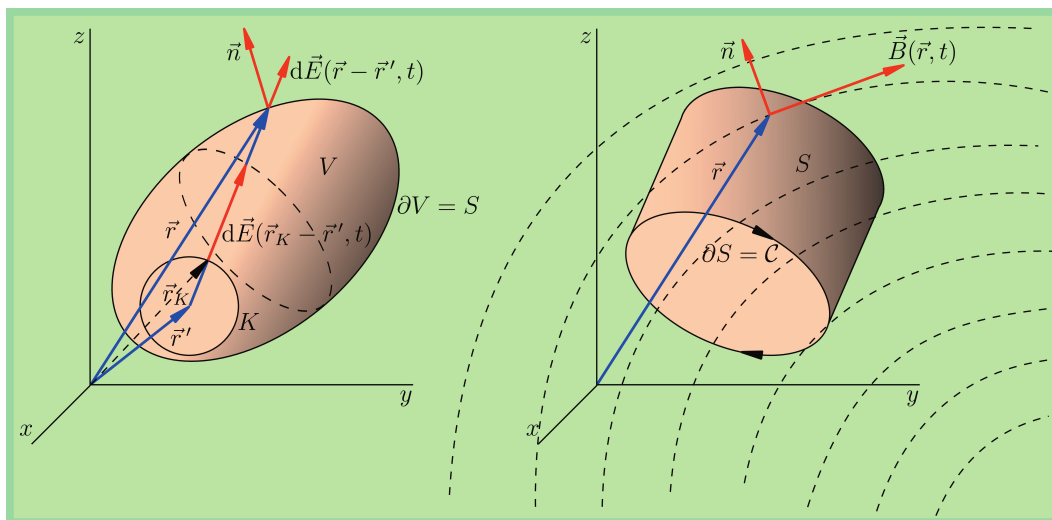
$$\int_S s\vec{v} d\vec{S} = \int_S \omega_{sv}^{(2)} = \int_V d\omega_{sv}^{(2)} = \int_V \omega_{\operatorname{div}(s\vec{v})}^{(3)} = \int_V \operatorname{div}(s\vec{v}) dV.$$

Příklad 12.123: Maxwellovy rovnice

Soustava Maxwellových rovnic je známa z elektrodynamiky. Pro veličiny $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{D}(\vec{r}, t)$ (elektrická intenzita a indukce), $\vec{H}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ (magnetická intenzita a indukce), popisující elektromagnetické pole v prostředí s náboji a proudy rozloženými s hustotami $\rho(\vec{r}, t)$ (jednotka $C m^{-3}$), $\vec{j}(\vec{r}, t)$ (jednotka $A m^{-2}$), platí

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (12.220)$$

První tři rovnice představují diferenciální zápis integrálních fyzikálních zákonů získaných experimentálně (Coulombova, zákona spojitosti magnetického toku, a Faradayova), čtvrtá rovnice je teoretickým doplněním Ampèrova zákona. Zabývejme se první a třetí rovnicí a tím, jak je ze zmíněných empirických zákonů odvodit.



Obrázek 12.63 K Maxwellovým rovnicím.

Použijeme opět integrální věty s tím, že budeme předpokládat splnění všech jejich požadavků. Uvažujme o oblasti \$V\$ s hranicí \$\partial V = S\$, orientovanou vnější normálou \$\vec{n}\$ (obrázek 12.63 vlevo).

Okamžik \$t\$ zvolme pevně a místo obecného prostředí uvažujme pro jednoduchost o situaci ve vakuu, tj. v prostředí s permitivitou vakua \$\varepsilon_0\$. Intenzita elektrického pole od elementárního náboje \$\mathrm{d}Q = \rho \mathrm{d}V\$ umístěného v bodě o polohovém vektoru \$\vec{r}'\$ měřená v bodě \$\vec{r}\$ je

$$\mathrm{d}\vec{E}(\vec{r} - \vec{r}', t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \mathrm{d}V,$$

a proto

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \mathrm{d}^3\vec{r}'.$$

Tok vektorového pole \$\vec{E}\$ plochou \$S\$ je

$$\Phi = \int_S \vec{E} \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \left(\int_S \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \mathrm{d}\vec{S} \right) \mathrm{d}^3\vec{r}',$$

kde jsme již využili věty o záměnnosti pořadí integrace. Nyní vypočítejte divergenci vektorového pole

$$\frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

(podle proměnných \$x, y, z\$, složky vektoru \$\vec{r}'\$ a proměnnou \$t\$ berete jako konstanty). Uvidíte, že je nulová. Toto vektorové pole však není definováno v bodě \$\vec{r} = \vec{r}'\$. Nemůžeme proto rovnou použít Gaussovu-Ostrogradského větu. Výsledek příkladu 12.116, který jsme odvodili pro případ Greenovy věty, můžeme snadno rozšířit i na případ věty Gaussovy-Ostrogradského (zdůvodněte): zvolme kulovou plochu \$K\$ se středem v koncovém bodě vektoru \$\vec{r}'\$ a s poloměrem \$R\$ tak, aby se vešla do oblasti \$V\$ (obrázek 12.63). Platí

$$\int_S \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \mathrm{d}\vec{S} = \int_K \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r}_K - \vec{r}'|^3} (\vec{r}_K - \vec{r}') \mathrm{d}\vec{K},$$

kde \vec{r}_K je polohový vektor obecného bodu plochy K a $d\vec{K} = \vec{n}_K dK$ její objemový element opatřený orientací vnější normálou \vec{n}_K . (Index K jsme všude připsali pro lepší srozumitelnost.) Protože $|\vec{r}_K - \vec{r}'| = R$ a $(\vec{r}_K - \vec{r}')\vec{n}_K = R$, dostaneme

$$\int_K \frac{\varrho(\vec{r}', t)}{|\vec{r}_K - \vec{r}'|^3} (\vec{r}_K - \vec{r}') d\vec{K} = \int_K \frac{\varrho(\vec{r}', t)}{R^3} R dK = \frac{\varrho(\vec{r}', t)}{R^2} \int_K dK = 4\pi\varrho(\vec{r}', t),$$

a nakonec

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho(\vec{r}', t) d\vec{r}', \quad \text{zkráceně} \quad \Phi = \int_V \frac{\varrho}{\varepsilon_0} dV.$$

Na druhé straně je (s použitím vztahu (12.219))

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S \omega_E^{(2)} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV,$$

za předpokladu, že forma $\omega_E^{(2)}$ splňuje požadavky Gaussovy-Ostrogradského věty. Porovnáním získaných výrazů pro tok Φ a na základě skutečnosti, že oblast V je libovolná, dostaneme

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_V \frac{\varrho}{\varepsilon_0} dV \implies \operatorname{div} (\varepsilon_0 \vec{E}) = \varrho \implies \operatorname{div} \vec{D} = \varrho.$$

Odvození třetí Maxwellovy rovnice je velice jednoduché. Jejím experimentálním základem je Faradayův zákon elektromagnetické indukce, podle něhož je elektrické napětí indukované na svorkách smyčky \mathcal{C} , která ohraničuje plochu S , rovno záporně vzaté časové derivaci toku magnetického pole (obrázek 12.63), tj.

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \implies \int_{\mathcal{C}} \vec{E} d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Podle klasické Stokesovy věty, resp. podle obecného Stokesova teorému aplikovaného na formu $\vec{E} d\vec{r} = \omega_E^{(1)}$ platí

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S},$$

a odtud

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \implies \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

První Maxwellova rovnice tedy představuje diferenciální tvar Coulombova zákona, třetí pak diferenciální tvar Faradayova zákona elektromagnetické indukce.

Příklad 12.124: Greenovy identity

V tomto příkladu odvodíme pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty dva užitečné vztahy zvané *Greenovy identity*. Budou se nám v dalších příkladech hodit. Necht $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ je množina splňující požadavky Gaussovy-Ostrogradského věty (resp. obecného Stokesova teorému), $\Sigma = \partial\Omega$ její hranice, a $f(\vec{r})$ a $g(\vec{r})$ funkce spojitě

344 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHOU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

diferencovatelné na oblasti D obsahující množinu Ω i s její hranicí. Označme $\vec{F} = f \operatorname{grad} g = f \nabla g$. Platí (s využitím vztahu (12.219))

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \, d\vec{\Sigma} = \int_{\partial\Omega} \omega_F^{(2)} = \int_{\Omega} d\omega_F^{(2)} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, d\Omega.$$

Vypočteme divergenci vektorového pole \vec{F} :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial g}{\partial z} \right) = \nabla f \nabla g + f \Delta g,$$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je operátor nabra a $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ je Laplaceův operátor.

Dostáváme první Greenovu identitu

$$\int_{\partial\Omega} (f \nabla g) \, d\vec{\Sigma} = \int_{\Omega} \nabla f \nabla g \, d\Omega + \int_{\Omega} f \Delta g \, d\Omega. \quad (12.221)$$

Zapišme ji nyní pro případ záměny funkcí f a g . Dostaneme

$$\int_{\partial\Omega} g \nabla f \, d\vec{\Sigma} = \int_{\Omega} \nabla g \nabla f \, d\Omega + \int_{\Omega} g \Delta f \, d\Omega.$$

Odečtením od (12.221) získáme vztah

$$\int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \, d\vec{\Sigma} = \int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, d\Omega.$$

Nechť \vec{n} je vektorové pole vnější normály k ploše Σ . Pro Lieovu (tj. směrovou) derivaci $\partial_n f$ funkce f podle vektorového pole normály \vec{n} k ploše $\Sigma = \partial\Omega$ platí

$$\partial_n f = \frac{\partial f}{\partial x} n^1 + \frac{\partial f}{\partial y} n^2 + \frac{\partial f}{\partial z} n^3 = \vec{n} \nabla f \implies (f \nabla g - g \nabla f) \vec{n} \, d\Sigma = (f \partial_n g - g \partial_n f) \, d\Sigma.$$

Dostáváme druhou Greenovu identitu

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (f \partial_n g - g \partial_n f) \, d\Sigma. \quad (12.222)$$

Příklad 12.125: Vnější Dirichletova úloha

V tomto příkladu bude naším úkolem najít rozložení elektrostatického potenciálu $\phi(\vec{r})$ vně nabitého vodiče (ve vakuu) zaujímajícího uzavřenou oblast V ohraničenou plochou S , je-li zadána hodnota funkce ϕ na této ploše, tj. $\phi|_S = \phi_0 = \text{konst.}$ Dalšími podmínkami kladenými na funkci ϕ jsou její spojitost na ploše S a vně oblasti V a tzv. regulárnost v nekonečnu. Ta spočívá v existenci takového čísla A , že platí

$$|\phi(\vec{r})| \leq \frac{A}{R}, \quad |\partial_n \phi(\vec{r})| \leq \frac{A}{R^2}, \quad \text{pro } |\vec{r}| = R,$$

12.4. INTEGRÁL Z DIFERENCIÁLNÍCH FOREM 345

v každém bodě \vec{r} , \vec{n} je vektorové pole vnější normály k ploše S . Kromě toho splňuje funkce ϕ Laplaceovu rovnici $\Delta\phi = 0$. Je totiž $\vec{E} = \text{grad } \phi$, tj. $\text{div } \vec{E} = \Delta\phi$. Na druhé straně je $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$, neboť vně vodiče nejsou žádné náboje. Nejprve dokážeme, že řešení úlohy je jednoznačné. K tomu využijeme Gaussovy-Ostrogradského věty, resp. odpovídající verze obecného Stokesova teorému. Označme ϕ_1 a ϕ_2 dvě řešení úlohy a $\mu = \phi_1 - \phi_2$. Jednoznačnost řešení bude ověřena, podaří-li se nám dokázat, že funkce μ je identicky nulová.

Zvolme za Σ kulovou plochu o poloměru R se středem v počátku soustavy souřadnic, oblast, kterou obepíná, označme Ω . V první Greenově identitě zvolme $f = g = \mu$. S uvážením skutečnosti, že funkce μ musí rovněž splňovat Laplaceovu rovnici, dostaneme

$$\int_{\Omega} (\nabla\mu)^2 d\Omega = \int_{\Sigma} (\mu\nabla\mu)\vec{n} d\Sigma.$$

V příkladu 12.124 jsme si připomněli, že $(\nabla\mu)\vec{n} = \partial_n\mu$, tj.

$$\int_{\Omega} (\nabla\mu)^2 d\Omega = \int_{\Sigma} \mu \partial_n\mu d\Sigma.$$

Podmínky regulárnosti funkcí ϕ_1 a ϕ_2 v nekonečnu vedou k analogickým podmínkám pro funkci μ :

$$|\mu(\vec{r})| = |\phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})| \leq |\phi_1(\vec{r})| + |\phi_2(\vec{r})| \leq \frac{2A}{R},$$

a obdobně

$$|\partial_n\mu(\vec{r})| \leq \frac{2A}{R^2}.$$

To nám umožní odhadnout integrál $\int_{\Sigma} \mu \partial_n\mu d\Sigma$ co do absolutní hodnoty:

$$\left| \int_{\Sigma} \mu \partial_n\mu d\Sigma \right| \leq \int_{\Sigma} |\mu \partial_n\mu| d\Sigma \leq \int_{\Sigma} \frac{4A^2}{R^3} d\Sigma = \frac{16\pi A^2}{R}.$$

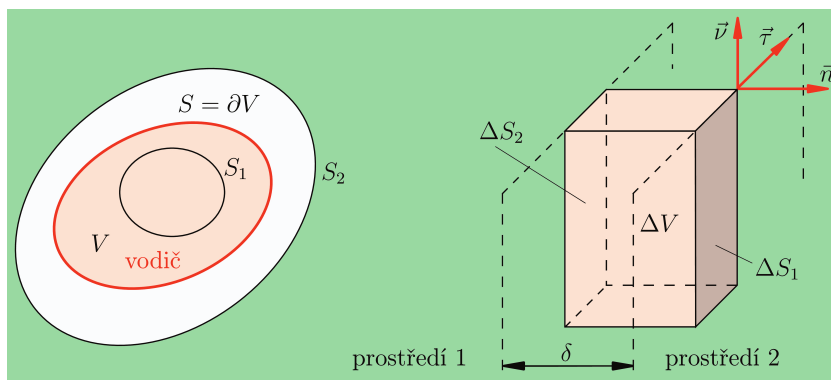
Spojením tohoto odhadu a první Greenovy identity aplikované na náš speciální případ dostaneme

$$\int_{\Omega} (\nabla\mu)^2 d\Omega \leq \frac{16\pi A^2}{R}.$$

Pro $R \rightarrow \infty$ jde pravá strana této nerovnosti k nule, proto i levá strana, která je díky nezápornému integrandu nezáporná, musí být v této limitní situaci nulová. Proto $\nabla\mu(\vec{r}) \equiv \vec{0}$ a $\mu(\vec{r}) = \text{konst.}$ pro $|\vec{r}| = R$. Na ploše S ohraničující náš vodič však platí okrajová podmínka $\phi_1|_S = \phi_2|_S$, proto $\mu(\vec{r}) \equiv 0$. Podmínka elektrostatické rovnováhy vodiče vede k závěru, že intenzita elektrického pole uvnitř vodiče je nulová (v opačném případě by vodičem tekla proud a nejednalo by se o elektrostatickou rovnováhu). Vzhledem ke vztahu $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ je zřejmé, že potenciál elektrického pole uvnitř vodiče je konstantní. Z podmínky jeho spojitosti pak vyplývá jeho rovnost povrchové hodnotě ϕ_0 .

Příklad 12.126: Náboj na vodiči

Uvažujme o vodivém tělese tvaru oblasti V ohraničené povrchem $\partial V = S$. Těleso je ve vakuu. Je nabité celkovým nábojem Q a je v elektrostatické rovnováze. Z elektrostatiky je známo, že v takovém případě je celý



Obrázek 12.64 K příkladům 12.126 a 12.127.

náboj rozložen výhradně na povrchu tělesa. Dokážeme to. Zvolme uzavřené plochy S_1 a S_2 tak, aby S_1 ležela uvnitř oblasti V a S_2 vně (obrázek 12.64).

Intenzitu elektrostatického pole v prostoru označíme \vec{E} (je funkcí souřadnic) a vyjádříme její tok plochami S_1 , S a S_2 :

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad \Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Označme Q_1 celkový náboj v oblasti V_1 ohraničené plochou S_1 . Náboj v oblasti V_2 ohraničené plochou S_2 je zjevně $Q_2 = Q$, neboť ve vakuu žádné náboje nejsou. Za předpokladu splnění požadavků Gaussovy-Ostrogradského věty a při využití první Maxwellovy rovnice (příklad 12.123) ve tvaru $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ platí

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{V_1} \text{div } \vec{E} \, dV = \frac{Q_1}{\epsilon_0}, \\ \Phi &= \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{E} \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}, \\ \Phi_2 &= \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{V_2} \text{div } \vec{E} \, dV = \frac{Q_2}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

V příkladu 12.124 jsme odvodili, že potenciál uvnitř vodiče je konstantní, takže intenzita je tam nulová. Proto také $\Phi_1 = 0$ a $Q_1 = 0$, a to pro libovolnou uzavřenou plochu ležící uvnitř V . Proto je

$$Q_1 = \int_{V_1} \rho \, dV = 0$$

pro libovolnou oblast $V_1 \subset \text{int } V$. Hustota náboje uvnitř oblasti V je nulová. Dále je

$$Q_2 - Q = \int_{V_2} \rho \, dV - \int_V \rho \, dV = 0,$$

hustota náboje je proto nulová i vně oblasti V . Je zřejmé, že náboj Q je rozložen pouze na povrchu vodiče S , a to rovnoměrně (fyzikové - zdůvodněte), s plošnou hustotou $\sigma = \frac{Q}{P_S}$, kde P_S je plošný obsah útvaru S .

Příklad 12.127: Podmínky na rozhraní dvou prostředí

Viděli jste již někdy tzv. *Fresnelovy vzorce* pro odraz a lom světla na rozhraní dvou prostředí? Řeknete si možná: „Co má co dělat chování světla na rozhraní prostředí mezi příklady z elektřiny?“ Ale má. Vždyť přece světlo je elektromagnetické vlnění a musí splňovat Maxwellovy rovnice jako každé elektromagnetické pole. Fresnelovy vztahy samotné zde odvozovat nebudeme, odvodíme však podmínky, které jsou východiskem pro jejich získání. Dokážeme, že na rozhraní dvou prostředí platí pro vektory indukce elektrického, resp. magnetického pole vztahy

$$\vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma, \quad \text{resp.} \quad \vec{n}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0,$$

kde \vec{n} je vektorové pole jednotkové normály k rozhraní směřující z prostředí 1 do prostředí 2, σ je plošná hustota náboje na rozhraní, veličiny \vec{D}_1 a \vec{B}_1 , resp. \vec{D}_2 a \vec{B}_2 znamenají elektrickou a magnetickou indukci na rozhraní ze strany prostředí 1, resp. 2. Uvažujme o elementárním rovinném rozhraní podle obrázku 12.64 vpravo. Mezi prostředími zvolme tenkou vrstvu o tloušťce δ , kterou později „pošleme“ k nule. Hustotu náboje (objemovou) označme ϱ . Pro oblast ΔV vyznačenou v obrázku platí podle Gaussovy-Ostrogradského věty a s využitím první Maxwellovy rovnice $\text{div } \vec{D} = \varrho$ vztah

$$\int_{\partial \Delta V} \vec{D} \, d\vec{S} = \int_{\Delta V} \text{div } \vec{D} \, dV = \int_{\Delta V} \varrho \, dV,$$

kde hraniční plocha oblasti ΔV je tvořena stěnami ΔS_1 , ΔS_2 (shodného plošného obsahu ΔS) a pláštěm ΔP . Odtud

$$\int_{\partial \Delta V} \vec{D} \, d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{D} \, d\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \vec{D} \, d\vec{S} + \int_{\Delta P} \vec{D} \, d\vec{S},$$

a v limitě pro $\delta \rightarrow 0$ za předpokladu, že se vektorové pole \vec{D} ve vrstvě spojitě mění z hodnoty \vec{D}_1 v prvním prostředí na hodnotu \vec{D}_2 v druhém prostředí pak

$$\frac{1}{\Delta S} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial \Delta V} \vec{D} \, d\vec{S} = \vec{n} \vec{D}_2 - \vec{n} \vec{D}_1 + \frac{1}{\Delta S} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Delta P} \vec{D} \, d\vec{S}.$$

Podle věty o střední hodnotě je

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Delta P} \vec{D} \, d\vec{S} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot \left[\frac{1}{\delta} \int_{\Delta P} \vec{D} \, d\vec{S} \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \langle \vec{D} \rangle_{\Delta P} = 0,$$

takže ve výsledku dostaneme

$$\vec{n} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta V} \varrho \, dV = \sigma.$$

Veličina σ představuje limitní hodnotu pro $\delta \rightarrow 0$ celkového náboje v oblasti ΔV vztaheného na jednotkovou plochu rozhraní, tedy plošnou hustotu náboje na rozhraní. Důkaz podmínky týkající se indukce magnetického pole na rozhraní je zcela analogický, využívá však druhé Maxwellovy rovnice $\text{div } \vec{B} = 0$.

Příklad 12.128: Pfaffovy formy

V druhém dílu, v příkladu 9.45, si můžeme všimnout souvislosti prvního zákona termodynamiky s diferenciální 1-formou,

$$\delta Q = dE + \delta A, \quad \text{pro ideální plyn pak} \quad \delta Q = C_V dT + P(V, T) dV, \quad C_V = \text{konst.},$$

kde δQ je teplo přijaté uzavřenou termodynamickou soustavou od okolí, δA práce vykonaná touto soustavou (obojí včetně správného znaménka) a dE změna její vnitřní energie. Symbol δ vyjadřuje skutečnost, že veličiny Q a A nejsou stavové (jsou závislé na ději, který v soustavě probíhá), zatímco vnitřní energie stavovou veličinou je, takže dE je její úplný diferenciál. K výrazu pro teplo přijaté ideálním plynem jsme našli integrační faktor $\mu(T) = T^{-1}$ a odpovídající stavovou veličinu S , zvanou entropie. Platí pro ni $dS = \delta Q/T$. (Existence entropie je obsahem druhého zákona termodynamiky.) Se znalostí aparátu diferenciálních forem můžeme tuto úvahu zobecnit. Tak třeba pro ideální plyn můžeme výraz v proměnných T (absolutní teplota) a V (objem), přičemž $P(V, T)$ je tlak v plynu, chápat jako diferenciální 1-formu $\delta Q = C_V dT + P(V, T) dV$, která není uzavřená, tj. $d(\delta Q) = -\frac{\partial P}{\partial T} dV \wedge dT = -nRV^{-1} dV \wedge dT \neq 0$. Integračním faktorem se rozumí funkce $\mu(V, T)$ zvolená tak, aby forma $\omega = \mu \delta Q$ již uzavřená byla. Podmínka $d\omega = 0$ vede k následujícímu požadavku na funkci μ (propočítejte s použitím stavové rovnice ideálního plynu $PV = nRT$):

$$d\omega = \left(C_V \frac{\partial \mu}{\partial V} - P \frac{\partial \mu}{\partial T} - \mu \frac{\partial P}{\partial T} \right) dV \wedge dT = \left(C_V \frac{\partial \mu}{\partial V} - \frac{nRT}{V} \frac{\partial \mu}{\partial T} - \frac{nR}{V} \mu \right) dV \wedge dT = 0.$$

Tyto úvahy nyní zobecníme. Diferenciální 1-forma na \mathbf{R}^n , tj.

$$\eta \in \Lambda_1(\mathbf{R}^n), \quad \eta = X_i dx^i, \quad X_i = X_i(x^1, \dots, x^n), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (12.223)$$

se nazývá Pfaffova forma. Podmínka uzavřenosti Pfaffovy formy má tvar

$$d\eta = \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \right\}_{\text{alt}(i,j)} dx^j \wedge dx^i = 0 \implies \frac{\partial X_i}{\partial x^j} - \frac{\partial X_j}{\partial x^i} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Integračním faktorem se pro případ, že forma η není uzavřená, opět rozumí funkce $\mu = \mu(x^1, \dots, x^n)$, pro kterou forma $\mu\eta$ již uzavřená je, tj. platí

$$\frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x^j} - \frac{\partial(\mu X_j)}{\partial x^i} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

a odtud

$$\frac{\partial X_i}{\partial x^j} - \frac{\partial X_j}{\partial x^i} = \frac{1}{\mu} \left(X_j \frac{\partial \mu}{\partial x^i} - X_i \frac{\partial \mu}{\partial x^j} \right).$$

Má-li tato soustava parciálních diferenciálních rovnic (určíte, kolik jich je?) řešení, pak každý bod definičního oboru formy $\mu\eta$ má okolí, na němž je forma $\mu\eta$ exaktní, tj. existuje funkce (0-forma) $f = f(x^1, \dots, x^n)$, jednoznačně určená až na konstantu, pro kterou je $\mu\eta = df$.

Zabývejme se řešitelností soustavy podrobněji. Lze ji přepsat do tvaru (zdůvodněte)

$$X_i y_j - X_j y_i = F_{ij}, \quad y_i = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x^i}, \quad F_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x^i} - \frac{\partial X_i}{\partial x^j},$$

$1 \leq i, j \leq n$, a chápat ji jako nehomogenní soustavu $\frac{1}{2}n(n-1)$ algebraických lineárních rovnic pro n neznámých y_1 až y_n (odpověděli jste si už na otázku počtu rovnic a víte, proč je soustava nehomogenní?). Soustava má řešení právě tehdy, je-li hodnota její matice shodná s hodnotou matice rozšířené. Pro $n = 1$ samozřejmě nedostaneme

žádnou rovnici (víte proč jsme to věděli předem?), pro $n = 2$ máme jednu rovnici (méně rovnic než neznámých), pro $n = 3$ jsou rovnice právě tři (stejný počet jako počet neznámých). Pro $n > 3$ je více rovnic než neznámých, takže soustava může mít řešení jen tehdy, jsou-li rovnice závislé, tj. jsou-li splněny další podmínky. Rozebereme podrobněji případy $n = 2$ a $n = 3$. Pro $n = 2$ má forma η tvar $\eta = X dx + Y dy$ a soustava rovnic pro integrační faktor $\mu = \mu(x, y)$ je

$$X \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - Y \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

neznámými jsou veličiny $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$ a $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$. Hodnosti matice a matice rozšířené jsou shodné a rovny 1. Pro $n = 2$ má tedy problém integračního faktoru vždy řešení vzhledem k neznámým $y_1 = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$, $y_2 = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$. Dvojice řešení (y_1, y_2) tvoří v každém bodě prostoru \mathbf{R}^2 jednorozměrný vektorový podprostor tečného prostoru. Speciálně hledíme funkci μ závislou pouze na jedné z proměnných, třeba x . Takové řešení existuje pro $Y \neq 0$ a je tvaru

$$\mu(x) = K \exp \left[- \int \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx \right].$$

Pro $n = 3$ je situace mnohem zajímavější. Označme $\eta = X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz$. Soustavu pro funkci $\mu = \mu(x, y, z)$

$$\begin{aligned} X_2 y_3 - X_3 y_2 &= \frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z}, \\ X_3 y_1 - X_1 y_3 &= \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x}, \\ X_1 y_2 - X_2 y_1 &= \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (12.224)$$

můžeme zapsat v elegantním vektorovém tvaru $\vec{X} \times \vec{y} = \text{rot } \vec{X}$. Po vynásobení vektorem \vec{X} pak

$$\vec{X} \text{ rot } \vec{X} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že $\vec{X} \neq \vec{0}$ (v opačném případě by forma η byla nulová), ale také $\text{rot } \vec{X} \neq \vec{0}$ (v opačném případě by forma η byla uzavřená), je nutnou podmínkou řešení soustavy rovnic pro parciální derivace funkce μ kolmost vektorů \vec{X} a $\text{rot } \vec{X}$. Je to však i podmínka postačující? Hned na to přijdeme. Matice soustavy (12.224) má hodnotu 2 (vypočítejte si její determinant). Je-li však $\vec{X} \text{ rot } \vec{X} = 0$, má matice rozšířená stejnou hodnotu (prověřte). Ortogonalita vektorového pole \vec{X} a jeho rotace je podmínkou nutnou a postačující pro řešitelnost soustavy (12.224). Integrační faktor neuzavřené Pfaffovy formy $\eta = X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz$ existuje právě tehdy, je-li $\vec{X} \text{ rot } \vec{X} = 0$. Pro pořádek ještě vyjádříme podmínky

$$\vec{X} \times \vec{y} = \text{rot } \vec{X}, \quad \text{a} \quad \vec{X} \text{ rot } \vec{X} = 0$$

pomocí forem. Platí $\eta = \omega_X^{(1)}$ a $y_1 dx + y_2 dy + y_3 dz = \omega_y^{(1)}$. Podmínka vyjadřující soustavu (12.224) má tvar

$$\omega_{X \times y}^{(2)} = \omega_{\text{rot } X}^{(2)} \quad \text{tj.} \quad \omega_X^{(1)} \wedge \omega_y^{(1)} = d\omega_X^{(1)},$$

podmínka $\vec{X} \text{ rot } \vec{X} = 0$ pak

$$\omega_X^{(1)} \wedge \omega_{\text{rot } X}^{(2)} = \omega_{X \text{ rot } X}^{(3)} = 0.$$

Nutná a postačující podmínka existence integračního faktoru Pfaffovy formy pro $n = 3$ a rovnice, kterou musíme pro nalezení integračního faktoru řešit, tak zní

$$\omega_X^{(1)} \wedge \omega_y^{(1)} = d\omega_X^{(1)}.$$

Podmínka $\omega_X^{(1)} \wedge d\omega_X^{(1)} = 0$ jej již jejím důsledkem.

Nakonec ještě poznámka k terminologii týkající se Pfaffových forem: Pfaffova forma se nazývá *holonomní*, je-li uzavřená, nebo existuje-li k ní integrační faktor. V ostatních případech se nazývá *neholonomní*. A připomeňme ještě, že v případech, kdy integrační faktor existuje, není obecně určen jednoznačně.

Předchozí příklady ukazují, že integrálům všech možných druhů se v přírodovědných a technických disciplínách nevyhneme.

12.4.7 Cvičení

1. Necht $c : [0, 1]^3 \ni u = (u^1, u^2, u^3, u^4) \rightarrow c(u) \in \mathbf{R}^4$, $x^j c = x^j c(u^1, u^2, u^3, u^4)$, $1 \leq j \leq 4$, je trojrozměrná singulární krychle v \mathbf{R}^4 . Zapište její hranici. Zapište hranici této hranice a ukažte, že výsledek je ve shodě s příkladem 12.101.

Návod: Dosazujte přímo do definice hranice.

2. Necht $c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \rightarrow c(u, v) = (xc(u, v), yc(u, v), zc(u, v)) \in \mathbf{R}^3$, kde $x = xc(u, v) = au \cos \pi v$, $y = yc(u, v) = bu \sin \pi v$, $z = zc(u, v) = u^2$. Určete stěny a hranici této dvojrozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^3 .

Výsledek: $c_{(1,0)}(t) = (0, 0, 0)$, $c_{(1,1)}(t) = (a \cos \pi t, b \sin \pi t, 1)$, $c_{(2,0)}(t) = (at, 0, t^2)$, $c_{(2,1)}(t) = (-at, 0, t^2)$.

3. Necht $c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \rightarrow c(u, v) = (xc(u, v), yc(u, v), zc(u, v)) \in \mathbf{R}^3$, kde $x = xc(u, v) = au \cos \frac{\pi v}{2}$, $y = yc(u, v) = bu \sin \frac{\pi v}{2}$, $z = zc(u, v) = u^2$. Určete stěny a hranici této dvojrozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^3 .

Výsledek: $c_{(1,0)}(t) = (0, 0, 0)$, $c_{(1,1)}(t) = (a \cos \frac{\pi t}{2}, b \sin \frac{\pi t}{2}, 1)$, $c_{(2,0)}(t) = (at, 0, t^2)$, $c_{(2,1)}(t) = (0, bt, t^2)$.

4. V příkladu 12.106 přeparametrizujte integrační obor tak, aby parametrizace odpovídala obvyklému významu parametrů (úhly), tj. $u \rightarrow \vartheta$, $v \rightarrow \varphi$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Vypočtěte integrál při této parametrizaci a ukažte, že při správné volbě pořadí parametrů dostanete stejný výsledek jako v příkladu 12.106.

Výsledek: $x(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \cos \varphi$, $y(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \sin \varphi$, $z(\vartheta, \varphi) = \cos \vartheta$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

5. V příkladech 12.108 a 12.109 přeparametrizujte integrační obor tak, aby parametrizace odpovídala definici dvojrozměrných singulárních krychlí v \mathbf{R}^3 . Integračním oborem pak bude dvojrozměrný singulární řetězec. Vypočtěte integrály při této parametrizaci a ukažte, že při správné volbě pořadí parametrů dostanete stejné výsledky jako v příkladech 12.108 a 12.109.

Výsledky: a) $xc(u, v) = uR \cos 2\pi v$, $yc(u, v) = uR \sin 2\pi v$, $zc(u, v) = \frac{R}{2}uv$, b) $xc(u, v) = u \cos 2\pi v$, $yc(u, v) = u \sin 2\pi v$, $zc(u, v) = u^2$.

6. Proveďte podrobný výpočet složek tečných vektorů a jednotkové normály v obecném bodě Möbiovy pásky parametrizované zobrazením S z příkladu 12.110.

Výsledky:

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_u &= \left(-\sin u \left(1 + v \cos \frac{u}{2} \right) - \frac{1}{2}v \sin \frac{u}{2} \cos u, \cos u \left(1 + v \cos \frac{u}{2} \right) - \frac{1}{2}v \sin \frac{u}{2} \sin u, \frac{1}{2}v \cos \frac{u}{2} \right), \\ \vec{\xi}_v &= \left(\cos \frac{u}{2} \cos u, \cos \frac{u}{2} \sin u, \sin \frac{u}{2} \right), \\ \vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v &= \left(\cos u \sin \frac{u}{2} \left(1 + v \cos \frac{u}{2} \right) - \frac{1}{2}v \sin u, \sin u \sin \frac{u}{2} \left(1 + v \cos \frac{u}{2} \right) + \frac{1}{2}v \cos u, -\cos \frac{u}{2} \left(1 + v \cos \frac{u}{2} \right) \right), \\ |\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v| &= \sqrt{\left(1 + v \cos \frac{u}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}v^2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v}{|\vec{\xi}_u \times \vec{\xi}_v|}. \end{aligned}$$

7. Vypočítejte následující křivkové integrály druhého druhu $\int_C \omega$, popřípadě $\omega_F^{(1)}$. V případě, že parametrizace křivky není zadána, zvolte ji sami:

- a) $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2, x \in [0, 2]\}$, $\omega = (x + y) dy$,
 b) $C : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow (x\mathcal{C}(t), y\mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^2$, $x\mathcal{C}(t) = a(t - \sin t)$, $y\mathcal{C}(t) = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ je konstanta, $\omega = y dx - x dy$, (C je oblouk cykloidy),
 c) $C : [-2, -1] \ni t \rightarrow (x\mathcal{C}(t), y\mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^2$,

$$x\mathcal{C}(t) = \frac{3at}{t^3 + 1}, \quad y\mathcal{C}(t) = \frac{3at^2}{t^3 + 1}, \quad t \neq -1, \quad \omega = \frac{dx}{y^2} - \frac{dy}{x^2},$$

(křivka C je Descartův list),

- d) $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, křivku orientujte v kladném geometrickém smyslu, $\vec{F} = (x - y, x - y)$,
 e) porovnejte hodnoty křivkového integrálu z formy $\omega_F^{(1)}$, $\vec{F} = (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2))$, po částech křivek

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 1 - x\}, \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \sqrt{1 - x^2}\},$$

$C_3 =$ části souřadnicových os,

spojujících body $A = (1, 0)$ (počáteční bod) a $B = (0, 1)$ (koncový bod),

- f) porovnejte hodnoty integrálu z formy $\omega_F^{(1)}$, $\vec{F} = (0, 0, \frac{1}{x^2 + y^2})$ po křivce $C : t \rightarrow (x\mathcal{C}(t), y\mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^3$, $x\mathcal{C}(t) = a \cos t$, $y\mathcal{C}(t) = a \sin t$, $z\mathcal{C}(t) = bt$, $a > 0$, $b > 0$ jsou konstanty, spojující body $A = (a, 0, 0)$ a $B = (0, a, \frac{\pi b}{2})$ s integrálem po úsečce AB ,
 g) zvolte číslo $\alpha \geq 1$ tak, aby práce síly $\vec{F} = (0, (x - \frac{1}{2})^2)$ po křivce $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^\alpha\}$ z bodu $A = (0, 0)$ do bodu $B = (1, 1)$ byla minimální,
 h) C je úsečka v rovině spojující body $A = (a, 0)$ a $B = (0, b)$, $\omega = x dy$,
 i) C je úsečka v rovině spojující body $A = (0, \pi)$ a $B = (\pi, 0)$, $\omega = \sin y dx + \sin x dy$,
 j) C je lomená čára $OABC$ v \mathbf{R}^3 , $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$, $\omega = z dx + y dy + x dz$,
 k) $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \sqrt{R^2 - x^2}\}$, počáteční bod $A = (R, 0)$, koncový bod $B = (0, R)$, $\omega = x dx + y dy$,
 l) $C : [0, \frac{\pi}{2}] \ni t \rightarrow (x\mathcal{C}(t), y\mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^2$, $x\mathcal{C}(t) = R \cos^3 t$, $y\mathcal{C}(t) = R \sin^3 t$ (čtvrtina asteroidy), počáteční bod $A = (R, 0)$, $\omega = \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$,
 m) určete práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (y, 1)$ po uzavřené křivce složené z částí os souřadnic a oblouku $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$ v prvním kvadrantu, křivka je orientována v kladném geometrickém smyslu,
 n) určete práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (y, -x)$ po křivce $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 1 - x^2\}$ z bodu $A = (-1, 0)$ do bodu $B = (0, 1)$,
 o) určete práci silového pole \vec{F} po čtvrtině kružnice v prvním kvadrantu soustavy souřadnic xy , střed v počátku soustavy souřadnic, poloměr R , orientace po směru hodinových ručiček, vektor \vec{F} směřuje v každém bodě podél kladné osy x a má konstantní velikost F ,

- p) určete práci silového pole $\vec{F} = (xy, x + y)$ v rovině xy po křivce \mathcal{C} , je-li \mathcal{C} p1) úsečka spojující body $O = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$, p2) oblouk paraboly $y = x^2$ spojující tytéž body jako v úloze p1), tj. $O = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$, p3) lomená čára tvořená úsečkou \vec{OC} a úsečkou \vec{CB} , kde $O = (0, 0)$, $C = (1, 0)$, $B = (1, 1)$, p4) lomená čára tvořená úsečkou \vec{OD} a úsečkou \vec{DB} , kde $O = (0, 0)$, $D = (0, 1)$, $B = (1, 1)$,
- q) určete práci silového pole \vec{F} v rovině xy po křivce \mathcal{C} , jíž je q1) oblouk elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v prvním kvadrantu soustavy souřadnic, orientace v kladném smyslu, q2) celá tato elipsa, orientace v kladném smyslu, vektor \vec{F} směřuje v každém bodě do počátku soustavy souřadnic a jeho velikost je číselně rovna vzdálenosti působíště (bodu umístění vektoru \vec{F}) od počátku soustavy souřadnic,
- r) určete práci silového pole \vec{F} v rovině xy po křivce \mathcal{C} , jíž je úsečka spojující body $B = (a, b, c)$ a $C = (2a, 2b, 2c)$, vektor \vec{F} směřuje v každém bodě do počátku soustavy souřadnic a jeho velikost je nepřímo úměrná vzdálenosti působíště od roviny $z = 0$, $a, b, c > 0$,
- s) určete práci silového pole \vec{F} v \mathbf{R}^3 po křivce \mathcal{C} , jíž je oblouk kružnice o parametrických rovnicích $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ mezi body $M = (1, 1, 0)$ (počáteční bod) a $N = (0, 1, 1)$ (koncový bod), vektor \vec{F} směřuje v každém bodě k ose z a je na ni kolmý, jeho velikost je nepřímo úměrná vzdálenosti působíště od osy z ,
- t) v následujících situacích dokažte konzervativnost zadaných silových polí v rovině xy či prostoru \mathbf{R}^3 (nezávislost práce na tvaru křivky spojující dva zadané body M a N), tuto práci vypočítejte (výpočet proveďte jednak stanovením funkce U , pro niž je $dU = \omega_F^{(1)}$, jednak přímou integrací formy $\omega_F^{(1)}$ po vhodně zvolené křivce spojující body M a N , výsledek nebude záviset na volbě křivky): t1) $\vec{F} = (2\alpha xy, \beta x^2)$ (α a β jsou tzv. rozměrové konstanty, jejichž hodnota je 1, pouze zajišťují správný fyzikální rozměr veličiny, v dalších zadáních je nebudeme uvádět), $M = (1, 0)$, $N = (0, 3)$, t2) $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, $m, g > 0$ jsou konstanty $M = (x_M, y_M, z_M)$, $N = (x_N, y_N, z_N)$, t3) $\vec{F} = \left(-\frac{\mu x}{r^3}, -\frac{\mu y}{r^3}, -\frac{\mu z}{r^3}\right)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mu > 0$, $M = (a, b, c)$, $r_N \rightarrow \infty$, t4) $\vec{F} = -k^2(x, y, z)$, $M = (x_M, y_M, z_M)$, $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = R^2$, $N = (x_N, y_N, z_N)$, $x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 = r^2$, $R > r$, t5) $\vec{F} = \left(-\frac{y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}\right)$, $M = (0, -1)$, $N = (1, 0)$, oblouk neprotíná přímku $y = x$ (zdůvodněte), t6) $\vec{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)$, $M = (0, 0)$, $N = (1, 1)$, t7) $\vec{F} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$, $M = (1, 1, 1)$, $N = (x_0, y_0, 1)$, křivka i body M, N leží v oblasti vymezené nerovnostmi $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Výsledky: a) $\frac{40}{3}$, b) $6\pi a^2$, c) $\frac{1}{3a} \left(4 \ln 2 + \frac{63}{24}\right)$, d) $2\pi ab$, e) všechny tři integrály jsou nulové, f) integrál po křivce \mathcal{C} je $\frac{\pi b}{2a^2}$, integrál po úsečce AB je $\frac{\pi^2 b}{4a^2}$, g) $\alpha = \sqrt{2}$, h) $\frac{ab}{2}$, i) 0, j) $\frac{3}{2}$, k) 0, l) $\frac{3\pi}{16} R^{4/3}$, m) $-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, n) $\frac{4}{3}$, o) $A = -FR$, p1) $A_1 = \frac{4}{3}$, p2) $A_2 = \frac{17}{12}$, p3) $A_3 = \frac{3}{2}$, p4) $A_4 = 1$, q1) $A_1 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$, q2) $A_2 = 0$, r) $-\frac{k}{c} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ln 2$, k je konstanta úměrnosti vystupující ve vyjádření velikosti síly \vec{F} , s) $A = \frac{k}{2} \ln 2$, t1) 0, t2) $mg(z_M - z_N)$, t3) $-\frac{\mu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, pro $\mu = Gm_1m_2$, kde $G \doteq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$ je gravitační konstanta, má tato práce význam gravitační potenciální energie soustavy tvořené částicemi o hmotnostech m_1 a m_2 , t4) $\frac{1}{2}k^2(R^2 - r^2)$, t5) 1, t6) $1 + \sqrt{2}$, t7) $\ln x_0 y_0$.

8. Řešte následující úlohy (plošný integrál druhého druhu). Není-li zadána parametrizace integračního oboru, vhodně ji zvolte. Integrály počítejte přímo (nikoli pomocí Greenovy věty).

- a) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (x^2, y^2, xyz)$ povrchem krychle $[0, 1]^3 \subset \mathbf{R}^3$ orientovaným vnější normálou.
- b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (0, 0, x^2y^2z^2)$ dolní polovinou kulové plochy $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ orientované normálou směřující ven z objemu, který by byl obehnutý celou kulovou plochou.

- c) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y^2, yz)$ pláštěm kužele
 $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2+y^2}{R^2} = \frac{(z-h)^2}{h^2}, 0 \leq z \leq h \right\}$ orientovaného normálou směřující ven z objemu kužele.
- d) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = r^2 \vec{r}$, $\vec{r} = (x, y, z)$, povrchem čtyřstěnu o vrcholech
 $A = (-\frac{a}{6}\sqrt{3}, \frac{a}{2}, 0)$, $B = (-\frac{a}{6}\sqrt{3}, -\frac{a}{2}, 0)$, $C = (\frac{a}{3}\sqrt{3}, 0, 0)$, $D = (0, 0, a\sqrt{\frac{2}{3}})$. Povrch je orientován vnější normálou.
- e) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y, z)$ dolní polovinou kulové plochy o poloměru R , která se dotýká souřadnicové roviny xy v počátku soustavy souřadnic. Plocha je orientována normálou směřující ven z objemu, který obepíná celá kulová plocha.
- f) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (xy, yz, xz)$ povrchem čtyřstěnu určeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$, orientovaného vnější normálou.
- g) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (y - z, z - x, x - y)$ částí kuželové plochy o rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 1$, orientované normálou směřující dovnitř objemu kužele.
- h) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y, z)$ částí roviny o rovnici $x + y + z = a$, kde $a > 0$ je konstanta, v prvním oktantu soustavy souřadnic. Rovina je orientována normálou směřující do poloroviny obsahující počátek soustavy souřadnic.
- i) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ kulovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ orientovanou vnější normálou.
- j) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (xz, x^2y, y^2z)$ částí válcové plochy o rovnici $x^2 + y^2 = 1$ omezené nerovnostmi $x \geq 0$, $y \geq 0$, $1 \geq z \geq 0$ a orientované normálou směřující ven z objemu válce.

Výsledky: a) $\frac{9}{4}$, b) $-\frac{\pi^2 R^8}{96}$, c) $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, d) $-\frac{a^5 \sqrt{2}}{81}$, e) πR^3 , f) $\frac{1}{8}$, g) 0, h) $-\frac{1}{2}a^3$, i) $\frac{12}{5}\pi R^5$, j) $\frac{3}{16}\pi$.

9. Řešte následující úlohy.

- a) Ukažte, že integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

po uzavřené křivce \mathcal{C} , která neprochází počátkem soustavy souřadnic, je nulový. Proč nemá křivka procházet počátkem soustavy souřadnic?

Návod: Ukažte, že integrovaná forma je uzavřená.

- b) Pomocí Greenovy věty vypočítejte integrál z formy $\omega = 3y dx + 5x dy$ po křivce
 $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - x + y^2 = 0, y \geq 0\}$ z bodu $A = (0, 0)$ do bodu $B = (1, 0)$.
- c) Užitím křivkového integrálu vypočítejte obsah rovinné plochy obepnuté (uzavřenou) křivkou $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x + y)^4 = x^2 y\}$.
- Návod:** Pro plošný obsah platí $P = \int_M dx \wedge dy$, kde M je plošný útvar obepnutý křivkou \mathcal{C} . Použijte Greenovu větu, tj. integrujte formu $x dy$ po křivce \mathcal{C} . Položte $t = \frac{y}{x}$. Určete meze proměnné t .
- d) Vypočítejte křivkový integrál z formy $\omega = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2 + z^2}$ po křivce $\mathcal{C} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0 \right\}$, křivka je orientována v kladném smyslu.

Návod: Na křivku \mathcal{C} nelze aplikovat Greenovu větu, neboť forma ω není definována v bodě $O = (0, 0, 0)$. Použijte jednorozměrný singulární řetězec složený z křivky \mathcal{C} a jiné vhodné křivky obepínající bod O tak, abyste se této singularitě vyhnuli.

- e) Vypočtete plošný obsah rovinného útvaru omezeného asteroidou $\mathcal{C} : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow (x\mathcal{C}(t), y\mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^2$,
 $x\mathcal{C}(t) = R \cos^3 t$, $y\mathcal{C}(t) = R \sin^3 t$.

Návod: Obdoba úlohy c).

- f) Vypočtete plošný obsah rovinného útvaru omezeného kardioidou $\mathcal{C} : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow (x\mathcal{C}(t), y\mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^2$,
 $x\mathcal{C}(t) = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y\mathcal{C}(t) = 2a \sin t - a \sin 2t$, $a > 0$ je konstanta.

Návod: Obdoba úlohy c).

- g) Vypočtete plošný obsah rovinného útvaru omezeného smyčkou Descartesova listu

$$\mathcal{C} : [0, \infty) \ni t \rightarrow (x\mathcal{C}(t), y\mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^2,$$

$$x\mathcal{C}(t) = \frac{3at}{1+t^3}, y\mathcal{C}(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}, a > 0 \text{ je konstanta.}$$

Návod: Obdoba úlohy c).

- h) Vypočtete plošný obsah rovinného útvaru omezeného křivkou $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x + y)^2 = x\}$ a osou x .

Návod: Obdoba úlohy c).

- i) Určete hodnotu integrálu z formy $\omega = yz dx + xz dy + xy dz$ po uzavřené křivce.

Návod: Použijte Greenovu větu.

- j) Pomocí Greenovy věty vypočtete integrál z formy $\omega = (x + y) dx + (y - x) dy$ po křivce $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ orientované v kladném smyslu.

- k) Pomocí Greenovy věty vypočtete integrál z formy $(x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ po kladně orientovaném obvodu trojúhelníka s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$.

- l) Vypočtete integrál z formy $x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ po povrchu krychle omezené nerovnostmi $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ a orientované vnější normálou 1) přímým výpočtem, 2) užitím Gaussovy-Ostrogradského věty.

- m) Vypočtete integrál z formy $(y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ po křivce \mathcal{C} , která je průsečnicí ploch o rovnicích $x^2 + y^2 = 1$ a $x + z = 1$. Křivka je při pohledu shora podél osy z orientována kladně. Výpočet proveďte 1) přímo, 2) užitím klasické Stokesovy věty.

Návod: Pomocí polárního úhlu parametrizujte kružnici, která je půdorysným průmětem křivky \mathcal{C} a z jako funkci parametru dopočítejte z rovnice zadané roviny.

- n) Integrály z cvičení 7, které lze počítat užitím integrálních vět, spočtete také tímto způsobem.

Výsledky: a) integrovaná forma není v počátku soustavy souřadnic definována, b) $-\frac{\pi}{4}$, c) $\frac{1}{210}$, d) -2π , e) $P = \frac{3}{8}\pi R^2$, f) $P = 6\pi a^2$, g) $P = \frac{3}{2}a^2$, h) $P = \frac{1}{6}$, i) 0, j) $-2\pi ab$, k) 0, l) 3, m) -4π ,

10. Dokažte, že definice orientace $(m - 1)$ -rozměrné singulární krychle (resp. $(m - 1)$ - rozměrného parametrizovaného kousku plochy) c v \mathbf{R}^m pomocí zobrazení μ a definice orientace pomocí vektorového pole normály jsou ekvivalentní.

11. Parametrizujte následující rovinné (jednoduše souvislé) uzavřené oblasti A jako dvojrozměrné singulární krychle, popřípadě je popište jako dvojrozměrné singulární řetězce. Určete jejich hranice. Parametrizaci volte vždy tak, aby byla souhlasná s orientací hranice v kladném geometrickém smyslu.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 4\}$,

b) A je trojúhelník v \mathbf{R}^2 s vrcholy $O = (0, 0)$, $P = (a, 0)$, $Q = (0, b)$,

c) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$,

- d) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$,
 e) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{x}, \frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$,
 f) A je část množiny omezené křivkami $x = 2$, $y = 2$, $y = x^{-1}$ a osami soustavy souřadnic ležící v prvním kvadrantu,
 g) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq x^{-1}\}$.

Návod: Je-li rovinný útvar ohraničený například křivkami $C_1 : [0, 1] \ni u \rightarrow (xC_1(u), yC_1(u)) \in \mathbf{R}^2$ a $C_2 : [0, 1] \ni u \rightarrow (xC_2(u), yC_2(u)) \in \mathbf{R}^2$, lze jej parametrizovat například takto: $c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \rightarrow c(u, v) = (1-v)C_1(u) + vC_2(u)$. Jsou-li křivkami grafy funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ na intervalu $[a, b]$, je možná parametrizace $c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \rightarrow (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x = a + (b-a)u$, $y = (1-v)f_1(u) + vf_2(u)$.

Výsledky: Ve všech úlohách je $c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \rightarrow (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Parametrizace není jednoznačná, lze volit například: a) $x = a + 2u \cos 2\pi v$, $y = b + 2u \sin 2\pi v$, $\partial c = -(a, b) + (a + 2 \cos 2\pi t, b + 2 \sin 2\pi t) + (a + 2t, b) - (a + 2t, b)$, b) $x = au$, $y = -buv + bv$, $\partial c = -(0, bt) + (at, 0) + (at, 0) - (at, -bt + b)$ (kladně orientovaný obvod trojúhelníka), c) $x = u$, $y = (1-v)u^2 + uv$, $\partial c = -(0, 0) + (1, 1) + (t, t^2) - (t, t)$, d) $x = u$, $y = (1-v)u^2 + v$, $\partial c = -(0, t) + (1, 1) + (t, t^2) - (t, 1)$, e) $x = \frac{1}{2}(1+3u)$, $y = \frac{1}{2}(1-v) + \frac{2v}{1+3u}$, $\partial c = -(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1+3t)) + (2, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}(1+3t), \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}(1+3t), \frac{2}{1+3t})$, f) $\Gamma = c_1 + c_2$, $c_1 : (u, v) \rightarrow (\frac{1}{2}u, 2v)$, c_2 je shodná s parametrizací útvaru z úlohy e), g) $x = a + (b-a)u$, $y = \frac{v}{a+(b-a)u}$, $\partial c = -(a, \frac{t}{a}) + (b, \frac{t}{b}) + (a + (b-a)t, 0) - (a + (b-a)t, \frac{1}{a+(b-a)t})$

12. Parametrizujte následující dvojrozměrné útvary (plochy) S v \mathbf{R}^3 jako dvojrozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^3 , popřípadě je popište jako dvojrozměrné singulární řetězce. Určete jejich hranice. V případě, že je to možné, zvolte orientaci plochy S pomocí spojitého vektorového pole jednotkové normály a parametrizaci volte souhlasnou se zvolenou orientací. Jestliže jste útvar S popsali jako dvojrozměrný singulární řetězec, určete odpovídající vektorové pole jednotkové normály v každém bodě řetězce. Rozhodněte, zda S je orientabilní (tj. zda na všech singulárních krychlích tvořících řetězec je vektorové pole jednotkové normály spojitě, s případnou výjimkou zanedbatelné množiny).

- a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$,
 b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - \frac{R^2}{h^2}z^2 = 0, 0 \leq z \leq h\}$,
 c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$,
 d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, (x, y) \in [0, 1]^2\}$,
 e) S je část roviny o rovnici $x + y + z = 1$ v prvním oktantu soustavy souřadnic,
 f) S je část plochy o rovnici $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ omezená rovinami $z = -1$, $z = 1$, $x = 0$ a $y = 0$,
 g) S je povrch čtyřstěnu omezeného rovinou $x + y + z = 1$ a souřadnicovými rovinami,
 h) S je plášť jehlanu o obdélníkové podstavě se stranami $2a$ a $2b$ ležící v souřadnicové rovině xy , střed podstavy splývá s počátkem soustavy souřadnic, vrchol jehlanu má souřadnice $V = (0, 0, h)$,
 i) S je povrch jehlanu z úlohy h),
 j) S je plášť komolého jehlanu, jehož dolní podstava je dána úlohou h), horní podstava má rozměry a a b a její střed leží na ose z , výška jehlanu je $\frac{h}{2}$,
 k) S je povrch jehlanu z úlohy j),
 l) S je plášť kužele, jehož podstava leží v rovině xy a je omezena elipsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a vrchol má souřadnice $V = (0, 0, h)$,
 m) S je povrch kužele z úlohy l),

- n) S je plášť komolého kužele, jehož dolní podstava leží v rovině xy a je omezena elipsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, jeho horní podstava je ve výšce $\frac{h}{2}$ a vrchol celého kužele je $V = (0, 0, h)$,
- o) S je povrch útvaru vzniklého rotací kruhu omezeného kružnicí o rovnici $(x - R)^2 + z^2 = r^2$ (ležící původně v rovině xz), $0 < r < R$, kolem osy z ,
- p) S je útvar vzniklý rotací půlkružnice z úlohy o) ležící původně v horní polorovině souřadnicové roviny xz .

Výsledky: Ve všech úlohách je $c : [0, 1]^2 \ni (u, v) \rightarrow (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Parametrizace není jednoznačná, jsou i jiné možnosti parametrizace, než zde uvedené. Pořadí parametrů je u (první parametr), v (druhý parametr), parametrizace je volena tak, aby byla souhlasná s vektorovým polem normály určujícím orientaci útvaru. U uzavřených útvarů je volena orientace vnější normálou. Pro hranici platí $\partial c = \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$. Ve výsledcích jsou uváděny pouze jednotlivé stěny, které jsou jednorozměrnými singulárními krychlemi. Vždy si uvědomte, o jaké křivky jde a jak jsou orientovány.

- a) $x = R \sin \pi u \cos 2\pi v$, $y = R \sin \pi u \sin 2\pi v$, $z = R \cos \pi u$, $c_{(1,0)}(t) = (0, 0, R)$, $c_{(1,1)}(t) = (0, 0, -R)$,
 $c_{(2,0)} = (R \sin \pi t, 0, R \cos \pi t)$,
 $c_{(2,1)}(t) = (R \sin \pi t, 0, R \cos \pi t)$, $\partial c = 0$, $\vec{n}(u, v) = (\sin \pi u \cos 2\pi v, \sin \pi u \sin 2\pi v, \cos \pi u)$,
- b) $x = vR \cos 2\pi u$, $y = vR \sin 2\pi u$, $z = hv$, $c_{(1,0)}(t) = (Rt, 0, ht)$, $c_{(1,1)}(t) = (Rt, 0, ht)$, $c_{(2,0)}(t) = (0, 0, 0)$,
 $c_{(2,1)}(t) = (R \cos 2\pi t, R \sin 2\pi t, h)$, $\vec{n}(u, v) = \left(\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \cos 2\pi u, \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \sin 2\pi u, -\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \right)$
pro $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$,
- c) $x = \cos 2\pi u$, $y = \sin 2\pi u$, $z = -1 + 2v$, $c_{(1,0)}(t) = (1, 0, -1 + 2t)$, $c_{(1,1)}(t) = (1, 0, -1 + 2t)$, $c_{(2,0)}(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, -1)$,
 $c_{(2,1)}(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 1)$, $\vec{n}(u, v) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, 0)$,
- d) $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2$, $c_{(1,0)}(t) = (0, t, t^2)$, $c_{(1,1)}(t) = (1, t, 1 + t^2)$, $c_{(2,0)}(t) = (t, 0, t^2)$, $c_{(2,1)}(t) = (t, 1, 1 + t^2)$,
 $\vec{n}(u, v) = \left(-\frac{2u}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}, -\frac{2v}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \right)$,
- e) $x = u$, $y = v(1 - u)$, $1 - u - v + uv$, $c_{(1,0)}(t) = (0, t, 1 - t)$, $c_{(1,1)}(t) = (1, 0, 0)$, $c_{(2,0)}(t) = (t, 0, 1 - t)$,
 $c_{(2,1)}(t) = (t, 1 - t, 0)$, $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$,
- f) $x = a \cos \frac{\pi u}{2}$, $y = b \sin \frac{\pi u}{2}$, $z = -1 + 2v$, $c_{(1,0)}(t) = (a, 0, -1 + 2t)$, $c_{(1,1)}(t) = (0, b, -1 + 2t)$, $c_{(2,0)}(t) = (a \cos \frac{\pi t}{2}, b \sin \frac{\pi t}{2}, -1)$,
 $c_{(2,1)}(t) = (a \cos \frac{\pi t}{2}, b \sin \frac{\pi t}{2}, 1)$,
 $\vec{n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{b^2 \cos^2 \frac{\pi u}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\pi u}{2}}} \left(b \cos \frac{\pi u}{2}, a \sin \frac{\pi u}{2}, 0 \right)$,
- g) jedná se o dvojrozměrný singulární řetězec $\Gamma = c^{(0)} + c^{(1)} + c^{(2)} + c^{(3)}$, $c^{(0)}$ je útvar z úlohy e), $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, $c^{(3)}$ jsou postupně trojúhelníkové stěny čtyřstěnu kolmé na osu x , y a z . Jejich parametrizace jsou $c^{(1)}(u, v) = (0, 1 - u, uv)$, normála $\vec{n}^{(1)} = (-1, 0, 0)$, $c^{(2)}(u, v) = (u, 0, v(1 - u))$, normála $\vec{n}^{(2)} = (0, -1, 0)$, $c^{(3)}(u, v) = (1 - u, uv, 0)$, normála $\vec{n}^{(3)} = (0, 0, -1)$, $c_{(1,0)}^{(1)}(t) = (0, 1, 0)$, $c_{(1,1)}^{(1)}(t) = (0, 0, t)$,
 $c_{(2,0)}^{(1)}(t) = (0, 1 - t, 0)$, $c_{(2,1)}^{(1)}(t) = (0, 1 - t, t)$, $c_{(1,0)}^{(2)}(t) = (0, 0, t)$, $c_{(1,1)}^{(2)}(t) = (1, 0, 0)$, $c_{(2,0)}^{(2)}(t) = (t, 0, 0)$,
 $c_{(2,1)}^{(2)}(t) = (t, 0, 1 - t)$, $c_{(1,0)}^{(3)}(t) = (1, 0, 0)$, $c_{(1,1)}^{(3)}(t) = (0, t, 0)$, $c_{(2,0)}^{(3)}(t) = (1 - t, 0, 0)$, $c_{(2,1)}^{(3)}(t) = (1 - t, t, 0)$,
- h) jedná se o dvojrozměrný singulární řetězec $\Gamma = c^{(1)} + c^{(2)} + c^{(3)} + c^{(4)}$, formální součet jednotlivých parametrizací trojúhelníkových útvarů tvořících plášť jehlanu; uvedeme pouze parametrizaci $c^{(1)}$ trojúhelníka s vrcholy $(a, -b, 0)$, $(a, b, 0)$, $(0, 0, h)$, ostatní jsou analogické: $c^{(1)}(u, v) = (au, -bu + 2buv, h(1 - u))$, $c_{(1,0)}^{(1)}(t) = (0, 0, h)$, $c_{(1,1)}^{(1)}(t) = (a, -b + 2bt, 0)$, $c_{(2,0)}^{(1)}(t) = (at, -bt, h(1 - t))$,
 $c_{(2,1)}^{(1)}(t) = (at, bt, h(1 - t))$, normála $\vec{n}^{(1)} = \left(\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}} \right)$,

- i) k parametrizacím z úlohy h) přibude ještě parametrizace podstavy $c^{(0)}(u, v) = (-a + 2av, -b + 2bv, 0)$,
 $c_{(1,0)}^{(0)}(t) = (-a + 2at, -b, 0)$, $c_{(1,1)}^{(0)}(t) = (-a + 2at, b, 0)$, $c_{(2,0)}^{(0)}(t) = (-a, -b + 2bt, 0)$, $c_{(2,1)}^{(0)}(t) = (a, -b + 2bt, 0)$, normála $\vec{n} = (0, 0, -1)$,
- j) jedná se o dvojrozměrný singulární řetězec $\Gamma = c^{(1)} + c^{(2)} + c^{(3)} + c^{(4)}$, formální součet jednotlivých parametrizací lichoběžníkových útvarů tvořících plášť jehlanu; uvedeme pouze parametrizaci $c^{(1)}$ lichoběžníka s vrcholy $(a, -b, 0)$, $(a, b, 0)$, $(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, \frac{h}{2})$, $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$, ostatní jsou analogické: $c^{(1)}(u, v) = (\frac{a}{2}(1+u), \frac{b}{2}(-1-u+2v+2uv), \frac{h}{2}(1-u))$, $c_{(1,0)}^{(1)}(t) = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}(-1+2t), \frac{h}{2})$,
 $c_{(1,1)}^{(1)}(t) = (a, b(-1+2t), 0)$, $c_{(2,0)}^{(1)}(t) = (\frac{a}{2}(1+t), -\frac{b}{2}(1+t), \frac{h}{2}(1-t))$,
 $c_{(2,1)}^{(1)}(t) = (\frac{a}{2}(1+t), \frac{b}{2}(1+t), \frac{h}{2}(1-t))$, normála $\vec{n}^{(1)} = (\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}})$,
- k) viz úlohu j), připojit parametrizace podstav,
 l) $x = au \cos 2\pi v$, $y = bu \sin 2\pi v$, $z = h(1-u)$, $c_{(1,0)}(t) = (0, 0, h)$, $c_{(1,1)}(t) = (a \cos 2\pi t, b \sin 2\pi t, 0)$,
 $c_{(2,0)}(t) = (at, 0, h(1-t))$, $c_{(2,1)}(t) = (at, 0, h(1-t))$,
 normála $\vec{n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{h^2 b^2 \cos^2 2\pi v + h^2 a^2 \sin^2 2\pi v + a^2 b^2}}(hb \cos 2\pi v, ha \sin 2\pi v, ab)$,
- m) připojit parametrizaci podstavy $x = av \cos 2\pi u$, $y = bv \sin 2\pi u$, $z = 0$, $c_{(1,0)}(t) = (at, 0, 0)$, $c_{(1,1)}(t) = (at, 0, 0)$,
 $c_{(2,0)}(t) = (0, 0, 0)$, $c_{(2,1)}(t) = (a \cos 2\pi t, b \sin 2\pi t, 0)$, normála $\vec{n} = (0, 0, -1)$,
- n) postupujte analogicky jako u komolého jehlanu s využitím úlohy m),
 o) $x = (R+r \cos 2\pi v) \cos 2\pi u$, $y = (R+r \cos 2\pi v) \sin 2\pi u$, $z = r \sin 2\pi v$,
 $c_{(1,0)}(t) = (R+r \cos 2\pi t, 0, r \sin 2\pi t)$, $c_{(1,1)}(t) = (R+r \cos 2\pi t, 0, r \sin 2\pi t) = c_{(1,0)}(t)$, $c_{(2,0)}(t) = ((R+r) \cos 2\pi t, (R+r) \sin 2\pi t, 0)$,
 $c_{(2,1)}(t) = ((R+r) \cos 2\pi t, (R+r) \sin 2\pi t, 0) = c_{(2,0)}(t)$, $\partial c = 0$,
 $\vec{n}(u, v) = (\cos 2\pi v \cos 2\pi u, \cos 2\pi v \sin 2\pi u, \sin 2\pi v)$,
- p) $x = (R+r \cos \pi v) \cos 2\pi u$, $y = (R+r \cos \pi v) \sin 2\pi u$, $z = r \sin \pi v$, $c_{(1,0)}(t) = (R+r \cos \pi t, 0, r \sin \pi t)$,
 $c_{(1,1)}(t) = (R+r \cos 2\pi t, 0, r \sin \pi t) = c_{(1,0)}(t)$, $c_{(2,0)}(t) = ((R+r) \cos 2\pi t, (R+r) \sin 2\pi t, 0)$, $c_{(2,1)}(t) = ((R-r) \cos 2\pi t, (R-r) \sin 2\pi t, 0)$,
 $\vec{n}(u, v) = (\cos \pi v \cos 2\pi u, \cos \pi v \sin 2\pi u, \sin \pi v)$,

13. Parametrizujte následující prostorové (jednoduše souvislé) uzavřené oblasti V jako trojrozměrné singulární krychle v \mathbf{R}^3 , popřípadě je popište jako trojrozměrné singulární řetězce. Určete jejich hranice. Určete složky vnější jednotkové normály a zjistěte, zda je kompatibilní se zvolenou parametrizací.

- a) V je oblast omezená plochami o rovnicích $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $z = h$, kde h a R jsou kladné konstanty,
- b) V je oblast omezená plochami o rovnicích $z = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$, $z = c$,
- c) $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}$,
- d) V je útvar popsáný v úloze o) cvičení 12 (tzv *anuloid*),
- e) V je útvar popsáný v úloze p) cvičení 12,
- f) V je koule o poloměru R se středem v bodě $C = (x_0, y_0, z_0)$,
- g) V je elipsoid s poloosami a, b, c a středem umístěným v bodě $C = (x_0, y_0, z_0)$,
- h) V je dutý válec o poloměrech r a R , $r < R$, jeho osou je osa z , jedna z jeho podstav leží v rovině $z = -h$ a druhá v rovině $z = h$,
- i) $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq h\}$,

- j) V je čtyřstěn omezený rovinou $x + 2y + 3z - 6 = 0$ a rovinami soustavy souřadnic,
 k) V je jehlan o čtvercové podstavě $[-a, a]^2$ (ležící v souřadnicové rovině xy s vrcholem o souřadnicích $(0, 0, v)$).

Výsledky: trojrozměrné singulární krychle jsou popsány zobrazeními $c: [0, 1]^3 \ni (u, v, w) \rightarrow (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, stěny jsou parametrizovány parametry t^1 a t^2 , normály k plochám obepínajícím objemové útvary jsou vždy jednotkové a vnější.

- a) $x = Ru \cos 2\pi v$, $y = Ru \sin 2\pi v$, $z = h(1 - w)u + wh$, $c_{(1,0)}(t^1, t^2) = (0, 0, ht^2)$, $c_{(1,1)}(t^1, t^2) = (R \cos 2\pi t^1, R \sin 2\pi t^1, h)$, $c_{(2,0)}(t^1, t^2) = (Rt^1, 0, h(1 + t^2 - t^1 t^2))$, $c_{(2,1)}(t^1, t^2) = (Rt^1, 0, h(1 + t^2 - t^1 t^2)) = c_{(2,0)}$, $c_{(3,0)}(t^1, t^2) = (Rt^1 \cos 2\pi t^2, Rt^1 \sin 2\pi t^2, ht^1)$,
 $c_{(3,1)}(t^1, t^2) = (Rt^1 \cos 2\pi t^2, Rt^1 \sin 2\pi t^2, h)$, jednotková vnější normála ke stěně $c_{(3,0)}$ je $\vec{n}_{(3,0)} = \left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \cos 2\pi t^2, \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \sin 2\pi t^2, -\frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right)$, ke stěně $c_{(3,1)}$ je $\vec{n}_{(3,1)} = (0, 0, 1)$,
- b) $x = au \cos 2\pi v$, $y = bu \sin 2\pi v$, $z = (1 - w)cu^2 + wc$, $c_{(1,0)}(t^1, t^2) = (0, 0, ct^2)$, $c_{(1,1)}(t^1, t^2) = (a \cos 2\pi t^1, b \sin 2\pi t^1, c)$, $c_{(2,0)}(t^1, t^2) = (at^1, 0, c(1 - t^2)(t^1)^2 + ct^2)$, $c_{(2,1)}(t^1, t^2) = (at^1, 0, c(1 - t^2)(t^1)^2 + ct^2) = c_{(2,0)}$, $c_{(3,0)}(t^1, t^2) = (at^1 \cos 2\pi t^2, bt^1 \sin 2\pi t^2, c(t^1)^2)$,
 $c_{(3,1)}(t^1, t^2) = (at^1 \cos 2\pi t^2, bt^1 \sin 2\pi t^2, c)$,
 $\vec{n}_{(3,0)} = \frac{(2bet^1 \cos 2\pi t^2, 2act^1 \sin 2\pi t^2, -ab)}{\sqrt{4b^2c^2(t^1)^2 \cos^2 2\pi t^2 + 4a^2c^2(t^1)^2 \sin^2 2\pi t^2 + a^2b^2}}$, $\vec{n}_{(3,1)} = (0, 0, 1)$,
- c) $x = Ru \cos 2\pi v$, $y = Ru \sin 2\pi v$, $z = (1 - w)hu + w(h + R\sqrt{1 - u^2})$, $c_{(1,0)}(t^1, t^2) = (0, 0, (h + R)t^2)$,
 $c_{(1,1)}(t^1, t^2) = (R \cos 2\pi t^1, R \sin 2\pi t^1, h)$, $c_{(2,0)}(t^1, t^2) = (Rt^1, 0, ht^1(1 - t^2) + t^2(h + R\sqrt{1 - (t^1)^2}))$,
 $c_{(2,1)}(t^1, t^2) = c_{(2,0)}(t^1, t^2)$, $c_{(3,0)}(t^1, t^2) = (Rt^1 \cos 2\pi t^2, Rt^1 \sin 2\pi t^2, ht^1)$,
 $c_{(3,1)}(t^1, t^2) = (Rt^1 \cos 2\pi t^2, Rt^1 \sin 2\pi t^2, h + R\sqrt{1 - (t^1)^2})$,
 $\vec{n}_{(3,0)} = \left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \cos 2\pi t^2, \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \sin 2\pi t^2, -\frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right)$,
 $\vec{n}_{(3,1)} = (t^1 \cos 2\pi t^2, t^1 \sin 2\pi t^2, \sqrt{1 - (t^1)^2})$,
- d) v úloze 12 o) nahradte konstantu r proměnným parametrem w , hranicí je útvar z úlohy 12o), stejná je i normála,
- e) v úloze 12p) nahradte konstantu r proměnným parametrem w , hranicí tvoří jednak útvar z úlohy 12p) orientovaný normálou rovněž z úlohy 12p), jednak mezikružší v rovině xy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměry r , R s normálou $\vec{n} = (0, 0, -1)$,
- f) $x = x_0 + Ru \sin \pi v \cos 2\pi w$, $y = y_0 + Ru \sin \pi v \sin 2\pi w$, $z = z_0 + Ru \cos \pi v$, $c_{(1,0)}(t^1, t^2) = (x_0, y_0, z_0)$,
 $c_{(1,1)}(t^1, t^2) = (x_0 + R \sin \pi t^1 \cos 2\pi t^2, R \sin \pi t^1 \sin 2\pi t^2, z_0 + R \cos \pi t^1)$, $c_{(2,0)}(t^1, t^2) = (x_0, y_0, z_0 + Rt^1)$,
 $c_{(2,1)}(t^1, t^2) = (x_0, y_0, z_0 - Rt^1)$, $c_{(3,0)}(t^1, t^2) = (x_0 + Rt^1 \sin \pi t^2, y_0, z_0 + rt^1 \cos \pi t^2)$, $c_{(3,1)}(t^1, t^2) = (x_0 + Rt^1 \sin \pi t^2, y_0 + Rt^1 \sin \pi t^2, z_0 + Rt^1 \cos \pi t^2) = c_{(3,0)}(t^1, t^2)$,
 $\vec{n}_{(1,0)} = (\sin \pi t^1 \cos 2\pi t^2, \sin \pi t^1 \sin 2\pi t^2, \cos \pi t^1)$,
- g) $x = x_0 + au \sin \pi v \cos 2\pi w$, $y = y_0 + bu \sin \pi v \sin 2\pi w$, $z = z_0 + cu \cos \pi v$, dále postupujte analogicky jako u úlohy f),
- h) $x = (r + (R - r)u) \cos 2\pi v$, $y = (r + (R - r)u) \sin 2\pi v$, $z = -h + 2hw$, $c_{(1,0)}(t^1, t^2) = (r \cos 2\pi t^1, r \sin 2\pi t^1, -h + 2ht^2)$,
 $c_{(1,1)}(t^1, t^2) = (R \cos 2\pi t^1, R \sin 2\pi t^1, -h + 2ht^2)$, $c_{(2,0)}(t^1, t^2) = (r + (R - r)t^1, 0, -h + 2ht^2)$,
 $c_{(2,1)}(t^1, t^2) = (r + (R - r)t^1, 0, -h + 2ht^2) = c_{(2,0)}(t^1, t^2)$, $c_{(3,0)}(t^1, t^2) = ((r + (R - r)t^1) \cos 2\pi t^2, (r + (R - r)t^1) \sin 2\pi t^2, -h)$,
 $c_{(3,1)}(t^1, t^2) = ((r + (R - r)t^1) \cos 2\pi t^2, (r + (R - r)t^1) \sin 2\pi t^2, h)$, $\vec{n}_{(1,0)} = (-\cos 2\pi t^1, -\sin 2\pi t^1, 0)$,
 $\vec{n}_{(1,1)} = (\cos 2\pi t^1, \sin 2\pi t^1, 0)$, $\vec{n}_{(3,0)} = (0, 0, -1)$, $\vec{n}_{(3,1)} = (0, 0, 1)$,
- i) viz úlohu b) pro $a = b = 1$, $c = h$,

j) upravte rovnici na úsekový tvar $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$, přidejte třetí parametr a zobecněte výsledky úlohy 12 g) nebo 12 h),

k) přidejte třetí parametr a využijte výsledky úlohy 12 h).

14. Vraťte se k příkladu o Torricelliho trychtýři (příklad 12.120).

a) Reprodukujte výpočet objemu a pláště trychtýře na úseku $x \in [a, b]$ při parametrizaci objemu

$$V : [a, b] \times [0, 1] \times [0, 2\pi] \ni (u, v, w) \longrightarrow (xV(u, v, w), yV(u, v, w), zV(u, v, w)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$\begin{aligned} x &= xV(u, v, w) = u, \\ y &= yV(u, v, w) = \frac{v}{u} \cos w, \\ z &= zV(u, v, w) = \frac{v}{u} \sin w. \end{aligned}$$

a odpovídající parametrizaci pláště (stačí položit $v = 1$). Nedivte se, že výsledky budou stejné.

b) Zvolte parametrizaci objemu na úseku $x \in [a, b]$ jako trojrozměrné singulární krychle ve tvaru

$$V : [0, 1]^3 \ni (u, v, w) \longrightarrow (xV(u, v, w), yV(u, v, w), zV(u, v, w)) \in \mathbf{R}^3,$$

$$\begin{aligned} x &= xV(u, v, w) = \frac{ab}{a + (b-a)u}, \\ y &= yV(u, v, w) = \frac{v[a + (b-a)u]}{ab} \cos 2\pi w, \\ z &= zV(u, v, w) = \frac{v[a + (b-a)u]}{ab} \sin 2\pi w, \end{aligned}$$

nebo pro $b \rightarrow \infty$ rovnou

$$\begin{aligned} x &= xV(u, v, w) = \frac{a}{u}, \\ y &= yV(u, v, w) = \frac{uv}{a} \cos 2\pi w, \\ z &= zV(u, v, w) = \frac{uv}{a} \sin 2\pi w \end{aligned}$$

a znovu vyjádřete a počítejte objem trychtýře a obsah jeho pláště.

c) Kterýmkoli ze způsobů použitých v příkladu 12.120 či v částech a) a b) tohoto cvičení vypočítejte polohu středu hmotnosti trychtýře V a jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose x . Totéž proveďte pro jeho plášť S .

Výsledky: objemový útvar: $m = sV = \pi s \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \rightarrow \frac{s\pi}{a}$ pro $b \rightarrow \infty$, $x_T = \frac{ab}{b-a} \ln \frac{b}{a} \rightarrow \infty$ pro $b \rightarrow \infty$, $J_x = \frac{\pi s}{6} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) \rightarrow \frac{\pi s}{6a^2}$ pro $b \rightarrow \infty$, plášť: $m \rightarrow \infty$, $x_T \rightarrow \infty$, $J_x \rightarrow \infty$.

15. Převedte integrál $\int_S f \operatorname{grad} g \, d\vec{S}$, kde S je hladká uzavřená plocha obepínající objem V a orientovaná vnější

normálou \vec{n} ($d\vec{S} = \vec{n} \, dS$) a f, g jsou spojitě diferencovatelné funkce definované na otevřené množině obsahující V , na integrál s integračním oborem V (Gaussova-Ostrogradského věta).

Výsledek: $\int_V (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f \Delta g) \, dV$, Δ je Laplaceův operátor.

16. Vypočtěte následující křivkové integrály prvního druhu po rovinných křivkách. Objemový element (element délky) je značen dl . Není-li uvedena parametrizace křivky, parametrizujte ji buď jako jednorozměrnou singularní krychli, resp. řetězec, nebo pomocí parametrizace lépe odpovídající přirozenému oboru parametrů (například úhel v polárních souřadnicích může být vyjádřen buď jako $2\pi u$, kde $u \in [0, 1]$, nebo může být přímo parametrem $\varphi \in [0, 2\pi]$). Výsledek integrace nebude na parametrizaci záviset. Některé integrály mohou být nevlastní.

- $\int_C xy \, dl$, $C = \partial A$, $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leq a\}$, $a > 0$ je konstanta,
- $\int_C \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, kde C je úsečka spojující body $O = (0, 0)$ a $A = (1, 2)$,
- $\int_C xy \, dl$, kde C je čtvrtina elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ v prvním kvadrantu soustavy souřadnic,
- $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} \, dl$, kde C je *evolventa kružnice*, parametrizovaná rovnicemi $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $a > 0$ je konstanta, $t \in [0, 2\pi]$,
- $\int_C y^2 \, dl$, C je prvý oblouk cykloidy o parametrických rovnicích $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ je konstanta, $t \in [0, 2\pi]$,
- $\int_C (x^2 + y^2)^2 \, dl$, C je oblouk *logaritmické spirály* $\varrho = a \exp(m\varphi)$, $a, m > 0$, mezi body $A = (a, 0)$ a $O = (0, 0)$, ϱ a φ jsou polární souřadnice,
- $\int_C (x + y) \, dl$, C je pravý list *lemniskaty* $\varrho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, ϱ a φ jsou polární souřadnice.
- $\int_C xy \, dl$, C je oblouk kružnice $x^2 + y^2 = R^2$ v prvním kvadrantu soustavy souřadnic, výsledek porovnejte s výsledkem části c) této úlohy,
- $\int_C x \, dl$, C je křivka o kartézské rovnici $y = \frac{3}{8}x^2$, $x \in [0, 4]$.

Výsledky: a) 0, b) $\ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, c) $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$, d) $\frac{a^2}{3} [(1+4\pi^2)^{3/2} - 1]$, e) $\frac{256}{15}a^3$, f) $-\frac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$, g) $a^2\sqrt{2}$, h) $\frac{1}{2}R^3$, i) $\frac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.

17. Vypočtěte následující křivkové integrály prvního druhu po prostorových křivkách v \mathbf{R}^3 . Objemový element (element délky) je značen dl . Není-li uvedena parametrizace křivky, parametrizujte ji buď jako jednorozměrnou singularní krychli, resp. řetězec, nebo pomocí parametrizace lépe odpovídající přirozenému oboru parametrů (viz komentář k úloze 16). Některé integrály mohou být nevlastní.

- $\int_C \frac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, C je oblouk šroubovice parametrizované rovnicemi $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $a, b > 0$ jsou konstanty, $t \in [0, 2\pi]$,
- $\int_C yz \, dl$, C je oblouk šroubovice z části a) této úlohy,
- $\int_C (x + z) \, dl$, křivka C je parametrizována rovnicemi $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$, $t \in [0, 1]$,
- $\int_C \sqrt{2y^2 + z^2} \, dl$, C je průsečnice ploch $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ a $x - y = 0$,
- $\int_C dl$, C je oblouk *kuželové šroubovice* $x = a e^t \cos t$, $y = a e^t \sin t$, $z = a e^t$, $a > 0$ je konstanta, mezi body $O = (0, 0, 0)$ a $A = (a, 0, a)$,

- f) $\int_C \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}} dl$, C je křivka o rovnici $y^2 = 2px$, $y \in [0, p]$,
- g) $\int_C xy dl$, C je obvod obdélníka $OABC$, $O = (0, 0)$, $A = (4, 0)$, $B = (4, 2)$, $C = (0, 2)$,
- h) $\int_C xy dl$, C je oblouk hyperboly $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, $0 < t < \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} 4$,
- i) $\int_C (x+y) dl$, C je obvod trojúhelníka ABC v souřadnicové rovině xy , $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$,
- j) $\int_C x^2 dl$, C je kružnice v \mathbf{R}^3 , vzniklá jako průsečnice ploch $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a $x + y + z = 0$,
- k) $\int_C \left(R + \frac{x^2}{R}\right) dl$, kde C je kružnice v rovině xy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R ; ukažte, že hodnota integrálu je číselně rovna obsahu části pláště válce $x^2 + y^2 = R^2$ ohraničené rovinou $z = 0$ a plochou $z = R + \frac{x^2}{R}$.

Výsledky: a) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \operatorname{arctg} \frac{2\pi b}{a}$, b) $-2\pi ab\sqrt{a^2+b^2}$, c) $\frac{56\sqrt{7}-1}{54}$, d) $2\pi a^2$, e) $a\sqrt{3}$, f) $\sqrt{\frac{2p^5}{a}} \frac{1+\sqrt{2}}{30}$, g) 24, h) $\frac{7}{6}$, i) $1 + \sqrt{2}$, j) $\frac{2}{3}\pi R^3$, k) $3\pi R^2$.

18. Vypočítejte určené geometrické a fyzikální charakteristiky drátů (drát je popsán křivkou C). Není-li řečeno jinak, považujte drát za homogenní a jeho lineární hustotu berte pro jednoduchost jako jednotkovou, $s(x, y) = 1$ (rovinné dráty), resp. $s(x, y, z) = 1$ (prostorové dráty). Rozměrové konstanty (veličiny jednotkové hodnoty sloužící pouze k zajištění správného fyzikálního rozměru) nevypisujeme, podobně jako v úlohách o práci silových polí.

- a) statický moment $M_x = \int_C y dl$ vzhledem k ose x , C je polovina elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ležící v horní polorovině soustavy souřadnic,
- b) poloha středu hmotnosti půlkružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R ležící horní polorovině soustavy souřadnic,
- c) hmotnost, polohu středu hmotnosti a moment setrvačnosti vzhledem k ose x jednoho oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$,
- d) souřadnice středu hmotnosti poloviny oblouku cykloidy z části c) této úlohy, tj. $t \in [0, \pi]$,
- e) hmotnost elipsy C o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, jejíž lineární hustota je dána funkcí $s(x, y) = |y|$,
- f) momenty setrvačnosti prvního závitu šroubovice C o parametrických rovnicích $a = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$, vzhledem k souřadnicovým osám x , y a z ,
- g) hmotnost prvního závitu šroubovice z části f) této úlohy, je-li lineární hustota v daném bodě úměrná vzdálenosti tohoto bodu od počátku soustavy souřadnic,
- h) hmotnost a polohu středu hmotnosti oblouku křivky o kartézské rovnici $y = \frac{a^2-x^2}{2a}$, $a > 0$ je konstanta, ležícího v horní polorovině soustavy souřadnic,
- i) moment setrvačnosti kružnice o poloměru R vzhledem k jejímu průměru,
- j) hmotnost oblouku Archimédovy spirály $\varrho = a\varphi$, $a > 0$, s lineární hustotou $s = \alpha\varphi$, $\alpha > 0$, $\varphi \in [0, 2n\pi]$, $n \in \mathbf{Z}$,
- k) délku hladké křivky C , jejíž rovnice v polárních souřadnicích je $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ (odvoďte obecný vztah pro výpočet této délky pomocí integrálu podle proměnné φ),
- l) polohu středu hmotnosti kardioidy $\varrho = a(1 - \cos \varphi)$, $a > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$,

362 KAPITOLA 12. INTEGRACE VŠEHO DRUHU PŘINESE NÁM DUCHA VZPRUHU

- m) statický moment poloviny lemniskáty $\varrho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ vzhledem k ose y , tj. integrál $M_y = \int_C x \, dl$,
- n) hmotnost prvního závitu šroubovice z části f) této úlohy, je-li lineární hustota popsána funkcí $s(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)$,
- o) délku oblouku kuželové šroubovice C o parametrických rovnicích $x = a e^t \cos t$, $y = a e^t \sin t$, $z = a e^t$, $a > 0$ je konstanta, mezi body $O = (0, 0, 0)$ a $B = (a, 0, a)$.

Výsledky: a) $M_x = b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ pro $a > b$, $M_x = b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$, pro $b > a$ b) $x_T = 0$, $y_T = \frac{2R}{\pi}$, c) $m = 8a$, $x_T = \pi a$, $y_T = \frac{4a}{3}$, $J_x = \frac{256}{15} a^3$, d) $x_T = \frac{4}{3} a$, $y_T = \frac{4}{3} a$ e) $m = 2 \left(b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)$, f) $J_x = J_y = \pi \sqrt{R^2 + b^2} (R^2 + \frac{8}{3} \pi^2 b^2)$, $J_z = 2\pi R^2 \sqrt{R^2 + b^2}$, g) $m = \sqrt{R^2 + b^2} \left(\pi \sqrt{R^2 + 4\pi^2 b^2} + \frac{R^2}{2b} \ln \frac{2\pi b + \sqrt{R^2 + 4\pi^2 b^2}}{R} \right)$, h) $m = a[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$, $x_T = 0$, $y_T = \frac{a}{8} \frac{\sqrt{2} + 5 \ln(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}$, i) $J = \pi R^3$, j) $m = \frac{1}{3} \alpha a [(1 + 4\pi^2 n^2)^{3/2} - 1]$, k) $l(C) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + f^2(\varphi)} \, d\varphi$, l) $x_T = -\frac{4}{5} a$, $y_T = 0$, m) $M_y = \sqrt{2}$, n) $m = \sqrt{R^2 + b^2} (2\pi R^2 + \frac{8}{3} \pi^3 b^2)$, o) $l = a\sqrt{3}$.

19. Vypočítejte plošné integrály prvního druhu. V případě, že parametrizace plochy S není zadána, parametrizujte plochu vhodným způsobem, popřípadě jako dvojrozměrnou singulární krychli, resp. dvojrozměrný singulární řetězec v \mathbf{R}^3 .

- a) $\int_S xy \, dS$, S je část roviny $x + y + z = 1$ ležící v prvním oktantu soustavy souřadnic $\langle O; x, y, z \rangle$,
- b) $\int_S dS$, S je část kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 = Rx$, $z > 0$ (hodnota integrálu je rovna obsahu plochy S),
- c) $\int_S dS$, S je část hyperbolické paraboloidální plochy $z = xy$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 = 1$ a omezená nerovnostmi $x > 0$, $y > 0$, (hodnota integrálu je rovna obsahu plochy S),
- d) $\int_S xy \, dS$, S je část rotační paraboloidální plochy $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$, $a > 0$, ležící v prvním oktantu soustavy souřadnic a současně uvnitř válce $x^2 + y^2 = R^2$,
- e) $\int_S xyz \, dS$, S je trojúhelník o vrcholech $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$,
- f) $\int_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, S je povrch čtyřstěnu o vrcholech $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$,
- g) $\int dS$, S je povrch anuloidu vzniklého rotací kružnice $(x - R)^2 + z^2 = r^2$, $R > r > 0$, kolem osy z , (hodnota integrálu je rovna obsahu povrchu), pokuste se získat hodnotu obsahu povrchu pomocí jednoduché geometrické úvahy bez integrování.

Výsledky: a) $\frac{\sqrt{3}}{24}$, b) $R^2(\pi - 2)$, c) $\frac{\pi}{6}(\sqrt{8} - 1)$, d) $\frac{a^4}{30} \left[\left(\frac{3R^2}{a^2} - 2 \right) \left(1 + \frac{R^2}{a^2} \right)^{3/2} + 2 \right]$, e) $\frac{\sqrt{3}}{120}$, f) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1) \ln 2$, g) $4\pi^2 r R$.

20. Vypočítejte předepsané geometrické a fyzikální charakteristiky plošných útvarů. V případě, že parametrizace plochy S není zadána, parametrizujte plochu vhodným způsobem, popřípadě jako dvojrozměrnou singulární krychli, resp. dvojrozměrný singulární řetězec v \mathbf{R}^3 . Není-li řečeno jinak, považujte plošnou hustotu útvaru za konstantní a rovnu jedné, $s(x, y, z) = 1$.

- a) moment setrvačnosti pláště kužele $Rz = v\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq v$, vzhledem k ose z ,

- b) poloha středu hmotnosti horní poloviny kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,
 c) obsah části dvojdílné hyperboloidální plochy $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, $1 \leq z \leq \sqrt{2}$,
 d) obsah a moment setrvačnosti (vzhledem k ose z) povrchu rotačního anuloidu z úlohy 19g),
 e) moment setrvačnosti povrchu pravidelného čtyřřtenu o straně a vzhledem k ose procházející jeho vrcholem a těžištěm protější strany (pro usnadnění výpočtu zvolte vhodně soustavu souřadnic, abyste mohli využít symetrie útvaru),
 f) obsah povrchu rotačního elipsoidu $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$,
 g) obsah části plochy $x^2 + y^2 = 2z$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 = 3$,
 h) hmotnost a souřadnici z_T středu hmotnosti části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ohraničené rovinami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = R$ a nerovností $z \geq 0$,
 i) moment setrvačnosti kulové plochy o poloměru R vzhledem k ose procházející jejím středem,
 j) obsah povrchu koule o poloměru R ,
 k) obsah pláště kužele o poloměru podstavy r a výšce v ,
 l) obsah pláště paraboloidu o rovnici $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $0 \leq z \leq z_0$.

Výsledky: a) $J_z = \frac{\pi}{2} R^3 \sqrt{R^2 + v^2}$, b) $x_T = y_T = 0$, $z_T = \frac{R}{2}$, c) $P_S = \pi(\sqrt{6} - 1) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$, d) $P_S = 4\pi^2 r R$, $J_z = 2\pi^2 r R(2R^2 + 3r^2)$, e) $J = \frac{a^4 \sqrt{3}}{12}$, f) $P_S = 2\pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right]$ pro $a > b$, $P_S = 2\pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right]$, g) $P_S = \frac{14\pi}{3}$, h) $m = \frac{\pi R^2}{2}(\sqrt{2} - 1)$, $z_T = \frac{R}{\pi}(\sqrt{2} + 1)$, i) $J = \frac{8}{3}\pi R^4$, j) $4\pi R^2$, k) $\pi r \sqrt{r^2 + v^2}$, l) $\frac{2\pi}{3} [(1 + 2z_0)^{3/2} - 1]$.

21. Vyjádřete objemový element plochy $\omega_0 = dS$, která vznikne rotací křivky o polární rovnici $\rho = f(\varphi)$ kolem osy x . Vypočtete obsah plochy, která vznikne rotací kardioidy $\rho = a(1 - \cos \varphi)$, $a > 0$, kolem její osy souměrnosti. Úhel otočení křivky kolem uvedené osy označte $\psi \in [0, 2\pi]$.

Výsledek: $dS = f(\varphi) \sin \varphi \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + f^2(\varphi)} d\varphi \wedge d\psi$, $P_S = \frac{32}{5}\pi a^2$.

22. Další geometrické a fyzikální aplikace integrálů. Řešte následující fyzikální úlohy:

- a) Vypočtete teplo přijaté ideálním plynem při ději popsaném funkcí $p(V) = aV^2$, $a > 0$ je konstanta, je-li počáteční objem V_1 a koncový V_2 . Elementární teplo je dáno formou $\delta Q = \omega = \frac{m}{\mu} C_v dT + p dV$, veličiny p (tlak), V (objem) a T (absolutní teplota) splňují stavovou rovnici $pV = \frac{m}{\mu} RT$, $C_v = \text{konst.}$ je molární tepelná kapacita při stálém objemu, m je hmotnost plynu, μ jeho molární hmotnost, R univerzální plynová konstanta.
- b) Vypočtete práci jednoho molu van der Waalsova plynu (stavová rovnice je $(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$, $a, b > 0$ jsou konstanty, význam ostatních veličin je stejný jako v části a) této úlohy, při izotermické expanzi (konstantní teplota $T = T_0$) z objemu V_1 na objem V_2 ; elementární práce je dána formou $\delta A = \omega = p dV$.
- c) Určete intenzitu \vec{H} magnetického pole v ohnisku F parabolického drátu o rovnici $x^2 = 2py$, kterým protéká konstantní proud I . Platí $\vec{H} = \int \frac{I}{4\pi} \frac{\vec{r} \times \vec{r}'}{r^3} dl$, kde \vec{r}' je polohový vektor obecného bodu drátu $X = (x, y, z)$ vzhledem k bodu, v němž intenzitu počítáme, a \vec{r} je jednotkový vektor tečný k drátu a orientovaný ve směru proudu.
- d) Určete velikost intenzity magnetického pole \vec{H} ve vzdálenosti od nekonečného přímého vodiče, jímž protéká konstantní proud I (vzorec pro výpočet intenzity viz část c) této úlohy).

- e) Je dána kulová plocha S o poloměru R a ve vzdálenosti v od jejího středu bod M . Označme ξ vzdálenost bodu M od obecného bodu Q na kulové ploše a α úhel, který svírá spojnice QM s vnější normálou k ploše v bodě Q . Vypočtete integrál $\int_S \frac{\cos \alpha}{\xi^2} dS$ (tzv. *potenciál dvojrstvy*).
- f) Rozložení tlaku v kapalině je dáno funkcí $p(x, y, z)$. Celková tlaková síla, jíž působí okolní kapalina na část o objemu V o hraniční ploše $S = \partial V$, která je v kapalině libovolně vymezena, je dána integrálem $\vec{F}_S = - \int_S p \vec{n} dS$, kde \vec{n} je vektorové pole vnější normály k ploše S . Dokažte, že platí $\vec{F}_S = (- \int_S p dy \wedge dz, - \int_S p dz \wedge dx, - \int_S p dx \wedge dy)$. Pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty dokažte, že $\vec{F}_S = \int_V \text{grad } p dV$.
- g) Užitím výsledku části f) této úlohy vypočtete celkovou tlakovou sílu, jíž působí kapalina na vnitřní plášť nádoby $\frac{x^2+y^2}{a^2} = 2z$ naplněné touto kapalinou do výšky h . Hustota kapaliny je $s = \text{konst.}$, rozložení tlaku je dáno funkcí $p(x, y, z) = p(z) = sg(h-z) + p_0$. Ukažte, že velikost celkové tlakové síly je rovna mg , kde m je hmotnost kapaliny v nádobě. (Situace odpovídá nádobě s kapalinou umístěné v homogenním gravitačním poli o intenzitě $\vec{g} = (0, 0, -g)$.)

Výsledky: a) $Q = \frac{a}{R} (C_V + \frac{R}{3}) (V_2^3 - V_1^3)$, b) $A = RT_0 \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} + a(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1})$, c) $\vec{H} = (0, 0, \frac{I}{2p})$, d) $H = \frac{I}{2\pi d}$, e) 0 pro $v > R$, -4π pro $v < R$, g) $\vec{F}_S = (0, 0, -\pi s g a^2 h^2)$.

23. Vypočtete celkovou tlakovou sílu, kterou působí ideální kapalina o hustotě s na dno, resp. na plášť válcové nádoby o poloměru R a výšce h_0 . Řešte tyto situace:

- a) Nádoba je umístěna v homogenním gravitačním poli Země o intenzitě (tíhovém zrychlení) \vec{g} . Osa nádoby je nesouhlasně rovnoběžná s vektorem \vec{g} .
- b) Nádoba navíc rotuje stálou úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem své osy.

Objem kapaliny je v obou případech stejný a rovný $V = \pi R^2 h$, kde $h < h_0$. Použijte přímého výpočtu příslušných plošných integrálů tvaru $\vec{F} = \int_S (-p(x, y, z)) \vec{n} dS$, kde funkce $p(x, y, z)$ určuje rozložení tlaku v kapalině, S je příslušná plocha a \vec{n} vektorové pole normály směřující ven z kapalinou.

Výsledky: a) $\vec{F}_{\text{dno}} = (0, 0, \pi R^2 p_{\text{at}} + sgV)$, $\vec{F}_{\text{plášť}} = \vec{0}$, b) $\vec{F}_{\text{dno}} = (0, 0, F)$, $F = \pi R^2 p_{\text{at}} + sgV (1 + \frac{\omega^2 R^2}{4gv}) \frac{v}{h}$, přičemž v je vzdálenost vrcholu parabolického povrchu rotující kapaliny od dna nádoby.

24. Řešte *vnitřní Dirichletovu úlohu* pro nabitý vodič v elektrostatické rovnováze: máme určit elektrostatický potenciál $\phi(\vec{r})$ uvnitř nabitého vodiče reprezentovaného uzavřenou ohraničenou oblastí $V \subset \mathbf{R}^3$ s hraniční plochou $S = \partial V$ orientovanou vnější normálou. Okrajová podmínka je $\phi|_S = \phi_0 = \text{konst.}$ Požadujeme, aby funkce $\phi(\vec{r})$ byla spojitá.

Návod: Uvědomte si, že vzhledem k výsledku příkladu 12.126 musí potenciál $\phi(\vec{r})$ splňovat Laplaceovu rovnici $\Delta \phi = 0$. Dále použijte první Greenovy identity a dokažte jednoznačnost řešení.

25. Řešte *Neumannovu úlohu* pro nabitý vodič (uzavřená ohraničená oblast $V \subset \mathbf{R}^3$ s hraniční plochou $S = \partial V$ orientovanou vnější normálou \vec{n}) v elektrostatické rovnováze: máme určit intenzitu \vec{E} elektrostatického pole uvnitř a na povrchu nabitého vodiče v elektrostatické rovnováze, je-li dán celkový náboj vodiče Q .

Návod: Na základě vztahu mezi Q a ϕ (v integrálním tvaru) dokažte, že pro potenciál na povrchu vodiče platí $\frac{Q}{\phi_0} = \frac{Q'}{\phi'_0} = C$ (veličina C je *kapacita* vodiče). Pro zjištění vztahu mezi ϕ a celkovým nábojem Q vyjádřete tok vektorového pole \vec{E} plochou S pomocí celkového náboje a užití vztah mezi \vec{E} a ϕ . Označte $Q' = kQ$ a vyjádřete vztah mezi ϕ , Q a ϕ' , Q' . Ukažte, že $\int_S \partial_n (k\phi - \phi') dS = 0$.

26. Vypočítejte intenzitu elektrického pole na povrchu vodiče v elektrostatické rovnováze, na jehož povrchu je celkový náboj rozložen s povrchovou hustotou σ .

Výsledek: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$, kde \vec{n} je vnější jednotková normála k povrchu vodiče.

27. Odvodte podmínky pro tečné složky intenzity elektrického a magnetického pole na rozhraní dvou prostředí. **Návod:** Použijte označení z obrázku 12.64. Postupujte obdobně jako v příkladu 12.127 na základě odpovídajících Maxwellových rovnic a použijte Stokesovu větu.

Výsledek: $\vec{\tau}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$, $\vec{\tau}(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \iota$, kde ι je celkový proud tekoucí rozhraním vztažený na jednotku délky podél rozhraní.

28. Je dána forma $\eta = yz dx - xz dy - xy dz \in \Lambda_1(\mathbf{R}^3)$. Řešte následující úkoly:

a) Zjistěte, zda je forma η uzavřená.

b) Je-li odpověď na otázku a) záporná, zjistěte, zda bude existovat integrační faktor (vypočítejte $\eta \wedge d\eta$).

c) Je-li odpověď na otázku b) kladná, pokuste se nějaký integrační faktor najít.

Výsledky: a) ne, b) ano, c) například $\mu = x^{-2}$, $\mu = (yz)^{-2}$, a další možnosti (integrační faktor není určen jednoznačně).

29. Dokažte následující tvrzení pro formy na \mathbf{R}^3 :

a) Je-li forma $\omega_X^{(1)}$ uzavřená, pak existuje funkce $U = U(x, y, z)$ tak, že $\vec{X} = \text{grad } U$.

b) Není-li forma $\omega_X^{(1)}$ uzavřená, ale existuje k ní integrační faktor $\mu = \mu(x, y, z)$, tj. $d(\mu\omega_X^{(1)}) = 0$, pak existuje funkce $f = f(x, y, z)$ tak, že $\omega_X^{(1)} = \frac{1}{\mu} df$.

30. Uvažujte o teplotně homogenní uzavřené termodynamické soustavě, jejíž stavy jsou určeny dvěma parametry (typicky objemem a teplotou). Dokažte tzv. *Carathéodoryho princip adiabatické nedosažitelnosti stavů*, vyplývající z druhého zákona termodynamiky: v každém okolí libovolného daného počátečního stavu teplotně homogenní soustavy existují stavy, jichž není možné dosáhnout (resp. se k nim libovolně přiblížit) adiabatickým dějem.

Návod: Adiabatický děj je takový, při němž si soustava nevyměňuje teplo se svým okolím. Pro ověření principu adiabatické nedosažitelnosti stačí dokázat, že adiabaty se neprotínají: Uvažujte obecně o Pfaffově formě pro $n = 2$, tj. $\eta = X(x, y) dx + Y(x, y) dy$ (teplo přijaté termodynamickou soustavou od okolí určuje forma $\delta Q = C_V dT + P dV$, křivky, podél nichž se forma anulují, představují v termodynamice právě adiabaty). Forma η obecně nemusí být uzavřená, ale vždy k ní existuje integrační faktor $\mu(x, y)$, tj. $d\mu\eta = 0$. Existuje proto funkce $f = f(x, y)$ taková, že platí $\mu\eta = df = 0$. Ta určuje řešení rovnice adiabaty $df = \mu X dx + \mu Y dy = 0$. Úvahu dokončete a zdůvodněte, že adiabaty tvoří jednoparametrickou soustavu křivek (neprotínají se).