

Obsah

13 Proměnná je komplexní — výsledky jsou noblesní	5
13.1 Co je to komplexní funkce komplexní proměnné?	7
13.1.1 Gaussova rovina, bod nekonečno, okolí bodů, číselné posloupnosti a řady	7
13.1.2 Co je to funkce komplexní proměnné?	19
13.1.3 Limity, spojitost, posloupnosti a řady funkcí komplexní proměnné	26
13.1.4 Diferenciální 1-formy v komplexním oboru a křivkový integrál	39
13.1.5 Cvičení	49
13.2 Má-li funkce komplexní proměnné derivaci, pak má derivace všech řádů	51
13.2.1 Holomorfní funkce — funkce s derivací	51
13.2.2 Regulární funkce — funkce s Taylorovou řadou	65
13.2.3 Holomorfní funkce, uzavřená křivka a nulový integrál	74
13.2.4 Holomorfní a regulární jsou synonyma!	85
13.2.5 Věta o jednoznačnosti, holomorfní rozšíření, elemen- tární funkce	89
13.2.6 Cvičení	102
13.3 Co udělá malá dírka v oboru holomorfnosti aneb singularity	105
13.3.1 Co jsou to singularity funkcí a jak je třídíme?	105
13.3.2 Singularity a dosud neobvyklý rozvoj funkce, reziduum	118
13.3.3 Reziduová věta aneb místo integrování sčítáme rezidua	134
13.3.4 Reziduová věta — účinný nástroj pro výpočet reálných integrálů	146
13.3.5 Cvičení	162
13.4 Co jsou to mnohoznačné funkce	167
13.4.1 Prodloužení holomorfní funkce podél křivek — možné výsledky	168

13.4.2	Logaritmus jako základ mnohoznačných funkcí	175
13.4.3	Další mnohoznačné funkce	178
13.4.4	Mnohoznačné funkce a integrál, fyzikální aplikace	184
13.4.5	Cvičení	191
13.5	Laplaceova a Fourierova transformace	194
13.5.1	Jednostranná Laplaceova transformace	195
13.5.2	Laplaceův obraz, jeho pozoruhodné vlastnosti a vý- hodné použití	198
13.5.3	Dvoustranná a vícerozměrná Laplaceova transformace, Fourierova transformace	211
13.5.4	Konvoluce a její Laplaceův obraz	220
13.5.5	Cvičení	221
13.6	Funkce komplexní proměnné a fyzika	227
13.6.1	Podnět, odezva a příčinnost	227
13.6.2	Odezva látky na světlo a vliv příčinnosti aneb krásná fyzika	230
13.6.3	Něco málo o konformních zobrazeních	235
13.6.4	Cvičení	259

Kapitola 13

Proměnná je komplexní — výsledky jsou noblesní

S komplexními čísly jsme se podrobně seznámili hned na začátku prvního dílu, s funkcemi v jeho druhé kapitole. Šlo však o funkce, jejichž definiční obory byly podmnožinami reálné osy, a také jejich funkční hodnoty byly reálné. Jednoduše, šlo o *reálné funkce jedné reálné proměnné*. V druhém dílu jsme se pak zabývali funkcemi více proměnných, a to jak skalárními, tak vektorovými. Hodnoty proměnných i funkčních hodnot však stále byly reálné. Totéž platilo i v předchozí kapitole tohoto dílu. V této kapitole půjde opět o funkce jediné proměnné, zato však komplexní, která bude moci nabývat komplexních hodnot. Ve smyslu možností definičního oboru a oboru hodnot tedy půjde o rozšíření pojmu funkce. Řeknete si: jaképak „rozšíření“? Každé komplexní číslo $z \in \mathbf{C}$, $z = x + iy$ má přece svou reálnou a imaginární část (x a y), takže půjde o funkce dvou proměnných $f(z) = f(x, y)$, která také bude mít reálnou a imaginární část, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Půjde tedy o zobrazení $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, o kterých toho už víme dost. Tato úvaha však není úplně správná. Takovým zobrazením by byla vektorová funkce $\vec{F} : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow (u, v) \in \mathbf{R}^2$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, kdybychom od proměnných x a y nic dalšího nepožadovali a pojmy jako je limita, derivace, resp. parciální derivace, apod. aplikovali na funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ samostatně. V případě komplexní proměnné však hodnoty x a y nebudou do funkčních předpisů u a v vstupovat nezávisle. Musejí vždy „chodit“ ve dvojici vázané požadavkem $z = x + iy$. Důsledky tohoto jednoduchého faktu jsou významné, a pro ty, kteří se s funkcemi komplexní proměnné dosud nesečkali, budou možná nečekané. Chování funkcí komplexní proměnné je totiž až obdivuhodné a dává nám k dispozici nové matematické prostředky k řešení problémů. Tak třeba jen

namátkou:

- **Taylorova řada:** Chceme-li reálnou funkci reálné proměnné rozvinout v Taylorovu řadu v okolí daného bodu, musíme si být jisti, že funkce má v daném bodě derivace všech řádů. U komplexní funkce komplexní proměnné stačí, aby existovala první derivace (samozřejmě ji ještě nemáme zavedenou, ale uvidíme, že definice se *formálně* neliší od funkcí reálné proměnné). Znamená to, že z existence první derivace musí automaticky vyplývat existence derivací všech řádů.
- **Cauchyovy-Riemannovy podmínky:** Reálná a imaginární část funkce komplexní proměnné, která má v daném bodě, resp. v jeho okolí, derivaci, jsou vázány tak striktními podmínkami, že z reálné části lze až na konstantu určit část imaginární a naopak.
- **Laurentova řada a reziduum:** Funkce se singularitami se stále dají rozvíjet v řadu v okolí daného bodu z_0 , jenže ta má na rozdíl od řady Taylorovy i členy se zápornými exponenty výrazu $(z - z_0)$. Koefficient u prvního z nich, tj. u $(z - z_0^{-1})$, zvaný *reziduum*, je důležitý pro výpočet integrálů.
- **Cauchyova věta a Cauchyův vzorec, reziduová věta:** Integrál z komplexní funkce komplexní proměnné (také jej musíme teprve zavést) po uzavřené křivce v komplexní rovině je dán pouze příspěvkem singularit, tj. bodů, v nichž funkce nemá derivaci, obepnutých touto křivkou. Pokud tam žádné nejsou, je nulový. Každá ze singularit přispívá do hodnoty integrálu příslušným reziduem tolikrát, kolikrát ji integrační křivka *obíhá*.
- **Výpočty reálných integrálů:** Přejít do komplexního oboru a reziduová věta umožní explicitní výpočet *reálných* integrálů. I takových, které nejde počítat pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule, třeba

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

(*Fresnelovy integrály*).

- **Mnohoznačné funkce:** V oboru komplexní proměnné se vyskytnou i tzv. *mnohoznačné funkce*. (Pozor při studiu literatury: někteří matematikové nemají toto slovní spojení rádi.)

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 7

- **Laplaceova transformace:** Pro funkce komplexní proměnné lze definovat tzv. *Laplaceovu transformaci* a její speciální případ, transformaci *Fourierovu*. Pomocí Laplaceovy transformace lze například úlohy na řešení diferenciálních rovnic převádět na řešení rovnic algebraických. Lze pomocí ní porozumět fyzikálně velmi podstatnému problému *podnět-odezva* souvisejícímu s obecným principem příčinnosti, atd.

Nebudeme výčet vlastností komplexních funkcí komplexní proměnné dále rozšiřovat ani na tomto místě komentovat. Uvidíte sami, až se do toho pustíme.

Jen ještě dodejme, že problematika funkcí komplexní proměnné je natolik rozsáhlá a důležitá pro aplikace v přírodovědných i technických oborech, že je jí věnována řada samostatných obecných i specializovaných knih, z nichž některé citujeme v seznamu literatury. V naší učebnici se zdaleka nemůže objevit všechno a do detailů. Uvádíme proto jen nejdůležitější vlastnosti funkcí komplexní proměnné a příklady jejich praktického použití.

13.1 Co je to komplexní funkce komplexní proměnné?

Tento odstavec se věnuje převážně definicím týkajícím se jednak definičních oborů funkcí komplexní proměnné, jednak definice funkcí samotných a jejich základních vlastností.

13.1.1 Gaussova rovina, bod nekonečno, okolí bodů, číselné posloupnosti a řady

S algebraickou strukturou množiny komplexních čísel jsme se podrobně obeznámili v odstavci 1.2.2 prvního dílu. Víme, co je *algebraický, geometrický a exponenciální zápis* komplexního čísla, umíme komplexní čísla zobrazovat v tzv. *otevřené Gaussově rovině* \mathbf{C} , která je z topologického i algebraického hlediska stejná jako \mathbf{R}^2 . V této kapitole budeme v případě zápisu komplexních čísel používat nikoli uspořádaných dvojic, ale tvary

$$z = x + iy, \quad z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z = e^{i\varphi},$$

kde $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ jsou *reálná a imaginární část* komplexního čísla z , a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ jeho absolutní hodnota neboli *modul*. Úhel φ není určen jednoznačně. Nejednoznačnost spočívá v periodicitě funkcí sinus a kosinus.

Každému komplexnímu číslu z proto odpovídá množina přípustných úhlů φ , zvaná *argument* čísla z (obrázek 13.1 vlevo),

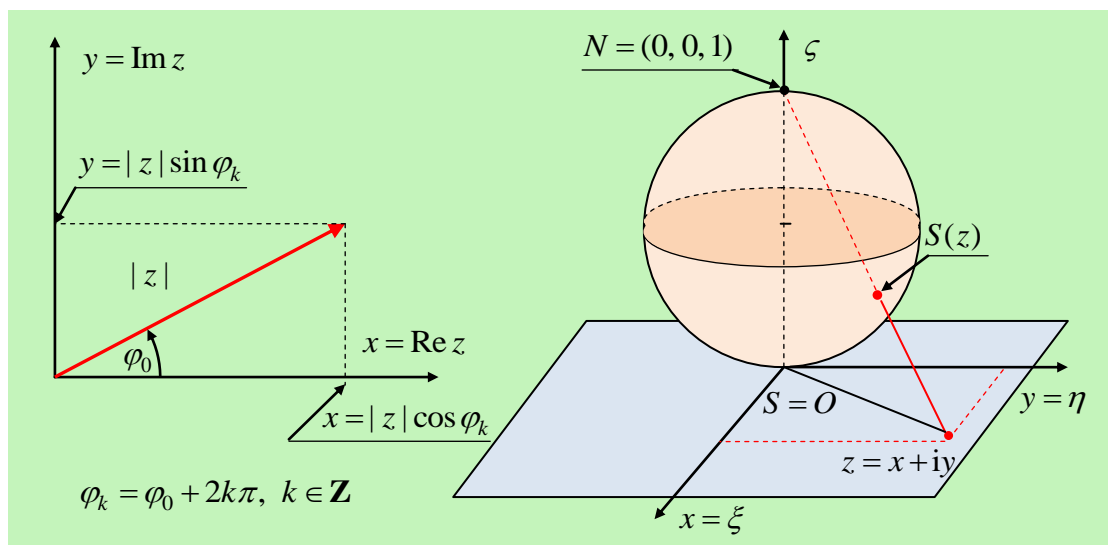
$$\arg z = \{\varphi \in \mathbf{R} \mid \operatorname{Re} z = |z| \cos \varphi, \operatorname{Im} z = |z| \sin \varphi\}. \quad (13.1)$$

8KAPITOLA 13. PROMĚNNÁ JE KOMPLEXNÍ — VÝSLEDKY JSOU NOBLESNÍ

Hodnotu $\text{Arg } z = \varphi_0 \in \arg z$, která leží v intervalu $[0, 2\pi)$, nazýváme *hlavní hodnotou* argumentu. (V některých situacích je obvyklejší volit hlavní hodnotu argumentu v intervalu $(-\pi, \pi]$. S oběma způsoby se v textu setkáme.) Hodnota $\varphi_k = \varphi_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, pak představuje *k-tou větev* argumentu. Číslo $z^* = x - iy$ je *komplexně sdružené* k z . Připomeňme důležité praktické vztahy z prvního dílu. Označme $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $\text{Arg } z_1 = \varphi_{10}$, $\text{Arg } z_2 = \varphi_{20}$. Pak

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_{10} + \varphi_{20}) + i \sin(\varphi_{10} + \varphi_{20})) = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_{10} + \varphi_{20})}.$$

Specifickým bodem množiny komplexních čísel je *bod nekonečno*. V reálném



Obrázek 13.1: Komplexní číslo a jeho zápis.

oboru jsme také hovořili o nekonečnu, pracovali jsme s *nevlastními body* „plus nekonečno a minus nekonečno“. V příkladu 8.7 jsme pro ně dokonce zavedli jakési algebraické operace, v souvislosti s limitami posloupností. V komplexní rovině budeme mít *bod nekonečno* jediný. Bude představovat, laicky a velmi volně řečeno, „všechno, co je od počátku Gaussovy roviny libovolně daleko“. Samozřejmě musíme tento podivný bod pořádně definovat. Provedeme to pomocí *stereografické projekce*.

Příklad 13.1: Stereografická projekce

O co se jedná ukazuje obrázek 13.1 vpravo. Představme si kulovou plochu

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 9

se středem $(0, 0, \frac{1}{2})$ a poloměrem $R = \frac{1}{2}$. Jejím *jižním pólem* je počátek soustavy souřadnic $\langle O; \xi, \eta, \zeta \rangle$, tj. $S = O$, severní pól má souřadnice $N = (0, 0, 1)$. Rovnice této plochy, zvané *Riemannova sféra*, nebo též *referenční koule* (hlavně v krystalografii, kde se stereografická projekce také používá), je

$$\mathcal{R} = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\}.$$

Body této sféry promítáme paprsky vycházejícími ze severního pólu N do *projekční roviny* Π , totožné se souřadnicovou rovinou $\xi\eta$. Osy projekční roviny označme $x = \xi$ a $y = \eta$. Stereografickou projekci tedy definujeme jako zobrazení

$$P : \mathcal{R} \setminus \{N\} \ni (\xi, \eta, \zeta) \longrightarrow (x, y) = P(\xi, \eta, \zeta) \in \pi,$$

přičemž bod stereografický obraz bodu (ξ, η, ζ) na sféře \mathcal{R} je průsečíkem spojnice tohoto bodu a severního pólu s projekční rovinou. Je zřejmé, že stereografická projekce není definována pro bod N (víte proč?). Otázkou je, zda ji lze v bodě N nějak dodefinovat. Abychom na to přišli, vyjádříme polohu bodu na kulové ploše \mathcal{R} pomocí souřadnic x a y v rovině Π . Tuto rovinu budeme interpretovat jako rovinu Gaussovu, tj. $\Pi = \mathbf{C}$, a $z = x + iy$ jako komplexní číslo, které v ní leží. Zavedeme tak zobrazení

$$S : \mathbf{C} \ni z = x + iy \longrightarrow S(z) = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{R},$$

jehož rovnice nyní odvodíme. Parametrické rovnice přímky, která spojuje bod z , který má v soustavě $\langle O; \xi, \eta, \zeta \rangle$ souřadnice $(x, y, 0)$, a severní pól $N = (0, 0, 1)$, jsou

$$\xi = xt, \quad \eta = yt, \quad \zeta = 1 - t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dosazením do rovnice kulové plochy \mathcal{R} dostaneme

$$x^2 t^2 + y^2 t^2 + \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 = \frac{1}{4} \implies t^2(x^2 + y^2 + 1) - t = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou $t = 0$ (odpovídá bodu N) a $t = \frac{1}{1+|z|^2}$. Odtud

$$\xi S(z) = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta S(z) = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta S(z) = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \quad (13.2)$$

Stereografickým průmětem rovniku Riemannovy sféry je jednotková kružnice se středem v bodě $(0, 0)$ Gaussovy roviny. Body ležící v horní polovině

sféry („severní zeměpisná šířka“) se zobrazí dovnitř této kružnice, body dolní poloviny sféry („jižní zeměpisná šířka“) vně.

Pomocí zobrazení S jsme celou (neohrazenou, otevřenou) Gaussovou rovinu \mathbf{C} „vměstnali“ na kulovou plochu, tj. ohraničenou množinu v \mathbf{R}^3 . Přesně řečeno, obrazem množiny \mathbf{C} je tato kulová plocha bez severního pólu, $S(\mathbf{C}) = \mathcal{R} \setminus \{N\}$. Vraťme se k otázce, jak to tedy udělat, aby se i bod N stal nějakým obrazem? Zobrazení S je prosté, inverzním zobrazením k němu je právě stereografická projekce $P = S^{-1}$. Pro $|z| \rightarrow \infty$ je $\xi S(z) \rightarrow 0$, $\eta S(z) \rightarrow 0$ a $\zeta S(z) \rightarrow 1$. Názorně to znamená, že je-li bod z „daleko“ od počátku soustavy souřadnic, je jeho obraz $S(z)$ na kulové ploše \mathcal{R} „blízko“ severního pólu. Zpřesníme tuto úvahu: Předpokládejme, že $|z| = R$, $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Pak

$$\xi S(z) = \frac{R \cos \varphi}{1 + R^2}, \quad \eta S(z) = \frac{R \sin \varphi}{1 + R^2} \implies r = \sqrt{(\xi S(z))^2 + (\eta S(z))^2} = \frac{1}{R^{-1} + R}.$$

Obrazem kružnice o poloměru R ležící v Gaussově rovině je kružnice o poloměru r na Riemannově sféře. Čím je kružnice v Gaussově rovině větší, tím je její obraz na sféře menší, „stahuje se“ k severnímu pólu. Jakýmsi „limitním“ obrazem nekonečně velké kružnice“ v Gaussově rovině je tedy severní pól Riemannovy sféry. Dodefinování zobrazení S a P provedeme zavedením bodu ∞ , zvaného *nekonečno*, předpisem $N = S(\infty)$, $P(N) = \infty$, přičemž zobrazení P a S jsou navzájem inverzní.

Pozn.: Uvědomme si ještě, že volba soustavy souřadnic a velikost Riemannovy sféry nejsou pro zavedení stereografické projekce podstatné. Podstatné je pouze to, že se body sféry promítají z bodu na ní přímými paprsky do roviny kolmé ke spojnici tohoto bodu a středu sféry. Volba projekční roviny jako tečné ke sféře je výhodná pro usnadnění výpočtů.

Přemýšlivého čtenáře hned napadne, že „definice“ uvedená v příkladu 13.1 k ničemu není, když nevíme, jak s nekonečnem počítat. Hned to napravíme tím, že pro bod nekonečno definujeme algebraické operace. Jsou shrnuty v následující tabulce, podobné té z příkladu 8.7 v druhém dílu. Stejně jako v ní i zde je uspořádání takové, že pro operaci „Aznak operace B “ je operand A v prvním sloupci, operand B v prvním řádku.

+ „plus“	$z_2 \in \mathbf{C}$	∞		- „minus“	$z_2 \in \mathbf{C}$	∞
$z_1 \in \mathbf{C}$	$z_1 + z_2$	∞		$z_1 \in \mathbf{C}$	$z_1 - z_2$	∞
∞	∞	nedef		∞	∞	nedef

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ?11

· „krát“	$z_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0_{\mathbf{C}}\}$	0	∞
$z_1 \in \mathbf{C} \setminus \{0_{\mathbf{C}}\}$	$z_1 z_2$	0	∞
0	0	0	nedef
∞	∞	nedef	∞

: „děleno“	$z_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0_{\mathbf{C}}\}$	0	∞
$z_1 \in \mathbf{C} \setminus \{0_{\mathbf{C}}\}$	$z_1 : z_2$	∞	0
0	0	nedef	0
∞	∞	∞	nedef

$n \in \mathbf{N}$	$\infty^n = \infty$	$\infty^{-n} = 0$	$0^n = 0$	$0^{-n} = \infty$
	$\infty^0 = 1$	$0^0 = 1$	$ \infty = \infty$	

A co ještě není pro bod nekonečno definováno? Definován je pouze jeho modul, jak ukazuje předchozí tabulka. Argument definován není. To má bod nekonečno společné s nulou. Na rozdíl od ní však nemá definovanu ani reálnou, ani imaginární část.

Množinu $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ nazýváme *uzavřenou*, nebo též *rozšířenou* Gaussovou rovinou.

Abychom mohli na podmnožinách Gaussovy roviny (nerozšířené i rozšířené) definovat funkce, jejich limity a derivace, potřebujeme mít v Gaussově rovině rozumně definována okolí bodů. To, jak už víme z odstavce 9.1 druhého dílu, znamená mít v ní zavedenou topologii. Stejně jako v kapitole 9 půjde o topologii euklidovskou. Bude zde jediný praktický rozdíl: zatímco báze euklidovské topologie v \mathbf{R}^n , speciálně v \mathbf{R}^2 , byla tvořena otevřenými n -rozměrnými kvádry, tj. „hranatými útvary“, bude báze euklidovské topologie v \mathbf{C} tvořena útvary „kulatými“, otevřenými kruhy. (Pokud si připomenete příklad 9.2, nebude se Vám to jevit nijak divné). Trochu zvláštní budou některé záležitosti týkající se topologie v \mathbf{C}^+ . K zavedení euklidovské topologie v Gaussově rovině s výhodou využijeme euklidovské metriky (kapitola 11)

$$\mu_E : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \ni (z_1, z_2) \longrightarrow \mu_E(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| \in \mathbf{R}.$$

Topologii *indukovanou* touto metrikou zavádí následující definice a obrázek 13.2 (v obrázku chybí kruhové okolí bodu ∞ , neboť to v „obyčejné“ rovině nakreslit nejde).

Nechť $a \in \mathbf{C}$ a $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$. *Kruhovým*, resp. *prstencovým r -okolím* bodu $a \in \mathbf{C}$ se rozumí množina

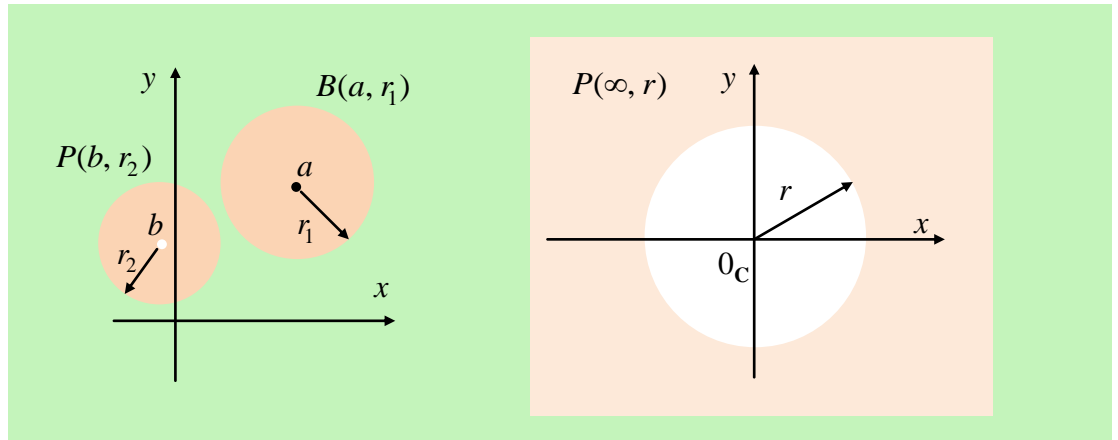
$$B(a, r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| < r\}, \quad \text{resp.} \quad P(a, r) = B(a, r) \setminus \{a\}. \quad (13.3)$$

12KAPITOLA 13. PROMĚNNÁ JE KOMPLEXNÍ— VÝSLEDKY JSOU NOBLESNÍ

Kruhovým, resp. prstencovým r -okolím bodu $\infty \in \mathbf{C}^+$ se rozumí množina

$$B(\infty, r) = \{z \in \mathbf{C}^+ \mid |z| > r\}, \quad \text{resp.} \quad P(\infty, r) = B(\infty, r) \setminus \{\infty\}. \quad (13.4)$$

Pozn.: Prstencová okolí se také někdy nazývají *redukovaná*. Všimněte si,



Obrázek 13.2: Kruhová a prstencová okolí v \mathbf{C} a \mathbf{C}^+ .

že odpovídají tomu, co jsme v kapitole 2 prvního a kapitole 9 druhého dílu nazývali *ryzí okolí*.

Se zkušenostmi z odstavce 9.1 si každý může snadno dokázat, že soubor všech kruhových (ale i prstencových) okolí v \mathbf{C} tvoří bázi topologie. Přemýšlejte: je tomu tak i v \mathbf{C}^+ ? (Zaměřte se zvláště na soubor kruhových a soubor prstencových okolí). Dospějete k závěru, že platí

Každý ze souborů $\{B(a, r) \mid a \in \mathbf{C}, r > 0\}$ a $\{P(a, r) \mid a \in \mathbf{C}, r > 0\}$ je bázi topologie v \mathbf{C} . Soubor $\{B(a, r) \mid a \in \mathbf{C}^+, r > 0\}$ je bázi topologie v \mathbf{C}^+ . Nerozšířená (otevřená) Gaussova rovina \mathbf{C} je topologickým podprostorem rozšířená (uzavřená) Gaussovy roviny \mathbf{C}^+ .

Poslední věta zvýrazněného textu se může jevit nesrozumitelná — neřekli jsme si, co je to topologický podprostor. Tento nedostatek odstraníme snadno. *Topologickým podprostorem* daného topologického prostoru (X, τ) , kde X je nosná množina a τ topologie, je každá jeho podmnožina, která sama je topologickým prostorem s tzv. *indukovanou topologií*. Topologii τ_A na podmnožině $A \subset X$ indukujeme snadno: zahrneme do ní všechny množiny tvaru

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ?13

$U \cap A$, kde $U \in \tau$. Po nezbytné trošce přemýšlení by už poslední věta zvýrazněného textu měla být srozumitelná. Měli bychom také být schopni u konkrétních množin posoudit, zda jsou z hlediska topologie v \mathbf{C} , resp. v \mathbf{C}^+ otevřené, uzavřené, nemají-li žádnou z obou vlastností, atd. Na některé odlišnosti, vzniklé doplněním bodu nekonečno, upozorníme za chvíli v příkladech.

Pro snadné čtení dalšího textu bude třeba zopakovat si některé pojmy z druhého dílu, konkrétně vlastnosti bodů a množin z odstavců 9.1.2 a 9.1.4. Pro důkladnější zopakování se k těmto odstavcům vraťte. Někomu může postačit následující stručná rekapitulace s přímou aplikací na Gaussovu rovinu.

- **Hromadné a izolované body množin:** *Hromadným bodem množiny* $A \subset \mathbf{C}$, resp. $A \subset \mathbf{C}^+$, se nazývá takový bod $z \in \mathbf{C}$, resp. $z \in \mathbf{C}^+$, v jehož libovolném prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny A , různý od z . V opačném případě jde o bod *izolovaný* (od množiny A).
- **Oddělené množiny:** Množiny $A, B \subset \mathbf{C}$, resp. $A, B \subset \mathbf{C}^+$, se nazývají *oddělené*, je-li $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.
- **Souvislé množiny a oblasti:** Množina $A \subset \mathbf{C}$, resp. $A \subset \mathbf{C}^+$ se nazývá *souvislá*, nelze-li ji vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin. Souvislá otevřená množina je *oblast*, souvislá uzavřená množina je *kontinuum*, neboli *uzavřená oblast*.
- **Komponenty množin:** Množina $B \subset A$ je *komponenta* množiny A , je-li souvislá a platí-li implikace $B' \subset B \subset A \Rightarrow B' = B$. Názorně, i když nepřesně řečeno, komponenty množiny jsou její „maximální souvislé části“. Každá množina je sjednocením všech svých komponent.
- **Násobně souvislé množiny:** Oblast $D \subset \mathbf{C}$, resp. $D \subset \mathbf{C}^+$, se nazývá *k-násobně souvislá*, $k \in \mathbf{N}$, jestliže její doplněk v \mathbf{C} , resp. \mathbf{C}^+ . Doplněk *nekonečně násobně souvislé* množiny má nekonečně mnoho komponent.

Příklad 13.2: Zajímavosti topologie v \mathbf{C}^+

Protože je Gaussova rovina \mathbf{C} s euklidovskou topologií „stejná“ jako euklidovská rovina \mathbf{R}^2 , není žádný problém posoudit, zda její zadaná podmnožina je otevřená, uzavřená, či případně nemá žádnou z těchto vlastností, zda je souvislá a kolikanásobně, apod. Zkušeností z kapitoly 9 k tomu máme dost. Řada situací v rozšířené Gaussově rovině \mathbf{C}^+ bude samozřejmě podobných — budou to ty, v nichž není ve hře bod nekonečno. Ty, v nichž se tento nezvyklý bod vyskytne, možná trochu neobvyklé budou.

- Množina $A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$ je jak v \mathbf{C} , tak v \mathbf{C}^+ uzavřená.
- Množina $A = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$, chápaná jako podmnožina \mathbf{C} , je uzavřená (její doplněk v \mathbf{C} je množina otevřená). Jako podmnožina v \mathbf{C}^+ již uzavřená není. Uzavřená je množina $\bar{A} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{\infty\}$.
- Množina $A = \{z \in \mathbf{C} \mid z = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in \mathbf{R}\}$, kde $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ jsou pevně zvolené body (přímka), je z hlediska topologie v \mathbf{C} uzavřená (vyjmeme-li přímku z euklidovské roviny, dostaneme otevřenou množinu). Chápeme-li však množinu A jako podmnožinu rozšířené Gaussovy roviny \mathbf{C}^+ , už uzavřená nebude. Doplněk $\mathbf{C}^+ \setminus A$ totiž není množinou otevřenou. Obsahuje totiž bod nekonečno. A zkuste najít okolí $B(\infty, r)$ bodu nekonečno tak, aby celé leželo v $\mathbf{C}^+ \setminus A$. Nenačtete. Každé takové okolí bude mít s množinou A neprázdný průnik — přímka A je vždy „dost dlouhá“ na to, aby proťala $B(\infty, r)$ při jakkoli velkém r .
- V \mathbf{C}^+ platí $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^+$, $\mathbf{hC} = \{\infty\}$.
- Kruhovité okolí bodů $B(a, r)$, $a \in \mathbf{C}$, jsou z hlediska topologie v \mathbf{C} i \mathbf{C}^+ jsou jednoduše souvislá (doplněk $\mathbf{C} \setminus B(a, r)$ i doplněk $\mathbf{C}^+ \setminus B(a, r)$ mají jedinou komponentu). Kruhovité okolí $B(\infty, r)$ jsou rovněž jednoduše souvislá.
- Prstencová okolí $P(a, r)$, $a \in \mathbf{C}$ jsou jak z hlediska topologie v \mathbf{C} , tak v \mathbf{C}^+ , dvojnásobně souvislá (komponentami doplňku $\mathbf{C} \setminus P(a, r)$ jsou množiny $\{a\}$ a $\mathbf{C} \setminus P(a, r)$, komponentami doplňku $\mathbf{C}^+ \setminus P(a, r)$ jsou množiny $\{a\}$ a $\mathbf{C}^+ \setminus P(a, r)$). Prstencová okolí $P(\infty, r) \in \mathbf{C}^+$ bodu nekonečno jsou rovněž dvojnásobně souvislá (komponentami doplňku $\mathbf{C}^+ \setminus P(\infty, r)$ jsou množiny $\{\infty\}$ a $\bar{B}(0, r)$).
- Množina $A = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ je z hlediska topologie v \mathbf{C} jednoduše souvislá (jejím doplnkem v \mathbf{C} je množina obsahující pouze nulu). Z hlediska \mathbf{C}^+ je dvojnásobně souvislá, doplněk je sjednocením dvou komponent $\{0\}$ a $\{\infty\}$.
- Důležitou roli v teorii funkcí komplexní proměnné hrají *výřezy*. Nejčastěji jsou to polopřímky či úsečky „vyňaté“ z Gaussovy roviny (jako bychom podél nich Gaussovu rovinu rozstříhli). Gaussova rovina \mathbf{C} s výřezy $[0, 1] = \{z = x + iy \in \mathbf{C} \mid x \in [0, 1], y = 0\}$ a $[i, 2i] = \{z = x + iy \in \mathbf{C} \mid x = 0, y \in [1, 2]\}$ je dvojnásobně souvislá, tentýž závěr

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 15

platí i pro \mathbf{C}^+ . Gaussova rovina \mathbf{C}^+ s výřezem $[1, \infty)$ je v \mathbf{C}^+ jednonásobně (jednoduše) souvislá. Jejím doplňkem v \mathbf{C}^+ je totiž pouze výřez samotný, tj. množina $[1, \infty) = \{z = x + iy \in \mathbf{C}, x \in [1, \infty), y = 0\}$. Bod nekonečno nepatří k výřezu.

K přípravě na definici a úvahy o vlastnostech funkcí komplexní proměnné patří ještě několik poznámek týkajících se posloupností a řad komplexních čísel. Protože z kapitoly 8 toho víme dost o posloupnostech a řadách čísel reálných, budeme s nimi rychle hotovi. Definice a formulace vět jsou totiž formálně stejné a důkazy jednoduché.

Posloupnost $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $z_n \in \mathbf{C}$ se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje číslo $M \in \mathbf{R}$ tak, že platí $|z_n| \leq M$ pro všechny indexy $n \in \mathbf{N}$.

Číslo $z \in \mathbf{C}$ se nazývá *limita posloupnosti* $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $z_n \in \mathbf{C}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n \geq N$ je $z_n \in B(z, \varepsilon)$, tj. $|z_n - z| < \varepsilon$. Posloupnost se pak nazývá *konvergentní* (k číslu z). Značíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = z, \quad \text{resp.} \quad \{z_n\} \rightarrow z.$$

Věta 13.1 Vlastnosti konvergentních posloupností: *Nechť $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $z_n = x_n + iy_n \in \mathbf{C}$, je posloupnost komplexních čísel, a $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Nechť $\{z_{n_k}\}_{n_k \in \mathbf{N}}$ je vybraná posloupnost.*

<i>Nechť (předpoklady)</i>	<i>pak (tvrzení)</i>
$\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = z$	$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = x, \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\} = y$
$\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ konverguje	\implies má jediný hromadný bod, a to limitu
$\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ konverguje	\implies je ohraničená
$\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = z$	$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} \{z_{n_k}\} = z$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = z, \lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n\} = u$ pro $u_n \neq 0, u \neq 0$	$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n \pm u_n\} = z \pm u, \lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n u_n\} = zu$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n/u_n\} = z/u$

Dokážeme první vlastnost, ostatní pak automaticky vyplývá z ní a z vlastností konvergentních posloupností reálných čísel. Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ konverguje k číslu z . Podle definice pak ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n \geq N$ je

$$|z_n - z| < \varepsilon \implies \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Protože výrazy $(x_n - x)^2$ a $(y_n - y)^2$ jsou nezáporné, je zřejmé, že pro $n \geq N$ je také $|x_n - x| < \varepsilon$ a $|y_n - y| < \varepsilon$. Proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\} = y.$$

Jestliže naopak předpokládáme, že reálné posloupnosti $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ konvergují k číslům x a y , pak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existují indexy N_1 a N_2 tak, že pro všechna $n \geq N_1$, resp. všechna $n \geq N_2$ platí

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{resp.} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zvolíme-li $N = \max\{N_1, N_2\}$, budou pro všechny hodnoty $n \geq N$ platit obě nerovnosti současně, proto

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon.$$

Věta 13.2 Cauchyovo-Bolzanovo kritérium: *Posloupnost $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $z_n \in \mathbf{C}$, je konvergentní právě tehdy, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechny indexy $m, n \geq N$ platí $z_m \in B(z_n, \varepsilon)$, tj. $|z_m - z_n| < \varepsilon$.*

Připomeňme, že posloupnost splňující požadavek popsany v druhé části věty 13.2 jsme v případě reálných čísel nazývali *cauchyovská*. Bude tomu tak i nyní. Důkaz věty 13.2 je jednoduchý, neboť vyplývá z věty 8.3 (druhý díl), která se týká reálných cauchyovských posloupností, a z první vlastnosti uvedené ve větě 13.1: je-li posloupnost $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $z_n = x_n + iz_n$, konvergentní, dejme tomu k jistému číslu $z = x + iy$ (které ani nemusíme znát), jsou posloupnosti $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a

$$\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$$

rovněž konvergentní (první vlastnost ve větě 13.1), a tedy cauchyovské (věta 8.3). Naopak, je-li posloupnost $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ cauchyovská, jsou také posloupnosti $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ cauchyovské. Tento krok dokážeme. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje index N tak, že pro všechny hodnoty indexů $n, m \geq N$ je

$$|z_m - z_n| < \varepsilon \implies \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} < \varepsilon \implies |x_m - x_n| < \varepsilon, \quad |y_m - y_n| < \varepsilon.$$

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 17

Podle věty 8.3 jsou posloupnosti $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ konvergentní. První vlastnost ve větě 13.1 pak vede k závěru, že také posloupnost $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je konvergentní. Stejně jako v případě posloupností reálných čísel nám ovšem Cauchyovo-Bolzanovo kritérium neřekne nic o limitě dané posloupnosti.

Definici konvergentní posloupnosti snadno rozšíříme na uzavřenou Gaussovu rovinu \mathbf{C}^+ .

Číslo $z \in \mathbf{C}^+$ se nazývá *limita posloupnosti* $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $z_n \in \mathbf{C}^+$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n \geq N$ je $z_n \in B(z, \varepsilon)$, tj. $|z_n - z| < \varepsilon$. Posloupnost se pak nazývá *konvergentní* (k číslu z). Značíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = z, \quad \text{resp.} \quad \{z_n\} \rightarrow z.$$

Zamysleme se, co tato definice přináší nového a možná nečekaného oproti pojmu konvergence posloupností reálných čísel. V reálném oboru jsme rozlišovali posloupnosti konvergentní (s konečnou limitou), divergentní (s nevlastní limitou $+\infty$, resp. $-\infty$) a oscilující (ani konvergentní, ani divergentní). Tak třeba posloupnost $\{n\}_{n \in \mathbf{N}}$, chápaná v reálném oboru, je divergentní, zatímco v oboru \mathbf{C}^+ konverguje k bodu ∞ . Posloupnost $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ v reálném oboru osciluje, v \mathbf{C}^+ konverguje rovněž k bodu ∞ . Posloupnost $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je v reálném oboru posloupností oscilující (má dva hromadné body, $\xi_1 = -1$ a $\xi_2 = 1$), v oboru komplexním rovněž nekonverguje (má tytéž dva hromadné body). Pojem cauchyovské posloupnosti v \mathbf{C}^+ nezavádíme (zkuste přijít na to, proč).

V případě řad komplexních čísel se rozšíření na \mathbf{C}^+ neprovádí. Definice a věty budou znít formálně stejně jako pro posloupnosti reálných čísel.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $z_n \in \mathbf{C}$ se nazývá *konvergentní* k součtu s , konverguje-li posloupnost jejích částečných součtů $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ k s v \mathbf{C} . Píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$. V opačném případě jde o řadu *divergentní*.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se nazývá *absolutně konvergentní*, konverguje-li řada z absolutních hodnot jednotlivých členů, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. O původní řadě se pak říká, že konverguje *neabsolutně*, resp. *relativně*, resp. *obyčejně*.

Je zřejmé, že při zjišťování absolutní konvergence řad komplexních čísel lze použít kritéria pro konvergenci řad s reálnými nezápornými členy (věta 8.7 v druhém dílu).

Věta 13.3 (O konvergentních řadách): *Nechť $z_n, w_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Pak platí*

<i>Nechť (předpoklady)</i>	<i>pak (tvrzení)</i>
$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s_z, \sum_{n=1}^{\infty} w_n = s_w$	$\iff \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha s_z + \beta s_w$
$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje	\implies řada vzniklá vynecháním, přidáním nebo změnou konečného počtu členů konverguje
$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje	\iff posloupnost částečných součtů je cauchyovská
$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje	$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\}_{n \in \mathbf{N}} = 0$
$\sum_{n=1}^{\infty} z_n $ konverguje	$\implies \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje
$\sum_{n=1}^{\infty} z_n $ konverguje	$\iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n $ a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n $ konvergují
$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$	$\implies \sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = S, \sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = s$ $\sigma : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ je prosté zobrazení

Poslední vlastnost znamená, stejně jako u řad reálných čísel, že absolutně konvergentní řady lze přerovnávat, přičemž přerovnáním členů se nejen nezmění konvergence jako taková, ale ani součet řady. Dokazovat téměř není co. První, druhá a třetí vlastnost vyplývají přímo z první vlastnosti ve větě 13.1, třetí vlastnost je důsledkem Cauchyova-Bolzanova kritéria aplikovaného na posloupnost částečných součtů řady. Šestá vlastnost plyne z poslední vlastnosti věty 8.5, ve své druhé části navíc s použitím první vlastnosti ve větě 13.1. Dokážeme pouze pátou vlastnost: předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konverguje. Protože pro všechny hodnoty indexu n je $|x_n| \leq |z_n|$ a $|y_n| \leq |z_n|$, jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ konvergentní podle srovnávacího kritéria pro řady s nezápornými členy (věta 8.7). Naopak, konvergují-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$, můžeme na základě nerovnosti $|z_n| \leq |x_n| + |y_n|$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a srovnávacího kritéria z věty 8.7 učinit závěr, že konvergují i řady $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$.

Příklad 13.3: Několik jednoduchých ukázek konvergentních a nekonvergentních řad

Prošetříme konvergenci následujících řad komplexních čísel:

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 19

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + in)$ nekonverguje, neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + in) \neq 0$ v rozporu s větou 13.3 (čtvrtá vlastnost),
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos \pi n + i \sin \pi n)$ nekonverguje, posloupnost $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $z_n = \cos \pi n + i \sin \pi n$ má dva hromadné body, $\xi_1 = -1$ a $\xi_2 = 1$, nemá tedy limitu,
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konverguje absolutně podle limitního d'Alembertova podílového kritéria (věta 8.7),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!} : \frac{|z^n|}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!|z|}{(n+1)!} = 0.$$

13.1.2 Co je to funkce komplexní proměnné?

Po úvodní pasáži týkající se (s výjimkou zavedení tak trochu neobvyklého bodu „nekonečno“) hlavně opakování topologických pojmů a vlastností číselných posloupností a řad, se konečně dostáváme k zavedení pojmu funkce v oboru komplexní proměnné. Zde se opět objevuje jistá neobvyklost. Dosud jsme o funkcích vždy hovořili jako o zobrazeních, tj. jakýchsi „předpisech“ či „pravidlech“, jak *vzorům* z určitého předem daného definičního oboru přiřadit *obrazy*, přičemž každému z povolených vzorů (prvků definičního oboru) byl přiřazen *právě jeden obraz*. Funkce komplexní proměnné jsou v řadě učebnic pojímány obecněji, jsou přípustné i funkce *mnohoznačné*. Při takovém pojetí může mít, tak trochu nepřesně řečeno, více obrazů. (I když někteří matematicové toto pojetí neuznávají a kritizují, je i v renomované literatuře obvyklé, proto je ani my nezavrhneme. Nevzniknou tím žádné komplikace ani nedorozumění. Jednoduše — budou existovat situace, kdy funkce nebude zobrazení.) Nejprve pro jistotu připomeneme zcela běžný pojem (binární) *relace* a *relace na množině* a pro pořádek i pojem speciální relace, s kterou běžně pracujeme, *relace ekvivalence*. (Samotný pojem relace, zahrnující relace unární, binární a obecně n -ární, je obecnější, pro naše potřeby však není nutné se jím ve vší obecnosti zabývat.)

Nechť M a N jsou neprázdné množiny. *Binární relací* rozumíme každou podmnožinu kartézského součinu $M \times N$, tj. jakoukoli množinu \mathcal{R} uspořádaných dvojic $[z, w]$, kde $z \in M$ a $w \in N$. Je-li $M = N$, hovoříme o *relaci na množině* M . (Binární) relace na množině M se nazývá *ekvivalence*, má-li následující vlastnosti

- $[z, z] \in \mathcal{R}$, relace je *reflexivní*,

- $[z, w] \in \mathcal{R} \Rightarrow [w, z] \in \mathcal{R}$, relace je *symetrická*,
- $[z, w], [w, u] \in \mathcal{R} \Rightarrow [z, u] \in \mathcal{R}$, relace je *tranzitivní*.

Nechť $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in M \times M$ jsou relace na množině M . Předpokládejme, že pro každou dvojici $[z, w] \in \mathcal{R}_1$ je w prvkem oboru relace \mathcal{R}_2 , tj. množiny $D_{\mathcal{R}_2} = \{w \in M \mid \text{existuje } z \in D_{\mathcal{R}_1}\}$ tak, že $[w, u] \in \mathcal{R}_2$. *Složením*, nebo též *kompozicí* relací \mathcal{R}_1 a \mathcal{R}_2 rozumíme relaci

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \{[z, u] \in M \times M \mid \text{existuje } w \in M \text{ tak, že } [z, w] \in \mathcal{R}_1, [w, u] \in \mathcal{R}_2\}.$$

Relace \mathcal{R}^{-1} a \mathcal{R} se nazývají navzájem *inverzní*, platí-li

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{I}$$

, kde $\mathcal{I} = \{[z, z] \in M \times M \mid z \in M\}$.

Jak to souvisí s pojmem zobrazení, tj. i s dosavadním pojetím funkce? Dejme tomu, že M je nějaký číselný obor. Chápeme-li v rámci pojmu relace první člen uspořádané dvojice $[z, w] \in M \times M$ jako vzor a druhý jako obraz, a víme-li, že týž vzor nesmí mít dva obrazy, můžeme zobrazení definovat třeba jako takovou relaci na množině M , pro níž platí implikace $[z, w_1], [z, w_2] \in \mathcal{R} \Rightarrow w_1 = w_2$. Jak jistě tušíte, v případě *komplexní funkce komplexní proměnné* bude $M = \mathbf{C}$, resp. $M = \mathbf{C}^+$. Teď bude následovat „dávka“ snadno pochopitelných definic.

Komplexní funkcí komplexní proměnné rozumíme každou relaci na množině \mathbf{C}^+ . Značíme ji $f \subset \mathbf{C}^+ \times \mathbf{C}^+$. Množiny

$$\begin{aligned} D_f &= \{z \in \mathbf{C}^+ \mid \text{existuje } w \in \mathbf{C}^+ \text{ tak, že } [z, w] \in f\}, \\ H_f &= f(D_f) = \{w \in \mathbf{C}^+ \mid \text{existuje } z \in D_f \text{ tak, že } [z, w] \in f\}, \\ f(z) &= \{w \in \mathbf{C}^+ \mid [z, w] \in f\} \end{aligned}$$

se nazývají *definiční obor*, *obor hodnot* a *množině hodnot* funkce f v bodě z . Je-li relace f zobrazení, nazývá se funkce *jednoznačná*, v opačném případě *mnohoznačná*. Obsahuje-li množina $f(z)$ nekonečně mnoho hodnot, je funkce *nekonečněznačná*. Funkce f se nazývá *konečná*, je-li $f(z) \subset \mathbf{C}$. O *funkci reálné proměnné* se jedná v případě, že $D_f = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, o *reálnou funkci* v případě $H_f \subset \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Nechť f a g jsou komplexní funkce komplexní proměnné. Předpokládejme, že $H_f \subset D_g$. *Složenou funkcí* $h = g \circ f$ se nazývá relace $g \circ f$. *Inverzní funkcí* k

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ?21

funkci f je relace f^{-1} . Funkce f se nazývá *jednolistá*, je-li funkce f^{-1} jednoznačná. Není-li funkce f jednolistá, nazývají se obory hodnot jednoznačných větví funkce f^{-1} *oblasti jednolistosti* funkce f .

Nechť $f \subset C^+ \times C^+$ je funkce. *Jednoznačnou větví* funkce f nazveme jednoznačnou funkci ϕ , pro kterou je $D_\phi \subset D_f$ a $\phi(z) \subset f(z)$ pro libovolnou hodnotu $z \in D_\phi$.

Příklad 13.4: Příklady funkcí

Uvedeme nejjednodušší příklady komplexních funkcí komplexní proměnné, včetně speciálních situací.

- funkce $f = \{[z, \operatorname{Re} z] \mid z \in \mathbf{C}\}$, $g = \{[z, \operatorname{Im} z] \mid z \in \mathbf{C}\}$, jsou jednoznačné, reálné a konečné, $D_f = D_g = \mathbf{C}$, $H_f = H_g = \mathbf{R}$
- funkce $f = \{[z, |z|] \mid z \in \mathbf{C}^+\}$ je reálná a jednoznačná, není však konečná, neboť $|\infty| = \infty$ (viz tabulku pro počítání s nekonečny), $D_f = \mathbf{C}^+$, $H_f = \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$, $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$
- funkce $f = \{[z, z^2] \mid z \in \mathbf{C}^+\}$ je jednoznačná, ale není konečná, $D_f = \mathbf{C}^+$, H_f
- funkce $f = \{[z, \varphi] \mid z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \varphi \in \arg z\}$ (viz vztah (13.1)) je reálná, nekonečněznačná a konečná, $D_f = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $H_f = \mathbf{R}$, $f(z) = \arg z = \{\varphi \in \mathbf{R} \mid z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}$
- každá z funkcí $\varphi_k = \{[z, \varphi_k] \mid z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \varphi_k = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, je reálná, jednoznačná a konečná, $D_{\varphi_k} = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $H_{\varphi_k} = [2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $\varphi_k(z) = \operatorname{Arg} z$

Příklad 13.5: Odmocniny

S odmocninami je to v komplexním oboru jiné než v oboru reálném. Uvědomme si dvě odlišná vyjádření týkající se reálného oboru: na otázku, jaká je hodnota odmocniny ze čtyř musíme odpovědět, že 2. Odpověď na otázku, jaké je řešení rovnice $y^2 = 4$ zní $y_1 = -2$, $y_2 = 2$. Je tomu tak proto, že v reálném oboru chápeme zápis $\sqrt{4}$ jako hodnotu funkce $y = \sqrt{x}$ v bodě $x = 4$. Funkce v reálném oboru je však definována jako zobrazení, proto vzor $x = 4$ nemůže mít dva obrazy. Hodnoty $y_1 = -2$ a $y_2 = 2$, které jsou řešením rovnice $y^2 = 4$, získáme jako funkční hodnoty dvou funkcí, $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = -\sqrt{x}$. V komplexním oboru se mají věci jinak. Za „ n -té odmocniny“

22KAPITOLA 13. PROMĚNNÁ JE KOMPLEXNÍ— VÝSLEDKY JSOU NOBLESNÍ

z daného čísla z se považují všechna řešení rovnice $w^n = z$. Uvažme nejprve ten nejjednodušší případ, druhou odmocninu:

$$f = \{[z, w] \in \mathbf{C}^+ \times \mathbf{C}^+ \mid z = w^2\}.$$

Funkce $z = g(w) = w^2$ je jednoznačná, pro $w \in \mathbf{C}^+$ však není konečná. Zjistíme, jak vypadá množina $f(z)$ pro $z \in \mathbf{C}^+$. Řešíme rovnici $z = w^2$ vzhledem k neznámé w . Při proceduře řešení s výhodou použijeme exponenciální tvar zápisu proměnných w a z ,

$$w = |w| e^{i(\text{Arg } w + 2r\pi)}, \quad z = |z| e^{i(\text{Arg } z + 2s\pi)}, \quad r, s \in \mathbf{Z}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} |z| &= |w|^2, & e^{i(\text{Arg } z + 2s\pi)} &= e^{2i(\text{Arg } w + 2r\pi)}, \\ |w| &= \sqrt{|z|}, & \arg w &= \left\{ \frac{1}{2} \text{Arg } z + 2k\pi, \frac{1}{2} \text{Arg } z + (2k+1)\pi \right\}, \quad m \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Ke každé hodnotě proměnné z dostaneme dvě hodnoty w , konkrétně

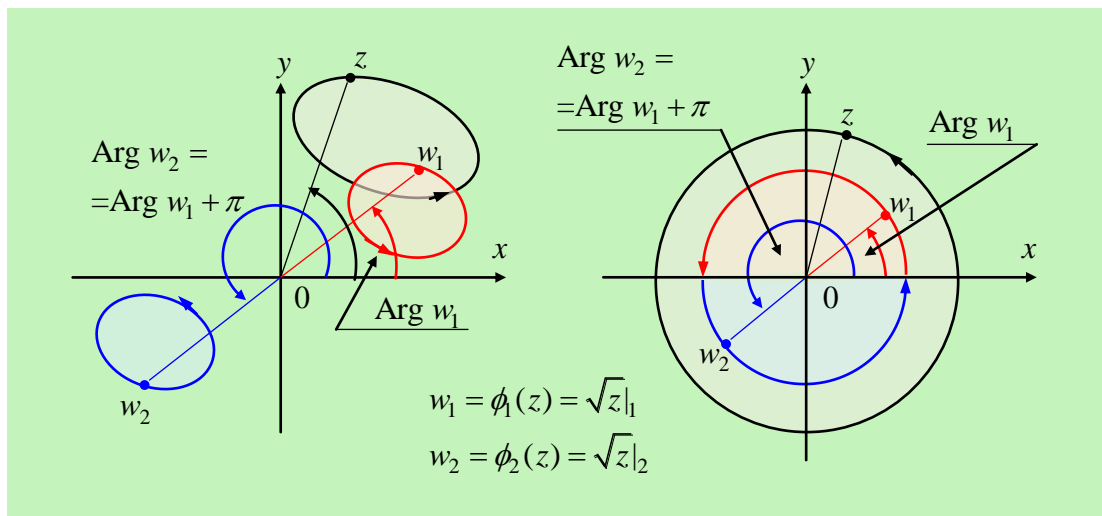
$$w_1 = \phi_1(z) = \sqrt{|z|} e^{\frac{i}{2} \text{Arg } z}, \quad w_2 = \phi_2(z) = \sqrt{|z|} e^{\frac{i}{2} \text{Arg } z + i\pi}, \quad f(z) = \{\phi_1(z), \phi_2(z)\}.$$

Opravdu ke *každé* hodnotě z ? Funkce $z = w^2$ je sice definována na \mathbf{C}^+ a jejím oborem hodnot je rovněž \mathbf{C}^+ , inverzní funkce však není definována pro $z = 0$ a $z = \infty$, neboť v těchto dvou bodech Gaussovy roviny \mathbf{C}^+ není definován argument. Je proto $D_{f^{-1}} = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ a $H_{f^{-1}} = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Tato funkce není jednoznačná (proto původní funkce f není jednodlistá). Má dvě jednoznačné větve, například $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$. Body 0 a ∞ se nazývají *body větvení* funkce f . Název „bod větvení“ má svou geometrickou interpretaci. Pokusíme se ji vyložit pomocí obrázků 13.3 a 13.4 z matematického hlediska ne příliš precizně, zato názorně.

Pozn.: Je třeba zdůraznit, že obrázky jsou pouze schematické. Při přesném výpočtu by křivky odvozené z výchozí křivky \mathcal{C} pomocí funkcí $\phi_1(z)$ a $\phi_2(z)$ vypadaly poněkud jinak. Ukázka je na obrázku 13.5.

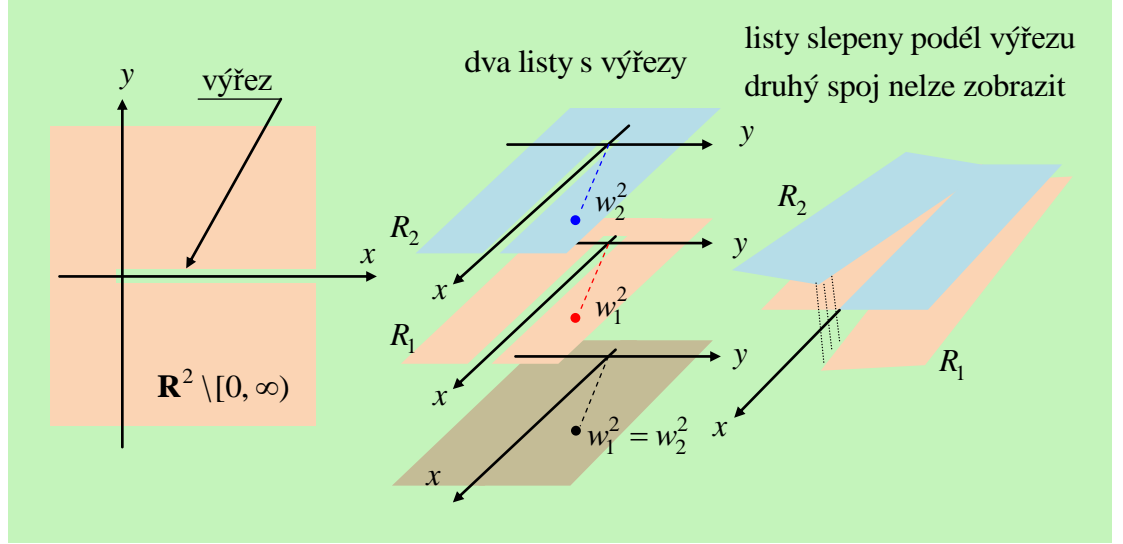
Zvolme v \mathbf{C} jednoduchou uzavřenou křivku \mathcal{C} , která neobepíná bod 0 . Předpokládejme, že proměnná z „oběhne“ tuto křivku jednou z výchozího bodu z_0 zpět do tohoto bodu. Jednoznačné funkce $\phi_1(z)$ a $\phi_2(z)$ jsou v bodech této křivky definovány, proměnné $w_1 = \phi_1|_{\mathcal{C}}$ a $w_2 = \phi_2|_{\mathcal{C}}$ „oběhnou“ po uzavřených křivkách \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_2 (obrázek 13.3 vlevo). Výsledná změna argumentu jak proměnné z , tak funkčních hodnot funkcí $\phi_1(z)$ a $\phi_2(z)$ bude po

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ?23



Obrázek 13.3: Body větvení.

oběžích nulová. Jestliže však oblast, kterou křivka \mathcal{C} obepíná, obsahuje bod 0, bude situace jiná. Hodnota argumentu proměnné z se při oběhu křivky změní o 2π , takže každá z obou větví odmocniny přejde v tu druhou, neboť její argument se změní o π (obrázek 13.3 vpravo). Možnost, jak předejít takovému přechodu, spočívá v tom, že zabráníme křivce, která by obíhala bod 0, aby se uzavřela. To lze zajistit například *výřezem* podél nezáporné části osy x , tj. omezením definičního oboru funkcí $\phi_1(z)$ a $\phi_2(z)$ na množinu $\mathbf{C} \setminus [0, \infty)$. Jiný způsob, jak rozlišit větve $w_1 = \phi_1(z)$ a $w_2 = \phi_2(z)$ (pro něž je $z = w_1^2 = w_2^2$) spočívá v náhradě oboru hodnot \mathbf{C} funkce $z = w^2$ modelem „dvojitě“ Gaussovy roviny, tj. dvěma „listy“, které označíme R_1 a R_2 . List R_1 bude definičním oborem funkce $\phi_1(z)$ (první větve), list R_2 definičním oborem funkce $\phi_2(z)$ (druhé větve). Znamená to, že bod w^2 zobrazíme do roviny R_1 , je-li $\text{Arg } w \in [0, \pi)$ (obraz druhých mocnin první větve) a do roviny R_2 , je-li $\text{Arg } w \in [\pi, 2\pi)$ (obraz druhých mocnic druhé větve). Aby byl umožněn přechod první větve v druhou (a naopak) při změně argumentu o 2π a celistvé násobky hodnoty 2π , je třeba tyto dvě roviny nějak propojit: rozstříhneme oba listy R_1 a R_2 podél intervalu $[0, \infty)$ na reálné ose a slepit horní část výřezu listu R_2 k dolní části výřezu listu R_1 . Po oběhu bodu po kladně orientované křivce v rovině R_1 přejde reprezentující bod z z listu R_1 na list R_2 , takže větev $\phi_1(z)$ přejde ve větev $\phi_2(z)$. Aby při dalším oběhu bodu z po dané křivce přešla větev $\phi_2(z)$ zpět ve větev $\phi_1(z)$, museli bychom



Obrázek 13.4: Výřezy a Riemannovy plochy.

slepit dolní část výřezu listu R_2 s horní částí výřezu listu R_1 . To už ale v trojrozměrném modelu provést nelze. Takto spleené listy R_1 a R_2 mají společné dva body, nulu a nekonečno. Tvoří tzv. *Riemannovu plochu* funkce f zvané *druhá odmocnina*.

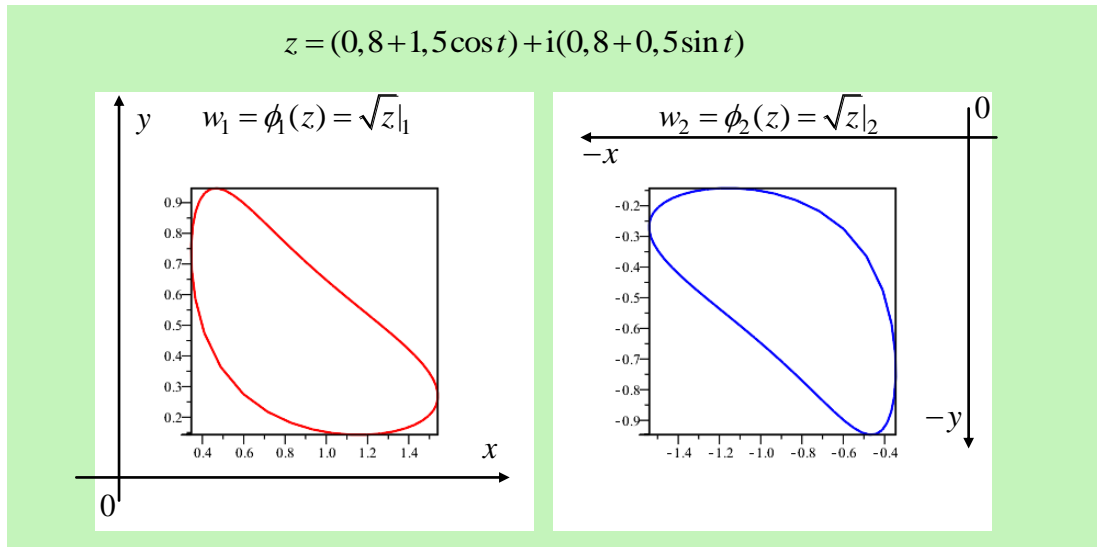
S odmocninami ještě nejsme hotovi, zatím jsme se věnovali jen druhé odmocnině. Jak to bude vypadat s n -tou odmocninou pro $n \in \mathbf{N}$? Inverzní relace k n -té mocnině se nazývá *n -tá odmocnina*. Je to mnohoznačná funkce, kterou označíme $f(z)$. Jejimi hodnotami budou všechna řešení w rovnice $z = w^n$. Najdeme je. Pro $n = 1$ je řešení triviální. I když pro $n = 2$ jsme problém důkladně probrali, uvažujme obecně o případech $n \geq 2$. Řešení zmíněné rovnice snadno najdeme, vyjádříme-li proměnné z a w v exponenciálním tvaru. Tomuto vyjádření se vymykají body 0 a ∞ , pro něž není definován argument. Pro ně proto zvlášť definujeme $\sqrt[n]{0} = 0$ a $\sqrt[n]{\infty} = \infty$. Pro $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ platí

$$w = |w|e^{i(\text{Arg } w + 2r\pi)}, \quad z = |z|e^{i(\text{Arg } z + 2s\pi)} \implies |z|e^{i(\text{Arg } z + 2s\pi)} = |w|^n e^{i(n\text{Arg } w + 2rn\pi)}.$$

S uvážením požadavku, aby hlavní hodnota argumentu komplexní proměnné, ať už w či z , ležela v intervalu $[0, 2\pi)$, dostaneme z tohoto porovnání

$$|z| = |w|^n, \quad \text{Arg } z = n\text{Arg } w + 2k\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \implies |w| = \sqrt[n]{z}, \quad \text{Arg } w = \frac{1}{n}\text{Arg } z + 2\pi \frac{k}{n}.$$

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ?25



Obrázek 13.5: Odmocnina — přesný výpočet pro z obíhající po elipse.

Tato řešení se budou lišit pro různé hodnoty $k \in \{0, \dots, n\}$, potom se začnou opakovat. n -tá odmocnina má tedy n větví, z nichž každá je určena hodnotou $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$w_k = \phi_k(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{1}{n} \text{Arg } z + \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

Pro $k = 0$ dostáváme *hlavní větev* n -té odmocniny. Jak vypadá Riemannova plocha? Protože je n -tá odmocnina n -značná, musí být n -tá mocnina n -listá. Zvolme pevně úhel β a uvažujme o výsečích Gaussovy roviny

$$V_k = \left\{ w \in \mathbf{C}^* \setminus \{0, \infty\} \mid \text{Arg } w \in \left[2\pi \frac{k}{n}, 2\pi \frac{k+1}{n} \right) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Funkce $z = f^{-1}(w) = w^n$ je na každé z těchto výsečí prostá a zobrazuje V_k na celou Gaussovou rovinu s vyjmutými body nula a nekonečno, tj. $f^{-1}(V_k) = \mathbf{C}^+ \setminus \{0, \infty\}$. Každá z takto získaných identických Gaussových rovin tvoří jeden list Riemannovy plochy R_0 až R_{n-1} . V každém z listů provedeme výřez a postupujeme podobně jako na obrázku 13.3: spojíme postupně dolní okraj výřezu plochy R_0 s horním okrajem výřezu plochy R_1 , dolní okraj výřezu plochy R_1 s horním okrajem výřezu plochy R_2 , atd., až nakonec dolní okraj výřezu plochy R_{n-2} s horním okrajem výřezu plochy R_{n-1} . Spojíme ještě

okraje výřezů, které zatím zůstaly volné — dolní okraj výřezu plochy R_{n-1} a horní okraj výřezu plochy R_0 . Protože se celá procedura ve skutečnosti děje ve čtyřrozměrném prostoru, nedokážeme poslední krok nakreslit tak, aby nedošlo k protnutí zbývající části celé plochy.

Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo a $z \in \mathbf{C}^+ \setminus \{0, \infty\}$. n -tou odmocninou z proměnné z nazýváme inverzní funkci (relaci) k n -té mocnině, tj. funkci s jednoznačnými větvemi

$$\phi_k(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\operatorname{Arg} z + \frac{2k\pi}{n})}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (13.5)$$

13.1.3 Limity, spojitost, posloupnosti a řady funkcí komplexní proměnné

V předchozím odstavci jsme definovali funkce komplexní proměnné a popsali jejich zvláštnosti, neobvyklé v oboru proměnných reálných. Jednou z nich je možnost „dosadit“ za proměnnou z nekonečno (a funkce také může „hodnoty“ nekonečno nabývat). Druhou je případná mnohoznačnost funkcí. Od této chvíle do okamžiku, kdy bude ohlášena změna, se budeme věnovat funkcím, které jsou *konečné a jednoznačné*. To ovšem neznamená, že bychom zavrhlí odmocniny, nebo jiné mnohoznačné funkce, na které případně narazíme. V takovém případě však naše úvahy omezíme na jejich jednoznačné větve.

Pojem limity a spojitosti funkce komplexní proměnné nebude dělat problémy, neboť už máme dost zkušeností s limity funkcí více proměnných. Proto se hned pustíme do definic a tvrzení, která však již budeme dokazovat ve stručnosti, nebo vůbec. Můžeme se totiž odkazovat na postupy podrobně rozebrané v kapitole 8, které jsou často „univerzální“, tj. použitelné jak pro reálná, tak pro komplexní čísla či funkce.

Nechť $f(z)$ je funkce s definičním oborem D_f a $E \subset D_f$. Dále předpokládejme, že $z_0 \in \mathbf{C}^+$ je hromadný bod množiny E , tj. $z_0 \in \bar{E}$. Řekneme, že funkce $f(z)$ má v bodě *limitu* $L \in \mathbf{C}^*$ *vzhledem k množině* E , jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že $f(P(z_0, \delta) \cap E) \subset B(L, \varepsilon)$. Jestliže množina E obsahuje nějaké okolí $B(z_0, \vartheta)$, popřípadě $P(z_0, \theta)$, hovoříme o *limitě funkce* $f(z)$ *v bodě* z_0 . zapisujeme

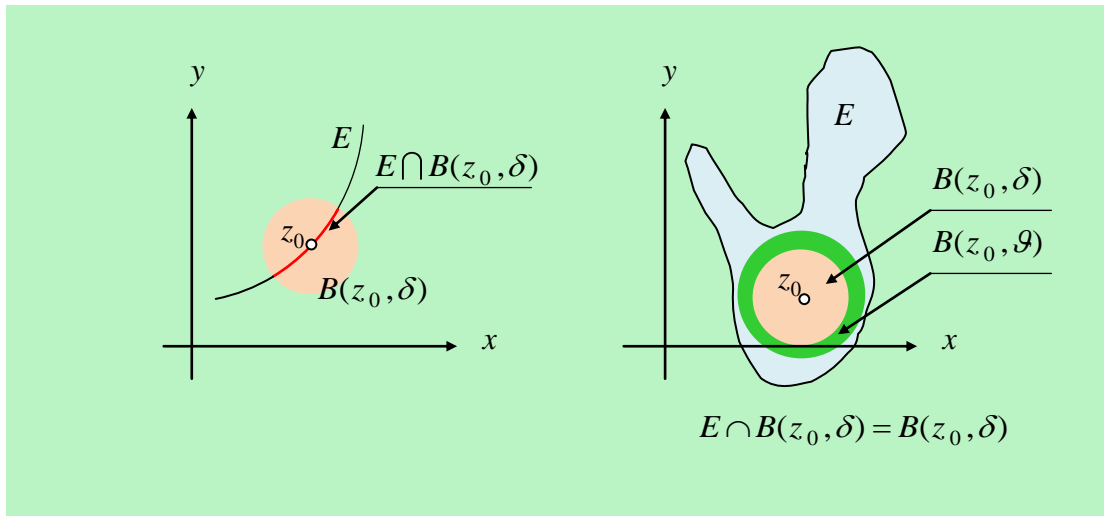
$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = L, \quad \text{resp.} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 27

Řekneme, že funkce $f(z)$ je v bodě z_0 spojitá vzhledem k množině E , resp. spojitá, je-li v tomto bodě definována a platí-li

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = f(z_0), \quad \text{resp.} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Situaci názorně ukazuje obrázek 13.6. Jistě jste si všimli, že se definice li-



Obrázek 13.6: K pojmu limity funkce v bodě vzhledem k množině, resp. limity v bodě.

imity funkce v bodě vzhledem k množině a definice limity funkce v bodě neliší od odpovídajících definic limit reálné funkce více (konkrétně dvou) proměnných v odstavci 9.2.1 druhého dílu (strany 459 a 460). Odchylna spočívající v tom, že nyní uvažujeme o „kulatých“ okolích bodů (kruhová a prstencová), zatímco v případě funkcí dvou reálných proměnných byla „hranatá“ (obdélníková, resp. ryzí obdélníková), není podstatná. Už v druhém dílu jsme si totiž vyložili, že bázi euklidovské topologie v \mathbf{R}^n mohou být jak otevřené n -rozměrné kvádry (pro $n = 2$ obdélníky), tak otevřené n -rozměrné koule (pro $n = 2$ kruhy). Mohli bychom proto jednoduše konstatovat, že pravidla pro počítání *konečných* limit pro $z \in \mathbf{C}$ budou u funkcí komplexní proměnné stejná jako pro funkce více proměnných (věta 9.2). Navíc je pouze to, že v případě limit funkcí komplexní proměnné existuje i možnost $z_0 = \infty$ a také možnost, že limitou konečné funkce může být bod ∞ . Pravidla rekapitulujeme

v následující větě již bez důkazů. Z pravidel pro limity pak bezprostředně vyplývají pravidla pro spojitost funkcí v daném bodě. A ještě poznámka: Víte, proč je pro definici limity funkce v daném bodě potřebný předpoklad, aby množina E obsahovala nějaké okolí $B(z_0, \vartheta)$? Důvod je stejný, jak jsme jej vyložili v druhém dílu v příkladu 9.15, následujícím po definicích limity na stranách 459 a 460: abychom mohli hovořit o limitě funkce v bodě (tj. o limitě jako takové, bez vazby na nějakou množinu E), je třeba, aby limita na množině E nezávisela. Méně přesně řečeno, blížíme-li se k bodu z_0 z různých stran, je třeba, aby se funkční hodnoty blížily k téže limitě. Je to podobné jako v případě limity zleva a zprava u funkce jedné reálné proměnné (první díl, strana 70).

Věta 13.4 (Vlastnosti limit): *Nechť $f(z)$ je (konečná a jednoznačná) funkce, $E \subset D_f$, z_0 hromadný bod množiny E . L, L_1, L_2, S je označení pro konečné limity. Platí*

<i>Nechť (předpoklady)</i>	<i>pak (tvrzení)</i>
$f(z)$ má v bodě z_0 limitu	\implies tato limita je jediná
$A \subset E$, z_0 je hromadný bod množiny A $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = L$	$\implies \lim_{z \rightarrow z_0, z \in A} f(z) = L$
$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in A} f(z) = L$	$\implies \lim_{z \rightarrow z_0, z \in A \cup B} f(z) = L$
$f(z)$ má v bodě z_0 konečnou limitu vzhledem k množině E	\iff ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $z_1, z_2 \in P(z_0, \delta)$ je $ f(z_2) - f(z_1) < \varepsilon$
$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = L_1$ $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} g(z) = L_2$ (pro podíl nechť $g(z) \neq 0$, $L_2 \neq 0$)	$\implies \lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} [f(z) \pm g(z)] = L_1 \pm L_2$ $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} [f(z)g(z)] = L_1L_2$ $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} [f(z)/g(z)] = L_1/L_2$
$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = L$, $f(E) \subset G$ $\lim_{w \rightarrow L, w \in G} g(w) = S$, existuje $\delta > 0$ tak, že $f(z) \neq L$ na $P(z_0, \delta) \cap E$	$\implies \lim_{z \rightarrow z_0} g[f(z)] = S$
$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = 0$ a $h(z)$ je ohraničená na jistém $P(z_0, \delta)$	$\implies \lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} [f(z)h(z)] = 0$
$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = 0$ $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = \infty$ $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = L$	$\iff \lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = 0$ $\iff \lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = \infty$ $\implies \lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = L $
$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} f(z) = L \in \mathbf{C}$	$\iff \lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} L$ $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in E} \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} L$

S výjimkou první jsou vlastnosti limit formulovány pro limitu v bodě *vzhledem k množině*. Pátá až předposlední vlastnost zůstane v platnosti, půjde-li o limitu *jako takovou*. Ve čtvrté vlastnosti je v případě jejího použití pro limitu jako takovou zaměnit $P(z_0, \delta) \cap E$ za $P(z_0, \delta)$. Poslední vlastnost představuje *Cauchyovo-Bolzanovo kritérium* stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí

V teorii funkcí komplexní proměnné se budeme neustále setkávat s řadami funkcí. Konkrétně půjde o řady mocninné, jak s kladnými, tak se zápornými mocninami proměnné. Proto nyní stručně rekapitulujeme některé podstatné pojmy týkající se posloupností a řad funkcí, které známe z kapitoly 8. Samozřejmě, půjde o bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupností a řad. Oba typy konvergence a jejich rozdílnost jsme velmi důkladně probrali v kapitole 8. Přejdem ke komplexní proměnné se na nich prakticky nic nemění, opět jen s výjimkou role bodu nekonečno.

Uvažujme o posloupnosti (konečných, jednoznačných) funkcí $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ definovaných na množině $E \in \mathbf{C}^+$. Řekneme, že posloupnost *bodově konverguje* k funkci $f(z)$ na množině E , jestliže v každém bodě z_0 konverguje číselná posloupnost $\{f_n(z_0)\}_{n \in \mathbf{N}}$ k hodnotě $f(z_0)$, tj. když pro každý bod $z_0 \in E$ a každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje index $N(z_0, \varepsilon)$ tak, že pro všechny hodnoty indexu $n \geq N(z_0, \varepsilon)$ je $f_n(z_0) \in B(f(z_0), \varepsilon)$.

Všimněte si, že jsme v definici schválně zdůraznili skutečnost, že index $N(z_0, \varepsilon)$ není z hlediska množiny E univerzální, nýbrž závisí na z_0 . jednoduše řečeno, v některých bodech množiny E může posloupnost konvergovat „lépe“, v jiných „hůře“. Konvergenci považujeme za tím „lepší“, čím je index $N(z_0, \varepsilon)$ pro dané ε menší. Ale to už víme z kapitoly 8. Ještě jednu věc je třeba si uvědomit: definice konvergence se sice vztahuje k posloupnosti konečných funkcí, ale není vyloučeno, že funkce, která je její limitou, může nabývat i hodnot nekonečno.

Řekneme, že posloupnost (konečných, jednoznačných) funkcí $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ definovaných na množině $E \subset \mathbf{C}^+$ *konverguje ke konečné funkci* $f(z)$ na množině E *stejnoměrně*, když pro každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje index $N(\varepsilon)$ tak, že pro všechny hodnoty indexu $n \geq N(\varepsilon)$ a všechny body $z \in E$ je $f_n(z) \in B(f(z), \varepsilon)$.

Jistě není třeba zdůrazňovat, že odlišnost slovosledu v definici stejnoměrné a bodové konvergence je obsahově velice podstatná. Index $N(\varepsilon)$ nezávisí na bodu množiny E , v které posloupnost vyčíslujeme, je pro celou množinu E univerzální. Dalo by se říci, že konvergence posloupnosti je ve všech bodech množiny E „stejně dobrá“. Zdůrazněme také, že pojem konvergence je definován pro případ, že nejen členy posloupnosti, ale také limita, jsou konečné funkce. A ještě jeden typ konvergence jsme zmiňovali v kapitole 8:

Posloupnost $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ nazýváme *lokálně stejnoměrně konvergentní* k funkci $f(z)$ na množině E , jestliže každý bod $z \in E$ má takové okolí $B(z, \delta_z)$, že posloupnost konverguje stejnoměrně na množině $E \cap B(z, \delta_z)$.

Příklad 13.6: Geometrická posloupnost funkcí

Geometrická posloupnost funkcí se nám jako vděčná ukázka rozdílu mezi obyčejnou a stejnoměrnou konvergencí osvědčila už v kapitole 8 (příklady 8.21 až 8.24). Stejným způsobem „zafunguje“ i v oboru komplexní proměnné. Posloupnost $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$, $f_n(z) = z^n$, bodově konverguje k identicky nulové funkci na množině $E = B(0, 1)$ (jednotkový kruh se středem v bodě 0). Na tomto kruhu však není zaručena stejnoměrná konvergence. Budeme-li totiž je zvolenému $\varepsilon > 0$ hledat index, od kterého výše platí $f_n(z) \in B(0, \varepsilon)$, zjistíme (zcela stejným postupem jako v příkladu 8.21), že jej nelze zvolit univerzálně pro celou množinu $B(z_0, \varepsilon)$, neboť $n > \frac{\log \varepsilon}{\log |z|}$. Pro $|z| \rightarrow 1$ tento index roste do nekonečna. Ke každému bodu $z \in B(0, \varepsilon)$ však existuje okolí, na němž posloupnost konverguje k nulové funkci stejnoměrně. Třeba okolí $B(z, \frac{1}{2}(1 - |z|))$. Závěr: posloupnost $\{z^n\}$ konverguje na množině $B(0, 1)$ k nulové funkci bodově a lokálně stejnoměrně, nekonverguje však stejnoměrně. Na kruhu $B(0, 1 - \delta)$ pro jakkoli malé $\delta > 0$ však již stejnoměrná konvergence zajištěna je. Na tomto příkladu vidíme, že bodová konvergence je „nejslabší“, stejnoměrná „nejsilnější“ a lokálně stejnoměrná „něco mezi“.

Obecně platné je schema

stejnoměrná konvergence na $E \implies$ lokálně stejnoměrná konvergence na $E \implies$
 \implies bodová konvergence na E

a tvrzení: Posloupnost $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ je stejnoměrně konvergentní na (otevřeném) okolí $B(z_0, R)$ bodu $z_0 \in \mathbf{C}^+$, $R \in (0, \infty)$, právě když je stejnoměrně konvergentní na každém otevřeném okolí tohoto bodu $B(z_0, r)$, $r \in (0, R)$, nebo, ekvivalentně, jeho uzávěru $\bar{B}(z_0, r)$. Anebo, ještě obecněji: Necht' $E \subset \mathbf{C}^+$ je otevřená množina. Posloupnost $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ konverguje lokálně stejnoměrně na E právě když konverguje stejnoměrně na každé uzavřené podmnožině $K \subset E$.

Jistě jste si všimli, že předchozí tvrzení zahrnuje i situace, kdy bodem z_0 je bod nekonečno. V takových případech je jen potřeba si připomenout definici okolí tohoto bodu.

Uvažujme opět o konečných a jednoznačných funkcích na množině $E \subset \mathbf{C}^+$. Řadu funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ nazveme *bodově konvergentní na množině E* , jestliže bodově konverguje posloupnost $\{s_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ jejich částečných součtů $s_n(z) = f_1(z) + \dots + f_n(z)$. Řekneme, že řada *konverguje na E stejnoměrně*, resp. *lokálně stejnoměrně* konverguje-li posloupnost jejich částečných součtů na E

stejně, resp. lokálně stejně. Řada se nazývá *absolutně konvergentní na E* , jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ bodově konverguje na E .

Příklad 13.7: Součet geometrické řady

Prošetříme bodovou, stejně a absolutní konvergenci geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, $f_n(z) = z^n$, na množině \mathbf{C}^+ . (Sčítání od $n = 0$ se jistě nikdo nedívá.) n -tý částečný součet této řady označíme $s_n(z)$, n -tý částečný součet řady z absolutních hodnot $S_n(z)$. Platí

$$s_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad S_n(z) = \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|} = \sum_{k=0}^n |z|^k.$$

(Vztahy si snadno sami dokážete matematickou indukcí — úloha 4 ve Cvičení 13.1.5.) Kvocienty uvažovaných geometrických řad jsou $q = z$ a $Q = |z|$. Úvahy o konvergenci proto povedem zvlášť pro množiny $B(0, 1)$, $\mathbf{C}^+ \setminus B(0, 1)$ a $\text{h}B(0, 1)$ (vnitřek, vnějšek a hranici jednotkového kruhu se středem v bodě 0.)

- $E = B(0, 1)$

V každém bodě množiny $B(0, 1)$ existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{s_n\} = \frac{1}{1 - z}.$$

Geometrická řada bodově konverguje na množině $B(0, 1)$ k součtu $s(z) = (1 - z)^{-1}$. Pro součty $S_n(z)$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n(z)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|} \right\} = \frac{1}{1 - |z|},$$

řada konverguje také absolutně, a to k součtu $(1 - |z|)^{-1}$. Pro prověření stejnoměrné konvergence postupujeme obdobně jako v příkladu 13.6 či v příkladu 8.21. Zvolíme $\varepsilon > 0$ a vzhledem k indexu n řešíme nerovnici

$$|s_n(z) - s(z)| < \varepsilon \implies \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} \right| < \varepsilon.$$

Po úpravě a logaritmování (s uvážením skutečnosti, že logaritmus je rostoucí funkce a že $|z| < 1$) dostaneme

$$n < \frac{\log(\varepsilon|1 - z|)}{\log|z|} \implies n > \left\lceil \frac{\log(\varepsilon|1 - z|)}{\log|z|} \right\rceil.$$

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 33

Vidíme, že index, od něhož výše platí požadovaná nerovnost, závisí na proměnné z . Blíží-li se bod z k hranici kruhu $B(0, 1)$, index neomezeně roste. Konvergence řady tedy není stejnoměrná. Je však lokálně stejnoměrná: stačí kruh zmenšit na $B(0, 1 - \delta)$ pro jakkoli malé kladné δ .

- $E = \mathbf{C}^+ \setminus B(0, 1)$

Pro vnějšek kruhu $B(0, 1)$, tj. pro $|z| > 1$, použijeme následující odhad:

$$|s_n(z)| = \left| \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| \geq \frac{|1 - |z|^n|}{1 + |z|} \rightarrow \infty.$$

Na množině $\mathbf{C}^+ \setminus \bar{B}(0, 1)$ řada nekonverguje ani bodově.

- $hB(0, 1) = \{z \in \mathbf{C}^+ \mid |z| = 1\}$

Na hranici jednotkového kruhu se středem v nule je $z = e^{i\varphi}$. Pak

$$s_n(z) = s_n(\varphi) = \frac{1 - e^{in\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = e^{(n-1)\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

$$S_n(z) = S_n(\varphi) = \left| \frac{\sin \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right|.$$

Posloupnosti $\{s_n(\varphi)\}$ a $\{S_n(\varphi)\}$ zjevně limintu nemají. Jako příklad vezměme třeba bod $z = i$. Posloupnost $\{s_n(i)\}$ má čtyři hromadné body: 0 pro $n = 4m$, 1 pro $n = 4m + 1$, $1 + i$ pro $n = 4m + 2$ a i pro $n = 4m + 3$, $m \in \mathbf{N}$. Na hranici kruhu $B(0, 1)$ tedy geometrická řada, ani řada z absolutních hodnot jejích členů, nekonvergují ani bodově, natož stejnoměrně.

Souhrn výsledků ukazuje tabulka.

	absolutní	bodová	stejnoměrná	lok. stejn.
$B(0, 1)$	$\frac{1}{1- z }$	$\frac{1}{1-z}$	ne	$\frac{1}{1-z}$
$\mathbf{C}^+ \setminus B(0, 1)$	ne	ne	ne	ne
$hB(0, 1)$	ne	ne	ne	ne

Následují věty týkající se konvergence řad. Jejich důkazy jsou takřka přesnou rekapitulací důkazů uvedených v odstavci 8.2.1, proto je zestručníme, popřípadě i vynecháme.

Věta 13.5 (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium): *Posloupnost $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ (konečných, jednoznačných) funkcí definovaných na množině $E \subset \mathbf{C}^+$ konverguje na E stejnoměrně právě tehdy, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechny hodnoty $m, n \geq N$ je $|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ pro všechny body $z \in E$.*

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ (konečných, jednoznačných) funkcí definovaných na množině $E \subset \mathbf{C}^+$ konverguje na E stejnoměrně právě tehdy, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechny hodnoty $n \geq N$ a $k \in \mathbf{N}$ je $|f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+k}(z)| < \varepsilon$ pro všechny body $z \in E$.

Znovu zdůrazněme, že slovosled v předchozí větě jasně říká, že index N je univerzální pro celou množinu E . Důkaz Cauchyova-Bolzanova kritéria pro posloupnosti funkcí provedeme přesně podle postupu použitého v důkazu pro číselné posloupnosti. Pro případ řady je

$$s_{n+k}(z) - s_n(z) = f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+k}(z).$$

Stačí proto, abychom Cauchyovo-Bolzanovo kritérium aplikovali na posloupnost jejích částečných součtů.

Věta 13.6 (Srovnávací kritérium): *Předpokládejme, že posloupnosti funkcí $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ a $\{g_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ jsou definovány na množině $E \subset \mathbf{C}^+$ a splňují následující požadavky:*

- $|f_n(z)| \geq g_n(z)$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ na množině E ,
- řada $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ konverguje na E stejnoměrně.

Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konverguje na E stejnoměrně a absolutně.

Oč je toto tvrzení závažnější, o to je důkaz jednodušší. vyplývá totiž přímo z Cauchyova-Bolzanova kritéria a předpokladů věty. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Protože řada $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$, která je tvořena nezápornými funkcemi (jak plyne z předpokladu $|f_n(z)| \geq g_n(z)$), konverguje na E stejnoměrně, existuje index N tak, že pro všechna $n \geq N$ a všechna $k \in \mathbf{N}$ platí na celé množině E nerovnost

$$g_{n+1}(z) + \dots + g_{n+k}(z) < \varepsilon.$$

Pak

$$|f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+k}(z)| \geq g_{n+1}(z) + \dots + g_{n+k}(z) < \varepsilon.$$

Stejněměrná konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ již plyne přímo z Cauchyova-Bolzanova kritéria. Zvlášť užitečným příkladem srovnávacího kritéria je situace, kdy je řada $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ tvořena nezápornými konstantními funkcemi.

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 35

Její stejnoměrná konvergence je pak ekvivalentní konvergenci řady reálných nezáporných čísel — a na tu máme spoustu kritérií ve větě 8.7. A pokud si na kapitolu 8 o řadách dobře vzpomenete, vybaví se vám jistě zobecněné Weierstrassovo kritérium (první vlastnost ve větě 8.11), které je právě srovnávacím kritériem stejnoměrné konvergence řad, avšak pro funkce reálné proměnné.

Naším cílem ovšem není zabývat se řadami v oboru komplexní proměnné jako takovými. Ke studiu funkcí komplexní proměnné potřebujeme jen velmi speciální řady, a to řady mocninné, ať již s kladnými či zápornými mocninami proměnné. Soustředíme se nejprve na ty s mocninami nezápornými. Ostatní přijdou na přetřes později.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, $c_n, z_0 \in \mathbf{C}$ se nazývá *mocninná řada se středem v bodě z_0* . Řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ se nazývá *mocninná řada se středem v bodě nekonečno*.

Pozn.: Že se nedrží sliby? sotva jsme řekli, že se řadami se zápornými mocninami proměnné zatím zabývat nebudeme, objevuje se taková řada v definici. Záporných mocnin se zbavíme, uvědomíme-li si, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ se středem v bodě nekonečno se dá chápat jako řada v proměnné $\xi = z^{-1}$ se středem v bodě nula. Studium původní řady na okolí $B(\infty, R)$ je ekvivalentní zkoumání řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$ na okolí $B(0, R^{-1})$. V textu se budeme k takovým záměnám uchylvat poměrně často.

Věta 13.7 (Abelova věta a Cauchyův-Hadamardův vzorec): *Předpokládejme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)$, $z_0 \in \mathbf{C}$, konverguje v bodě $z_1 \neq z_0$ (ve svém středu konverguje řada triviálně — skládá se ze samých nul). Pak konverguje absolutně a stejnoměrně v každém (uzavřeném) kruhu $\bar{B}(z_0, r)$, kde $R < |z_1 - z_0|$.*

Existuje právě jedno číslo R , $0 \leq R \leq \infty$, zvané poloměr konvergence řady, takové, že řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na množině $B(z_0, R)$ a diverguje na množině $\mathbf{C}^+ \setminus B(z_0, R)$. Platí

$$R = \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right]^{-1}, \quad R = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right]^{-1}. \quad (13.6)$$

Druhý vzorec v (13.6) platí v případě, že příslušná limita existuje.

Skutečnost, že konvergence odpovídající číselné řady v jednom jediném bodě mimo střed zajišťuje konvergenci (dokonce absolutní a stejnoměrnou!) v celém kruhu až po poloměr daný vzdáleností tohoto bodu od středu řady, nás nepřekvapuje. Něco podobného tu už bylo u mocninných řad funkcí reálné

proměnné (příklad 8.33 a věta 8.12). Přesto si důkazy v rychlosti připomeneme. Zvolme $R < |z_1 - z_0|$. Pro $z \in \bar{B}(z_0, r)$ platí

$$|c_n(z - z_0)|^n = |c_n(z_1 - z_0)|^n \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n = |c_n(z_1 - z_0)|^n \vartheta^n, \quad 0 \leq \vartheta < 1.$$

Protože (číslná) řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ konverguje, je posloupnost $\{c_n(z_1 - z_0)\}_{n \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$ ohraničená (má za limitu nulu). Existuje proto takové číslo M , pro něž je $|c_n(z_1 - z_0)| \leq M$ pro všechna $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Odtud

$$|c_n(z - z_0)|^n \leq M \vartheta^n.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} M \vartheta^n$ je řadou geometrickou, proto konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v každém kruhu $B(0, \vartheta_0)$, kde $0 < \vartheta_0 < 1$ (viz příklad 13.7). Důkaz končí použitím věty 13.6.

Důkaz existence poloměru konvergence a nalezení příslušného vzorce provedme pro zjednodušenou, avšak nejčastější situaci, tj. když existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n}$. Předpokládejme nejprve, že tato limita je konečná a hledejme podmínku pro číslo r tak, aby *číslná řada s nezápornými členy* $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n|$ konvergovala. (Jedná se o přímé uplatnění postupu důkazu věty 8.12.) Podle limitního odmocninového (Cauchyova) kritéria z věty 8.7 je třeba požadovat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n r^n|} < 1 \implies r \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \implies r < [\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}]^{-1}.$$

Naopak, opět podle Cauchyova odmocninového kritéria, pro $r > [\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}]^{-1}$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n|$ diverguje. Hodnota R daná vztahem (13.6) představuje právě předěl mezi konvergencí a divergencí. Položme $r < R$. V kruhu $B(z_0, r)$, a dokonce v uzavřeném kruhu $\bar{B}(z_0, r)$, platí $|c_n(z - z_0)| \leq |c_n r^n|$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ v něm konverguje absolutně a stejnoměrně podle věty 13.6.

V případě, že je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$, je $|z - z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$ pro libovolný bod $z \in \mathbf{C}$, $z \neq z_0$. Podle limitního odmocninového kritéria proto řada nekonverguje v žádném bodě, s výjimkou svého středu z_0 (v něm jsou všechny její členy nulové).

Příklad 13.8: Ještě jedna řada

Rozhodneme o oblastech konvergence a divergence, resp. o typu konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}.$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right) = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \right) = 1.$$

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 37

V závěru výpočtu jsme použili L'Hospitalovo pravidlo. Poloměr konvergence řady je $R = 1$. V kruhu $B(0, 1)$ konverguje řada absolutně a lokálně stejnoměrně, vně tohoto kruhu diverguje. Konvergenci na hranici kruhu je třeba zvlášť prošetřit. Platí tam $z = e^{i\varphi}$. Pro členy řady a jejich absolutní hodnoty na hranici dostáváme

$$u_n = (-1)^n \frac{e^{i\varphi}}{n}, \quad |u_n| = \frac{1}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ je harmonická. Víme o ní, že diverguje. Zbývá zjistit, jak je to „obyčejnou konvergencí“. představme si členy řady jako součiny $u_n = a_n b_n$, $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n e^{in\varphi}$. Vezměme nejprve v úvahu třeba řadu z reálných částí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(-1)^n \cos n\varphi].$$

Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbf{N}}$ je monotonní s nulovou limitou. Posloupnost $\{(-1)^n \cos n\varphi\}_{n \in \mathbf{N}}$ má ohraničenou posloupnost částečných součtů

$$\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \operatorname{Re} e^{ik\varphi} \right| = \operatorname{Re} |-\exp i\varphi| \left| \frac{1 - (-1)^N \exp iN\varphi}{1 + \exp i\varphi} \right| \leq \frac{1}{|\cos \frac{\varphi}{2}|},$$

s výjimkou $\varphi = (2m + 1)\pi$ (odpovídá bodu $z = -1$). S výjimkou uvedeného bodu jsou tak splněny podmínky konvergence podle Dirichletova kritéria (věta 8.7). Zcela analogická je úvaha pro řadu tvořenou imaginárními částmi členů posloupnosti $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Kromě lokálně stejnoměrné konvergence v kruhu $B(0, 1)$ konverguje výchozí řada bodově také na jeho hranici, s výjimkou bodu $z = -1$.

Příklad 13.9: A ještě jedna velice důležitá

Z oboru reálné proměnné známe Taylorovu řadu exponenciální funkce

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

kteřá konverguje absolutně a stejnoměrně na reálné ose. Zkusme prošetřit její konvergenci v komplexním oboru. Pro poloměr konvergence lze užít i vztahu

$$R = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right]^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{-1} = \infty.$$

(úloha 6 ve cvičení 13.5). Řada konverguje absolutně a stejnoměrně v celé (nerozšířené!) Gaussově rovině. Získáváme novou funkci, kterou označíme

$f(z) = e^z$ a snadno odvodíme její vlastnosti (úloha 7 ve cvičení 13.5). Pomocí ní zkonstruujeme další funkce, $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$.

Označíme

$$e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad e^0 = 1, \quad [e^z]^m = e^{mz}, \quad m \in \mathbf{N}$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}),$$

$$\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}).$$

Funkce tangens, kotangens, hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens se již zavedou jednoduše, jako podíly

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \operatorname{cotgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Jsou to funkce mnohoznačné. rozboru jejich vlastností se budeme věnovat později. Mnohoznačná je i funkce logaritmus. I jí se budeme později zabývat podrobně. V tuto chvíli se však naučíme alespoň vyčíslvat její hodnoty.

Příklad 13.10: Logaritmus

Logaritmickou a exponenciální funkci v reálném oboru známe velmi dobře s prvního dílu (první díl, odstavec 2.2.5). Víme, že se jedná o funkce navzájem inverzní. Exponenciální funkce jsme zavedli již i v komplexním oboru, i když ještě ne zcela dokonale. Pro praktické počítání nám to však zatím stačí. Zkusme k ní najít inverzní relaci a uvidíme, zda ji budeme moci nazvat logaritmem. Inverzní relaci k exponenciální funkci zjistíme, najdeme-li všechna řešení $w = \xi + i\zeta$ rovnice $e^w = z$.

$$e^{\xi+i\zeta} = |z|e^{i\operatorname{Arg} z+2k\pi}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

a odtud

$$e^{\xi} = |z| \Rightarrow e^{\xi} = |z|, \quad \zeta = \operatorname{Arg} z + 2k\pi.$$

Dostáváme nekonečně (spočetně) mnoho řešení, která můžeme očíslovat indexem k ,

$$w_k(z) = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi).$$

Snadno ověříme (proved'te), že jsou splněny základní vlastnosti logaritmu

$$w_k(z_1^m z_2^n) = mw_0(z_1) + nw_0(z_2) + 2ik\pi, \quad w_k(1) = 2ik\pi, \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 39

Funkci *logaritmus* zavedeme jako relaci

$$f(z) = \ln z = \{\ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \mid k \in \mathbf{Z}\}. \quad (13.7)$$

Jednoznačné funkce, které získáme pro pevně zvolené k ,

$$\ln_k z = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) = \operatorname{Ln} z + 2ik\pi,$$

jsou *větvě logaritmu*, větev odpovídající $k = 0$ se označuje $\operatorname{Ln} z$ a nazývá se *hlavní větev* logaritmu.

Logaritmus samozřejmě není definován v bodech, v nichž není definován argument proměnné z . Jsou to body nula a nekonečno. Při změně argumentu o 2π (tj. v kladném smyslu) přejde k -tá větev v $(k+1)$ -tou větev, při změně o (-2π) (tj. v záporném smyslu) přejde ve větev s indexem $(k-1)$. „Přelévání“ mezi větvemi lze zamezit, omezíme-li definiční obor na Gaussovu rovinu s výřezem například podél nezáporné osy x .

13.1.4 Diferenciální 1-formy v komplexním oboru a křivkový integrál

Integrál z funkce komplexní proměnné je zaváděn jako křivkový integrál druhého druhu. Před formulací přesné definice se věnujme názorné motivační úvaze. Křivkový integrál druhého druhu v \mathbf{R}^n jsme zavedli již v druhém dílu (aniž bychom pracovali s diferenciálními formami, definovanými až v kapitole 12). Této „klasické“ definice nyní využijeme. Integrál z vektorové funkce $\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ po rovinné křivce \mathcal{C} parametrizované rovnicemi

$$\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow \mathcal{C}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$$

jsme definovali vztahem

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [(F_1 \circ \mathcal{C}(t))\dot{x}(t) + (F_2 \circ \mathcal{C}(t))\dot{y}(t)] dt.$$

Pracovali jsme v však reálném oboru. V komplexní rovině zapíšeme parametrizaci křivky \mathcal{C} ve tvaru komplexní funkce reálného parametru $t \in [\alpha, \beta]$:

$$\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow \mathcal{C}(t) = z(t) = x(t) + iy(t),$$

a místo vektorového pole \vec{F} s reálnými složkami pracujeme s funkcí $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Počítejme chvíli:

$$f(z) dz = [u(x, y) + iv(x, y)] (dz + i dy) = [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i[v(x, y) dx + u(x, y) dy].$$

Jeví se jako přirozené definovat integrál z funkce $f(z)$ po křivce \mathcal{C} jako komplexní číslo, jehož reálnou, resp. imaginární část bude tvořit (reálný) integrál druhého druhu z (reálného) vektorového pole $\vec{F}(\vec{r}) = (u(x, y), -v(x, y))$, resp. $\vec{G}(\vec{r}) = (v(x, y), u(x, y))$ v (reálné) euklidovské rovině. Kdo si oblíbil diferenciální formy, zapíše integrálů ještě jednodušeji, pomocí 1-forem $\omega = u dx - v dy$ a $\eta = v dx + u dy$.

Ještě je třeba formulovat požadavky na integrační obor — křivku \mathcal{C} . Budeme předpokládat, že je po částech hladká, tj. složená s konečného počtu hladkých úseků. Tomuto předpokladu z definice vyhovují jednorozměrné singulární krychle a řetězce (odstavec 12.4.1). Dalším předpokladem je tzv. *rektifikovatelnost* křivky. To znamená požadavek její konečné délky dané integrálem prvního druhu,

$$\int_{\mathcal{C}} dl = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt < \infty,$$

ať už jej chápeme klasicky (první díl, odstavec 2.3.5), nebo jako integrál z diferenciální formy představující element délky (odstavec 12.4.5).

„Klasická“ definice: Nechť \mathcal{C} je po částech hladká rektifikovatelná křivka v \mathbf{C} a $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ funkce spojitá na otevřené množině D obsahující křivku \mathcal{C} . *Integrálem z funkce $f(z)$ po křivce \mathcal{C}* rozumíme

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\mathcal{C}} v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (13.8)$$

Definice pomocí forem: Nechť \mathcal{C} je křivka (jednorozměrná singulární krychle, resp. jednorozměrný singulární řetězec) v $\mathbf{C} \sim \mathbf{R}^2$ a $\omega = u dx - v dy$ a $\eta = v dx + u dy$ diferenciální 1-formy definované na otevřené množině $D \subset \mathbf{C}$ obsahující \mathcal{C} . *Integrálem z funkce $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ po křivce \mathcal{C}* rozumíme

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} \omega + i \int_{\mathcal{C}} \eta. \quad (13.9)$$

Z definice křivkového integrálu z funkce komplexní proměnné, který je fakticky „zkombinován“ z křivkových integrálů z reálných vektorových funkcí (jeho reálná i imaginární část jsou reálné křivkové integrály) je ihned vidět, že i v komplexním oboru se zachovala typická vlastnost integrálů — linearita:

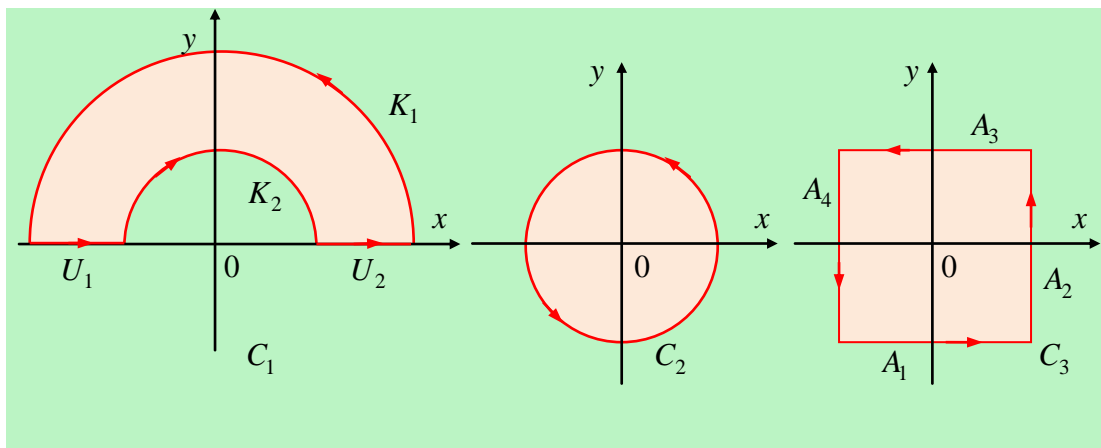
13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 41

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}. \quad (13.10)$$

Pozn.: Nabízí se ještě další možnost jak interpretovat integrál $\int_C f(z) dz$. Diferenciální formy jsme v odstavci 12.3 zavedli jako antisymetrická tenzorová pole na vektorových prostorech nad \mathbf{R} . Pokud jako skalární pole připustíme pole komplexních čísel \mathbf{C} , jak jsme to provedli v příkladu 12.54, získáme zobecnění tohoto pojmu. Integrál z funkce $f(z)$ po křivce C pak chápeme jako integrál z formy $f(z) dz$ po jednorozměrné singulární krychli, resp. řetězci C .

Příklad 13.11: Několik ukázek

V tomto příkladu vypočteme ukázkově několik integrálů z různých funkcí komplexní proměnné po různých křivkách. Křivky, po nichž budeme integrovat, jsou na obrázku 13.7. Integrované funkce zvolíme třeba takto (jak



Obrázek 13.7: K příkladu 13.10.

vypadá jejich reálná a imaginární část, odvoďte sami — úlohy 7 a 8 ve cvičení 13.1.5):

- $f(z) = z^2, \Rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy,$
- $f(z) = az^2 + bz, a, b, c \in \mathbf{C},$
- $f(z) = e^z \Rightarrow u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y,$
- $f(z) = \frac{1}{z}, \Rightarrow u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2},$

$$e) f(z) = \frac{1}{z-3}, \Rightarrow u(x, y) = \frac{x-3}{(x-3)^2+y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{(x-3)^2+y^2}.$$

Integrace po křivce \mathcal{C}_1 : Křivka se skládá ze čtyř hladkých úseků, dvou kruhových oblouků \mathcal{K}_1 a \mathcal{K}_2 a dvou úsečků \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 . Zapišeme (zkráceně) jejich parametrizace.

$$\mathcal{K}_1: [0, \pi] \ni t \Rightarrow (2 \cos t, 2 \sin t) \in \mathbf{C}, \quad \mathcal{U}_1: [-2, -1] \ni t \Rightarrow (t, 0) \in \mathbf{C},$$

$$\mathcal{K}_2: [\pi, 0] \ni t \Rightarrow (\cos t, \sin t) \in \mathbf{C}, \quad \mathcal{U}_2: [1, 2] \ni t \Rightarrow (t, 0) \in \mathbf{C}.$$

Výpočty pro jednotlivé funkce rozpracujeme a zapišeme výsledky. Podrobně propočítejte integrály sami.

$$\bullet f(z) = z^2, \quad \omega = (x^2 - y^2) dx - 2xy dy, \quad 2xy dx + (x^2 - y^2) dy,$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_1} z^2 dz &= \int_0^\pi [(4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t)(-2 \sin t) - 16 \cos^2 t \sin t] dt + \\ &+ i \int_0^\pi [-16 \cos t \sin^2 t) + (4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t)2 \cos t] dt = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_2} z^2 dz &= \int_\pi^0 [(\cos^2 t - \sin^2 t)(-\sin t) - 2 \cos^2 t \sin t] dt + \\ &+ i \int_0^\pi [-2 \cos t \sin^2 t) + (\cos^2 t - \sin^2 t) \cos t] dt = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{U}_1} z^2 dz = \int_{-2}^{-1} t^2 dt = \frac{7}{3}, \quad \int_{\mathcal{U}_2} z^2 dz = \int_1^2 t^2 dt = \frac{7}{3}$$

$$\int_{\mathcal{C}_1} z^2 dz = \int_{\mathcal{K}_1} z^2 dz + \int_{\mathcal{K}_2} z^2 dz + \int_{\mathcal{U}_1} z^2 dz + \int_{\mathcal{U}_2} z^2 dz = 0.$$

$$\bullet f(z) = az^2 + bz + c. \text{ Užitím vztahu (13.10) dostaneme}$$

$$\int_{\mathcal{C}_1} (az^2 + bz + c) dz = a \int_{\mathcal{C}_1} z^2 dz + b \int_{\mathcal{C}_1} z dz + c \int_{\mathcal{C}_1} dz.$$

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 43

Stačí proto, abychom spočítali integrál z funkcí $g_1(z) = z$ ($\omega = x dx - y dy$, $\eta = y dx + x dy$) a $g_2(z) = 1$ ($\omega = dz$, $\eta = dy$).

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} z dz &= \left(- \int_0^\pi 8 \sin t \cos t dt + i \int_0^\pi (-4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t) dt \right) + \left(- \int_\pi^0 \sin t \cos t dt + \right. \\ &\quad \left. + i \int_\pi^0 (\cos^2 t - \sin^2 t) dt \right) + \int_{-2}^{-1} t dt + \int_1^2 t dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} dz &= \left(-2 \int_0^\pi \sin t dt + i 2 \int_0^\pi \cos t dt \right) + \left(- \int_\pi^0 \sin t dt + i \int_\pi^0 \cos t dt \right) + \\ &\quad + \int_{-2}^{-1} dt + \int_1^2 dt = -4 + 2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Celkově je tedy integrál z funkce $f(z) = az^2 + bz + c$ po křivce \mathcal{C} nulový.

- $f(z) = e^z$, $\omega = e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$, $\eta = e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$. Zkusme nejprve, jak by vypadal výpočet integrálu po křivce \mathcal{K}_2 přímo z definice:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_2} e^z dz &= \int_\pi^0 e^{\cos t} (-\sin t \cos(\sin t) - \cos t \sin(\sin t)) dt + \\ &\quad + i \int_0^\pi e^{\cos t} (-\sin t \sin(\sin t) + \cos t \cos(\sin t)) dt. \end{aligned}$$

Je vidět, že přímý postup výpočtu je nevhodný. Uvědomíme-li si však, že křivka \mathcal{C}_1 je uzavřená, nabízí se pokus použít některou z integrálních vět, v tomto případě Greenovu,

$$\int_{\mathcal{C}=\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

nebo alternativně pomocí diferenciálních forem

$$\int_{\mathcal{C}=\partial D} \chi = \int_D d\chi.$$

Pro funkci $f(z) = e^z$ tento postup skutečně vede k cíli. Snadno se totiž přesvědčíme přímým výpočtem, že platí

$$\frac{\partial e^x \cos y}{\partial y} = -\frac{e^x \sin y}{\partial x}, \quad \frac{\partial e^x \sin y}{\partial x} = \frac{e^x \cos y}{\partial y}.$$

Křivka \mathcal{C}_1 splňuje předpoklady Greenovy věty. Integrál je tedy nulový. Jiná možnost jak integrál snadno spočítat, a to dokonce přímým výpočtem, spočívá ve využití poznámky uvedené před tímto příkladem a vlastností integrálu: budeme přímo integrovat formu $f(z) dz = e^z dz$ po křivce s parametrizací

$$\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{C},$$

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{[\alpha, \beta]} f[\mathcal{C}(t)] \mathcal{C}^* dz.$$

Zvolme třeba křivku \mathcal{K}_2 . Její parametrizaci $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [\pi, 0]$ vyjádříme ve tvaru

$$z = x + iy = e^{it}, \quad \text{pak} \quad \mathcal{K}_2^* dz = (-\sin t + i \cos t) dt = ie^{it} dt,$$

$$\int_{\mathcal{K}_2} e^z dz = \int_{\pi}^0 e^{e^{it}} dt.$$

Nyní již interujeme podle reálné proměnné, i když integrovaná funkce je komplexní. Zvolíme substituci $\xi = e^{it}$ a dostaneme (změna mezí: $\pi \rightarrow e^{i\pi} = -1$, $0 \rightarrow e^0 = 1$)

$$\int_{\mathcal{K}_2} e^z dz = \int_{-1}^1 e^{\xi} d\xi = e - \frac{1}{e} = 2 \sinh 1.$$

Zkuste si podle této předlohy spočítat integrál po křivce \mathcal{K}_1 . Integrály po úsečkách \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 jsou reálné, a spočítáte je jednoduše. Součet integrálů po křivkách \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 , \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 by vám měl vyjít nulový, pokud jste počítali správně.

- $f(z) = \frac{1}{z}$, $\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$, $\eta = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$.

$$\int_{\mathcal{K}_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi} \left(\frac{2 \cos t}{4} (-2 \sin t) + \frac{2 \sin t}{4} (2 \cos t) \right) dt +$$

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 45

$$\begin{aligned}
 & + i \int_0^{\pi} \left(-\frac{2 \sin t}{4} (2 \sin t) + \frac{2 \cos t}{4} (2 \cos t) \right) dt = i\pi, \\
 \int_{\mathcal{K}_2} \frac{1}{z} dz & = \int_{\pi}^0 (\cos t(-\sin t) + \sin t(\cos t)) dt + i \int_{\pi}^0 (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -i\pi \\
 \int_{\mathcal{U}_1} \frac{1}{z} dz & = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = -\ln 2, \quad \int_{\mathcal{U}_2} \frac{1}{z} dz = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2, \\
 \int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{z} dz & = 0.
 \end{aligned}$$

Snadno se sami přesvědčíte, že také integrál z funkce $f(z) = \frac{1}{z-3}$ je nulový. Provedeme ještě šest výpočtů, konkrétně z funkcí $f(z) = z^2$, $f(z) = \frac{1}{z}$ a $f(z) = \frac{1}{z-3}$ po křivkách

$$\mathcal{C}_2 : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow (2 \cos t), 2 \sin t \in \mathbf{C},$$

$$\mathcal{C}_3 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4,$$

$$\mathcal{A}_1 : [-1, 1] \ni t \longrightarrow (t, -1) \in \mathbf{C}, \quad \mathcal{A}_2 : [-1, 1] \ni t \longrightarrow (1, t) \in \mathbf{C},$$

$$\mathcal{A}_3 : [1, -1] \ni t \longrightarrow (t, 1) \in \mathbf{C}, \quad \mathcal{A}_4 : [1, -1] \ni t \longrightarrow (-1, t) \in \mathbf{C}.$$

Ostatní dokončete v rámci cvičení (úloha 10 cvičení 13.1.5).

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}_2} z^2 dz & = R^3 \int_0^{2\pi} [(\cos^2 t - \sin^2 t)(-\sin t) - 2 \cos^2 t \sin t] dt + \\
 & + iR^3 \int_0^{2\pi} [-2 \cos t \sin^2 t + (\cos^2 t - \sin^2 t) \cos t] dt = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{z} dz & = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2 \cos t}{4} (-2 \sin t) + \frac{2 \sin t}{4} (2 \cos t) \right] dt + \\
 & + i \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2 \sin t}{4} (-2 \sin t) + \frac{2 \cos t}{4} (2 \cos t) \right] dt = 2\pi i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{z-3} dz &= \int_{\mathcal{C}_2} \frac{x-3}{(x-3)^2+y^2} dx + \frac{y}{(x-3)^2+y^2} dy + \\ &+ i \int_{\mathcal{C}_2} \frac{-y}{(x-3)^2+y^2} dx + \frac{x-3}{(x-3)^2+y^2} dy \end{aligned}$$

V tomto případě jsou opět splněny požadavky Greenovy věty kladené na definiční obor integrovaných funkcí (resp. forem): funkce jsou definovány a diferencovatelné na otevřené množině obsahující integrační obor. Můžeme proto od křivkových integrálů přejít k integrálu přes oblast, kterou křivka obepíná. Platí však

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x-3}{(x-3)^2+y^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{-y}{(x-3)^2+y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{x-3}{(x-3)^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{(x-3)^2+y^2},$$

integrál je proto nulový. Víte, proč jsme tohoto postupu nemohli použít v případě funkce $f(z) = \frac{1}{z}$? Podmínky záměnnosti parciálních derivací pro její reálnou a imaginární část přece rovněž platí!

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_3} z^2 dz &= \int_{-1}^1 2t(t^2-1) dt + i \int_{-1}^1 -2t dt + \int_{-1}^1 -2t dt + i \int_{-1}^1 (1-t^2) dt + \\ &+ \int_1^{-1} (t^2-1) dt + i \int_1^{-1} 2t dt + \int_1^{-1} 2t dt + i \int_1^{-1} (1-t^2) dt = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_3} \frac{dz}{z} &= \left(\int_{-1}^1 \frac{t dt}{t^2+1} + i \int \frac{dt}{t^2+1} \right) + \left(\int_{-1}^1 \frac{t dt}{t^2+1} + i \int \frac{dt}{t^2+1} \right) + \\ &+ \left(\int_1^{-1} \frac{t dt}{t^2+1} + i \int_1^{-1} -\frac{dt}{t^2+1} \right) + \left(\int_1^{-1} \frac{t dt}{t^2+1} + i \int_1^{-1} -\frac{dt}{t^2+1} \right) = \\ &= 4i \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2+1} = 4 \operatorname{arctg} t \Big|_{-1}^1 = 2\pi i. \end{aligned}$$

Výsledky výpočtu shrneme do tabulky.

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 47

$f(z) \rightarrow$	z^2	$az^2 + bz + c$	e^z	z^{-1}	$(z - 3)^{-1}$
\mathcal{C}_1	0	0	0	0	0
\mathcal{C}_2	0	0	0	$2\pi i$	0
\mathcal{C}_3	0	0	0	$2\pi i$	0

Nedá se z tabulky v příkladu 13.10 předpovědět nějaká zákonitost? U funkcí a), b) a c) je integrál po všech třech křivkách nulový. Je to náhoda, nebo zákonitost? Co mají všechny tři funkce a všechny tři křivky společného? Všechny křivky, po nichž jsme integrovali, jsou uzavřené a všechny funkce, které jsme integrovali, jsou v celé komplexní rovině spojité. Ve všech případech tedy byly splněny požadavky Greenovy věty. Navíc se tyto funkce vyznačovaly zajímavou vlastností — určitým typem záměnnosti parciálních derivací reálné a imaginární části podle jednotlivých proměnných. Vraťte se znovu k těmto funkcím a ověřte, že platí

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Je už jasné, proč vyšly integrály nulové? Budeme-li zjišťovat, zda takové vztahy platí i pro funkce d) a e), zjistíme, že ano! Je to nějaká zásadní vlastnost funkcí komplexní proměnné? U funkce d) integrál vyšel nulový pouze po křivce \mathcal{C}_1 . U křivek \mathcal{C}_2 a \mathcal{C}_3 vyšel nenulový (proč? protože nejsou splněny podmínky Greenovy věty), ale shodný. A zase: je to zákonitá shoda, nebo náhoda? Křivky se totiž dost liší. Jedna je kulatá a druhá hranatá. Nebo výsledky na křivce nezávisí? Na všechny tyto otázky odpovíme v dalším odstavci. Teď se ještě budeme věnovat jednomu jednoduše vypadajícímu, ale velmi důležitému integrálu. K zkoumání nás může inspirovat integrál

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

který jsme počítali v příkladu 13.10. Křivka „oběhla“ jednou dokola bod nula, v němž integrovaná funkce, a tedy ani formy ω a η nejsou definovány a neplatí Greenova věta. Co by se stalo, kdyby křivka oběhla bod nula dvakrát, třikrát, popřípadě jednou v opačném smyslu? Zkuste si integrály spočítat, dospějete k výsledkům $4\pi i$, $5\pi i$, $-2\pi i$. Vypadá to, že takový integrál „počítá“ oběhy křivky kolem *singularity* integrované funkce. Je to opravdu tak. Přistupme k obecné definici.

Nechť \mathcal{C} je uzavřený singulární řetězec (po částech hladká rektifikovatelná křivka) v \mathbf{C} . Označme $D = \mathbf{C}^+ \setminus \{z \in \mathbf{C} \mid z \in \mathcal{C}\}$. Pro libovolný bod $z_0 \in D$ označme

$$\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} \quad (13.11)$$

Tento integrál se nazývá *index bodu z_0 vzhledem ke křivce \mathcal{C}* .

Následující úvaha názorně ukáže, že index bodu vzhledem ke křivce opravdu „počítá“ oběhy křivky kolem tohoto bodu. Poslouží pouze pro posílení geometrické představy. Matematická formulace vlastností „indexu“ a jejich důkaz přijdou na řadu v dalším odstavci. Předpokládejme, že uzavřená křivka je dána parametrickým vyjádřením

$$\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow \mathcal{C}(t) \in \mathbf{C}, \quad \mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}(\beta).$$

Počítejme integrál vyjadřující index bodu z_0 vzhledem k této křivce:

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\mathcal{C}}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{[\alpha, \beta]} \frac{1}{\mathcal{C}(t) - z_0} \mathcal{C}'(t) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\mathcal{C}(t) - z_0} \frac{d(\mathcal{C}(t))}{dt} dt. \end{aligned}$$

Funkci $\mathcal{C}(t) - z_0$ zapíšeme v exponenciálním tvaru a upravíme integrand:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t) - z_0 &= |\mathcal{C}(t) - z_0| e^{i \arg[\mathcal{C}(t) - z_0]}, \\ \frac{1}{\mathcal{C}(t) - z_0} \frac{d\mathcal{C}(t)}{dt} &= \frac{1}{|\mathcal{C}(t) - z_0|} \frac{d}{dt} |\mathcal{C}(t) - z_0| + i \frac{d}{dt} \arg(\mathcal{C}(t) - z_0) = \\ &= \frac{d}{dt} \ln |\mathcal{C}(t) - z_0| + i \frac{d}{dt} \arg(\mathcal{C}(t) - z_0). \end{aligned}$$

Integrací dostaneme

$$\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{|\mathcal{C}(\beta) - z_0|}{|\mathcal{C}(\alpha) - z_0|} + \frac{1}{2\pi} \Delta [\arg(\mathcal{C}(t) - z_0)]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2\pi} \Delta [\arg(\mathcal{C}(t) - z_0)]_{\alpha}^{\beta}.$$

(Vzhledem k uzavřenosti křivky je totiž $\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}(\beta)$, a proto $\ln \frac{|\mathcal{C}(\beta) - z_0|}{|\mathcal{C}(\alpha) - z_0|} = 0$.) Index bodu z_0 vzhledem ke křivce \mathcal{C} je $\frac{1}{2\pi}$ -násobkem změny argumentu funkce $\mathcal{C}(t) - z_0$, k níž dojde poté, co proměnná t proběhne interval $[\alpha, \beta]$. Víme, že při jednom oběhu v kladném smyslu přejde k -tá větev argumentu

13.1. CO JE TO KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ? 49

v $(k + 1)$ -tou větev, při oběhu v záporném smyslu ve větev $(k - 1)$ -tou. Při m obězích přejde k -tá větev v $(k + m)$ -tou větev, přitom m může být kladné, záporné, nebo nula. Je tedy

$$\Delta [\arg(\mathcal{C}(t) - z_0)]_\alpha^\beta = m.$$

Ještě jednou je však třeba zdůraznit, že úvaha, kterou jsme provedli, je sice geometricky názorná, ale pouze intuitivní. Čeká nás proto ještě skutečný matematický důkaz vlastností indexu.

13.1.5 Cvičení

1. Určete hromadné body posloupnosti $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, kde $z_n = i^n$.

Výsledek: $i, 1, -i, -1$.

2. Dokažte všechny vlastnosti uvedené ve větě 13.1, které nebyly dokazovány v textu.

3. Vyjádřete reálnou a imaginární část obou větví odmocniny z proměnné $z = x + iy$ pomocí x a y .

Výsledek: $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} + i \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right)$.

4. Indukcí vzhledem k n dokažte vztahy pro částečné součty řad $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$, resp. $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k$. Závěrečný výraz lze v obou případech odvodit také dělením mnohočlenu mnohočlenem.

5. Přeformulujte a dokažte Abelovu větu a Cauchyův-Hadamardův vzorec (věta 13.7) pro $z_0 = \infty$.

Návod: Přejděte od řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ na okolích typu $B(\infty, r)$ k řadě $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$ na okolích $B(0, r^{-1})$.

6. Dokažte, že poloměr konvergence mocninné řady lze určit také pomocí vztahu $R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$.

7. Uvažujte o funkci zavedené mocninnou řadou v příkladu 13.9

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

a řešte následující úkoly:

a) Dokažte vlastnost $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

- b) Označte $z = x + iy$ a vyjádřete reálnou a imaginární část funkce e^z jako funkce proměnných x a y .
- c) Označte $z = x + iy$ a vyjádřete reálnou a imaginární část funkcí $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ jako funkce proměnných x a y .

Návod: a) Použitím věty o přerovnávání absolutně konvergentních řad ukažte, že platí

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}.$$

Výsledky: b) $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$, $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$, c) $\operatorname{Re} \sin z = -\sin x \cosh y$, $\operatorname{Im} \sin z = \cos x \sinh y$, $\operatorname{Re} \cos z = \cos x \cosh y$, $\operatorname{Im} \cos z = -\sin x \sinh y$, $\operatorname{Re} \sinh z = \sinh x \cosh y$, $\operatorname{Im} \sinh z = \cosh x \sin y$, $\operatorname{Re} \cosh z = \cosh x \cos y$, $\operatorname{Im} \cosh z = \sinh x \sin y$.

8. Zapišete následující funkce proměnné $z = x + iy$ pomocí jejich reálné a imaginární části jako funkcí x a y , tj. ve tvaru $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

- a) $f(z) = z^2$, $f(z) = z^3$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbf{N}$
- b) $f(z) = z^{-1}$, $f(z) = z^{-2}$, $f(z) = (z - a)^{-1}$, $f(z) = (z - a)^{-2}$, $a \in \mathbf{C}$,
- c) $f(z) = z^2 \cos z$, $f(z) = z \sin z$, $f(z) = z^3 \cosh z$,
- d) $f(z) = z^{-1} \sinh z$, $f(z) = z^{-2} \cos z$,
- e) $e^z \cos z$, $e^{-z} \sin z$.

Výsledky: a) $(x^2 - y^2) + i(2xy)$, $(x^2 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$, $\left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} x^{n-2k} y^{2k} \right) + i \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{(2k+1)!(n-2k-1)!} x^{n-2k-1} y^{2k+1} \right)$, kde $\lfloor n/2 \rfloor$ je celá část z $n/2$,
 b) $\frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - i \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - i \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$, $\frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2} - i \frac{2\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2}$,
 kde $\xi = x - \operatorname{Re} a$, $\eta = y - \operatorname{Im} a$, c) $[(x^2 - y^2) \cos x \cosh y + 2xy \sin x \sinh y] + i[2xy \cos x \cosh y - (x^2 - y^2) \sin x \sinh y]$, $[x \sin x \cosh y - y \cos x \sinh y] + i[x \cos x \sinh y + y \sin x \cosh y]$, **d) doplňit, e) doplňit.**

9. Pomocí vyjádření reálných a imaginárních částí integrálů vystupujících ve vztahu (13.10) tento vztah dokažte.

10. Dokončete všechny výpočty z příkladu 13.11.

11. Vypočtěte hodnoty následujících funkcí v požadovaných bodech: **doplňit**

a)

12. V oboru komplexní proměnné dokažte součtové vzorce

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= 1 \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1, \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \\ \cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1, \\ \sinh(z_1 \pm z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_2 \cosh z_1, \\ \cosh(z_1 \pm z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 \mp \sinh z_1 \sinh z_2, \\ \sin z_1 + \sin z_2 &= 2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}, \\ \sinh z_1 + \sinh z_2 &= 2 \sinh \frac{z_1 + z_2}{2} \cosh \frac{z_1 - z_2}{2}\end{aligned}$$

a odvoďte vzorce pro $\cosh z_1 \pm \cosh z_2$, $\cosh z_1 \pm \sinh z_2$.

13.2 Má-li funkce komplexní proměnné derivaci, pak má derivace všech řádů

Studiem vlastností reálných funkcí jedné i více reálných proměnných, ať už to byly funkce skalární či vektorové, jsme s derivacemi získali dost zkušeností. Nikde jsme se však nesetkali s tím, že by z existence derivací prvního řádu vyplývala existence derivací vyšších. Uvidíme, že u funkce komplexní proměnné tomu tak bude.

13.2.1 Holomorfní funkce — funkce s derivací

Aby problém naznačený v úvodu odstavce, měl vůbec nějaký smysl, musíme derivaci funkce komplexní proměnné nejprve definovat. Formálně nepůjde o nic jiného — bude to táž limita jako u skalární funkce jedné proměnné. Jenže důsledky budou takové, jaké jsme u funkcí reálné proměnné neviděli! Připomeňme, že zatím stále mluvíme o konečných jednoznačných funkcích.

Funkce $f(z)$ definovaná na otevřené množině $D \subset \mathbf{C}$ se nazývá *holomorfní na množině D* , jestliže pro každý bod $z_0 \in D$ existuje limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (13.12)$$

Tuto limitu nazýváme *derivace funkce $f(z)$ v bodě z_0* . Množinu funkcí holomorfních na D značíme $H(D)$.

(Častým speciálním případem je situace, kdy D je oblast.) Z pravidel pro počítání s limitami (věta 13.4) přímo vyplývají pravidla pro derivace. (Pokud byste si je chtěli dokázat, pak díky formální shodě definice s definicí derivace funkcí reálné proměnné a vlastnostem limit můžete přímo sledovat postupy z prvního dílu.)

Věta 13.8 (Vlastnosti derivací): *Předpokládejme, že funkce $f = f(z)$ a $g = g(z)$ jsou definována na otevřené množině v $D \subset \mathbf{C}$. Pak*

Nechť (předpoklady)

pak (tvrzení)

$$\begin{aligned} f, g \in H(D), (f \pm g)' = f' \pm g' & \implies f \pm g \in H(D) \\ \text{je-li navíc } g \neq 0 & \implies fg \in H(D), (fg)' = f'g + fg' \\ & \implies (f/g)' \in H(D), (f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

$$f \in H(D), h \in H(D_1), f(D) \subset D_1 \implies F = h \circ f \in H(D), F'(z) = h'[f(z)] f'(z)$$

Spočítat derivace některých jednoduchých funkcí přímo z definice je snadné. Postup výpočtu je díky vlastnostem limit stejný jako u funkcí reálné proměnné. Zkusme některé výpočty v následujícím příkladu.

Příklad 13.12: Derivování z definice

Nejjednodušší výpočet derivace z definice umožňuje polynomiální funkce. Zvolme $f(z) = z^n$ a počítejme:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1} z_0^k = nz^{n-1}.$$

(Při výpočtu jsme provedli dělení polynomu $(z^n - z_0^n)$ polynomem $(z - z_0)$.) Pomocí prvního pravidla věty 13.8 snadno zderivujeme obecný polynom n -tého stupně.

Zkusme také exponenciální funkci zavedenou pomocí mocninné řady stejnoměrně konvergentní v celé Gaussově rovině:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{z-z_0} - 1) = \\ &= e^{z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} = e^{z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{n-1}}{n!} \right) = e^{z_0}. \end{aligned}$$

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 53

Nic překvapivého, že? K exponenciální funkci se však ještě budeme podrobně vracet, konkrétně v odstavci 13.2.5.

Nakonec ještě odvodíme vztah pro derivaci funkce $f(z) = \sin z$. To už půjde snadno, neboť víme, jak derivovat exponenciální funkci a máme k dispozici pravidla pro derivování z věty 13.8.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}) = \cos z.$$

Zase nic nečekaného. A co logaritmus? Při výpočtu derivace funkce $f(z) = \ln z$ pomocí definiční limity musíme hlídat, abychom se pohybovali neustále na téže předem zvolené větvi, budeme proto pracovat v Gaussově rovině s výřezem podél nezáporné osy x , tj. $D_f = \mathbf{C} \setminus [0, \infty)$.

$$f'(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\ln z - \ln z_0}{z - z_0} = \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{\ln z - \ln z_0} \right).$$

Označíme-li $w = \ln z$, pak $z = e^w$. Funkce $\ln z$ je na D_f spojitá, proto při označení $w_0 = \ln z_0$ lze psát

$$f'(z_0) = \left(\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0} \right)^{-1} = (e^{w_0})^{-1} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

V příkladu 13.11 jsme získali podezření, že mezi reálnou a imaginární částí funkce komplexní proměnné $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ musí být nějaká vazba. V situacích, kdy jsme mohli při výpočtu integrálu z funkce komplexní proměnné po uzavřené křivce použít Greenovu větu, byl integrál vždy nulový. To odpovídalo podmínkám

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Příklad samozřejmě není důkazem, takže je třeba ověřit, zda tyto podmínky platí obecně, a dokázat to. Tvrzení je obsahem následující věty.

Věta 13.9 (Cauchyovy-Riemannovy podmínky): Předpokládejme, že funkce $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je definovaná na otevřené množině $D \subset \mathbf{C}$. Funkce má derivaci v bodě $z_0 \in D$ právě tehdy, jsou-li funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ v bodě z_0 diferencovatelné a platí

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right|_{z_0} = \left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right|_{z_0}, \quad \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{z_0} = -\left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right|_{z_0}. \quad (13.13)$$

Vztahy (13.13) se nazývají *Cauchyovy-Riemannovy podmínky*.

Důkaz tak důležitého tvrzení, jakým je věta 13.9, samozřejmě nemůže vynchat. Kromě toho je velmi jednoduchý. Potřebujete si k němu pouze připomenout definici diferencovatelné funkce (odstavec 9.2.3).

V první části důkazu vyjdeme z předpokladu, že funkce $f(z)$ má derivaci v bodě z_0 a označme $\operatorname{Re} f'(z_0) = A$, $\operatorname{Im} f'(z_0) = B$ (A a B jsou komplexní čísla). Platí

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \implies \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0. \quad (13.14)$$

Počítejme čitatele posledního zlomku:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) &= \\ &= [u(x, y) + iv(x, y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)] - (A + iB)[(x - x_0) + i(y - y_0)] = \\ &= [u(x, y) - u(x_0, y_0) - A(x - x_0) + B(y - y_0)] + \\ &+ i[v(x, y) - v(x_0, y_0) - A(y - y_0) - B(x - x_0)]. \end{aligned}$$

Definujme pomocí reálné a imaginární části posledního výrazu dvě funkce proměnných $(x - x_0)$ a $(y - y_0)$

$$\begin{aligned} \tau_1(x - x_0, y - y_0) &= \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) - A(x - x_0) + B(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \\ \tau_2(x - x_0, y - y_0) &= \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0) - A(y - y_0) - B(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \end{aligned}$$

a počítejme limitu těchto funkcí pro $z \rightarrow z_0$, tj. $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \tau_1(x - x_0, y - y_0) &= \\ \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) - A(x - x_0) + B(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \frac{(x - x_0) + i(y - y_0)}{|(x - x_0) + i(y - y_0)|}. \end{aligned}$$

Limita prvního zlomku je díky vztahu (13.14) nulová, druhý zlomek představuje ohraničenou funkci. Výsledná limita je proto nulová (věta 13.4). Stejnou úvahou dospějeme k závěru

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \tau_2(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Pro funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ tedy nakonec platí

$$\begin{aligned} u(x, y) - u(x_0, y_0) &= A(x - x_0) + (-B)(y - y_0) + \\ &+ \tau_1(x - x_0, y - y_0)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ v(x, y) - v(x_0, y_0) &= B(x - x_0) + A(y - y_0) + \\ &+ \tau_2(x - x_0, y - y_0)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned}$$

kde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \tau_1(x - x_0, y - y_0) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \tau_2(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Tento výsledek neznamená nic menšího, než že funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ jsou diferencovatelné v bodě (x_0, y_0) . Plyne z něj i další důležitý závěr,

$$A = \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \quad -B = \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, \quad B = \left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \quad A = \left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}.$$

Každé z čísel A a B je předchozími vztahy vyjádřeno dvěma způsoby. Z nich je platnost Cauchyových-Riemannových podmínek již zřejmá.

Při důkazu obrácené implikace předpokládáme, že funkce $(u(x, y))$ a $v(x, y)$ jsou v bodě (x_0, y_0) diferencovatelné a platí Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Označíme-li

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, \\ B &= \left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = - \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, \end{aligned} \quad (13.15)$$

snadno již dokážeme, že platí

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A + iB,$$

takže číslo $A + iB$ má význam derivace funkce $f(z)$ v bodě z_0 . (Důkaz sami dokončete.)

Vazba mezi reálnou a imaginární částí funkce komplexní proměnné je velice silná. Známe-li totiž například funkci $u(x, y)$, představující reálnou část funkce, můžeme z Cauchyových-Riemannových podmínek určit část imaginární $v(x, y)$ až na konstantu. Příklad ukážeme za chvíli. Teď zůstaňme ještě u Cauchyových Riemannových podmínek. Předpokládejme, že funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají spojitě smíšené parciální derivace druhého řádu. Víme o nich,

že jsou záměnné (Schwarzova věta — věta 5.1). Zderivujeme Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Nejprve první z nich podle proměnné x a druhou podle proměnné y , a sečteme je. Podruhé zderivujeme první podmínku podle y a druhou podle x a opět sečteme. Dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (13.16)$$

Funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ splňují Laplaceovu rovnici. Řešení Laplaceovy rovnice se obecně nazývají *harmonické funkce*. Funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$, které jsou navíc vázány Cauchyovými-Riemannovými podmínkami, jsou *sdrúžené harmonické funkce*.

Pozn.: Možná si kladete otázku, odkud se vzalo tak silné omezení kladené na reálnou a imaginární část funkce komplexní proměnné, vyplývající z existence derivace. Uvědomte si, že proměnné x, y nevstupují do funkcí $u(x, y)$ a $v(x, y)$ nezávisle, ale vždy „ve dvojici“ $x + iy$. Reálná a imaginární část už jen z tohoto důvodu nemohou být ledažaké. A požadavek existence derivace podmínky ještě zesiluje.

Příklad 13.13: Reálná část určuje imaginární a naopak (až na konstantu) Zadejme třeba imaginární část funkce $f(z)$ vztahem $v(x, y) = y \cos y \sinh x + x \sin y \cosh x$ a požadujeme, aby funkce byla holomorfní. Spočtěme si nejprve parciální derivace funkce $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= y \cos y \cosh x + \sin y \cosh x + x \sin y \sinh x, \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &= \cos y \sinh x - y \sin y \sinh x + x \cos y \cosh x. \end{aligned}$$

Z Cauchyových-Riemannových podmínek dostaneme parciální diferenciální rovnice prvního řádu pro funkci $u(x, y)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \cos y \sinh x - y \sin y \sinh x + x \cos y \cosh x, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -y \cos y \cosh x - \sin y \cosh x - x \sin y \sinh x. \end{aligned}$$

Integrujme třeba první z nich podle x , tj.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \cos y \cosh x - y \sin y \cosh x + x \cos y \sinh x - \cos y \cosh x + w(y) = \\ &= -y \sin y \cosh x + x \cos y \sinh x + w(y), \end{aligned}$$

kde volná funkce $w(y)$ je integrační „konstanta“ vzhledem k proměnné, podle které jsme integrovali, tedy vzhledem k proměnné x . nyní zderivujeme získanou funkci $u(x, y)$ podle proměnné y a dosadíme do druhé rovnice (provedte). Vyjde jednoduchá podmínka pro funkci $w(y)$, totiž $w'(y) = 0$. Je proto $w = K \in \mathbf{R}$. (dokážete zdůvodnit, proč je konstanta K reálná?) Pro hledanou funkci $f(z)$ jsme dostali rozklad na její reálnou a imaginární část

$$f(z) = (-y \sin y \cosh x + x \cos y \sinh x) + i(y \cos y \sinh x + x \sin y \cosh x) + w(y).$$

Poslední úkol, který musíme vyřešit, spočívá ve „sdružení“ proměnných x a y do dvojic $(x + iy)$. První úprava je jednoduchá,

$$f(z) = (x + iy)(\cos y \sinh x + i \sin y \cosh x).$$

Výraz v první závorce je proměnná z . Budeme si ale vědět rady s druhou závorkou? Na první pohled není „sdružení“ proměnných x a y do součtu $z = (x + iy)$ vidět. Můžeme si však snadno dopomoci dosazením

$$\begin{aligned} \cos y &= \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}), & \sin y &= \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}), \\ \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), & \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}). \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravách (provedte) dostaneme

$$f(z) = z \sinh z + K, \quad K \in \mathbf{R}.$$

Trochu práce to dalo, ale nakonec jsme funkci $f(z)$ z její imaginární části „zrekonstruovali“.

Příklad 13.14: Cauchyovy-Riemannovy podmínky trochu jinak

Stejně jako může být komplexní proměnná zadána pomocí modulu a argumentu, tj. $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi = \text{Arg } z$, tj. v exponenciálním tvaru, lze v exponenciálním tvaru zadat i funkční předpis pro funkci komplexní proměnné,

$$f(z) = R(x, y) e^{i\phi(x, y)}.$$

Je zřejmé, že požadavek holomorfnosti funkce vede k omezujícím podmínkám na funkce $R(x, y)$ a $\phi(x, y)$. Půjde samozřejmě jen o jinou variantu Cauchyových-Riemannových podmínek. Odvodíme je. Ze zadání funkce $f(z)$ plynou pro její reálnou a imaginární část vztahy

$$u(x, y) = R(x, y) \cos \phi(x, y), \quad v(x, y) = R(x, y) \sin \phi(x, y),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial x} \cos \phi - R \frac{\partial \phi}{\partial x} \sin \phi, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial R}{\partial y} \cos \phi - R \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \phi, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial x} \sin \phi + R \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \phi, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial R}{\partial y} \sin \phi + R \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \phi.\end{aligned}$$

Porovnáním parciálních derivací podle standardních Cauchyových-Riemannových podmínek (13.13) a úpravou (proved'te ji) dostaneme

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = R(x, y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} = -R(x, y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x}. \quad (13.17)$$

Známe-li tedy modul holomorfní funkce $f(z)$ v závislosti na proměnných x a y , můžeme až na konstantu určit argument $\phi(x, y)$ a naopak. Zkusme vyřešit praktický případ: $\phi(x, y) = xy$. Pak pomocí (13.17) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} &= x \implies \ln R = \frac{1}{2}x^2 + \rho(y), \\ \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} &= -y \implies \ln R = -\frac{1}{2}y^2 + \theta(x).\end{aligned}$$

Porovnáním posledních dvou mezivýsledků dostaneme

$$\begin{aligned}\rho(y) &= -\frac{1}{2}y^2 + \text{konst.}, & \theta(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \text{konst.}, \\ \ln R(x, y) &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + K, & K \in \mathbf{R} & \text{ je konstanta,} \\ R(x, y) &= e^{[\frac{1}{2}(x^2 - y^2)]} \cdot e^K = C e^{[\frac{1}{2}(x^2 - y^2)]}, & C \in \mathbf{R}, C > 0. \\ f(z) &= C e^{[\frac{1}{2}(x^2 - y^2)]} \cdot e^{ixy} = C e^{\frac{1}{2}z^2}.\end{aligned}$$

Poté co jsme poznali holomorfní funkce, budeme se podrobněji věnovat indexu bodu vzhledem k uzavřené křivce, tj. funkci, která „počítá“, kolikrát křivka oběhne daný bod.

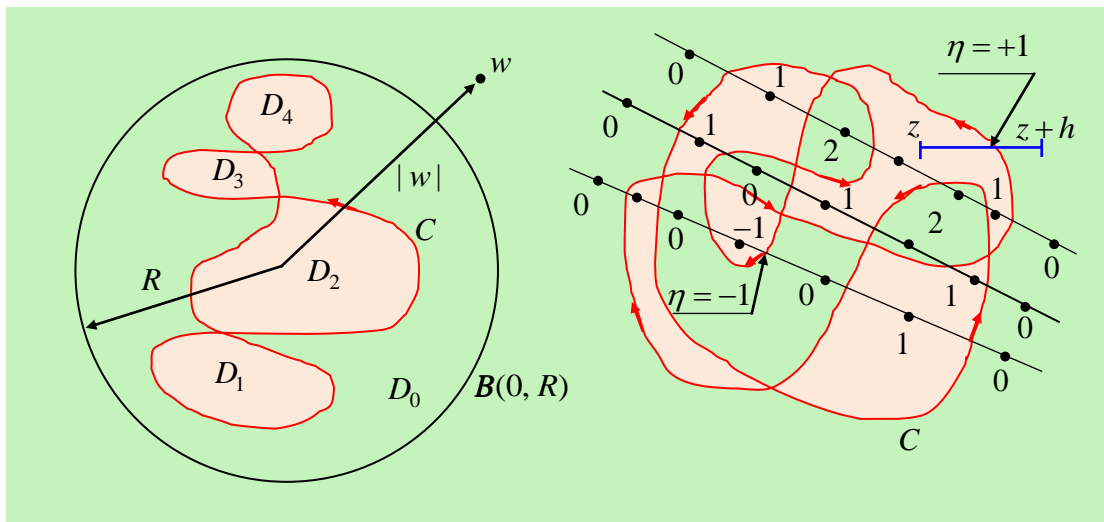
Věta 13.10: *Nechť \mathcal{C} je po částech hladká uzavřená křivka (uzavřený jednorozměrný singulární řetězec) v \mathbf{C} a $D = \mathbf{C}^+ \setminus \mathcal{C}$. Funkce*

$$\text{Ind}_{\mathcal{C}} : D \ni z \longrightarrow \text{Ind}_{\mathcal{C}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi - z} \in \mathbf{C} \quad (13.18)$$

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 59

nabývá na D celočíselných hodnot, na každé z komponent množiny D je konstantní a na neohraničené komponentě D_0 množiny D je nulová.

K důkazu si nejprve připravíme záležitosti týkající se množiny D a jejích komponent. Ve větě se mluví o neohraničené komponentě. Můžeme si být jisti, že množina D takovou komponentu skutečně má? Názorně je jasné, že ano, je však třeba doplnit argumentaci, která obstojí po matematické stránce. Názornou představu podpoří obrázek 13.8. Připomeňme názorný význam kom-



Obrázek 13.8: Index bodu vzhledem je křivce.

ponent (přesná definice je uvedena v druhém dílu): Komponenty množiny jsou takříkajíc její „největší souvislé podmnožiny“, množina sama je jejich sjednocením. Množina $D = \mathbf{C} \setminus C$ na obrázku 13.8 vlevo je sjednocením svých komponent D_0, D_1, D_2, D_3 a D_4 , přičemž komponenta D_0 je neohraničená. Graf křivky C je kompaktní množina (ohraničená a uzavřená). Existuje proto otevřený kruh $B(0, R)$ o poloměru R , který graf křivky C obsahuje. Doplněk tohoto kruhu $\mathbf{C}^+ \setminus B(0, R)$ je neohraničená souvislá množina. Podle definice komponenty musí existovat komponenta D_0 množiny D , pro kterou platí $\mathbf{C}^+ \setminus B(0, R) \subset D_0$. Tato komponenta je tedy neohraničená. D_0 je jedinou neohraničenou komponentou množiny D (zdůvodněte, je to jednoduché). Závěr: Množina D_0 má právě jednu neohraničenou komponentu.

Nyní se pustíme do důkazu věty samotné. Vypadá trochu uměle, ale když se zad ním zamyslíme, ukáže se jeho „logika“ jako velice pochopitelná. Křivka

\mathcal{C} je parametrizována takto:

$$\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow \mathcal{C}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{C}.$$

Označme $\xi = \mathcal{C}(t) = x(t) + iy(t)$, $\dot{\mathcal{C}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, resp. $\dot{\mathcal{C}}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$.
Počítejme index:

$$\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\mathcal{C}}(t) dt}{\mathcal{C}(t) - z}.$$

Definujme funkci reálné proměnné t na intervalu $[\alpha, \beta]$ vztahem

$$\varphi(t) = \exp \left[\int_{\alpha}^t \frac{\dot{\mathcal{C}}(t) dt}{\mathcal{C}(t) - z} \right].$$

Pak $\varphi(\alpha) = 1$ a $\varphi(\beta) = \exp [2\pi i \text{Ind}_{\mathcal{C}}(z)]$, a dále

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{\dot{\mathcal{C}}(t)}{\mathcal{C}(t) - z} \exp \left[\int_{\alpha}^t \frac{\dot{\mathcal{C}}(t) dt}{\mathcal{C}(t) - z} \right], \\ \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} &= \frac{\dot{\mathcal{C}}(t)}{\mathcal{C}(t) - z} \implies \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{\mathcal{C}}(t)} = \frac{\varphi(t)}{\mathcal{C}(t) - z}. \end{aligned}$$

Tento vztah platí všude s výjimkou bodů, kde neexistuje derivace $\dot{\mathcal{C}}(t)$. Množina těchto bodů je konečná, neboť křivka \mathcal{C} je podle předpokladu po částech hladká. Uvažujme o funkci

$$\phi(t) = \frac{\varphi(t)}{\mathcal{C}(t) - z}.$$

Tato funkce je na intervalu $[\alpha, \beta]$ spojitá a má tam derivaci s výjimkou konečné množiny bodů. Platí

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)(\mathcal{C}(t) - z) - \varphi(t)\dot{\mathcal{C}}(t)}{(\mathcal{C}(t) - z)^2} = 0.$$

Funkce $\phi(t)$ je na intervalu $[\alpha, \beta]$ konstantní, takže

$$\begin{aligned} \phi(t) = \phi(\alpha) &= \frac{\varphi(\alpha)}{\mathcal{C}(\alpha) - z} = \frac{1}{\mathcal{C}(\alpha) - z} \implies \\ \implies \varphi(t) = \phi(\alpha) (\mathcal{C}(t) - z) &= \frac{\mathcal{C}(t) - z}{\mathcal{C}(\alpha) - z} \implies \varphi(\beta) = \frac{\mathcal{C}(\beta) - z}{\mathcal{C}(\alpha) - z} = 1. \end{aligned}$$

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 61

Poslední rovnost vyplývá ze skutečnosti, že křivka \mathcal{C} je uzavřená, proto $\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}(\beta)$. Odtud

$$\exp \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\mathcal{C}}(t)}{\mathcal{C}(t) - z} dt = 1 \implies \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\mathcal{C}}(t)}{\mathcal{C}(t) - z} dt = 2\pi i k,$$

kde $k \in \mathbf{Z}$. Máme první část tvrzení věty 13.10 — index bodu vzhledem ke křivce nabývají celočíselných hodnot. Dále ukážeme, že index je holomorfní funkce s nulovou derivací. Vypočteme ji z definice, samozřejmě s tím, že jak bod z_0 , v němž budeme příslušnou limitu počítat, tak obecný bod z , který se objevuje v limitním přechodu $z \rightarrow z_0$ jako proměnná, leží v téže komponentě množiny D .

$$\begin{aligned} \frac{\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z) - \text{Ind}_{\mathcal{C}}(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\mathcal{C}}(t) dt}{\mathcal{C}(t) - z} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\mathcal{C}}(t) dt}{\mathcal{C}(t) - z_0} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\mathcal{C}}(t) dt}{(\mathcal{C}(t) - z)(\mathcal{C}(t) - z_0)}, \end{aligned}$$

a v limitě

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z) - \text{Ind}_{\mathcal{C}}(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow z_0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\mathcal{C}}(t) dt}{(\mathcal{C}(t) - z)(\mathcal{C}(t) - z_0)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{\mathcal{C}}(t) dt}{[\mathcal{C}(t) - z_0]^2} = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\mathcal{C}(t) - z_0} \right]_{\alpha}^{\beta} = 0. \end{aligned}$$

Tímto výsledkem jsme dokázali hned dvě věci: funkce $\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z)$ má derivaci v každém bodě, v němž je definována, je tedy holomorfní na každé z komponent množiny D . Derivace je nulová, takže funkce $\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z)$ je na každé z komponent množiny D konstantní. Že nabývá pouze celočíselných hodnot jsme dokázali už dříve. Zbývá dokázat poslední vlastnost — nulovou hodnotu indexu na neomezené komponentě. Stačí zjistit, jak je to s hodnotou indexu vně kruhu $B(0, R)$. Zvolme bod vně tohoto kruhu, tj. v množině $\mathbf{C}^+ \setminus \bar{B}(0, R)$. Označme jej třeba w , aby se nám to nepletlo s obecným bodem z množiny D (obrázek 13.8 vlevo). Že je jeho index vzhledem ke křivce \mathcal{C} je „náznorně jasně“ hned ze dvou důvodů.

- Index měří počet oběhů křivky kolem daného bodu, avšak křivka \mathcal{C} bod w neobíhá vůbec.
- Budeme-li bod w vzdalovat, tj. $w \rightarrow \infty$, bude se integrand ve vztahu pro index „více a více“ blížit bodu nula. Protože však index může nabýt jen celočíselné hodnoty, a to konstantní na celé (neomezené) komponentě D_0 , musí na ní nabývat nulové hodnoty.

„Názorně jasnou“ věc však nemůžeme odbýt bez pořádného důkazu. Provedeme proto odhad absolutní hodnoty indexu bodu z vzhledem ke křivce \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} |\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi - w} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{|d\xi|}{|\xi - w|} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{|d\xi|}{|w| - R} = \\ &= \frac{1}{2\pi(|w| - R)} \int_{\mathcal{C}} |d\xi| = \frac{l_{\mathcal{C}}}{2\pi(|w| - R)}. \end{aligned}$$

Výsledný výraz $\frac{l_{\mathcal{C}}}{2\pi(|w| - R)}$, představující odhad absolutní hodnoty indexu, je kladný a klesá, když se bod w vzdaluje od počátku. Jeho limitou pro $|w| \rightarrow \infty$ je nula. Protože index nabývá jen celočíselných hodnot, musí být nule roven, a to na celé komponentě D_0 . Jakých skutečností jsme při úpravě použili? Především z toho, že křivka \mathcal{C} leží uvnitř kruhu $B(0, R)$, plyne, že vzdálenost $|\xi - w|$ kteréhokoli jejího bodu od bodu w je větší než vzdálenost bodu w od hranice kruhu, tj. $|\xi - w| > |w| - R$. Dále fakt, že $|d\xi| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ představuje délkový element křivky, takže $\int_{\mathcal{C}} |d\xi|$ je integrál prvního druhu a jeho výsledkem je délka křivky $l_{\mathcal{C}}$. Ta je podle předpokladu o vlastnostech křivky konečná. Tím jsme dokončili poslední krok důkazu věty 13.10.

K čemu je pravá část obrázku 13.8? Abychom si ukázali, jak lze určit index bodů ležících v jednotlivých komponentách množiny D vzhledem k dané křivce, je-li křivka třeba i hodně „zamotaná“. Slouží k tomu následující věta, kterou nebudeme dokazovat.

Věta 13.11 (Určení indexu): *Předpokládejme, že \mathcal{C} je opět křivka v \mathbf{C} se všemi potřebnými vlastnostmi. Zvolme reálné číslo $h > 0$ a bod $z \in \mathbf{C}$, který neleží na křivce. Označme T množinu průsečíků úsečky \mathcal{U} s krajními body z a $z + h$ s křivkou \mathcal{C} a předpokládejme, že je konečná. Nechť funkce $\text{Im}\mathcal{C}(t)$ je v každém bodě $\tau \in T$ ryze monotónní. Položme $\eta_{\mathcal{C}}(\tau) = 1$, resp. -1 , je-li funkce $\text{Im}\mathcal{C}(t)$ v bodě τ rostoucí, resp. klesající. Pak platí*

$$\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z) = \text{Ind}_{\mathcal{C}}(z + h) + \sum_{\tau \in T} \eta_{\mathcal{C}}(\tau).$$

Situaci, kterou popisuje tato věta, vidíme na obrázku 13.8 vpravo. Úsečka \mathcal{C} je v něm vyznačena modře. Její pravý krajní bod $z + h$ leží v neomezené komponentě D_0 množiny D . Jeho index (a index všech ostatních bodů komponenty D_0) je roven nule. Posuneme-li se po úsečce \mathcal{C} do jejího levého krajního bodu z , překročíme křivku v bodě, v němž funkce $\text{Im } \mathcal{C}(t)$ roste. Proto je $\eta_{\mathcal{C}}(\tau) = 1$. Podle věty 13.11 je index bodu z (a všech ostatních bodů ležících v téže komponentě jako bod z) vzhledem ke křivce \mathcal{C} roven jedné. A takto můžeme pokračovat do dalších komponent. Věta 13.11 je formulována pro případ, že úsečka \mathcal{U} je rovnoběžná s reálnou osou. Vzhledem k tomu, že index nabývá na každé z komponent stále téže hodnoty, je zřejmé, že lze použít i úseček, které mají obecnější polohu. V obrázku 13.8 jsou vyznačeny hodnoty indexu pro body všech komponent.

Příklad 13.15: Integrovaní (skoro) bez počítání

Znalosti pojmu index bodu vzhledem ke křivce můžeme s výhodou využít při určení hodnot některých integrálů. Máme například určit všechny možné hodnoty integrálu

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi^2 + 9}$$

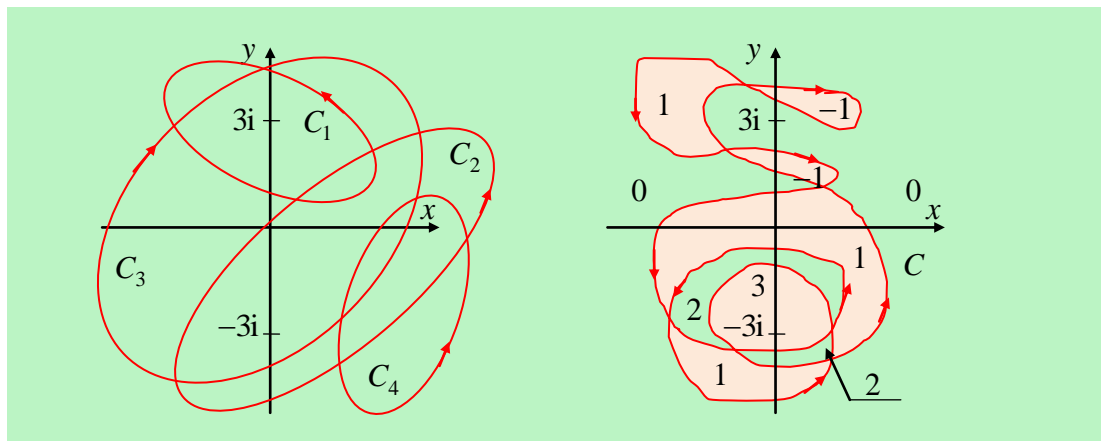
po uzavřené křivce \mathcal{C} . Zeptáte se: „Ale po *jaké konkrétní* křivce?“ Přece to nemůže být jedno, integrál musí na křivce záviset. Závisejí, ale jen do jisté míry. Především nesmíme křivku volit tak, aby procházela body $\pm 3i$, neboť v nich integrand, a tedy ani integrál, není definován. Pokud křivka tento požadavek splňuje, je určení všech možných hodnot integrálu jednoduché. Tyto hodnoty závisejí totiž pouze na tom, kolikrát křivka každý z bodů $\pm 3i$ „obíhá“. Hned to ukážeme. Rozložíme integrand na parciální zlomky, tj.

$$\frac{1}{\xi^2 + 9} = \frac{1}{6i} \frac{1}{\xi - 3i} - \frac{1}{6i} \frac{1}{\xi + 3i}.$$

Pro integrál platí

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi^2 + 9} = \frac{1}{6i} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi - 3i} - \frac{1}{6i} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi + 3i} = \frac{\pi}{3} \text{Ind}_{\mathcal{C}}(3i) - \frac{\pi}{3} \text{Ind}_{\mathcal{C}}(-3i).$$

Protože index může nabývat jen celočíselných hodnot, je integrál roven celočíselnému násobku hodnoty $\frac{\pi}{3}$. Závisejí pouze na tom, kolikrát křivka \mathcal{C} obíhá bod $3i$ a kolikrát bod $(-3i)$. Několik možností vidíme na obrázku 13.9. V



Obrázek 13.9: Výpočet integrálu pomocí indexu.

případě křivek na obrázku je situace následující:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C
$3i$	1	0	-1	0	0
$-3i$	0	1	-1	0	3
I	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	0	$-\pi$

V tabulce jsou vyznačeny hodnoty indexu bodů $3i$ a $-3i$ vzhledem k jednotlivým křivkám znázorněným na obrázku. Poslední řádek tabulky shrnuje odpovídající hodnoty integrálu I .

Při zkoumání integrálu vyjadřujícího index daného bodu z vzhledem k uzavřené křivce a zejména při řešení příkladu 13.15 jste si možná všimli jedné věci, která se v průběhu pozdějšího výkladu ukáže jako „zákonitá“ a velmi důležitá: v bodě z není integrand definován, bod z je tedy „singularitou“ integrandu. Uzavřená křivka C obepíná určitou oblast. Pokud je index bodu z vzhledem ke křivce C nulový („singulatita“ z tedy v oblasti obepnuté křivkou buď vůbec neleží, nebo v ní leží, avšak křivka se kolem ní „motá“ tak, že ji oběhne stejněkrát v kladném i v záporném geometrickém smyslu), je

integrál nulový. V opačném případě je integrál roven počtu oběhů křivky kolem „singularity“ z . (Počet oběhů bereme v úvahu včetně násobnosti, která je kladná při obězích v kladném smyslu a záporná při obězích ve smyslu záporném.) Slovo „singularity“ je v textu uvedeno v uvozovkách, neboť přesná definice singularit nás teprve čeká. Později totiž uvidíme, že nejen v případě indexu, ale jakéhokoli integrálu z funkce komplexní proměnné po uzavřené křivce do výsledku přispívají pouze „singularity“, tj. body, v nichž není integrand definován.

13.2.2 Regulární funkce — funkce s Taylorovou řadou

V tomto odstavci se budeme věnovat další důležité vlastnosti funkcí komplexní proměnné, jejich *regulárnosti*. Zdánlivě půjde o něco jiného než v případě holomorfnosti, ale brzy pochopíme úzkou souvislost. Připomeňme, že stále pracujeme s funkcemi konečnými a jednoznačnými, definovanými na podmnožinách rozšířené Gaussovy roviny \mathbf{C}^+ (znamená to, že mohou být definovány i v bodě nekonečno, hodnoty nekonečno však nabývat nemohou). Pusťme se do definice.

Funkce $f(z)$ se nazývá *regulární v bodě* $z_0 \in \mathbf{C}$, je-li možné ji v jistém kruhovém okolí tohoto bodu $B(z_0, r)$ vyjádřit ve tvaru stejnoměrně konvergentní řady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n \in \mathbf{C}. \quad (13.19)$$

Funkce $f(z)$ se nazývá *regulární v nekonečnu*, tj. v bodě $z_0 = \infty$, je-li funkce $g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ regulární v bodě $\xi_0 = 0$.

Nechť $D \subset \mathbf{C}^+$ je otevřená množina. Funkce $f(z)$ se nazývá *regulární na množině* D , je-li regulární v každém jejím bodě.

Zamysleme se ještě nad tím, jak bychom matematicky zapsali rozvoj funkce regulární v bodě nekonečno. Pro funkci $g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ regulární v nule dostaneme řadu stejnoměrně konvergentní v jistém otevřeném kruhu $B(0, r)$

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n.$$

To znamená, že funkce $f(z)$ bude v kruhovém okolí $B(\infty, r^{-1})$ vyjádřena řadou (rovněž stejnoměrně konvergentní)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots,$$

tedy, možná (zatím) trochu překvapivě, „mocninnou“ řadou se zápornými exponenty.

Příklad 13.16: Zkusme regulární funkci zderivovat

Uvažujme o funkci $f(z)$, která je regulární v bodě $z_0 \neq \infty$. Podle předchozí definice to znamená, že je na jistém kruhu $B(z_0, r)$ vyjádřena stejnoměrně konvergentní řadou (13.19). Nejprve zjistíme, jak tento kruh může být „velký“. Poloměr konvergence řady je podle vztahu (13.6)

$$R_f = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}.$$

Řada stejnoměrně konverguje pro $r < R$, pro $r = R$ je zaručena lokální stejnoměrná konvergence. Pokud jde o možnost funkci $f(z)$ zderivovat a zjistit tak, zda a v jakém oboru je holomorfní, je snadné ověřit holomorfnost každého jejího členu přímo z definice. Provedme to za účelem procvičení. Označíme $w - z = \xi$, $z - z_0 = \zeta$ a při úpravě použijeme binomické věty a samozřejmě využíváme vlastností limit z věty 13.4. Platí

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow z} \frac{c_n [(w - z_0)^n - (z - z_0)^n]}{w - z} &= c_n \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(\zeta + \xi)^n - \zeta^n}{\xi} = \\ &= c_n \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \zeta^{n-k} \xi^k - \zeta^n \right) = \\ &= c_n \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \zeta^{n-k} \xi^k = c_n \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(n \zeta^{n-1} + \xi \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \zeta^{n-k} \xi^{k-1} \right) = \\ &= n c_n \zeta^{n-1} = n c_n (z - z_0)^{n-1}. \end{aligned}$$

Vidíme, že jednotlivé členy řady $f(z)$ jsou holomorfní funkce a pro jejich derivace platí vztah, který jsme očekávali. Znamená to, že řada

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1},$$

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 67

utvořená z derivací těchto členů je derivací funkce $f(z)$? Pokud ano, znamenalo by to, že můžeme takovou řadu derivovat člen po členu, jak jsme byli zvyklí u stejnoměrně konvergentních řad reálných funkcí. U funkcí komplexní proměnné však žádnou větu, která by takový postup zaručovala, zatím nemáme. Nejprve zjistíme poloměr konvergence řady $g(z)$,

$$R_g^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|nc_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = R_f^{-1}.$$

Uvědomme si, že předchozí postup výpočtu limity je v pořádku, neboť obě limity objevující se na konci výpočtu v součinu existují, konkrétně $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (ověřte si to) a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = R_f^{-1}$. Řada $g(z)$ má shodný poloměr konvergence s řadou $f(z)$. V otevřeném kruhu $B(z_0, r)$, $r < R_f$ konverguje stejnoměrně, v kruhu $B(z_0, R_f)$ pak lokálně stejnoměrně.

Nakonec je třeba dokázat, že existuje derivace $f'(z)$ a platí $f'(z) = g(z)$. Potřebujeme dokázat, že

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = g(z) \implies \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) = 0.$$

Trochu si započítáme. Zpracujeme nejprve výraz za limitou. Použijeme při tom trochu jiného postupu, než který jsme uplatnili při výpočtu derivace jednotlivých členů řady $f(z)$. Platí

$$\begin{aligned} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}{(w - z_0) - (z - z_0)} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{(w - z_0)^n - (z - z_0)^n}{(w - z_0) - (z - z_0)} - n(z - z_0)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

První člen sumy je na první pohled nulový, ve skutečnosti se tedy sčítá až od $n = 2$. Elementárními postupy (například přímým vydělením mnohočlenu mnohočlenem, nebo matematickou indukcí) lze dokázat, že platí (viz úlohu 4. cvičení 13.2.6).

$$\frac{(w - z_0)^n - (z - z_0)^n}{(w - z_0) - (z - z_0)} - n(z - z_0)^{n-1} = (w - z) \sum_{k=1}^{n-1} k (w - z_0)^{n-k-1} (z - z_0)^{k-1}.$$

Provedeme odhad získaného výrazu. Protože body z i w leží uvnitř kruhu $B(z_0, r)$, je $|w - z_0| < r$, $|z - z_0| < r$. Proto

$$\left| (w - z) \sum_{k=1}^{n-1} k (w - z_0)^{n-k-1} (z - z_0)^{k-1} \right| < |w - z| \sum_{k=1}^{n-1} k r^{n-k-1} r^{k-1} = |w - z| r^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Aritmetickou posloupnost sečteme snadno a dostaneme

$$\left| (w-z) \sum_{k=1}^{n-1} k(w-z_0)^{n-k-1}(z-z_0)^{k-1} \right| < |w-z| r^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} < |w-z| n^2 r^{n-2},$$

a nakonec

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w-z} - g(z) \right| < |w-z| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |c_n| r^{n-2}.$$

Řada $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |c_n| r^{n-2}$ konverguje, má tedy konečný součet. (Dokážete to zdůvodnit?) Proto je

$$\lim_{w \rightarrow z} \left[\frac{f(w) - f(z)}{w-z} - g(z) \right] = 0 \implies g(z) = f'(z).$$

Uvědomme si, že na základě provedeného důkazu můžeme v derivování pokračovat a získat druhou, třetí, a další derivace funkce $f(z)$:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z-z_0)^{n-k}, \implies f^{(k)}(z_0) = k! c_k.$$

Všechny tyto derivace jsou rovněž regulárními funkcemi.

Příklad 13.16 je fakticky odvozením následující důležité věty.

Věta 13.12: *Je-li funkce $f(z)$ v otevřené množině $D \subset \mathbf{C}$ regulární a platí-li pro $z_0 \in D$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, $z \in B(z_0, r) \subset D$, pak je $f(z)$ v D holomorfní a platí $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1}$, $z \in B(z_0, r) \subset D$. Funkci $f(z)$ lze vyjádřit mocninnou řadou*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z-z_0)^n, \quad z_0 \in D, \quad z \in B(z_0, r), \quad r < R_f, \quad (13.20)$$

zvanou Taylorova řada funkce se středem v bodě z_0 .

Příklad 13.17: Zkusme regulární funkci zintegrovat

Uvažujme opět o funkci $f(z)$ regulární na otevřené množině D a předpokládejme, že je v otevřeném kruhu $B(z_0, R_f) \subset D$ dána (lokálně stejnoměrně konvergentní) řadou $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$. Řada

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$$

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 69

má s řadou funkce $f(z)$ shodný poloměr konvergence (ověřte výpočtem pomocí vztahu (13.6)). Z příkladu 13.16 a věty 13.11 je zřejmé, že platí $F'(z) = f(z)$ na množině D . Dejme tomu, že $\mathcal{C}: [\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) \in D$ je křivka splňující předpoklady definice integrálu, přičemž $\mathcal{C}(\alpha) = a$ a $\mathcal{C}(\beta) = b$. Zajímá nás hodnota integrálu

$$I = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.$$

Můžeme o ní vůbec něco zjistit, když křivka \mathcal{C} není konkrétně zadána? O funkcích komplexné proměnné jsme však už stačili zjistit, že mají jisté „překvapivé“ vlastnosti. Pokusme se využít souvislosti funkcí $f(z)$ a $F(z)$ a pravidla pro derivaci složené funkce:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} F'(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\mathcal{C}(t)) \dot{\mathcal{C}}(t) dt = F[\mathcal{C}(\beta)] - F[\mathcal{C}(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Zjistili jsme, že integrál nezávisí na tvaru křivky, pouze na jejím počátečním a koncovém bodu. Podobnou situaci jsme už „zažili“ u křivkových integrálů druhého druhu z konzervativních vektorových polí.

Velmi pečlivý čtenář by mohl být s předchozím „rychlým postupem“ nespokojen. V případě reálných funkcí reálné proměnné je rovnost

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F(b) - F(a), \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta)$$

zřejmá. Vyjadřuje větu o substituci při výpočtu integrálu. Je však takový vztah platný i v případě, kdy je proměnná i funkce komplexní? Prověříme to tak, že integrál po křivce \mathcal{C} z funkce $F'(z)$ vypočteme „pořádně“, pomocí definice. Platí $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, přičemž funkce $U(x, y)$ a $V(x, y)$ splňují Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Během důkazu věty 13.9 jsme zjistili, že derivaci $F'(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ lze díky nim vyjádřit několika způsoby:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{U(x, y)}{\partial x} - i \frac{U(x, y)}{\partial y} = \frac{V(x, y)}{\partial y} + i \frac{V(x, y)}{\partial x} = \\ &= \frac{U(x, y)}{\partial x} + i \frac{V(x, y)}{\partial x} = \frac{V(x, y)}{\partial y} - i \frac{U(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Využijeme prvních dvou z nich a definice integrálu, tj.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} F'(z) dz = \int_{\mathcal{C}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\mathcal{C}} v(x, y) dx + u(x, y) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy \right) + i \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} dy \right) = \\
&= U(x, y) + V(x, y) \Big|_a^b = F(b) - F(a),
\end{aligned}$$

nebo převodem na integraci podle parametru t , samozřejmě s využitím Cauchyových-Riemannových podmínek, a s označením $\mathcal{C}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$,

$$\begin{aligned}
F'[\mathcal{C}(t)] \dot{\mathcal{C}}(t) &= \left[\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right]_{\mathcal{C}(t)} (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) = \\
&= \left[\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \dot{y}(t) \right]_{\mathcal{C}(t)} + i \left[-\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \dot{x}(t) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \dot{y}(t) \right]_{\mathcal{C}(t)} = \\
&= \left[\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \dot{y}(t) \right]_{\mathcal{C}(t)} + i \left[\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \dot{y}(t) \right]_{\mathcal{C}(t)} = \\
&= \frac{dU[\mathcal{C}(t)]}{dt} + i \frac{dV[\mathcal{C}(t)]}{dt},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_{\mathcal{C}} F'(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} F'[\mathcal{C}(t)] \dot{\mathcal{C}}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{dU[\mathcal{C}(t)]}{dt} + i \frac{dV[\mathcal{C}(t)]}{dt} \right\} dt = \\
&= U[\mathcal{C}(t)] + iV[\mathcal{C}(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\mathcal{C}(\beta)] - F[\mathcal{C}(\alpha)] = F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

Podle výsledku vidíme, že původní „rychlý“ postup integrace pomocí složené funkce, jejíž vnější i vnitřní složka byly komplexní funkce reálné proměnné t , byl v pořádku. A všimněme si ještě jedné zajímavé věci: Bude-li křivka \mathcal{C} uzavřená, bude integrál $\int_{\mathcal{C}} F'(z) dz$ nulový!

V příkladech 13.16, 13.17 a větě 13.11 jsme ukázali důležité vlastnosti regulárních funkcí:

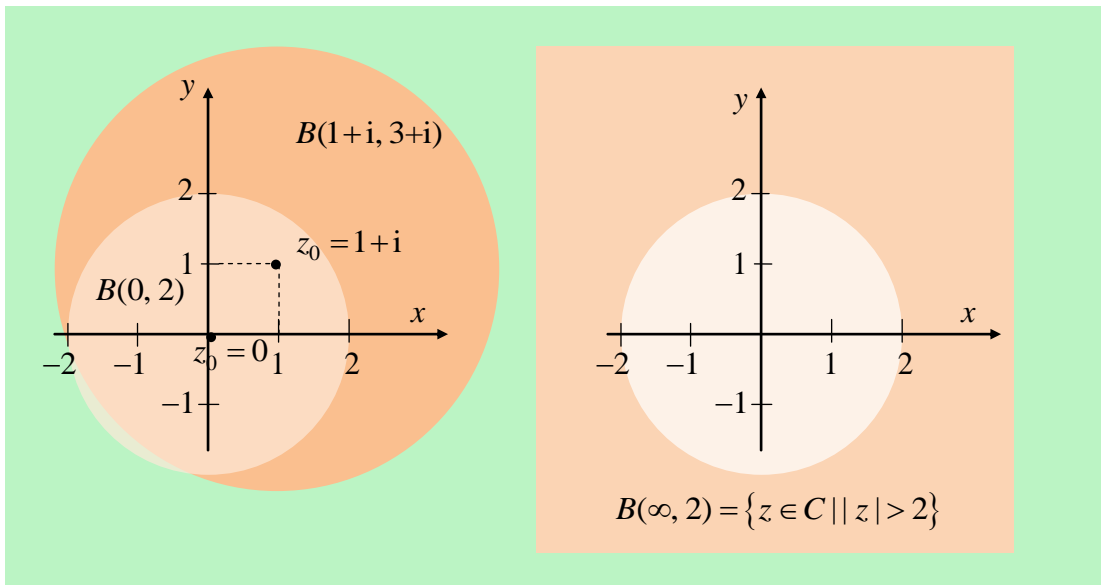
- Mocniné řady regulárních funkcí lze v oboru jejich (lokálně stejnoměrné) konvergence derivovat i integrovat člen po členu.
- Integrál z regulární funkce po uzavřené křivce ležící v oboru (lokálně stejnoměrné) konvergence Taylorovy řady, jíž je tato funkce vyjádřena, je nulový.

Příklad 13.18: Taylorova řada prakticky

Je na čase ukázat příklad na nalezení Taylorovy řady dané funkce. Jednoduše dokážeme zapsat Taylorovu řadu racionální lomené funkce, podobně jako jsme to dělali v oboru reálné proměnné. Uvažme nejprve velmi jednoduchý příklad funkce

$$f(z) = \frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2}.$$

Tato funkce je definována na otevřené množině $D = \mathbf{C}^+ \setminus \{-2\}$. Bod $z_0 = -2$ se tedy pochopitelně nemůže stát středem řady. Zvolme nejprve libovolný bod $z_0 \in \mathbf{C}$, $z_0 \neq -2$ (obrázek 13.10 vlevo, sestrojen pro body $z_0 = 1+i$ a $z_0 = 0$). Přímý, ale nepříliš pohodlný postup, jak najít koeficienty Taylorovy



Obrázek 13.10: Taylorova řada: k příkladu 13.18.

řady, spočívá ve výpočtu derivací všech řádů funkce $f(z)$ v bodě z_0 . v daném případě to ovšem tak složité není. Platí

$$\begin{aligned} f^{(0)}(z) &= f(z) = 1 - \frac{2}{z+2}, & f^{(0)}(z_0) &= 1 - \frac{2}{z_0+2}, \\ f^{(1)}(z) &= \frac{2}{(z+2)^2}, & f^{(1)}(z_0) &= \frac{2}{(z_0+2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(2)}(z) &= -2 \frac{2}{(z+2)^3}, & f^{(2)}(z_0) &= -2 \frac{2}{(z_0+2)^3}, \\
\dots &= \dots\dots\dots, \\
f^{(n)}(z) &= -2 \frac{(-1)^n n!}{(z+2)^{n+1}}, & f^{(n)}(z_0) &= -2 \frac{(-1)^n n!}{(z_0+2)^{n+1}}, \\
\dots &= \dots\dots\dots, \\
f(z) &= \left(1 - \frac{2}{z_0+2}\right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(z_0+2)^{n+1}} = \\
&= \left(1 - \frac{2}{z_0+2}\right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z_0+2)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Vypočteme poloměr konvergence řady (výpočet limity proveďte sami, už by to neměl být problém),

$$R_f^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{|z_0+2|^{n+1}}} = \frac{1}{|z_0+2|}, \quad R_f = |z_0+2|.$$

Poloměr konvergence je roven vzdálenosti středu řady od bodu, v němž funkce není definována. To nepochybně není náhoda.

Taylorovu řadu můžeme najít mnohem elegantnějším způsobem, než pomocí výpočtu derivací. Vráťte-li se k příkladu 2.23 (první díl), najdete tam způsob, jakým jsme dokázali snadno zapsat racionální lomenou funkci jako (geometrickou) řadu, neboť tato funkce byla jejím součtem. Podobný postup použijeme i nyní. Nejprve musíme do předpisu zadané funkce $f(z)$, který neobsahuje střed řady, tento střed nějak „namontovat“. Provedeme to umělým obratem $z = z - z_0 + z_0$ a budeme pokračovat v úpravách:

$$f(z) = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{(2+z_0) + (z-z_0)} = 1 - \frac{2}{2+z_0} \frac{1}{1 + \frac{z-z_0}{2+z_0}}.$$

Poslední zlomek v upraveném výrazu je součet geometrické řady s prvním členem rovným jedné a kvocientem $q = -\frac{z-z_0}{2+z_0}$. Tato řada je (lokálně stejno-měrně) konvergentní, je-li $|q| < 1$. Pak

$$f(z) = 1 - \frac{2}{2+z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-z_0}{2+z_0}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{z_0+2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} -2 \frac{(-1)^n}{(z_0+2)^{n+2}} (z-z_0),$$

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 73

$$\left| -\frac{z - z_0}{2 + z_0} \right| < 1 \Rightarrow z \in B(z_0, |z_0 + 2|).$$

Z podmínky pro kvocient konvergentní geometrické řady nám vyšel stejný poloměr konvergence, jako z Cauchyova-Hadamardova vzorce (13.6), což jistě nepřekvapuje. Není překvapující ani to, že kruh konvergence může sahat pouze po nejbližší singularitě, tj. bod, v němž funkce není regulární.

Zbývá ještě rozvinout funkci $f(z)$ v mocninnou řadu se středem $z_0 = \infty$. Znamená to najít Taylorovu řadu funkce $g(\xi) = f(\xi^{-1})$ se středem v bodě $\xi_0 = 0$.

$$g(\xi) = \frac{\xi^{-1}}{2 + \xi^{-1}} = \frac{1}{1 + 2\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \xi^n, \quad |2\xi| < 1 \Rightarrow |\xi| < \frac{1}{2},$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}, \quad \left| \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| > 2, \quad z \in B(\infty, 2).$$

Kruh, v němž řada konverguje (lokálně stejnoměrně), opět sahá od středu řady (tím je bod nekonečno) po singularitu v bodě -2 (obrázek 13.10 vpravo).

Dalšími důležitými příklady Taylorových řad jsou rozvoje funkcí e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ se středem v bodě $z_0 = 0$. Tyto funkce jsou definovány v celé *nerozšířené* Gaussově rovině *bfC*, jak víme z odstavce 13.1.3. Ale pozor! V bodě nekonečno definovány nejsou a vykazují tam velmi podivné chování. O tom se však přesvědčíme později. A teď ty rozvoje kolem nuly:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad (13.21)$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i^n + (-i)^n), \quad (13.22)$$

$$\begin{aligned} i^{4j} + (-i)^{4j} &= 2, & i^{4j+1} + (-i)^{4j+1} &= 0, \\ i^{4j+2} + (-i)^{4j+2} &= -2, & i^{4j+3} + (-i)^{4j+3} &= 0, \quad j \in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad (13.23)$$

a podobně

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i^n - (-i)^n),$$

$$\begin{aligned} i^{4j} - (-i)^{4j} &= 0, & i^{4j+1} + (-i)^{4j+1} &= 2i, \\ i^{4j+2} + (-i)^{4j+2} &= 0, & i^{4j+3} + (-i)^{4j+3} &= -2i, \quad j \in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}. \quad (13.24)$$

Stejný postup uplatníme u hyperbolického sinu a kosinu, jde bude ještě jednodušší (proved'te):

$$\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}, \quad (13.25)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}. \quad (13.26)$$

V odstavci 13.2.5 se k těmto funkcím ještě vrátíme a k jejich definici něco zajímavého „přidáme“.

13.2.3 Holomorfní funkce, uzavřená křivka a nulový integrál

V předchozím odstavci jsme zjistili, že integrál z regulární funkce $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ po uzavřené křivce, která leží v kruhu $B(z_0, R_f)$, v němž konverguje příslušná Taylorova řada, je nulový. Víme, že regulární funkce je také holomorfní, nevíme však zatím, zda tomu je i naopak (podle zkušenosti s funkcemi reálné proměnné bychom nejspíše čekali, že nikoliv). Je vcelku přirozené položit si otázku, jak to bude s integrálem z holomorfní funkce po uzavřené křivce. Bude také nulový? Jaké podmínky budeme klást na integrační křivku?

Uvažujme nejprve o trochu jiném případě. Předpokládejme, že $F(z)$ je holomorfní funkce na otevřené množině D a její derivace $f(z) = F'(z)$ je na této množině spojitá. Nic dalšího o množině D nepředpokládáme. Integrovat budeme po křivce, která je uzavřená (a samozřejmě splňuje všechny předpoklady pro to, aby se po ní dalo integrovat) a leží v množině D , tj. $\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) \in D$, $\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}(\beta)$. O funkci $f(z)$ nevíme, zda je holomorfní, ale víme, že z holomorfní funkce vznikla jako její derivace. Platí

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{C}F'(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} F'[\mathcal{C}(t)] \dot{\mathcal{C}}(t) dt = F[\mathcal{C}(\beta)] - F[\mathcal{C}(\alpha)] = 0.$$

Při výpočtu jsme použili pravidlo pro integraci složené funkce. Že to tak můžeme udělat, jsme si ověřili v příkladu 13.17.

Pozn. 1: Teď si někdo řekne: Pozor! Funkce $F'(z)$ v příkladu 13.17 *byla holomorfní, protože byla regulární*. Nyní tomu tak být nemusí! Nemusí, ale nevadí. V příkladu 13.17 jsme využili pouze holomorfnosti funkce $F(z)$ (použili jsme Cauchyho-Riemannovy podmínky pro její reálnou a imaginární část). Holomorfnost funkce $F'(z)$, i když byla její regulárností zajištěna, jsme nepotřebovali.

Zopakujme, že v předchozí úvaze jsme na množinu D , v níž leží integrační křivka \mathcal{C} , nekladli v podstatě žádné požadavky. Předpokládali jsme jen to, že je otevřená, což není příliš omezující podmínka. Na integrovanou funkci $f(z)$ jsme speciální požadavek měli — aby měla tvar derivace jisté funkce $F(z)$, tj. $f(z) = F'(z)$. (Předpoklad spojitosti není nic neobvyklého, sloužil k zajištění existence integrálu z funkce $F'[\mathcal{C}(t)]\dot{\mathcal{C}}(t)$ na intervalu $[\alpha, \beta]$.) Další úvahy a výsledky se budou zdát hodně podobné, ale přece zde budou jisté důležité odlišnosti. Za chvíli uvidíme.

Budeme se zabývat integrálem *holomorfní* funkce $f(z)$ po uzavřené křivce \mathcal{C} . (To je o funkci sice silnější předpoklad než spojitost, ale naopak odstraníme požadavek, aby měla tvar derivace.) Definičním oborem integrované funkce $f(z)$ bude opět otevřená množina D a křivka, po které integrujeme, v ní samozřejmě bude ležet. Integrál z funkce $f(z)$ po křivce \mathcal{C} vyjádříme z definice (13.9),

$$\int_{\mathcal{C}} \omega + i \int_{\mathcal{C}} \eta = \int_{\mathcal{C}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\mathcal{C}} v(x, y) dx + u(x, y) dy,$$

Funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ jsou diferencovatelné a splňují podmínky (13.13) — věta 13.9. Zaměříme se zvlášť na každý z integrálů $\int_{\mathcal{C}} \omega$ a $\int_{\mathcal{C}} \eta$. ω a η jsou diferenciální 1-formy definované na této množině. Předpokládáme-li, že $d\omega$ a $d\eta$ jsou rovněž diferenciální formy na D (konkrétně jsou to 2-formy), tj. jejich složky jsou diferencovatelné funkce, a označíme-li $M \subset D$ množinu, jejíž hranicí je křivka $\text{cal}\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} = \partial M$), jsou splněny předpoklady obecného Stokesova teorému 12.30, platí

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_M d\omega, \quad \int_{\mathcal{C}} \eta = \int_M d\eta \implies$$

$$\int_{\mathcal{C}} u(x, y) dx - v(x, y) dy = \int_M \left(-\frac{v(x, y)}{\partial x} - \frac{u(x, y)}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0,$$

$$\int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy = \int_M \left(\frac{u(x, y)}{\partial x} - \frac{v(x, y)}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0.$$

Nulovost integrandů na pravých stranách těchto vztahů zajišťují právě Cauchyovy-Riemannovy podmínky (13.13). Má-li někdo raději klasické integrální věty, použijte Greenovy věty 12.32. Při této formulaci stačí předpokládat, že partiální derivace funkcí $u(x, y)$ a $v(x, y)$ jsou spojité. Výsledky budou stejné jako v předchozích vztazích, jen místo $dx \wedge dy$ budeme rovnou psát $dx dy$, jak jsme zvyklí Riemannově integrovat. Ale pozor: formulace věty 12.32 předpokládá *jednoduše souvislou* oblast D . Víme už z kapitoly 12, že toto omezení obecnosti je „daň“ za zjednodušení úvah — množina D nebude „děravá“ a odstraní se komplikace, jimiž jsme se zabývali v příkladu 12.115. Na základě právě provedených výpočtů a úvah získáváme dvě důležitá tvrzení, která jsou tzv. lokální a globální verzí slavné Cauchyovy věty.

Věta 13.13 (Lokální Cauchyova věta): *Nechť $D \subset \mathbf{C}$ je jednoduše souvislá oblast, C uzavřená křivka (jednorozměrná singulární krychle, resp. řetězec) v ní ležící, a $f(z)$ funkce holomorfní v D . Pak integrál z funkce $f(z)$ po křivce C je nulový.*

Věta 13.14 (Globální Cauchyova věta): *Nechť $D \subset \mathbf{C}$ je oblast, Γ uzavřená křivka (jednorozměrná singulární krychle, resp. řetězec) v ní ležící, a $f(z)$ funkce holomorfní v D . Pak platí:*

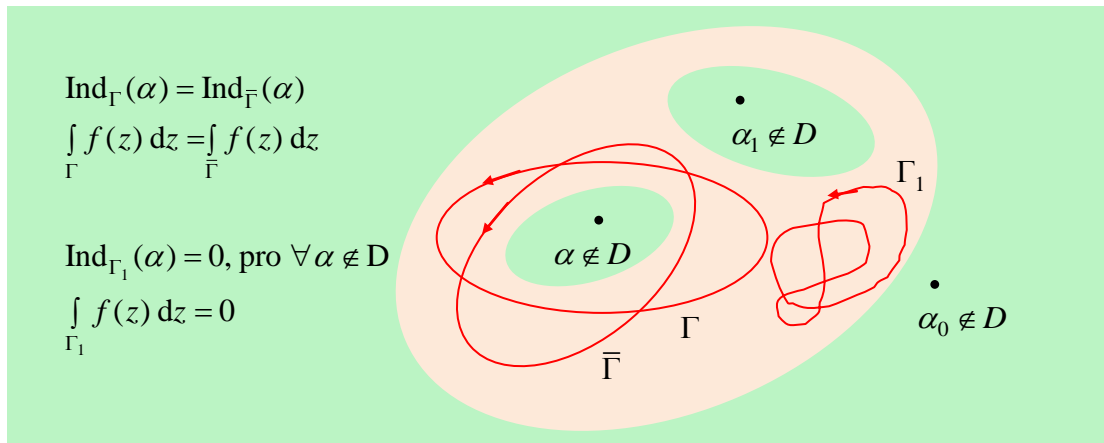
- *Je-li $\text{Ind}_-(\alpha) = 0$ pro všechny body α neležící v D , je*

$$\int_{\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{H}^+} f(z) dz = 0.$$

- *Je-li $\bar{\Gamma}$ rovněž uzavřená křivka (jednorozměrná singulární krychle, resp. řetězec) ležící v D a platí $\text{Ind}_-(\alpha) = \text{Ind}_{\bar{\Gamma}}(\alpha)$ pro všechny body α neležící v D , je*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\bar{\Gamma}} f(z) dz.$$

Situaci týkající se globální Cauchyovy věty znázorňuje obrázek 13.11. Zamysleme se nad tím, k čemu je v případě prvního tvrzení věty potřeba předpoklad týkající se indexu bodů neležících v oblasti holomorfnosti funkce vzhledem k integrační křivce. Je to jednoduché — z příkladů přece víme, že obíhali integrační křivka třeba jen jediný bod, v němž integrovaná funkce není holomorfní, integrál nemusí být nulový.



Obrázek 13.11: Globální Cauchyova věta.

Vyzkoušíme, k čemu lze Cauchyovu větu použít. První, co nás napadne, je možnost určit integrál po nějaké křivce \mathcal{C} , která je pro přímý výpočet složitá, výpočtem integrálu po jiné, jednodušší křivce \mathcal{K} , je-li $\mathcal{C} + \mathcal{K}$ uzavřená křivka splňující požadavky Cauchyovy věty. Je to úplně analogické jako použití integrálních vět v oboru reálné proměnné.

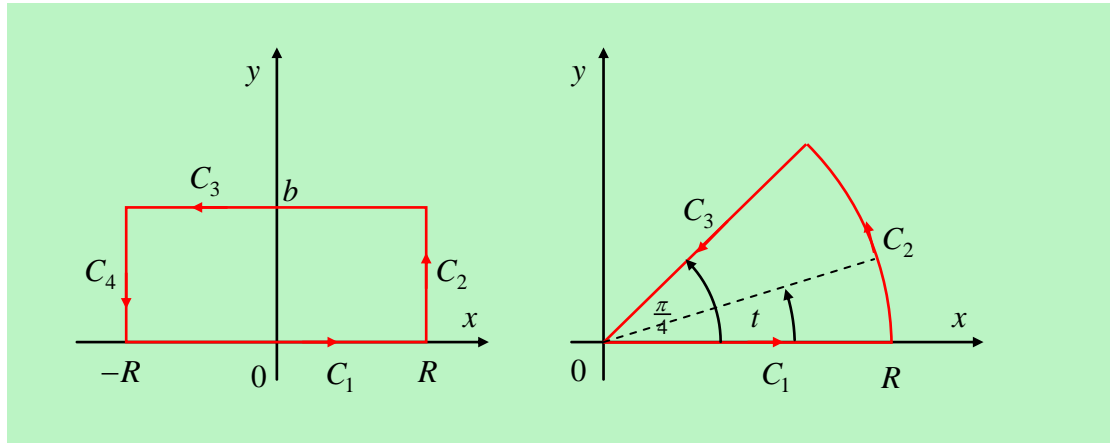
Příklad 13.19: K čemu je dobrá Cauchyova věta

Pomocí Cauchyovy věty lze například počítat reálné, často nevlastní integrály. Třeba

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx.$$

Proč bychom ale tento integrál nemohli určit „normálně“? Integrand je přece spojitá funkce a my víme, že ke spojité funkci vždy existuje funkce primitivní. Stačí ji tedy najít, určit její (limitní) hodnotu v nekonečnu a v nule a je to! Jenže věc není tak jednoduchá — primitivní funkce sice existuje, ale není utvořena z elementárních funkcí, které známe. Nemůžeme ji zapsat nějakým vzorcem, do kterého bychom pak dosadili. Přejdem do komplexního oboru však můžeme integrál vypočítat docela snadno. Aby to bylo možné, je třeba převést funkci do komplexního oboru a zvolit uzavřenou integrační křivku tak, aby příslušná část reálné osy (v tomto případě nezáporná část reálné osy) byla její součástí. S ohledem na integrand $e^{x^2} \cos 2bx$ zvolíme jako integrovanou funkci v komplexním oboru funkci e^{z^2} . Vhodnou volbu integrační

křivky (s „perspektivou“ limitního přechodu $r \rightarrow \infty$) ukazuje obrázek 13.12 vlevo. Ale proč právě takto? K volbě nás vede několik úvah:



Obrázek 13.12: Integrační obor k úlohám z příkladu 13.19.

- I je integrálem ze sudou funkci na intervalu $[0, \infty]$. Platí proto

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx.$$

- Uvědomme si, že integrovaná funkce je reálnou částí komplexní funkce reálné proměnné e^{-x^2+2ibx} , tj.

$$e^{-x^2+2ibx} = e^{-(x+ib)^2-b^2} = e^{-b^2} \cdot e^{-z^2},$$

kde $z = x + ib$. Body z tohoto typu leží na křivce C_3 znázorněné v obrázku.

- Na reálné ose je $z = x$, proto $e^{-z^2} = e^{-x^2}$. Integrálem z této funkce na reálné ose je, jak víme, $\sqrt{\pi}$ (Laplaceův integrál), tj.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 79

- Lze očekávat, že integrály po „vzdálených“ křivkách \mathcal{C}_2 a \mathcal{C}_4 budou vzhledem k rychlému poklesu funkce $e^{-z^2} = e^{-(x^2-y^2)(\cos 2xy + i \sin 2xy)}$ nulové. (Proměnná y se pohybuje pouze v mezích $[0, b]$ a funkce $(\cos 2xy + i \sin 2xy)$ je ohraničená.

Funkce e^{-z^2} je holomorfní v Gaussově rovině, proto pro ni lze použít Cauchyovu větu při libovolné volbě uzavřené integrační křivky,

$$\int_{\mathcal{C}} e^{-z^2} dz = 0.$$

Křivka \mathcal{C} na obrázku 13.12 je jednorozměrným singulárním řetězcem $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4$. Jednotlivé úseky parametrizujeme a integrály vypočteme, resp. odhadneme:

$$\mathcal{C}_1: \quad x = t, \quad y = 0, \quad t \in [-R, R], \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_1} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

$$\mathcal{C}_2: \quad x = R, \quad y = t, \quad t \in [0, b], \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_2} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^b i e^{-(R^2-t^2)-2iRt} dt,$$

$$\left| \int_0^b i e^{-(R^2-t^2)-2iRt} dt \right| \leq e^{-R^2} \int_0^b |e^{-t^2} \cdot e^{2iRt}| dt \rightarrow 0 \quad \text{pro } R \rightarrow \infty,$$

$$\mathcal{C}_3: \quad x = t, \quad y = b, \quad t \in [R-R, R], \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_3} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{-R} e^{-(t+ib)^2} dt =$$

$$= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-(t^2-b^2)} (\cos 2bt + i \sin 2bt) dt =$$

$$= -e^{b^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R e^{-t^2} \cos 2bt dt + i \int_{-R}^R e^{-t^2} \sin 2bt dt \right) = -2e^{b^2} I,$$

$$\mathcal{C}_4: \quad x = -R, \quad y = t, \quad t \in [b, 0], \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_4} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_b^0 i e^{-(R^2-t^2)+2iRt} dt = 0.$$

V závěru výpočtu integrálu po křivce \mathcal{C}_3 jsme využili toho, že funkce $e^{-t^2} \sin 2bt$ je lichá, a proto její integrál na symetrickém intervalu $[-R, R]$ je nulový. V případě křivky \mathcal{C}_4 jsme již neprováděli odhad. Snadno si jej provedete sami

po vzoru křivky \mathcal{C}_2 . Dosadíme-li získané dílčí integrály do Cauchyovy věty, dostaneme

$$\sqrt{\pi} - 2e^{b^2} I = 0 \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

A zkusme ještě jeden důležitý příklad. V optice mají značný význam *Fresnelovy integrály*

$$F_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx, \quad F_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx.$$

Ani ony nejdu přímo spočítat nalezením primitivních funkcí i integrandům. Jistě vám však neuniklo, že $\cos x^2$ a $\sin x^2$ jsou reálná a imaginární část funkce e^{ix^2} . Rýsuje se proto možnost přechodu do komplexního oboru a integrace holomorfní funkce e^{iz^2} po vhodně zvolené uzavřené křivce, jejíž jedním úsekem bude nezáporná reálná poloosa. Taková křivka je znázorněna na obrázku 13.12 vpravo. Platí

$$\int_{\mathcal{C}} e^{iz^2} dz = \int_{\mathcal{C}_1} e^{iz^2} dz + \int_{\mathcal{C}_2} e^{iz^2} dz + \int_{\mathcal{C}_3} e^{iz^2} dz.$$

Opět budeme parametrizovat jednotlivé křivky a počítat integrály:

$$\mathcal{C}_1 : \quad x = t, \quad y = 0, \quad t \in [0, R], \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_1} e^{iz^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{it^2} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \cos t^2 dt + i \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = F_1 + iF_2,$$

$$\mathcal{C}_2 : \quad x = R \cos t, \quad y = R \sin t \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_2} e^{iz^2} dz =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} iR \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2it}} \cdot e^{it} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} iR \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \cos 2t} \cdot e^{-R^2 \sin 2t} \cdot e^{it} dt.$$

$$\mathcal{C}_3 : \quad x = \frac{R\sqrt{2}}{2}t, \quad y = \frac{R\sqrt{2}}{2}t, \quad t \in [1, 0], \quad z = Rte^{i\pi/4}, \quad dz = Re^{i\pi/4},$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_3} e^{iz^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^0 e^{iR^2 t^2} \cdot e^{i\pi/2} \cdot e^{i\pi/4} dt =$$

$$= - \lim_{R \rightarrow \infty} e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-s^2} ds = -e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Provedeme odhad integrálu po křivce \mathcal{C}_2

$$\begin{aligned} \left| iR \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \cos 2t} \cdot e^{-R^2 \sin 2t} \cdot e^{it} dt \right| &\leq R \int_0^{\pi/4} \left| e^{iR^2 \cos 2t} \cdot e^{-R^2 \sin 2t} \cdot e^{it} \right| dt \\ &= R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2t} dt = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin t} dt \leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \cdot \frac{2t}{\pi}} dt = -\frac{\pi}{4R} (e^{-R^2} - 1). \end{aligned}$$

Limitní hodnota získaného horního odhadu integrálu po křivce \mathcal{C}_3 pro $R \rightarrow \infty$ je nulová. V závěru odhadu jsme použili nerovnosti $\sin t \leq \frac{2t}{\pi}$ pro $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Nyní již můžeme dosadit do Cauchyovy věty a dostaneme

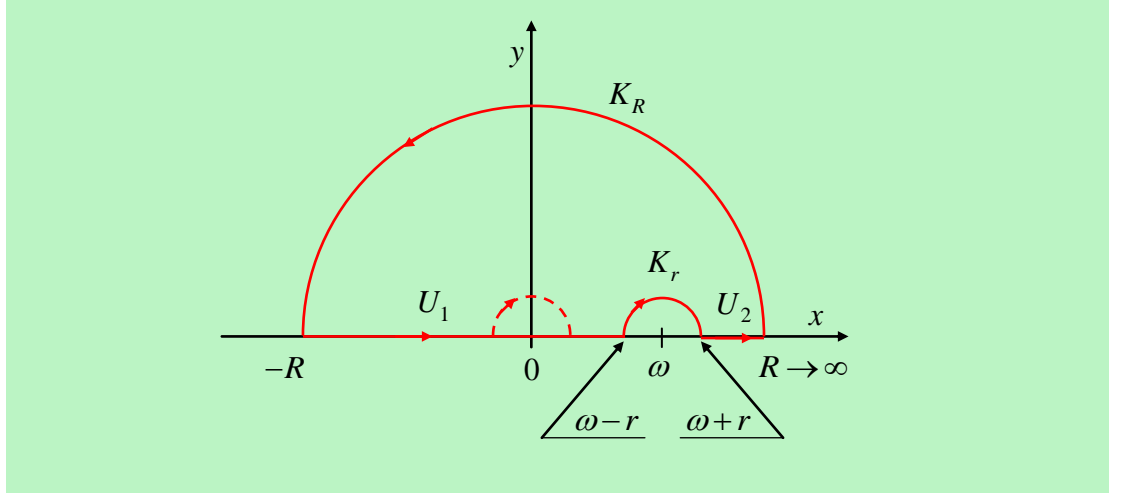
$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} e^{iz^2} dz &= (F_1 + iF_2) - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \right) = 0, \\ F_1 &= \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \quad F_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Příklad 13.20: Kramersovy-Kronigovy relace

S holomorfními funkcemi komplexní proměnné se dobře pracuje ve fyzice. Měřitelné fyzikální veličiny jsou samozřejmě reálné. Vhodnými matematickými transformacemi, o nichž budeme podrobněji hovořit v odstavci 13.6, však můžeme získat jejich (holomorfní) komplexní obrazy. Ty pak mají všechny vlastnosti, které jsme pro holomorfní funkce odvodili. Platí proto pro ně i Cauchyova věta. Jednou z takových fyzikálních veličin je tzv. *relativní dielektrická susceptibilita* $\alpha(t)$, popisující odezvu látky na elektrické pole optických frekvencí. Jejím holomorfním komplexním obrazem je funkce označovaná $\epsilon(z) - 1$, kde $\epsilon(z)$ je *komplexní relativní permitivita*. Aniž bychom se nyní zabývali dalšími matematickými aspekty problému či jeho fyzikální podstatou, všimněme si funkce $\epsilon(z) - 1$, o níž předpokládáme, že je holomorfní v horní polorovině Gaussovy roviny \mathbf{C} a platí pro ni $\lim_{z \rightarrow \infty} (\epsilon(z) - 1) = 0$. Označme

$$f(z) = \frac{\epsilon(z) - 1}{z - \omega}, \quad \omega \in (0, \infty).$$

tato funkce je holomorfní v horní polorovině Gaussovy roviny s výjimkou bodu ω na nezáporné reálné poloose, v němž není definována. Zvolme integrační křivku $\mathcal{C} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{K}_r + \mathcal{U}_2 + \mathcal{K}_R$ (obrázek 13.13), složenou ze dvou



Obrázek 13.13: Integrační křivka k příkladu 13.20.

úseček a dvou půlkružnic (čárkované půlkružnice se zatím nevímejme). Pomocí půlkružnice \mathcal{K}_r jsme se „vyhnuli“ bodu ω . Pro funkci $f(z)$ a křivku \mathcal{C} platí Cauchyova věta, tj.

$$\mathcal{C} \frac{\epsilon(z) - 1}{z - \omega} dz = 0.$$

Vyjádříme integrály po jednotlivých úsecích křivky a provedeme limitní přechody $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$. (Proveďte všechny kroky výpočtů, i ty nejjednodušší, které jsou v textu vynechány.)

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left[\int_{\mathcal{U}_1} \frac{\epsilon(z) - 1}{z - \omega} dz + \int_{\mathcal{U}_2} \frac{\epsilon(z) - 1}{z - \omega} dz \right] = \\ \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{\omega-r} \frac{\epsilon(x) - 1}{x - \omega} dx + \int_{\omega+r}^R \frac{\epsilon(x) - 1}{x - \omega} dx \right] = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(x) - 1}{x - \omega} dx. \end{aligned}$$

Výsledný integrál je chápán ve smyslu hlavní hodnoty (viz odstavec 12.1.12). Pro integrál po půlkružnici \mathcal{K}_R : $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $dz = iRe^{it} dt$ platí

$$\int_{\mathcal{K}_R} \frac{\epsilon(z) - 1}{z - \omega} dz = iR \int_0^\pi \left[\frac{\epsilon(Re^{it}) - 1}{Re^{it}} e^{it} \right] dt = \int_0^\pi [\epsilon(Re^{it}) - 1] dt.$$

Vzhledem k předpokladu $\lim_{R \rightarrow \infty} (\epsilon(z) - 1) = 0$ je tento integrál v limitě pro $R \rightarrow 0$ nulový. Zbývá integrál po půlkružnici $\mathcal{K}_r : z = re^{it}$, $t \in [\pi, 0]$, $dz = ire^{it}$. Platí pro něj

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{\epsilon(z) - 1}{z - \omega} dz = ir \int_{\pi}^0 [\epsilon(re^{it}) - 1] dz = -i\pi [\epsilon(\omega) - 1].$$

Dosažením do Cauchyovy věty dospíváme k závěru

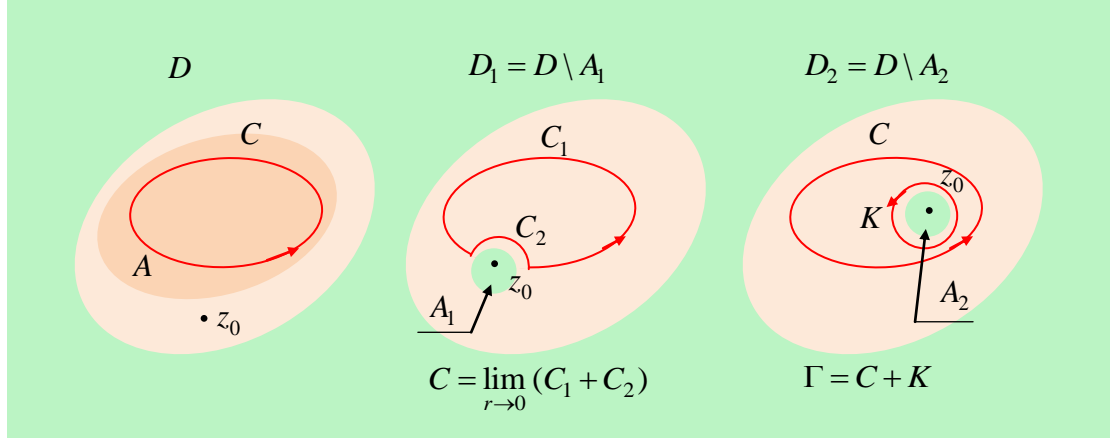
$$\epsilon(\omega) - 1 = -\frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(x) - 1}{x - \omega} dx. \quad (13.27)$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí obou stran rovnosti (13.27) dostaneme

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\epsilon(\omega) - 1] &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \epsilon(x)}{x - \omega} dx, \\ \operatorname{Im} \epsilon(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \epsilon(x) - 1}{x - \omega} dx. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Tento výsledek je velmi důležitý pro zpracování optických měření. Unamená, že reálná a imaginární část komplexní dielektrické permitivity nejsou nezávislé. Známe-li například imaginární část, můžeme reálnou v principu určit. Nakonec si ještě všimněme čárkované půlkružnice v obrázku 13.13. Je-li prostředí vodivé, není jeho komplexní dielektrická funkce definována v bodě $z = 0$. Proto i tento bod je třeba při použití Cauchyovy věty „obejít“.

Za účelem získání dalších praktických výsledků se nyní pokusíme Cauchyovu větu trochu zobecnit z hlediska požadavků na funkci $f(z)$. Všimněme si lokální Cauchyovy v případě, kdy připustíme, že v nějakém bodě $z_0 \in D$ je porušena holomorfnost této funkce, ne však její spojitost. Funkce je tedy v bodě z_0 spojitá, ale nemusí v něm mít derivaci. Tři v principu odlišné polohy bodu z_0 jsou zachyceny na obrázku 13.14. Případ, kdy bod z_0 leží vně křivky \mathcal{C} (obrázek vlevo), tj. jeho index vzhledem k této křivce je nulový, jsou splněny předpoklady (lokální) Cauchyovy věty na oblasti $A \subset D$, která již bod z_0 neobsahuje. Další situace nastane, leží-li bod z_0 přímo na křivce \mathcal{C} . Označme \mathcal{C}_2 část kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem r , zvolenou tak, aby vznikla uzavřená křivka $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ podle obrázku uprostřed. Vyjmeme-li z oblasti D kruh A_1 obsahující bod z_0 tak, aby křivka $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ ležela v jednoduše souvislé oblasti $D \setminus A_1$, budou pro tuto oblast opět splněny



Obrázek 13.14: Porušení holomorfnosti v bodě.

požadavky Cauchyovy věty. Oblast D_1 sice není jednoduše souvislá, ale pro všechny body α neležící v této oblasti (a speciálně pro bod z_0 , o který jde) platí $\text{Ind}_{C_1+C_2}(\alpha) = 0$. Proto je integrál z funkce $f(z)$ po křivce $C_\infty + C + 2$ nulový pro libovolně malý poloměr kružnice C_2 , která tvoří „výhybku“ kolem bodu z_0 . Předpokládejme, že křivka C obíhá oblast uvnitř jednou v kladném smyslu. Totéž pak platí pro křivku $C_1 + C_2$. Parametrické vyjádření kružnice C_2 je například $x = x_0 + re^{it}$, $y = y_0 + re^{it}$, $t \in [t_1, t_2]$, $2\pi < t_1 > t_2 > 0$ (kružnice je orientována v záporném smyslu). Platí

$$0 = \int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + ir \int_{t_1}^{t_2} f(re^{it}) dt.$$

Provedeme odhad druhého integrálu. Využijeme při tom skutečnosti, že funkce $f(z)$ je v bodě z_0 spojitá, a proto je na jeho jistém okolí $B(z_0, \rho)$ ohraničená, tj. existuje číslo M tak, že $|f(z)| < M$ pro všechny body $z \in B(z_0, \rho)$. Zvolme $r < \rho$. Pak platí

$$\left| ir \int_{t_1}^{t_2} f(re^{it}) dt \right| \leq r \int_{t_1}^{t_2} |f(re^{it})| dt < rM \int_{t_1}^{t_2} dt = rM(t_2 - t_1).$$

Limita druhého integrálu pro $r \rightarrow 0$ je tedy nulová. Nulová proto musí být i limita prvního integrálu, tj.

$$0 = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.$$

V posledním případě, kdy bod z_0 leží uvnitř křivky \mathcal{C} , vyjmeme z oblasti D kruh $A_2 = B(z_0, \varrho)$ a aplikujeme globální Cauchyovu větu na křivku $\Gamma = \mathcal{C} + \mathcal{K}$ a oblast $D \setminus A_2$, kde \mathcal{K} je kružnice o poloměru $r > \varrho$, která obíhá bod z_0 jednou v kladném smyslu. Platí

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{K}} f(z) dz.$$

Provedeme-li odhad integrálu po kružnici stejným způsobem jako po křivce \mathcal{C}_2 , s tím rozdílem, že nyní je $t_1 = 0$ a $t_2 = 2\pi$, zjistíme, že limita tohoto integrálu pro $r \rightarrow 0$ (a současně s tím samozřejmě také $\varrho \rightarrow 0$) je nulová. Jistě není třeba zvlášť zdůrazňovat, že závěr, platný pro jeden bod v oblasti D , v němž funkce porušuje podmínku holomorfnosti, je v něm však spojitá, lze rozšířit na konečný počet takových bodů.

To, že jsme v oblasti D připustili výjimečný bod z_0 umožní odvodit velmi užitečný vzorec pro integrální vyjádření funkčních hodnot holomorfní funkce. Uvedeme a dokážeme jej v následujícím odstavci.

13.2.4 Holomorfní a regulární jsou synonyma!

Avizovaný Cauchyův vzorec je jednoduchým přímým důsledkem Cauchyovy věty. Je klíčem k důkazu „zlatého hřebu“ této kapitoly a jedné z nejzajímavějších a „nejpříjemnějších“ vlastností holomorfních funkcí.

Věta 13.15 (Cauchyův vzorec): *Nechť $D \subset \mathbf{C}$ je jednoduše souvislá oblast, \mathcal{C} uzavřená křivka (jednorozměrná singulární křivka, resp. řetězec), a $f(z)$ holomorfní funkce v D . Pak na množině $D \setminus \mathcal{C}$ platí*

$$f(z) \operatorname{Ind}_{\mathcal{C}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (13.29)$$

Dokázat tuto větu bude vzhledem k „přípravě“ v předchozím odstavci velice jednoduché. Definujme novou funkci $\varphi(\xi)$ vztahy

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \quad \text{pro } \xi \in D, \xi \neq z, \\ \varphi &= f'(z) \quad \text{pro } \xi = z. \end{aligned}$$

Vzhledem k holomorfnosti funkce $f(z)$ v oblasti D je funkce φ v D také holomorfní, s výjimkou bodu $\xi = z$, v němž je ale spojitá (dovedete to zdůvodnit?). Teď se nám hodí Cauchyova věta doplněná o možnost výjimečného bodu neholonomnosti integrované funkce. Díky ní platí

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\xi) d\xi = 0.$$

Po dosazení za funkci $\varphi(\xi)$ z její definice dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \operatorname{Ind}_{\mathcal{C}}(z), \end{aligned}$$

odkud již Cauchyův vzorec přímo plyne. Pro $\operatorname{Ind}_{\mathcal{C}}(z) = 1$ představuje integrál přímo funkční hodnotu funkce $f(z)$. Cauchyův vzorec platí také v globální podobě: Budou-li splněny předpoklady věty 13.13 (globální Cauchyova věta), pak Cauchyův vzorec platí pro každou křivku $\text{cal}C$, splňující podmínku $\operatorname{Ind}_{\mathcal{C}}(\alpha) = 0$ pro všechny body α neležící v oblasti D .

A teď přijde slibovaná zásadní věta. Její charakter je lokální.

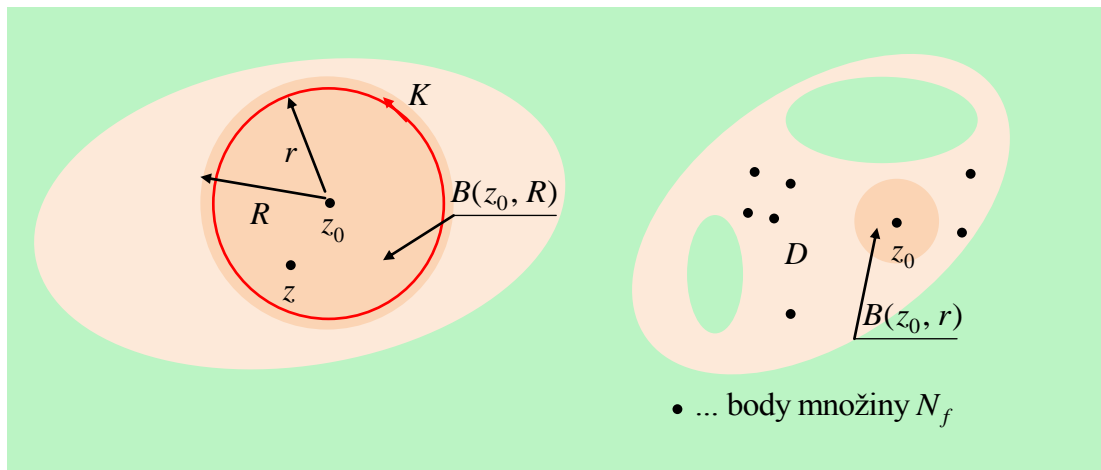
Věta 13.16 (Holomorfnost \equiv regulárnost): *Funkci $f(z)$ holomorfní v otevřené množině $D \subset \mathbf{C}^+$ lze v jistém okolí každého bodu této množiny vyjádřit (stejněměrně konvergentní) mocninnou řadou (se středem v tomto bodě).*

K důkazu se bude hodit levá část obrázku 13.15. Zvolme v množině D libovolně bod z_0 . Pak existuje otevřený kruh $B(z_0, R)$, který leží v množině D . Označme \mathcal{K} kružnici o poloměru $r < R$ se středem v bodě z_0 , která obíhá bod z_0 jednou v kladném smyslu, tj. $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z) = 1$ pro libovolný bod $z \in B(z_0, r)$. Pro každý takový bod platí podle (13.29)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz.$$

V integrandu je možné „uvidět“ součet geometrické řady. Vzhledem k tomu, že $|z - z_0| < |\xi - z_0|$ pro libovolný bod ξ ležící na integrační kružnici, totiž platí

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$



Obrázek 13.15: Holomorfní funkce je regulární — k důkazu.

Dosadíme do Cauchyova vzorce a zaměníme sumaci za integraci (to je umožněno lokální stejnoměrnou konvergencí geometrické řady). Dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n. \quad (13.30)$$

Funkci $f(z)$ jsme tedy v okolí $B(z_0, r)$ vyjádřili lokálně stejnoměrně konvergentní řadou, pro jejíž koeficienty jsme vyjádřili integrální vztahy. Funkce $f(z)$ je tedy regulární. Současně však víme, že mocninnou řadou regulární funkce je řada Taylorova. Ta také konverguje lokálně stejnoměrně. Její koeficienty $n!f^{(n)}(z_0)$ musí být rovny právě získaným koeficientům c_n , proto

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi. \quad (13.31)$$

Pozn. 1: Pokud kružnice \mathcal{K} obíhá bod z_0 víckrát, objeví se na levé straně vzorce (13.31) ještě $\text{Ind}_{\mathcal{K}}(z_0)$.

Pozn. 2: Integrační křivkou nemusí být nutně kružnice. Tu jsme zvolili pro

zjednodušení důkazu. Vzorec bude platit i v případě, že budeme integrovat po obecně zvolené uzavřené křivce ležící v $B(z_0, R)$.

Vztah (13.31) se nazývá *zobecněný Cauchyův vzorec*. Všimněte si, jak může být užitečný: integrály typu pravé strany, dokonce po libovolné křivce ležící v $B(z_0, R)$, vůbec nemusíme počítat! Stačí určit funkční hodnotu na levé straně vzorce.

Cauchyovu větu lze také „obrátit“. Ale jak? Lokální Cauchyova věta říká, že integrál z funkce, která je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti D , po uzavřené křivce ležící v této oblasti (a samozřejmě splňující požadavky na to, aby mohla být integračním oborem) je nulový. Znamená to, že bude-li integrál z funkce $f(z)$ po libovolné takové křivce nulový, můžeme si být jisti, že je funkce holomorfní? Je to tak. O funkci $f(z)$ pochopitelně něco předpokládat musíme, abychom existenci integrálu zajistili. Dostatečným požadavkem je spojitost. Ukážeme, že pak také stačí, aby integrál byl nulový pro hranici libovolného trojúhelníka ležícího v dané oblasti. Důsledkem je holomorfnost funkce $f(z)$ v oblasti D . Pokusme se k tomuto závěru dospět. Omezme se pro jednoduchost na případ, kdy je oblast D konvexní. Je to speciální případ jednoduše souvislé oblasti. (Rozšíření platnosti výsledku na libovolnou otevřenou množinu je snadné). Zvolme bod $z_1 \in D$ libovolně. Vzhledem k předpokládané konvexnosti obsahuje množina D také úsečku $[z_1, z]$ spojující bod z_1 s libovolným bodem $z \in D$. Definujme na D funkci

$$F(z) = \int_{[z_1, z]} f(\xi) d\xi.$$

Dokážeme nejprve, že funkce $F(z)$ je holomorfní. Zvolme v D další libovolný bod z_0 . Pak v D leží celý trojúhelník s vrcholy z_1 , z a z_0 . Označme jej Δ a předpokládejme, že integrál z funkce $f(z)$ po jeho hranici $\partial\Delta$ je nulový. Pak

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Delta} f(\xi) d\xi = \int_{[z_1, z]} f(\xi) d\xi + \int_{[z, z_0]} f(\xi) d\xi + \int_{[z_0, z_1]} f(\xi) d\xi = \\ &F(z) + \int_{[z, z_0]} f(\xi) d\xi - F(z_0) \implies \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi = F(z) - F(z_0). \end{aligned}$$

Chvilí počítejme výraz, který povede k závěru o holomorfnosti funkce $F(z)$:

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi, \quad z \neq z_0.$$

Nyní uplatníme předpoklad spojitosti funkce f . Plyne z ní, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $f(B(z_0, \delta)) \subset B(f(z_0), \varepsilon)$, neboli pro každou hodnotu proměnné ξ , pro kterou je $|\xi - z_0| < \delta$ platí $|f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon$. Pro taková ξ je proto

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &< \frac{1}{|z - z_0|} \left| \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|z - z_0|} \int_{[z_0, z]} |f(\xi) - f(z_0)| ds < \frac{1}{|z - z_0|} \int_{[z_0, z]} \varepsilon ds = \varepsilon. \end{aligned}$$

Z definice limity a definice derivace funkce hned plyne

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \implies f(z_0) = F'(z_0).$$

Vzhledem k tomu, že bod $z_0 \in D$ byl zvolen libovolně, je zřejmé, že funkce $F(z)$ je v D holomorfní. Díky větě 13.15 však už víme, že holomorfní funkce je také regulární, tj. má derivace všech řádů. proto i její derivace, kterou je právě funkce $f(z)$, je holomorfní. Avizovali jsme snadné zobecnění tohoto výsledku na libovolnou otevřenou množinu. Každá otevřená množina totiž s každým svým bodem obsahuje také nějaké jeho kruhové okolí. A kruhová okolí bodů jsou konvexní množiny. (Ještě si toto zobecnění sami pořádně promyslete.) Výsledek formulujeme v následující větě.

Věta 13.17 (Morero): *Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je spojitá na otevřené množině D . Je-li integrál z této funkce po hranici libovolného trojúhelníka ležícího v D nulový, je funkce $f(z)$ v D holomorfní.*

Může se zdát, že Moreroova věta k ničemu není. Nemůžeme přece prověřovat integrály po všech možných trojúhelnících. Samozřejmě, že ne. Může však nastat situace, kdy pro konkrétně zadanou funkci $f(z)$ zapíšeme její integrál po obecně zvoleném trojúhelníku a uvidíme, že je nulový. Morerovy věty s výhodou využijeme v následujícím odstavci k zavedení matematicky a fyzikálně veledůležitě funkce $\Gamma(z)$ nazývané *gama-funkce*.

13.2.5 Věta o jednoznačnosti, holomorfní rozšíření, elementární funkce

Věta o jednoznačnosti je zásadním obecným tvrzením s velmi praktickým využitím v konkrétních případech. Často totiž potřebujeme rozšířit definiční

obor známých reálných funkcí reálné proměnné do komplexního oboru. Pokud se to povede tak, aby rozšířená funkce byla na novém definičním oboru (oblasti v komplexní rovině) holomorfní, zaručuje věta o jednoznačnosti, že toto rozšíření je jediné. Zvláště užitečné je to v případě, že reálnou funkci reálné proměnné umíme zapsat pomocí stejnoměrně konvergentní mocninné řady (se středem v bodě x_0 a poloměrem konvergence R). Stačí pak provést záměnu $x \rightarrow z$ a holomorfní rozšíření je hotovo. Takto lze zavést zcela korektní definice známých elementárních funkcí (exponenciála, funkce sinus, kosinus, hyperbolický sinus a kosinus, ...) a dalších funkcí. Obecnou verzi věty o jednoznačnosti nyní formulujeme.

Věta 13.18 (o jednoznačnosti): *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v oblasti D (souvislost množiny D je podstatná!). Označme N_f množinu všech nulových bodů funkce $f(z)$ ležících v D , tj. $N_f = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$. Pak nastane právě jedna z možností:*

- $N_f = D$, tj. funkce $f(z)$ je identicky nulová v D .
- Množina N_f nemá v D žádný hromadný bod. V tomto případě je množina N_f nejvýše spočetná a ke každému jejímu bodu $z_0 \in N_f$ existuje jednoznačně přirozené číslo $m = m(z_0)$ tak, že platí

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad z \in D,$$

kde $g(z)$ je holomorfní funkce, pro kterou je $g(z_0) \neq 0$.

Číslo $m = m(z_0)$ se nazývá násobnost nulového bodu (kořenu) z_0 funkce $f(z)$.

Uvědomme si hloubku tvrzení obsaženého ve větě 13.18. Znamená, že nulové body funkce holomorfní v oblasti (souvislé otevřené množině) jsou buď izolované (něco jako „noty na bubnu“), nebo je funkce nulová celé množině D . Nic „mezi tím“ neexistuje. Není třeba možné, aby nulové body holomorfní funkce vyplnily nějakou křivku v D .

Pusťme se do důkazu věty. Figurují v ní hromadné body množiny N_f , které leží v D . Označme A množinu všech těchto bodů. Ukážeme, že $A \subset N_f$, tj. funkce musí být nulová i v hromadných bodech množiny N_f ležících v D . (Může být samozřejmě nulová i v bodech množiny N_f mimo množinu A , ale takové body budou izolované). Zvolme tedy libovolný bod $a \in A$. Sporem dokážeme, že $f(a) = 0$. Předpokládejme, že $f(a) \neq 0$. Pak v jakkoli malém okolí bodu a leží alespoň jeden bod z , pro který je $f(z) = 0$, takže $|f(z) - f(a)| = |f(a)|$. Plyne to ze skutečnosti, že a je hromadný bod množiny N_f .

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 91

Předpoklad $f(a) \neq 0$ je v rozporu se spojitostí funkce: v definici spojitosti by stačilo volit třeba $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(a)|$. (Opět tento závěr dobře promyslete.)

Zvolme nyní libovolně bod $z_0 \in N_f$. Funkce $f(z)$ je regulární (neboť je holomorfní), proto existuje okolí $B(z_0, r)$, v němž ji lze vyjádřit stejnoměrně konvergentní mocninnou řadou se středem v bodě z_0 . Zvolme toto okolí tak, aby $B(z_0, r) \subset D$ (obrázek 13.15 vpravo). Platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r).$$

Jsou dvě možnosti týkající se koeficientů řady:

- $c_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$,
- neplatí předchozí, tj. některé koeficienty řady jsou nenulové.

V prvním případě je funkce $f(z)$ identicky nulová v kruhovém okolí $B(z_0, r)$ bodu z_0 . V druhém případě označme $m = m(z_0)$ nejmenší index, pro který je koeficient řady nenulový, tj. $c_0 = \dots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$. Znamená to, že v $B(z_0, r)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z - z_0)^n = (z - z_0)^m g(z).$$

Jako novou funkci $g(z)$ jsme označili

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z - z_0)^n.$$

Tato funkce je holomorfní (jak to víme?) a platí pro ni

$$g(z) = (z - z_0)^{-m} f(z) \text{ pro } z \neq z_0, \quad g(z_0) = c_m \neq 0.$$

Ze spojitosti funkce $g(z)$ plyne, že existuje kruhové okolí $B(z_0, \varrho) \subset B(z_0, r)$ bodu z_0 tak, že v něm funkce $g(z)$ ještě „vydrží“ být nenulová. Protože je $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, je funkce $f(z)$ nenulová v prstencovém okolí $P(z_0, \varrho)$ bodu z_0 . Bod z_0 je tedy izolovaným bodem množiny N_f (od ostatních nulových bodů funkce $f(z)$ je „oddělen“ prstencem $P(z_0, \varrho)$).

A teď přijde rozhodující úvaha, která povede k závěru, že množina N_f obsahuje buď samé izolované body, nebo má v D alespoň jeden hromadný bod a v takové případě je totožná s množinou D . Právě v této části důkazu využijeme předpokládané souvislosti množiny D . Prozkoumejme vlastnosti

množiny A . Označili jsme tak množinu všech hromadných bodů množiny N_f ležících v D a zjistili jsme o ní, že je podmnožinou množiny N_f samotné. Zvolme libovolný bod množiny A . Je to nulový bod funkce, který však není bodem izolovaným. Proto existuje jeho otevřené kruhové okolí, které celé leží v množině A . Množina A je tedy otevřená. Označíme-li A' množinu úplně všech hromadných bodů množiny N_f (některé z nich nemusejí ležet v množině D), můžeme si být jisti, že je uzavřená (to je obecná vlastnost množiny všech hromadných bodů jakékoli množiny). Platí $A = A' \cap D$, a současně

$$D \setminus A = D \setminus (A' \cap D) = D \setminus A',$$

což je ovšem otevřená množina. Dále platí

$$D = D \cup (A \setminus A), \quad A \cap (D \setminus A) = \emptyset.$$

Množina D je tedy sjednocením dvou disjunktních množin, konkrétně A a $D \setminus A$. Zároveň je však souvislá (je to oblast). Tyto dvě vlastnosti jdou dohromady jen ve dvou krajních případech:

- $A = D$, $D \setminus A = \emptyset$, odkud $N_f = D$, a proto $f(z) \equiv 0$ na D ,
- $A = \emptyset$, tj. množina N_f je tvořena samými izolovanými body (je proto spočetná), a také nemá v D žádné hromadné body.

Jednoduchým, avšak důležitým důsledkem věty o jednoznačnosti je skutečnost, že splývají-li hodnoty holomorfních funkcí $f(z)$ a $g(z)$ na jisté podmnožině N oblasti D , a má-li množina N v D alespoň jeden hromadný bod, pak jsou funkce $f(z)$ a $g(z)$ identické na D . Vzhledem k těmto sympatickým vlastnostem holomorfních funkcí na oblastech má smysl definovat pojem tzv. holomorfního rozšíření funkce.

Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je definována na podmnožině E oblasti D . *Holomorfním rozšířením* funkce $f(z)$ na oblast D nazveme takovou funkci $F(z)$ holomorfní v D , jejíž hodnoty na množině E splývají s hodnotami výchozí funkce $f(z)$, tj. $F(z)|_E = f(z)$.

Existenci holomorfního rozšíření nám žádná věta nezaručuje. Pokud však holomorfní rozšíření funkce $f(z)$ na oblast D existuje a zároveň platí, že množina E má v D alespoň jeden hromadný bod, pak je toto holomorfní rozšíření *určeno jednoznačně*. A to je velmi silný výsledek. Umožňuje totiž holomorfně rozšířit funkce zadané na reálné ose, jejích podintervalech, nebo třeba i libovolných otevřených podmnožinách, stejnoměrně konvergentními

řadami, do oblastí komplexní roviny. Intervaly reálných čísel, popřípadě otevřené podmnožiny reálné osy mají totiž v oblastech komplexní roviny, které je obsahují, hromadné body. Dokonce všechny body intervalů či otevřených podmnožin reálné osy jsou jejich hromadnými body v \mathbf{C} . V takových případech stačí vzít Taylorovu řadu výchozí reálné funkce reálné proměnné $f(x)$ a provést záměnu $x \rightarrow z$. Některé elementární funkce, konkrétně e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$, jsme sice již stejnoměrně konvergentními řadami definovali v odstavci 13.1.3 (příklad 13.9), teprve nyní však máme jistotu, že jiné holomorfní funkce, jejichž hodnoty na reálné ose splynou s hodnotami „zdrojových“ reálných funkcí reálné proměnné, neexistují. Důsledkem zadání funkcí rozšířením Taylorových řad z reálné osy do oblastí komplexní roviny je také skutečnost, že formální vzorce pro jejich derivace jsou stejné jako vzorce pro derivace odpovídajících reálných funkcí reálné proměnné. Stejně konvergentní řady totiž můžeme derivovat člen po členu a to, jak se označuje proměnná, není pro tuto proceduru důležité. Zachovávají se například také všechny součtové vzorce pro rozšíření goniometrických funkcí, apod. V následujících příkladech si všimneme některých elementárních funkcí ještě trochu podrobněji než v odstavci 13.1.3.

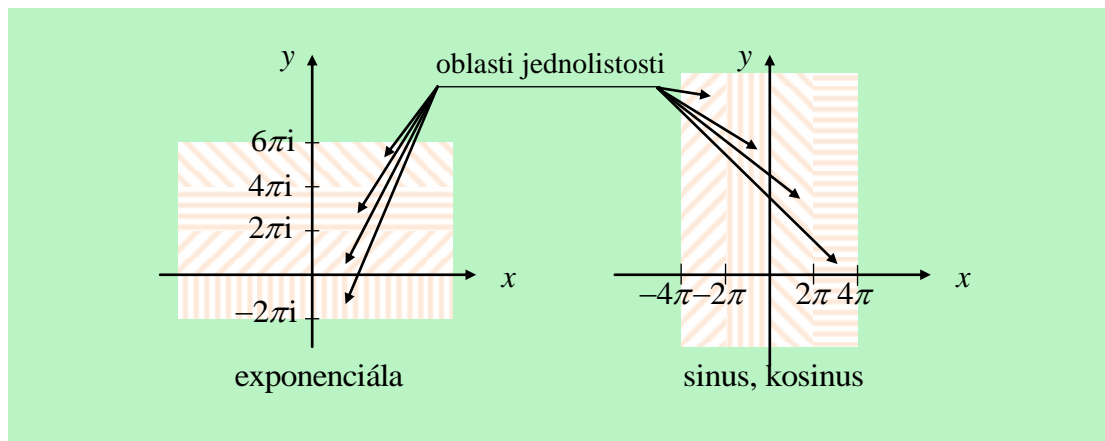
Příklad 13.21: Exponenciála, sinus, kosinus

Funkce zadaná řadou

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

je (jednoznačně určeným) holomorfním rozšířením reálné exponenciály e^x z reálné osy do (nezoršířené) Gaussovy roviny \mathbf{C} . Shrňme vlastnosti funkce e^z , $z = x + iy$. Jednoduchými výpočty si je můžete snadno ověřit.

- Platí $e^{\zeta+z} = e^{\zeta} \cdot e^z$, $|e^z| = e^x$.
- Rovnice $e^z = A$ má pro každé komplexní číslo $A \neq 0$ nekonečně mnoho řešení. Tato řešení jsou tvaru $x = \ln |A|$, $y = \operatorname{Arg} A + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Pro $A = 0$ nemá rovnice řešení.
- Funkce e^z je periodická s periodou $2\pi i$ (viz obrázek 13.16).
- Platí $[e^z]' = e^z$ pro $z \in \mathbf{C}$.
- Funkce e^z není regulární (holomorfní) v nekonečnu, neboť funkce $e^{-\xi}$ není regulární v bodě $\xi = 0$. Nemá tam dokonce ani limitu. Platí $\lim_{\xi \rightarrow 0, \xi \in [0, \infty)} = \infty$, $\lim_{\xi \rightarrow 0, \xi \in (-\infty, 0]} = 0$.



Obrázek 13.16: K vlastnostem exponenciály, sinu a kosinu.

Funkce zadané řadami

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

představují holomorfní rozšíření funkcí $\sin x$ a $\cos x$ z reálné osy do \mathbf{C} . Některé vlastnosti:

- Platí všechny součtové vzorce odvozené pro sinus a kosinus reálné proměnné.
- Rovnice $\sin z = A$ má pro každé $A \in \mathbf{C}$ nekonečně mnoho řešení:

$$\frac{1}{2}i(e^{iz} - e^{-iz}) = A \implies \xi^2 - 2iA\xi - 1 = 0, \text{ kde } \xi = e^{iz}.$$

Tato rovnice má dva kořeny ξ_1, ξ_2 , pro které je $\xi_1\xi_2 = -1$. Oba kořeny jsou proto nenulové. Z vlastností exponenciály je však zřejmé, že každá z rovnic $e^{iz} = \xi_1$, resp. $e^{iz} = \xi_2$ má nekonečně mnoho řešení.

- Funkce může nabývat nulové hodnoty pouze pro $y = 0$. Z rovnosti $\sin z = 0$ totiž plyne $e^{ix-y} = e^{-ix+y}$. Přejdem k absolutním hodnotám dostaneme $e^y = e^{-y}$. Tato rovnost platí jedině pro $y = 0$. Nulových hodnot nabývá sinus v bodech $z = k\pi$.

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 95

- Funkce $\sin z$ je periodická s periodou 2π na reálné ose (oblasti jedno-
listosti jsou vyznačeny na obr. 13.16).
- Funkce $\sin z$ není regulární (holomorfní) v nekonečnu, neexistuje ani
limita $\lim_{z \rightarrow \infty} \sin z$.

Vlastnosti funkce $\operatorname{cois} z$ jsou zcela analogické — formulujte je sami.

Funkce tangens a kotangens jsou definovány formálně stejně jako v reál-
ném oboru, tj.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

- Opět platí všechny známé součtové vzorce.
- Funkce tangens je regulární v \mathbf{C} s výjimkou bodů, v nichž není defi-
nována, tj. bodů $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, funkce kotangens je rovněž regulární, s
výjimkou bodů $z = k\pi$.
- Funkce tangens a kotangens jsou periodické s periodou π .
- Platí $|\operatorname{tg}(x + iy) - i| = \frac{-2i}{1 + e^{-2iz}}$ (proved'te). Dále je

$$\begin{aligned} |1 - |e^{-2iz}|| &\leq |1 + |e^{-2iz}|| \leq 1 + |e^{-2iz}|, \\ \frac{1}{|1 - e^{2y}|} &\geq \frac{1}{|1 + e^{2y}|} \geq \frac{1}{1 + e^{2y}}, \\ \frac{2}{1 + e^{2y}} &\leq |\operatorname{tg}(x + iy) - i| \leq \frac{2}{|1 - e^{2y}|} \\ \frac{2e^{-2y}}{1 + e^{-2y}} &\leq |\operatorname{tg}(x + iy) - i| \leq \frac{2e^{-2y}}{1 - e^{-2y}}, \quad y > 0, \end{aligned}$$

a podobně

$$\frac{2e^{2y}}{1 + e^{2y}} \leq |\operatorname{tg} y + i| \leq \frac{2e^{2y}}{1 - e^{2y}}, \quad y < 0.$$

Odtud dostaneme

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{tg} z = i, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \operatorname{tg} z = -i.$$

- Podobně dostaneme

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{cotg} z = -i, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \operatorname{cotg} z = i.$$

Uvedené vztahy platí pro libovolné x .

Příklad 13.22: Funkce Gama

Eulerova funkce Gama je důležitou funkcí i z hlediska fyzikálních aplikací. V reálném oboru není zadána řadou, ale integrálem

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Pokusíme se ji holomorfně prodloužit do co největší části Gaussovy roviny. V reálném oboru platí pro $t > 0$ vztah $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$. Zaměníme $x \rightarrow z$, $z \in \mathbf{C}$ a dostaneme

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}, \quad \text{pro } t > 0.$$

Ted' můžeme přepsat výchozí integrál jako funkci proměnné z ,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Tím jsme funkci $\Gamma(z)$ formálně prodloužili na oblast \mathbf{C} . Jen nevíme, jak se integrál chová — zda konverguje v celé Gaussově rovině či nikoli, a zda je funkce $\Gamma(z)$, kterou definuje, na množině konvergence holomorfní. Integrál je nevlastní vlivem jak dolní, tak horní meze. V případě horní meze se jedná o nevlastní integrál prvního typu (neohrazený integrační obor), v případě dolní meze o nevlastní integrál druhého typu (neohrazený integrand), viz odstavec 12.1.12. Nejprve zavedeme funkci $\Gamma_{[a,b]}(z)$ vztahem

$$\Gamma_{[a,b]}(z) = \int_a^b t^{z-1} e^{-t} dt, \quad 0 < a < b$$

a budeme studovat, jak se chová pro $a \rightarrow 0$ a $b \rightarrow \infty$. Funkce $t^{z-1} e^{-t}$ je pro každou kladnou hodnotu t regulární v \mathbf{C} a spojitá v každém bodě $(z, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}_+$. Funkce $\Gamma_{[a,b]}(z)$ je spojitá v \mathbf{C} . Zvolme v \mathbf{C} libovolný trojúhelník Δ . Platí

$$\int_{\partial\Delta} \Gamma_{[a,b]}(z) dz = \int_{\partial\Delta} \left[\int_a^b t^{z-1} s^{-1} dt \right] dz = \int_a^b \left[\int_{\partial\Delta} t^{z-1} e^{-t} dz \right] dt.$$

Vzhledem k tomu, že vnitřní integrál je nulový (integrand je holomorfní funkce a křivka $\partial\Delta$ je uzavřená), platí $\int_{\partial\Delta} \Gamma_{[a,b]}(z) dz = 0$. Podle Morerovy

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 97

věty je funkce $\Gamma_{[a,b]}(z)$ holomorfní v \mathbf{C} . Rozdělme nevlastní integrál

$$\Gamma(z) = \lim_{a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty} \Gamma_{[a,b]}(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

na součet

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \alpha(z) + \beta(z).$$

To proto, abychom mohli zvlášť studovat dva nevlastní integrály, každý však pouze v jedné mezi. Zabývejme se nejprve funkcí $\beta(z)$. Zvolme $R > 0$. Pro $z = x + iy$, $x \leq R$ a $t \geq 1$ platí $|t^{z-1} e^{-t}| = t^{x-1} e^{-t} \leq t^{R-1} e^{-t}$,

$$\left| \int_1^b t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_1^b |t^{z-1} e^{-t}| dt \leq \int_0^b t^{R-1} e^{-t} dt$$

pro libovolné $b > 1$. Tato nerovnost zůstane zachována i v limitě $b \rightarrow \infty$.

Limita

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b t^{R-1} e^{-t} dt$$

konverguje, neboť pokles funkce e^{-1} k nule s rostoucím t je rychlejší než růst libovolné mocniny (v našem případě t^{R-1}). Integrál definující funkci $\beta(z)$ tedy konverguje (stejněměrně) v každé polorovině $x \leq R$ Gaussovy roviny, a protože R bylo zvoleno libovolně, konverguje v celé Gaussově rovině.

Nyní se zabývejme funkcí $\alpha(z)$. Zvolme libovolně $\delta > 0$. Pro $x > \delta$ platí $|t^{z-1} e^{-t}| \leq t^{\delta-1} e^{-t} \leq t^{\delta-1}$. Proto

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left| \int_a^1 t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leq \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 |t^{z-1} e^{-t}| dt \leq \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 t^{\delta-1} dt = \frac{1}{\delta}.$$

Integrál vyjadřující funkci $\alpha(z)$ konverguje v polorovině $x < 0$, neboť číslo δ bylo zvoleno libovolně (malé). V této polorovině je funkce $\alpha(z)$ holomorfní.

Lze ukázat, že mimo tuto polorovinu integrál $\int_a^1 t^{z-1} e^{-t} dt$ nekonverguje.

Další úvahy týkající funkce $\alpha(z)$ jsou nestandardní. Vyjádříme funkci e^{-1} řadou,

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n.$$

Tato řada konverguje stejnoměrně na \mathbf{R} , nám ale stačí její stejnoměrná konvergence na intervalu $[0, 1]$. Funkci $\alpha(z)$ můžeme považovat za prodloužení funkce $\alpha(x)$, $x > 1$, získané záměnou $x \rightarrow z$ do nějaké části Gaussovy roviny. Proč prodlužujeme zrovna funkci $\alpha(x)$ pro $x > 1$? Protože pro tento případ integrál snadno spočítáme. Můžeme totiž členy řady vyjadřující funkci e^{-1} vynásobit funkcí t^{x-1} , která je na intervalu $[0, 1]$ v případě $x > 1$ spojitá, a pak integrovat člen po členu:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \int_0^1 t^{x-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x-1} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(n+x)n!} t^{n+x} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)n!}, \quad x > 1.\end{aligned}$$

Zaměníme-li nyní $x \rightarrow z$, dostaneme *holomorfní* funkci $\alpha(z)$ ve tvaru řady

$$\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+z)n!},$$

stejně konverguje konvergentní v každé ohraničené podmnožině Gaussovy roviny \mathbf{C} , která neobsahuje žádný z bodů $z = 0, -1, -2, \dots$. Protože definiční obor řady vyjadřující $\alpha(x)$ pro $x > 1$ má hromadné body v \mathbf{C} , je toto holomorfní prodloužení určeno jednoznačně.

Je dáno vztahem

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+z)n!} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \quad (13.32)$$

V bodech $z = 0, -1, -2, \dots$ má funkce $\Gamma(z)$ limitu ∞ .

Příklad 13.23: Věta, která se nám bude hodit

V některém z dalších odstavců se budeme zabývat Laplaceovou transformací a využívat ji k odvození vlastností některých funkcí s fyzikálním významem. Bude se nám hodit následující tvrzení, které je založeno na jednoznačnosti holomorfního prodloužení funkce. Předpokládejme, že

- $f(t)$ je komplexní funkce reálné proměnné t definovaná na intervalu $t \in [0, \infty$ skoro všude, tj. s možnou výjimkou zanedbatelné množiny,
- pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$ konverguje absolutně integrál

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(t) e^{ixt} dt, \quad \text{tj.} \quad \int_0^{\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

13.2. MÁ-LI FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ DERIVACI, PAK MÁ DERIVACE VŠECH ŘÁDŮ 99

(říkáme, že funkce $f(t)$ je *absolutně integrabilní* na intervalu $[0, \infty)$),

c) existuje interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$ tak, že $F(x) = 0$ na $[a, b]$.

Pak funkce $F(x)$ je identicky nulová na \mathbf{R} . Samo tvrzení už naznačuje, že zřejmě bude důsledkem věty o jednoznačnosti. Dokážeme je. Definujme funkci komplexní proměnné $z = x + iy$ vztahem

$$G(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt.$$

Funkce $F(x)$ je její restrikcí na reálnou osu, $f(x) = G(z)|_{\mathbf{R}}$. Zabývejme se funkcí $G(z)$ jen v horní polorovině Gaussovy roviny, $\mathbf{C}_h = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Provedme odhad jejího definičního integrálu:

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t) e^{izt}| dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-yt} dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)| dt.$$

Integrál $G(z)$ konverguje v dolní polorovině dokonce absolutně (předpoklad b)). Označme dále $f_1(t)$, resp. $f_2(t)$ reálnou, resp. imaginární část funkce $f(t)$. Vyjádříme reálnou a imaginární část funkce $G(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (provedte výpočet krok za krokem):

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} [f_1(t) \cos xt - f_2(t) \sin xt] e^{-yt} dt,$$

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} [f_1(t) \sin xt + f_2(t) \cos xt] e^{-yt} dt.$$

Přímým výpočtem snadno zjistíme, že funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ splňují Cauchyovy-Riemannovy podmínky (úloha 7 ve cvičení 13.2.6). Jejich diferencovatelnost vyplývá z jejich definice a konvergence integrálů. Znamená to, že funkce $G(z)$ je holomorfní. Je holomorfním rozšířením funkce $F(x)$ z reálné osy do \mathbf{C}_h . Reálná osa má ovšem v oblasti \mathbf{C}_h hromadné body (dokonce každý bod reálné osy je jejím hromadným bodem ležícím v \mathbf{C}_h). Holomorfní rozšíření $G(z)$ funkce $F(x)$ je proto určeno jednoznačně (důsledek věty o jednoznačnosti). Podle předpokladu c) je však funkce $G(z)$ nulová ve všech bodech $z = x$, $x \in [a, b]$. také tento interval má v \mathbf{C}_h hromadné body (opět všechny, i když by stačil jeden). Podle věty o jednoznačnosti je $G(z) \equiv 0$ v \mathbf{C}_h , a tedy i na celé reálné ose.

Položme si ještě otázku, zda bychom mohli integrační obor v definičním vztahu pro funkci $F(x)$ rozšířit na celou reálnou osu, tj. definovat $F(x)$ jako

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{ixt} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{ixt} dt.$$

Pomocí odhadů zjistíme (proved'te podrobně), že platí nerovnosti

$$\left| \int_{-\infty}^0 f(t) e^{izt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^0 |f(t)| dt \quad \text{pro } y \geq 0,$$

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| dt \quad \text{pro } y \leq 0.$$

Každý z obou interálů konverguje na jiné oblasti, konvergence obou současně je zajištěna jen pro $y = 0$, tj. na reálné ose. Existence holomorfního rozšíření funkce $F(x)$ na nějakou oblast Gaussovy roviny proto není zajištěna.

Příklad 13.24: Odhady na kružnici, aneb ještě několik užitečných vlastností holomorfních funkcí

Nyní si všimneme chování holomorfních (regulárních) funkcí při jejich restrikci na kružnici ležící v oboru konvergence. Zjistíme, že holomorfní funkce, která je ohraničená, nemá už jinou možnost, než být konstantní. Je to překvapivé, ale u holomorfních funkcí jsme už na překvapení zvyklí.

Uvažujme o holomorfní (regulární) funkci $f(z)$, která je v kruhu $B(z_0, R)$ dána (stejněměrně konvergentní) mocninnou řadou $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Zvolme kružnici \mathcal{K} se středem v bodě z_0 o poloměru $r < R$, tj.

$$\mathcal{K} : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow z(t) = z_0 + r e^{it} \in \mathbf{C}$$

a sledujme chování funkce v jejích bodech. Dokážeme vztah

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}. \quad (13.33)$$

Platí

$$f(z_0 + r e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{int},$$

$$|f(z_0 + r e^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_n c_m^* r^{n+m} e^{i(n-m)t},$$

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_n c_m^* r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt.$$

Při úpravě integrálu jsme využili stejnoměrné konvergence řady a integrovali ji člen po členu. Integrál vypočteme nejprve pro $n \neq m$. Platí

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Pro $m = n$ je integrál roven 2π . Odtud

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.$$

Dostali jsme skutečně vztah (13.33). Dále předpokládejme, že funkce $f(z)$ je holomorfní v celé nerozšířené Gaussově rovině, a že je navíc ohraničená. Existuje tedy číslo M tak, že $|f(z)| \leq M$ pro všechna $z \in \mathbf{C}$. Aplikujeme-li vztah (13.33) na případ $z_0 = 0$, dostaneme pro libovolnou hodnotu $r > 0$ odhad

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{it})|^2 dt \leq \frac{M^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = M^2. \\ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} &\leq M^2. \end{aligned} \tag{13.34}$$

Tento vztah lze pro libovolnou hodnotu r splnit jen tak, že všechny koeficienty řady budou nulové, nejvýše s výjimkou c_0 . To ovšem znamená, že funkce $f(z)$ je konstantní, jak jsme avizovali! Tento výsledek je obsahem tvrzení zvaného

Liouvillova věta: Každá holomorfní a ohraničená funkce $f(z)$ v \mathbf{C} je konstantní.

Vzorec (13.33) lze využít k důkazu dalšího důležitého tvrzení. Je to

Věta o maximu modulu. Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je holomorfní v oblasti D a $B(z_0, R) \subset D$. Zvolme $r < R$. Pak

$$|f(z_0)| \leq \max \{|f(z_0 + r e^{it})| \mid t \in [0, 2\pi]\}. \tag{13.35}$$

Předpokládáme-li opak, tj. $|f(z_0)| > |f(z_0 + r e^{it})|$ pro libovolné $t \in [0, 2\pi]$, dostaneme použitím (13.33)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{it})|^2 dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 dt = |f(z_0)|^2 = |c_0|^2.$$

Dospěli jsme ke sporu, platí tedy (13.35). Rovnost v tomto vztahu nastane v případě, že všechny koeficienty, počínaje c_1 , jsou nulové. Pak na celém kruhu $B(z_0, r)$ platí $f(z) = c_0 = f(z_0)$. Protože kruh $B(z_0, r)$ má v oblasti D hromadné body, platí podle věty o jednoznačnosti rovnost $f(z) = f(z_0)$ na celé oblasti D .

A ještě jeden užitečný odhad týkající se holomorfní funkce ohraničené na jistém uzavřeném kruhu $\bar{B}(z_0, R)$: vztah (13.34) platí pro libovolnou hodnotu $r < R$, proto musí zůstat v platnosti i pro $r = R$ (umíte to zdůvodnit?). Funkce je však v $B(z_0, R)$ také holomorfní, takže pro koeficienty c_n platí $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Odtud dostáváme tzv.

Cauchyův odhad

$$\left| f^{(n)}(z_0) \leq \frac{n!M}{R^n} \right|. \quad (13.36)$$

13.2.6 Cvičení

1. Holomorfní funkce $f(z)$ je zadána ve tvaru $f(z) = U(r, \varphi) + iV(r, \varphi)$, kde $z = r e^{i\varphi}$. Odvoďte Cauchyovy-Riemannovy podmínky pro $\frac{\partial U}{\partial r}$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial V}{\partial r}$ a $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$.

Návod: $U(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $V(r, \varphi) = v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

Výsledek: $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = r \frac{\partial U}{\partial r}$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial V}{\partial r}$

2. Holomorfní funkce $f(z)$ je zadána ve tvaru $f(z) = Z(r, \varphi) e^{i\psi(r, \varphi)}$, kde $z = r e^{i\varphi}$. Odvoďte Cauchyovy-Riemannovy podmínky pro $\frac{\partial Z}{\partial r}$, $\frac{\partial Z}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ a $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$.

Návod: $U(r, \varphi) = Z(r, \varphi) \cos \psi(r, \varphi)$, $V(r, \varphi) = Z(r, \varphi) \sin \psi(r, \varphi)$,

Výsledek: $r \frac{\partial Z}{\partial r} = Z \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = -r Z \frac{\partial \psi}{\partial r}$.

3. Určete holomorfní funkci $f(z)$, je-li dáno (označení použijte z příkladů 13.13 a 13.14 a z úloh 2 a 3 tohoto cvičení, f je funkce dvou proměnných x a y).

a) $v(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy$,

b) $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin x) + 2 \sin x \sinh y + x^3 - 3x^2y + y$,

- c) $v(x, y) = 3 + x^2 = y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$,
d) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$,
e) $R(x, y) = e^x(x^2 + y^2)$,
f) $\phi(r, \varphi) = \varphi + r \sin \varphi$,
g) $u(x, y) = x \sinh x \cos y - y \sin y \cosh x$,
h) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$,
i) $Z(r, \varphi) = e^{r^2 \cos 2\varphi}$,
j) $u(x, y) = f(ax + by)$, $a, b \in \mathbf{R}$,
k) $u(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$,
l) $u(x, y) = f(xy)$,
m) $u(x, y) = f\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$,
n) $u(x, y) = f(x^2 + y)$,
o) $u(x, y) = f(x + \sqrt{x^2 + y^2})$,
p) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2$,
q) $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y) - \frac{y}{x^2+y^2}$,
r) $v(x, y) = x + y - 3$,
s) $v(x, y) = \cos x \sinh(y) - \sinh(x) \sin(y)$.

Výsledky: a); b); c); d); e) $f(z) = e^{iC} z^2 e^z$, $C \in \mathbf{R}$; f) $f(z) = Az e^z$, $A > 0$; g); h); i); j); k); l); m); n); o); p) $f(z) = z^2 + 2 + iK$, $K \in \mathbf{R}$; q) $f(z) = z e^z - \frac{i}{z} + iK$, $K \in \mathbf{R}$; r) $f(z) = (1 + i)z - 3i + K$, $K \in \mathbf{R}$; s) $f(z) = \sin z - \cosh z + K$, $K \in \mathbf{R}$.

4. Dokažte vztah $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=1}^n a^{k-1} b^{n-k}$, který jsme použili při odvození věty 13.11.

Návod: Upravte výraz na tvar $\frac{a^n - b^n}{a - b} = b^{n-1} \frac{p^n - 1}{p - 1}$, kde $p = \frac{a}{b}$ a uvědomte si, že výraz $\frac{p^n - 1}{p - 1}$ je součtem prvních n členů geometrické posloupnosti.

5. Zapište Taylorovu řadu následujících funkcí se středem z_0 nejprve obecně, potom pro konkrétně zadané body z_0 . Vždy určete obor konvergence (střed a poloměr, tj. $B(z_0, R)$).

- a) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = -1$, $z_0 = 2i$, $z_0 = \infty$,
 b) $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $z_0 = i$, $z_0 = -1$, $z_0 = \infty$,
 c) $f(z) = \frac{2z^2-6z+2i}{z(z-i)(z+2)}$, $z_0 = 1$, $z_0 = -i$, $z_0 = \infty$,
 d) $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)^2}$, $z_0 = 0$,
 e) $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$, $z_0 = -i$, $z_0 = \infty$,
 f) $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0 = 0$, $z_0 = 1$, $z_0 = -2$, $z_0 = \infty$,
 g) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$, $z_0 = 0$, $z_0 = 1$, $z_0 = \infty$,
 h) $f(z) = z^2 - 3z + 1$, $z_0 = 0$, $z_0 = 1$, $z_0 = 1 - i$,
 i) $f(z) = \cosh z$, $z_0 = 0$,
 j) $f(z) = \sinh z$, $z_0 = 0$,
 k) $f(z) = \sin^2 z$, $z_0 = 0$,
 l) $f(z) = \cosh^2 z$, $z_0 = 0$,
 m) $f(z) = \frac{z}{z^2-2z+5}$, $z_0 = 1$,
 n) $f(z) = \sin(2z - z^2)$, $z_0 = 1$,
 o) $f(z) = \frac{z}{z^2-4z+13}$, $z_0 = 0$,

Výsledky: a) **doplnit** b) $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} \right) (z+1)^n$, $B(-1, 2)$,
doplnit; c) **doplnit**; d) **doplnit**; e) **doplnit**; f) **doplnit**; g) $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)z^n$, $B(0, 1)$; $f(z) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{n-3}{4} (z-1)^n$, $B(1, 2)$; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)z^{-1}$, $B(\infty, 1)$; h) $f(z) = 1 - 3z + z^2$, \mathbf{C} ; $f(z) = -1 - (z-1) + (z-1)^2$, \mathbf{C} ;
 $f(z) = (4-5i) + (5-2i)[z-(1-i)] + [z-(1-i)]^2$, \mathbf{C} ; i) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, \mathbf{C} ;
 j) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, \mathbf{C} ; k) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, \mathbf{C} ; l) $f(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, \mathbf{C} ; m) $f(z) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} [(z-1)^{2n} + (z-1)^{2n+1}]$,
 $B(1, 2)$; n) $f(z) = \frac{1}{n!} \sin\left(1 + \frac{n\pi}{2}\right) (z-1)^{2n}$, \mathbf{R} ; o) $\frac{i}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3i)^n - (2+3i)^n}{13^n} z^n$,
 $B(0, \sqrt{13})$.

6. Podle vzoru příkladu 13.20 odvoďte Kramersovy-Kronigovy relace pro vodivé prostředí, jehož komplexní relativní permitivita je $\tilde{\epsilon}(z) = \epsilon(z) + i\frac{\sigma(z)}{z}$,

kde $\sigma(z)$ je komplexní obraz relativní specifické vodivosti prostředí.

Návod: Pro výpočet integrálu z funkce typu $\frac{h(z)}{z}$ po půlkružnici se středem v bodě 0 použijte formálně Taylorova rozvoje holomorfní funkce $h(z)$.

Výsledek: K výrazu pro imaginární část veličiny $\tilde{\epsilon}(\omega)$ je třeba přičíst výraz $\frac{\sigma(0)}{\omega}$, kde $\sigma(0)$ je statická hodnota relativní specifické vodivosti.

7. Ověřte, že funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ z příkladu 13.23 splňují Cauchyovy-Riemannovy podmínky.

13.3 Co udělá malá dírka v oboru holomorfnosti aneb singularity

Doposud jsme se věnovali výhradně holomorfním funkcím, a pokud šlo o funkce, které nebyly holomorfní v celé Gaussově rovině, zabývali jsme se jimi pouze na oblastech jejich holomorfnosti. Víme že integrál funkce po uzavřené křivce ležící v oblasti její holomorfnosti je nulový. Setkali jsme se však také s integrály, které nulové nebyly, i když integračním oborem byla uzavřená křivka. Typickým případem této situace je integrál vyjadřující index bodu z vzhledem ke křivce. Leží-li bod z uvnitř oblasti obepnuté křivkou, takže v něm integrovaná funkce $\frac{1}{\xi-z}$ není holomorfní a dokonce ani definována (má *singularitu*), je index nenulový. V tomto odstavci si podrobněji všimneme toho, jakým způsobem přispívají k integrálům po uzavřené křivce body, v nichž je holomorfnost integrandu porušena.

13.3.1 Co jsou to singularity funkcí a jak je třídíme?

Body, které kazí holomorfnost funkcí, se nazývají singularity. Nejprve je třeba je definovat a klasifikovat, tj. nějakým způsobem rozpoznávat jejich závažnost.

Nechť D je oblast a $z_0 \in D$. Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je holomorfní v $D \setminus \{z_0\}$ a není holomorfní v bodě z_0 . Říkáme, že funkce $f(z)$ má v bodě z_0 *izolovanou singularitu*. Izolovaná singularita z_0 se nazývá *odstranitelná*, lze-li funkci $f(z)$ dodefinovat v bodě z_0 tak, aby vznikla funkce holomorfní v D .

Příklad 13.25: Jak odstranit, co odstranit lze

Jistě si teď řeknete, že nazvat něco „odstranitelným“, když to lze odstranit, je přece samozřejmé. Jak ale poznat, zda konkrétní singularita z_0 konkrétní funkce $f(z)$ odstranit skutečně půjde, a jak přijít na to, jak máme funkci v bodě z_0 dodefinovat? První, co nás asi napadne, je zjistit, zda funkce má v

bodě z_0 aspoň limitu. Pak bychom ji mohli prohlásit za hodnotu funkce v bodě z_0 a tím funkcí dodefinovat přinejmenším na spojitou. Budeme muset odlišit postup „odstraňování“ pro $z_0 \in \mathbf{C}$ a $z_0 = \infty$. Zřejmě však také bude rozdíl, zda je limita konečná, nebo je jí bod ∞ . Zapřemýšlejme, čím se tyto dva případy liší: je-li limita funkce v bodě z_0 (ať už z_0 leží „v konečnu“, nebo je $z_0 = \infty$) konečná, pak existuje prstencové okolí tohoto bodu $P(z_0, r)$, v němž je funkce ohraničená. V případě nekonečné limity je naopak funkce neohraničená v jakkoli malém okolí bodu z_0 .

Připomeňme, že o funkci $f(z)$ předpokládáme, že je holomorfní v oblasti $D \setminus \{z_0\}$. Uvažujme nejprve o situaci, kdy bod z_0 leží v konečnu a existuje jeho prstencové okolí $P(z_0, r)$, v němž je funkce ohraničená. (Dokonce teď ani apriori nepředpokládáme existenci limity.) Pokusme se funkci $f(z)$ modifikovat nějakým faktorem, který by „smazal“ singularitu tak důkladně, že by modifikovaná funkce už byla holomorfní. Z odstavce o vlastnostech limit (věta 13.4) víme, že je-li funkce $f(z)$ ohraničená v jistém $P(z_0, r)$ a funkce $h(z)$ má v bodě z_0 nulovou limitu, pak součin $g(z) = f(z)h(z)$ má v bodě z_0 rovněž nulovou limitu. Co kdybychom tedy funkci $f(z)$ modifikovali tak, že ji vynásobíme faktorem $h(z) = z - z_0$, a modifikovanou funkci dodefinujeme v bodě z_0 nulovou hodnotou? To by nemuselo stačit. Potřebujeme totiž vyrobit funkci nejen spojitou, ale holomorfní, tj. takovou, která má v bodě z_0 dokonce derivaci. V definičním výrazu pro derivaci však rozdíl $z - z_0$ figuruje také ve jmenovateli. Proto bude vhodné, když si naši úvah „pojistíme“ volbou $h(z) = (z - z_0)^2$ a definujeme novou funkci $g(z)$ tak, že $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ pro $z \in D \setminus \{z_0\}$ a $g(z_0) = 0$. Pak pro $z \in D \setminus \{z_0\}$ je

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)^2 f(z) - 0}{z - z_0} = (z - z_0)f(z).$$

Limita tohoto výrazu pro $z \rightarrow z_0$ je nulová (věta 13.4, vlastnost týkající se limity součinu ohraničené funkce a funkce s nulovou limitou). Funkce $g(z)$ je holomorfní v D a speciálně v bodě z_0 platí $g'(z_0) = 0$. Rozvineme ji v kruhu $B(z_0, r)$ v mocninovou řadu se středem v bodě z_0 . Protože je bod z_0 nejméně dvojnásobným kořenem (nulovým bodem) funkce $g(z)$, bude řada „efektivně“ začínat až druhou mocninou proměnné $(z - z_0)$,

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Nyní již se dodefinování funkce $f(z)$ v bodě z_0 samo nabízí: $f(z_0) = c_2$. Pro takto dodefinovanou, nyní již holomorfní funkci $f(z)$ dostaneme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z - z_0)^n.$$

Vidíme, že jsme skutečně nemuseli existenci limity funkce $f(z)$ v singularitě vůbec předpokládat, stačil předpoklad ohraničenosti a důsledkem je nejen existence limity, nejen spojitost, ale dokonce existence derivace vhodně do-definované funkce. Pozor: v reálném oboru to neplatí!

Přejděme k případu $z_0 = \infty$, stále za předpokladu, že funkce je v jeho prstencovém okolí $P(\infty, R)$ ohraničená. Pomocnou funkci $g(z)$ zaveďme takto: $g(z) = h(z)f(z) = z^{-2}f(z)$, pro $z \neq \infty$, $g(\infty) = 0$. Provedme záměnu $z \rightarrow \frac{1}{\xi}$, jak jsme v případě proměnné pohybující se v okolí bodu nekonečno zvyklí, a označme $G(\xi) = g(\frac{1}{\xi})$. Platí

$$\frac{G(\xi) - G(0)}{\xi - 0} = \frac{g(\frac{1}{\xi}) - 0}{\xi - 0} = \frac{\xi^2 f(\frac{1}{\xi})}{\xi} = \xi f(\frac{1}{\xi}).$$

Limita výsledného výrazu pro $\xi \rightarrow 0$ je ovšem nulová díky ohraničenosti funkce $f(\frac{1}{\xi})$ v $P(0, R^{-1})$ a nulovosti limity $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi$. Funkce $G(\xi) = g(\frac{1}{\xi})$ má tedy v bodě $\xi_0 = 0$ nulovou derivaci a je holomorfní přinejmenším v $B(0, R^{-1})$. Její rozvoj se středem v bodě $\xi_0 = 0$ má tvar

$$G(\xi) = g(\frac{1}{\xi}) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \xi^n = \xi^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} \xi^n.$$

Funkci $f(\frac{1}{\xi})$ dodefinujeme v bodě $\xi_0 = 0$ hodnotou c_2 , tj. $f(\infty) = c_2$. Funkci $f(z)$ už můžeme napsat ve tvaru řady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} z^{-n}.$$

Co myslíte, vyplývá naopak z odstranitelnosti singularity ohraničenost funkce v jistém jejím okolí? A ještě jedna otázka: dejme tomu, že limitou funkce $f(z)$ v bodě z_0 je bod nekonečno. Co kdybychom tedy dodefinovali $f(z_0) = \infty$? Nic bychom nezískali — naše úvahy týkající se holomorfnosti funkcí, se od začátku týkají pouze funkcí konečných.

Odstranitelnou singularitu již poznáme buď podle ohraničenosti funkce v jejím okolí, nebo podle konečné limity. Jaké jsou ale další typy singularit? Bude možné orientovat se v nich pomocí pojmu limity? Uvažujme: pokud singularita není odstranitelná, zbývají dvě možnosti: buď je limitou funkce v bodě z_0 bod ∞ , nebo funkce v bodě z_0 limitu nemá. Znamená to, že kromě odstranitelných singularit existují ještě dva další typy, které se vážou právě k těmto dvěma možnostem týkajícím se limity? V následujících úvahách to zjistíme.

Věta 13.19 (Klasifikace singularit): *Nechť funkce $f(z)$ má v bodě z_0 izolovanou singularitu. Pak nastane právě jeden z následujících případů:*

- *typ 1: Funkce má v bodě $z_0 \in \mathbf{C}$ odstranitelnou singularitu.*
- *typ 2: Existují čísla $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{C}$, z nichž poslední, tj. c_m , je nenulové, taková, že funkce*

$$f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - z_0)^k}$$

má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu.

- *typ 3: Množina $f(P(z_0, r))$ je hustá v \mathbf{C}^+ pro libovolné $r > 0$, tj. uzávěrem množiny $f(P(z_0, r))$ je celá rozšířená Gaussova rovina.*

Než začneme větu dokazovat, vyjasněme si terminologii.

Izolovaná singularita funkce $f(z)$ typu 2 ve větě 13.19 se nazývá *pól m -tého řádu*, resp. *násobnosti m* . Funkce $\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - z_0)^k}$ se nazývá *hlavní část funkce $f(z)$ v bodě z_0* , rozdíl $f(z)$ a její hlavní části pak *regulární část*. Izolovaná singularita typu 3 se nazývá *podstatná singularita*.

Hlavní část funkce v případě pólu je fakticky výraz, který je příčinou neohraňovanosti funkce v jakémkoli prstencovém okolí singularity. Když tento výraz od funkce odečteme, „zbavíme se nekonečna“ a dostaneme (po odstranění singularity) již holomorfní funkci. Jak s pólem zacházejte ještě praktičtěji uvidíte za chvíli. Podstatná singularita je něco, zdá se, hodně „divného“. Vlastnost singularity typu 3 ve větě 13.19 znamená, že pro jakkoli malé prstencové okolí $P(z_0, r)$ singularity z_0 , budou prvky množiny $f(P(z_0, r)) = \{f(z) \mid z \in P(z_0, r)\}$ tak „nahuštěny“, že k žádnému z nich nenajdeme sebemenší okolí, které by neobsahovalo žádný další prvek této množiny.

Pusťme se do důkazu věty. Každý z popsaných případů singularit má dvě možnosti: buď nastane, nebo ne. Předpokládejme, že pro danou situaci nenastane případ typu 3. Pak jistě existuje číslo $w \in \mathbf{C}$, k němuž se, trochu nepřesně řečeno, nedokážeme funkčními hodnotami libovolně přiblížit — vždycky zůstane nějaká „prstencová mezera“ $P(w, \delta)$, v níž žádné funkční hodnoty nebudou. Matematicky přesně to znamená, že existují čísla $w \in \mathbf{C}$, $\delta, r \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, $r > 0$, taková, že pro $z \in P(z_0, r)$ platí $|f(z) - w| > \delta$. Na okolí $P(z_0, r)$ proto můžeme definovat funkci $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$, která bude v tomto okolí dokonce holomorfní (funkce $f(z)$ je v bodech mimo z_0 holomorfní

a $f(z) - w$ nenabývá na $P(z_0, r)$ nulové hodnoty, která jediná by vytvořila singularitu funkce $g(z)$). V $P(z_0, r)$ poro funkci $g(z)$ navíc platí $|g(z)| < \frac{1}{\delta}$, je zde tedy ohraničená. Závěr? Vyplývá z příkladu 13.25: funkce $g(z)$ má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu. Předpokládejme, že jsme ji odstranili podle receptu uvedeného v příkladu 13.25 a dodefinovali funkci $g(z)$ na holomorfní v $B(z_0, r)$. Dále se naše úvahy budou větvit podle toho, jaká je hodnota $g(z_0)$, nenulová, nebo nulová.

Typ 1: Předpokládejme nejprve $g(z_0) \neq 0$. Pak existuje prstencové okolí $P(z_0, \varrho)$ bodu z_0 tak, že v něm je funkce $f(z)$ ohraničená. Z čeho to plyne? Přece z definice funkce $g(z)$. V $P(z_0, r)$ je totiž $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$. Protože je hodnota funkce $g(z_0)$ nenulová a funkce sama je v $B(z_0, r)$ holomorfní, vydrží být nenulová ještě na nějakém okolí $P(z_0, \varrho) \subset P(z_0, r)$. Z toho již plyne ohraničenost funkce $f(z)$ na $P(z_0, \varrho)$ a také odstranitelnost její singularity.

Typ 2: Zbývá případ, kdy $g(z_0) = 0$. Předpokládejme, že bod z_0 je nulovým bodem funkce $g(z)$ násobnosti m . Vzpomeneme-li si na důkaz věty o jednoznačnosti, budeme vědět, že v $B(z_0, r)$ můžeme funkci $g(z)$ zapsat ve tvaru $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, kde $\varphi(z)$ je funkce holomorfní v okolí $B(z_0, r)$ a platí $\varphi(z_0) \neq 0$. Z definice funkce $g(z)$ dokonce plyne, že $\varphi(z) \neq 0$ v celém tomto okolí. Můžeme proto zavést další funkci jako převrácenou hodnotu funkce $\varphi(z)$, $h(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$. Ta je v $B(z_0, r)$ holomorfní a nemá tam žádný nulový bod. Vyjádříme ji mocninnou řadou se středem v bodě z_0 , $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, $b_0 \neq 0$. Co po těchto „převratech“ nakonec dostaneme pro funkci $f(z)$, o kterou nám jde? Platí

$$\begin{aligned} f(z) - w &= \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^{-m} h(z), \quad z \in P(z_0, \varrho), \\ f(z) - w &= (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-m} = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{b_{m-k}}{(z - z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m} (z - z_0)^n, \\ f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - z_0)^k} &= w + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Při úpravách jsme vyjádření funkce $f(z) - w$ pomocí řady rozdělili na část se zápornými a nazápornými mocninami proměnné $(z - z_0)$ a provedli vhodné přechíslování sčítacího indexu. Nakonec jsme označili $c_k = b_{m-k}$ pro $k = 1, 2, \dots, m$. Skutečně se nám podařilo odečíst od funkce $f(z)$ řadu se zápornými mocninami proměnné $(z - z_0)$ a získat holomorfní funkci, která je v $P(z_0, \varrho)$ ohraničená. Její singularita v bodě z_0 je proto odstranitelná.

Větu 13.19 jsme formulovali pro bod $z_0 \in \mathbf{C}$, je však třeba promyslet, jak ji modifikovat, bude-li singularitou bod $z_0 = \infty$. Jednoduše tak, že větu 13.19 vztáhneme na funkci $F(\xi) = f(\frac{1}{\xi})$ a bod $\xi_0 = 0$. Opět budou tři možné situace: odstranitelná singularita, pól určité násobnosti, podstatná singularita. V případě pólu bude mít zápis funkce pomocí hlavní a regulární části tvar

$$F(\xi) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{\xi^k} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n,$$

$$f(z) - \sum_{k=1}^m c_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

Může se zdát překvapivé, že *regulární část* funkce je tvořena řadou se *zápornými* mocninami proměnné z . Když se však nad tím zamyslíme, je to přirozené. Řada se zápornými mocninami proměnné z nemá v bodě ∞ singularitu, $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-n} = 0$ pro libovolné $n \in \mathbf{N}$.

Příklad 13.26: Jak derivovat v nekonečnu

S nekonečnem je trochu problém. Definici funkce regulární jak v bodě $z_0 \neq \infty$, tak v nekonečnu jsme formulovali v odstavci 13.2.2. v dalších úvahách jsme dokazovali, že regulární funkce je holomorfní a naopak. Důkazy jsme však prováděli pouze pro body nerozšířené Gaussovy roviny. Jestliže však má platit ekvivalence pojmů „regulární“ a „holomorfní“, měli bychom říci, jak se počítají derivace funkce bodě $z_0 = \infty$. Otázkou je, zda můžeme definiční vztah pro derivaci použít i pro bod $z_0 = \infty$. Ve jmenovateli zlomku $\frac{f(z)-f(\infty)}{z-\infty}$ je $z - \infty = \infty$, jak nás informuje tabulka shrnující algebraické operace s nekonečnem v odstavci 13.1.1. Výraz jako takový tedy má smysl. Vzhledem k tomu, že v čitateli je pro všechny body z konečná hodnota, byl by pak zlomek pro libovolné z , a tedy i v limitě $z \rightarrow \infty$, nulový. Znamená to, že derivace *každé* funkce, která je v bodě nekonečno definována a má v něm konečnou hodnotu, skutečně existuje a je nulová? Ne, tak to jistě být nemůže. Uvažme třeba funkci e^z , která je holomorfní v celé nerozšířené Gaussově rovině \mathbf{C} , není však definována v bodě nekonečno. Dokonce v něm ani nemá limitu, neboť její limity v tomto bodě vzhledem k různým množinám mohou být různé. Například pro limity vzhledem k množinám \mathbf{R}_+ (nezáporná část reálné osy) a \mathbf{R}_- (nekladná část reálné osy) je $\lim_{z \rightarrow \infty, z \in \mathbf{R}_+} e^z = \infty$ a $\lim_{z \rightarrow \infty, z \in \mathbf{R}_-} e^z = 0$. Nemůže proto mít v bodě nekonečno derivaci, ani kdybychom ji v něm dodefinovali konečnou hodnotou. Je vidět, že v bodě nekonečno nemůžeme definiční výraz pro derivaci použít.

Zkusme vyjít z předpokladu, že funkce $f(z)$ je v nekonečnu regulární, což znamená, že je v jistém kruhu $B(z_0, r)$ dána stejnoměrně konvergentní řa-

dou $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$. Derivováním řady člen po členu dostaneme $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -nc_n z^{-n-1}$. Dosadíme-li $z = \infty$, zjistíme, že $f'(\infty) = 0$. Vychází nám, že derivace *každé* funkce *regulární v nekonečnu* je nulová. Ale pozor: Derivace regulární funkce $f(z)$ v nekonečnu *není* totéž jako derivace funkce $F(\xi) = f(\frac{1}{\xi})$. Je-li funkce regulární v nekonečnu dána řadou $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$, je funkce $F(\xi) = f(\frac{1}{\xi})$ dána řadou $F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$ a je regulární v bodě $\xi_0 = 0$. Pro derivaci platí $F'(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \xi^{n-1}$ a $F'(0) = c_1$. Na druhé straně jsme však před chvílí zjistili, že $f'(\infty) = 0$. Obecně je tedy $f'(z)|_{z_0=\infty} \neq f'(\frac{1}{\xi})|_{\xi_0=0}$. Poznamenejme ještě, že pro funkci $f(z)$ regulární v nekonečnu platí samozřejmě v jistém kruhovém okolí $B(\infty, R)$ bodu nekonečno Cauchyovy-Riemannovy podmínky. V samotném bodě nekonečno však o takových podmínkách nelze hovořit. Týkají se totiž funkcí reálných funkcí dvou reálných proměnných $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ a $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, které jsou definovány v reálné euklidovské rovině, v níž se s žádným „bodem nekonečno“ npracuje (za x a y „dosadit nekonečna“ nemůžeme).

Klasifikaci izolovaných singularit funkce jsme sice provedli, ale stále nemáme propojení mezi typem singularity a limitou funkce, které se nám jeví jako přirozené. Zatím jsme prokázali pouze souvislost limity a odstranitelné singularity. Při řešení příkladu 13.25 se ukázalo, že singularita z_0 funkce $f(z)$ je odstranitelná právě tehdy, má-li funkce $f(z)$ v bodě z_0 *konečnou* limitu. Navíc jsme získali „podezření“, že je-li singularita pólem, má v ní funkce rovněž limitu, ale nekonečnou (a naopak). Prověříme to nejprve pro případ $z_0 \neq \infty$. Předpokládejme, že $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. To především znamená, že funkce $f(z)$ není konstantní a že je v jistém prstencovém okolí $P(z_0, r)$ nenulová (argumenty pro toto tvrzení jistě snadno formulujete). $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ je v $P(z_0, r)$ holomorfní, nekonstantní, a v bodě z_0 má nulovou limitu (viz vlastnosti limit ve větě 13.4). Dodefinujeme-li $g(z_0) = 0$, vznikne funkce holomorfní (regulární) v $B(z_0, r)$, jejímž kořenem je bod z_0 . Označíme-li násobnost tohoto kořene jako m , můžeme dodefinovanou funkci $g(z)$ zapsat ve tvaru

$$g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad \varphi(z_0) \neq 0.$$

Funkce $\varphi(z)$ je holomorfní (regulární) v $B(z_0, r)$. Totéž platí pro funkci $\frac{1}{\varphi(z)}$. Pro funkci $f(z)$ tak získáváme zápis

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^{-m} \frac{1}{\varphi(z)} = (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-m}, \quad b_0 \neq 0$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{b_n}{(z - z_0)^{m-n}} + \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-m}.$$

Po přechíslování sumačních indexů (v prvním součtu záměna $k=m-n$, v druhém $n \rightarrow n-m$) dostaneme

$$f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{b_{m-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{m+n}(z-z_0)^n,$$

a odtud při označení $c_k = b_{m-k}$ pro $k = 1, 2, \dots, m$ a $b_{m+n} = \bar{c}_n$

$$f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n (z-z_0)^n.$$

Na pravé straně poslední rovnosti je funkce holomorfní v $B(z_0, r)$. Levá strana má sice v z_0 singularitu, ale odstranitelnou. Z věty 13.18 plyne, že tato singularita je m -násobným pólem funkce $f(z)$. Snadno dokážeme i opačné tvrzení (ze skutečnosti, že funkce $f(z)$ má v bodě $z_0 \neq \infty$ pól, vyplývá, že má v tomto bodě limitu rovnou ∞), viz úlohu 1 ve cvičení 13.3.5.

Proveďme důkaz obráceného tvrzení pro bod $z_0 = \infty$. Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je holomorfní (regulární) v jistém $P(\infty, R)$ a v bodě $z_0 = \infty$ má pól násobnosti m . To znamená, že funkce $g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^m c_k z^k$ má v bodě $z_0 = \infty$ odstranitelnou singularitu. Proto je limita $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z)$ konečná. Vzhledem k tomu, že limita (konečného) součtu $\sum_{k=1}^m c_k z^k$ je rovna ∞ (každý z členů tohoto konečného součtu má za limitu bod ∞), je zřejmé, že $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$. Naopak, je-li $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, má funkce $f(z)$ v bodě $z_0 = \infty$ pól (úloha 2 ve cvičení 13.3.5).

Zjistili jsme, že odstranitelné singularitě odpovídá konečná limita, pólu nekonečná limita. Na podstatnou singularitu proto zbývá jediná možnost: limita v neexistuje.

Na základě předchozích úvah již můžeme vyslovit výsledné tvrzení o vztahu typu singularity a limity.

Věta 13.20 (Singularity a limity): *Nechť $z_0 \in \mathbf{C}^+$ je izolovaná singularita funkce $f(z)$. Pak platí:*

- *Singularita je odstranitelná právě když má funkce $f(z)$ v bodě z_0 konečnou limitu.*
- *Singularita je pólem právě když má funkce $f(z)$ v bodě z_0 limitu rovnou ∞ .*
- *Singularita je podstatná právě když limita funkce $f(z)$ v bodě z_0 neexistuje.*

Předchozí věta je velice praktická. Klasifikovat singularity přímo podle věty 13.19 by totiž bylo obtížné. Věta 13.20 klasifikaci velice usnadňuje. Počítat limity totiž dobře umíme. Za chvíli si klasifikaci vyzkoušíme na několika příkladech. Neprve však na základě dokázané souvislosti mezi typem singularity z_0 a limitou funkce v tomto bodě shrneme některé důležité vlastnosti pólů.

Věta 13.21 (O pólech): Póly funkcí mají následující vlastnosti:

- Předpokládejme, že funkce $f(z)$ má v bodě $z_0 \in \mathbf{C}^+$ pól a funkce $F(w)$ je regulární v bodě ∞ . Pak funkce $\varphi(z) = F[f(z)]$ je regulární v bodě z_0 .
- Předpokládejme, že funkce $f(z)$ má v bodě $z_0 \in \mathbf{C}^+$ pól a funkce $F(w)$ má pól v bodě ∞ . Pak funkce $\varphi(z) = F[f(z)]$ má pól v bodě z_0 .
- Bod $z_0 \neq \infty$ je m -násobným pólem funkce $f(z)$ právě tehdy, lze-li tuto funkci v jistém prstenci $P(z_0, r)$ vyjádřit ve tvaru

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad \varphi(z_0) \neq 0, \quad \varphi(z_0) \neq \infty, \quad (13.37)$$

přičemž funkce $\varphi(z)$ je holomorfní (regulární) v $B(z_0, r)$.

- Bod $z_0 = \infty$ je m -násobným pólem funkce $f(z)$ právě tehdy, lze-li tuto funkci v jistém prstenci $P(\infty, R)$ vyjádřit ve tvaru

$$f(z) = z^m \varphi(z), \quad \varphi(\infty) \neq 0, \quad \varphi(\infty) \neq \infty, \quad (13.38)$$

přičemž funkce $\varphi(z)$ je holomorfní v $P(\infty, R)$ a bodě z_0 ji lze dodefinovat na spojitou.

Důsledky první a druhé vlastnosti:

- Má-li funkce $f(z)$ v bodě z_0 pól, má funkce $g(z) = [f(z)]^{-1}$ v bodě $z_0 = 0$ odstranitelnou singularitu (dedefinování $g(0) = 0$).
- Jsou-li funkce $f(z)$ a $g(z)$ holomorfní (regulární) v bodě z_0 , je funkce $f(z)/g(z)$ v bodě $z_0 = 0$ buď holomorfní (regulární), nebo zde má pól.

Pozn. 1: Co znamenají podmínky $\varphi(z_0) \neq 0, \infty$, resp. $\varphi(\infty) \neq 0, \infty$ v třetím a čtvrtém tvrzení? Uvažme takovou situaci pro bod $z_0 \neq \infty$. Kdyby hodnota funkce $\varphi(z)$ byla v tomto bodě nulová, mohli bychom funkci $\varphi(z)$ zapsat v okolí $B(z_0, r)$ ve tvaru $\varphi = (z - z_0)^k \psi(z)$, kde $\psi(z_0) \neq 0$ a k je násobnosti

bodu z_0 jako kořene funkce $\varphi(z)$. V takovém případě by násobnost bodu z_0 jako pólu funkce nebyla m , ale nižší. Naopak při $\varphi(z_0) = \infty$ by násobnost bod z_0 jako pólu funkce $f(z)$ byla ve skutečnosti vyšší než m . Podobnou úvahu můžete provést pro bod $z_0 = \infty$.

Pozn. 2: Proč v případě čtvrté vlastnosti můžeme zaručit jen spojitost funkce $\varphi(z)$ v bodě $z_0 = \infty$?

Důkazy všech vlastností uvedených ve větě 13.20 jsou jednoduché a navzájem analogické. Dokážeme jen vlastnost c), zbytek ponecháme do cvičení 13.3.5.

Předpokládejme, že bod $z_0 \neq \infty$ je m -násobným pólem funkce $f(z)$. Pak podle věty 13.19 existují čísla c_1, \dots, c_m , $c_m \neq 0$ taková, že funkce $h(z) = f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu, je tedy holomorfní (regulární) v jistém prstenci $P(z_0, r)$. Pak

$$f(z) = h(z) + \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k} = (z-z_0)^{-m} \left[h(z)(z-z_0)^m + \sum_{k=1}^m c_k (z-z_0)^{m-k} \right] = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

kde funkce

$$\varphi(z) = h(z)(z-z_0)^m + \sum_{k=1}^m c_k (z-z_0)^{m-k}$$

má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu (bod z_0 je odstranitelnou singularitou funkce $h(z)$, součet $\sum_{k=1}^m c_k (z-z_0)^{m-k}$ je holomorfní funkcí na $B(z_0, r)$). Po odstranění singularity bude funkce $\varphi(z)$ holomorfní v $B(z_0, r)$.

Jestliže je naopak možné vyjádřit funkci $f(z)$ v nějakém prstencovém okolí $P(z_0, r)$ bodu z_0 ve tvaru (13.37), stačí, abychom funkci $\varphi(z)$ zapsali ve tvaru řady se středem v bodě z_0 a postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n &\implies f(z) = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-m} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{b_{m-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-m}, \\ f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{b_{m-k}}{(z-z_0)^k} &= \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-m}. \end{aligned}$$

Na pravé straně poslední rovnosti je holomorfní (regulární) funkce. Podle věty 13.19 je bod z_0 m -násobným pólem funkce $f(z)$.

A teď už několik jednoduchých příkladů na určení typu singularity pomocí limit. Vzhledem k tomu, že mám k dispozici větu 13.20, můžeme u pólu také určit jejich násobnost.

Příklad 13.27: Klasifikace singularit prakticky

V každém z následujících příkladů vyznačíme singularity zadané funkce a určíme v nich limity. Zvláště prošetříme v každém z případů bod ∞ .

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^3 - z^2 + z - 1} = \frac{(z+1)(z-1)}{(z-1)(z-i)(z+i)}$$

z_0	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	typ singularity
1	1	odstratitelná, $f(1) = 1$
i	∞	pól, $m = 1$
-i	∞	pól, $m = 1$
∞	0	není singularity

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

z_0	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	typ singularity
0	1	odstratitelná, $f(0) = 1$
∞	neexistuje	podstatná

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}$$

z_0	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	typ singularity
$k\pi, k \in \mathbf{Z}$	1	odstratitelná, $f(z) = 1$
∞	neexistuje	podstatná

$$f(z) = z^4$$

z_0	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	typ singularity
∞	∞	pól, $m = 4$

$$f(z) = e^{z^{-1}}$$

z_0	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	typ singularity
0	neexistuje	podstatná
∞	0	není singularita

$$f(z) = \frac{(1+z^2)^2}{1-z^2}$$

z_0	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	typ singularity
1	∞	pól, $m = 1$
-1	∞	pól, $m = 1$
∞	∞	pól, $m = 2$
∞	0	není singularita

Jak jsme stanovili násobnost pólu $z_0 = \infty$? Platí

$$F(\xi) = f\left(\frac{1}{xi}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)^2}{1 - \frac{1}{\xi^2}} = \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2(\xi^2 - 1)}.$$

Je vidět, že bod $\xi_0 = 0$ je dvojnásobným pólem funkce $F(\xi)$.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1} \cos \frac{\pi z}{z + 1}$$

z_0	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	typ singularity
1	$-\frac{\pi}{8}$	odstratitelná, $f(z) = -\frac{\pi}{8}$
-1	neexistuje	podstatná
∞	0	odstranitelná, $f(\infty) = 0$

Na závěr odstavce ještě jedna definice, která bude užitečná později. Protože však souvisí také se singularitami, uvádíme ji hned.

Nechť D je oblast. Funkce $f(z)$ nazývá *meromorfní v oblasti D* , je-li v oblasti D holomorfní (regulární) s výjimkou nejvýše spočetně mnoha pólů, přičemž množina těchto pólů nemá v D hromadné body.

Z uvedené definice je vidět, že hromadné body množiny pólů funkce $f(z)$ mohou ležet na hranici oblasti D . Skutečnost, že jistý bod z_0 je hromadným bodem množiny pólů funkce $f(z)$, znamená, že v každém prstencovém okolí bodu z_0 (ať již je $z_0 \neq \infty$, nebo $z_0 = \infty$) leží nekonečně mnoho pólů funkce $f(z)$. Hromadné body pólů jsou svými vlastnostmi blízké podstatným singularitám ve smyslu následující věty.

Věta 13.22 (Sochockého): *Je-li bod z_0 podstatnou singularitou, nebo hromadným bodem pólů funkce $f(z)$, pak v každém jeho prstencovém okolí nabývá funkce hodnot libovolně blízkých libovolně zvolenému číslu $w \in \mathbf{C}$.*

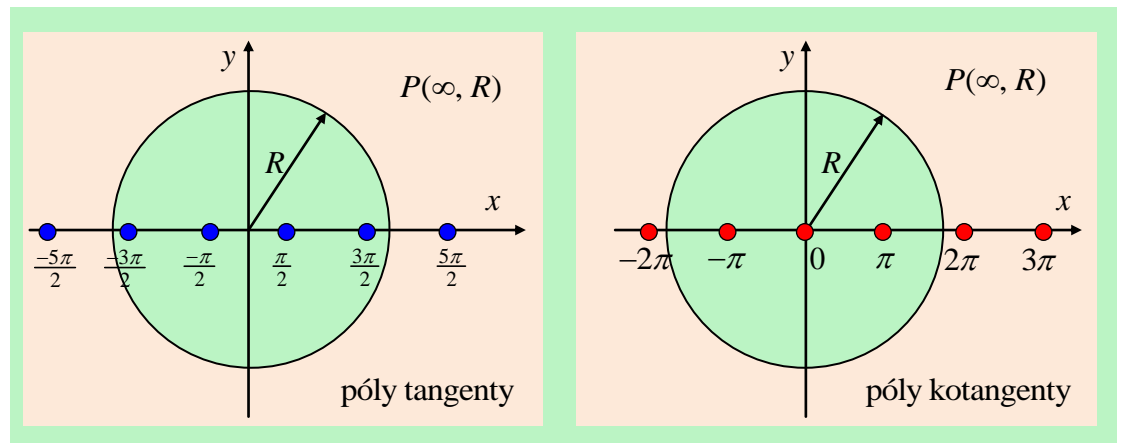
Větu si zkuste dokázat sami (úloha 8. cvičení 13.5). Čtenář, který namítne, že Sochockého věta odpovídá situaci c) ve větě 13.19, má v zásadě pravdu. Věta 13.22 je odlišná pouze tím, že zahrnuje do klasifikace také hromadné body pólů dané funkce. Víte, jaký je rozdíl mezi podstatnou singularitou a hromadným bodem množiny pólů funkce? Je to jednoduché. Podstatná singularita je definitoricky zavedena jako jeden z typů izolovaných singularit. Hromadný bod množiny pólů ovšem izolovaný není.

Příklad 13.28: Hromadný bod množiny pólů

Příkladem funkcí, které mají tolik pólů, že se „hromadí“ je funkce tangens, definovaná v nerozšířené Gaussově rovině jako podíl funkcí sinus a kosinus. Má pól v každém bodě Gaussovy roviny, v němž je $\cos z = 0$. Je to funkce meromorfní: množina pólů funkce tangens je

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbf{C} \mid z = x + iy, x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, y = 0, k \in \mathbf{Z}\},$$

je spočetná a bod $z_0 = \infty$ je jejím hromadným bodem. Skutečně, zvolíme-li libovolně prstencové okolí $P(\infty, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > R\}$, pak nerovnost $k \frac{\pi}{2} > R$ má nekonečně mnoho řešení, konkrétně pro $k > \frac{2R}{\pi}$. V $P(\infty, R)$ tak leží nekonečně mnoho pólů funkce $\operatorname{tg} z$ (obrázek 13.17). Analogickou úvahu



Obrázek 13.17: Póly tangenty a kotangenty.

můžeme vést pro funkci kotangens.

A ještě poznámka. Jistě vám připadá, že hromadný bod $z_0 = \infty$ množiny \mathcal{P} nenaplnuje „náznornou představu“ nějakého „hromadění“, resp. „nahustování“. Je to tím, že bod ∞ je tak trochu nezvyklý a běžné představě se vymyká. Přestože však póly studované funkce tangens mají mezi sebou ekvidistantní odstupy, je jich v každém prstencovém okolí bodu ∞ nekonečně mnoho (neboť v kruhovém okolí $B(0, R)$ je jich pouze konečně mnoho). Bod ∞ tak splňuje definici hromadného bodu množiny \mathcal{P} .

Podstatných singularit si všimá také *velká Picardova věta*, podle níž funkce nabývá v každém prstencovém okolí své podstatné singularity všech hodnot množiny \mathbf{C} , s výjimkou nejvýše jedné. Tato věta je silnější než 13.21. Tvrdí, že když zvolíme libovolné číslo $w \in \mathbf{C}$ s nejvýše jedinou výjimkou (ale neví se předem, zda vůbec taková výjimka pro daný konkrétní případ existuje a která to je), pak funkce v libovolném prstencovém okolí své podstatné singularity této hodnoty přímo *nabude*, nejen že se jí libovolně přiblíží.

13.3.2 Singularity a dosud neobvyklý rozvoj funkce, reziduum

V minulém odstavci jsme se naučili praktický způsob, jak třídit izolované singularity funkcí do tří typů podle limit. Můžeme o nich ještě něco nového objevit? Všimneme-li si znovu podrobněji věty 13.18, uvědomíme si, že je-li singularita z_0 funkce $f(z)$ odstranitelná a odstraníme-li ji, je funkce v jejím okolí vyjádřena (obecně nekonečnou) mocninnou řadou s kladnými mocninami proměnné $(z - z_0)$. Je-li singularita pólem, lze funkci vyjádřit rovněž mocninnou řadou, obsahující však *konečný počet* členů se zápornými mocninami proměnné $(z - z_0)$, podle násobnosti pólu. A jak je to v případě podstatné singularity? Lze funkci stále vyjádřit mocninnou řadou, která však již bude mít nekonečný počet členů se zápornými mocninami proměnné $(z - z_0)$? A co když je funkce holomorfní v oblasti, která „obepíná“ více singularit, které třeba ani nebudou izolované — vzpomeňme na „děravé“ (vícenásobně souvislé) oblasti. Tuto otázku řeší následující důležitá věta.

Věta 13:22 (Laurentova řada): *Nechť $z_0 \in \mathbf{C}$ a necht' funkce $f(z)$ je holomorfní v mezikruží $M = \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z - z_0|, R\}$. Pak ji lze rozvinout v řadu*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (13.39)$$

kteřá konverguje stejnoměrně v každém mezikruží $M' = \{z \in \mathbf{C} \mid r' < |z - z_0| < R', r < r' < R' < R\}$. V mezikruží M řada konverguje lokálně stejnoměrně.

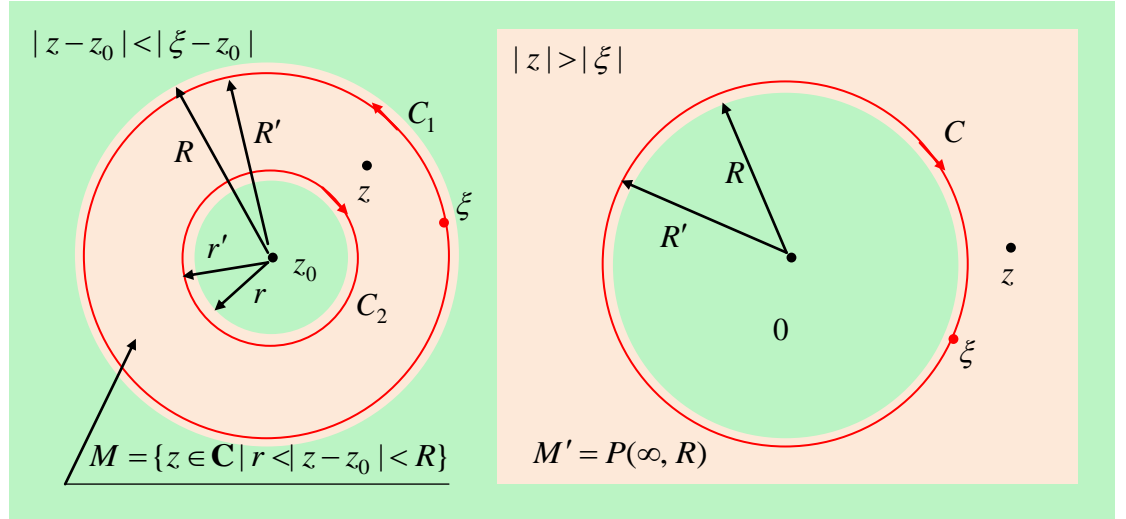
Nechť $z_0 = \infty$ a necht' funkce $f(z)$ je holomorfní v množině $M = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > R\}$. Pak ji lze rozvinout v řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad (13.40)$$

kteřá konverguje stejnoměrně v každé množině $M' = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > R', R' > R\}$. Na množině M řada konverguje lokálně stejnoměrně.

Terminologie: Řada (13.39), resp. (13.40) se nazývá *Laurentova*. Je-li střed řady $z_0 \neq \infty$, nazývá se součet jejích členů se zápornými mocninami proměnné $(z - z_0)$ *hlavní část*, součet zbývajících členů tvoří *regulární část* řady. Je-li $z_0 = \infty$, tvoří hlavní část řady naopak členy s kladnými mocninami proměnné $(z - z_0)$, zbývající členy pak regulární část. (Absolutní člen patří vždy k regulární části.)

K důkazu věty 13.22 poslouží obrázek 13.18. Nejprve se zabývejme případem $z_0 \neq \infty$ (obrázek vlevo). Zvolme jednorozměrný singulární řetězec Γ jako



Obrázek 13.18: K důkazu věty o Laurentově řadě.

formální součet dvou kružnic $\Gamma = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, parametrizovaných takto:

$$\mathcal{C}_1 : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow \xi(t) = z_0 + R'e^{it} \in \mathbf{C},$$

$$\mathcal{C}_2 : [2\pi, 0] \ni t \longrightarrow \xi(t) = z_0 + r'e^{it} \in \mathbf{C}.$$

Podle Cauchyova vzorce (13.29) v globální verzi platí pro všechny body z , pro něž je $r' < |z - z_0| < R'$,

$$f(z) \text{Ind}_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Cauchyův vzorec můžeme takto použít, neboť index bodů α ležících v oblasti $\{\alpha \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leq rr'\}$, v níž o funkci $f(z)$ nic nevíme, vzhledem k řetězci Γ je nulový, takže jsou splněny podmínky věty 13.13. Platí totiž $\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \text{Ind}_{\mathcal{C}_1}(\alpha) + \text{Ind}_{\mathcal{C}_2}(\alpha) = 1 + (-1) = 0$. Pro body $z \in \{z \in \mathbf{C} \mid r' < |z - z_0| < R'\}$ je $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \text{Ind}_{\mathcal{C}_1}(z) + \text{Ind}_{\mathcal{C}_2}(z) = 1 + 0 = 1$. Pak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right). \quad (13.41)$$

13.3. CO UDEĚLÁ MALÁ DÍRKA V OBORU HOLOMORFNOSTI ANEB SINGULARITY 121

Upravujme výraz $\frac{1}{\xi-z}$ tak, abychom mohli $f(z)$ vyjádřit jako řadu v mocninách proměnné $(z-z_0)$. Nejprve pro integraci po křivce \mathcal{C}_1 , pro kterou je $|z-z_0| < |\xi-z_0|$. Označíme-li $q = \frac{z-z_0}{\xi-z_0}$, vidíme, že $|q| < 1$. Platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi-z_0} &= \frac{1}{(\xi-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{\xi-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}} = \frac{1}{\xi-z_0} \cdot \frac{1}{1-q} = \\ &= \frac{1}{\xi-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

při úpravě jsme použili vzorec pro součet nekonečné geometrické řady s kvocientem q , $|q| < 1$, $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Analogicky postupujeme při úpravě výrazu $\frac{1}{\xi-z_0}$ pro integraci po křivce \mathcal{C}_2 , kde označíme $q = \frac{\xi-z_0}{z-z_0}$, $|q| < 1$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi-z_0} &= \frac{1}{(\xi-z_0) - (z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-q} = \\ &= -\frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Teď stačí jen dosadit do integrálů ve vztahu (13.41):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mathcal{C}_2} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\mathcal{C}_2} f(\xi) (\xi-z_0)^n d\xi \right] (z-z_0)^{-n-1}. \end{aligned}$$

V druhém součtu provedeme záměnu $-n-1 \rightarrow n$ a dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\mathcal{C}_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z-z_0)^n,$$

tj.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi, \quad r < |z-z_0| < R. \quad (13.42)$$

kde \mathcal{C} je libovolná uzavřená křivka ležící v oblasti M' , s vlastností $\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z_0) = 1$. Pomocí globální Cauchyovy věty (věta 13.13) jistě snadno zdůvodníte, proč

můžeme integrály po kružnicích nahradit integrálem po výše popsané obecné křivce \mathcal{C} . Snadno také zdůvodníme, že řada konverguje stejnoměrně v oblasti M' . Je to díky stejnoměrné konvergenci geometrické řady s kvocientem, jehož absolutní hodnota je menší než jedna.

Případ $z_0 = \infty$ převedeme na předchozí situaci, budeme-li uvažovat o funkci $F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, holomorfní v oblasti $P(0, R^{-1})$. Středem řady vyjadřující funkci $F(\zeta)$ bude bod $\zeta_0 = 0$. Platí

$$F(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \zeta^n, \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{F(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi,$$

kde \mathcal{K} je kružnice parametrizovaná vztahem $\xi = \varrho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\varrho = \frac{1}{R'}$, $R' > R$. Po zpětné záměně $\zeta \rightarrow z^{-1}$, záměně $n \rightarrow -n$ a označení $c_n = C_{-n}$ dostaneme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{F(\xi)}{\xi^{-n+1}} d\xi \quad |z| > R. \quad (13.43)$$

První ze součtů představuje regulární část Laurentovy řady funkce $f(z)$ se středem v nekonečnu, druhý pak její hlavní část.

Vraťme se k situaci, kdy je bod z_0 (ať už $z_0 \in \mathbf{C}$, nebo $z_0 = \infty$) izolovanou singularitou funkce $f(z)$, tj. funkce je holomorfní v jistém prstenci $P(z_0, R)$. Z předchozích úvah je zřejmá souvislost mezi počtem členů hlavní části Laurentovy řady funkce se středem v bodě z_0 a typem singularity:

Nechť funkce je holomorfní v $P(z_0, R)$, $z_0 \in \mathbf{C}$, resp. $z = \infty$. Bod z_0 je pólem m -tého řádu funkce $f(z)$ právě když má hlavní část Laurentovy řady této funkce se středem v bodě z_0 právě m členů, tj. $\sum_{n=-m}^{-1} c_n (z - z_0)^n$, $c_{-m} \neq 0$, resp. $\sum_n = 1^m c_n z^n$, $c_m \neq 0$. Bod z_0 je podstatnou singularitou funkce $f(z)$ právě tehdy, má-li hlavní část Laurentovy řady se středem v bodě z_0 nekonečně mnoho členů.

Příklad 13.29: Jak na Laurentovu řadu?

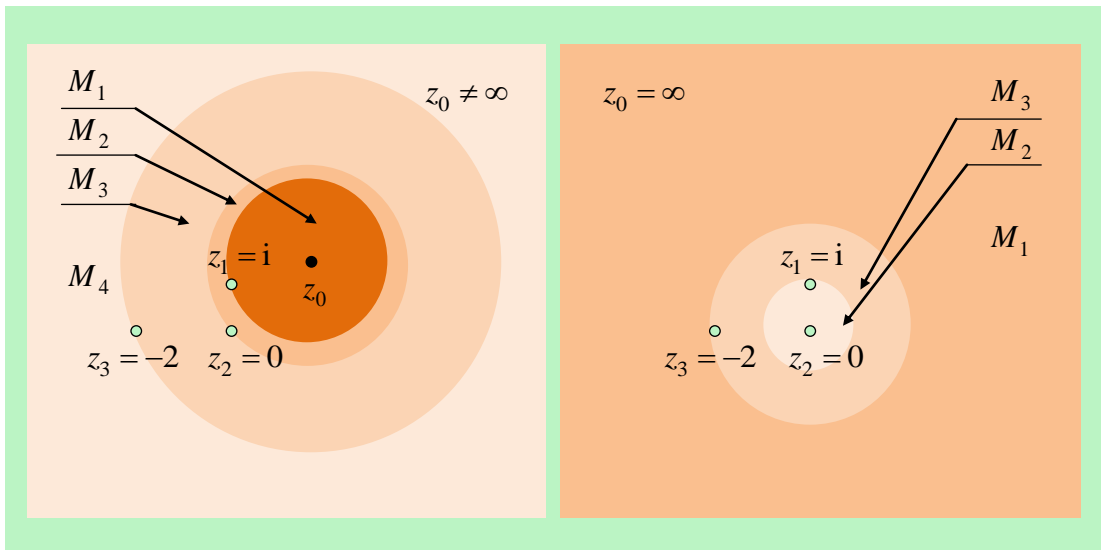
Na příkladu racionální lomené funkce ukážeme praktický postup stanovení Laurentovy řady se středem v obecném bodě pro případ funkce se singularitami. Zvolme třeba

$$f(z) = \frac{2z^2 + 6z - 2i}{z(z-i)(z+2)} = \frac{2}{z-i} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}.$$

Hned ze zadání této funkce, a ještě lépe z jejího rozkladu na parciální zlomky, vidíme, že má tři jednonásobné póly, $z_1 = i$, $z_2 = 0$ a $z_3 = -2$, v nekonečnu

13.3. CO UDĚLÁ MALÁ DÍRKA V OBORU HOLOMORFNOSTI ANEB SINGULARITY 123

je regulární ($f(\infty) = 0$). Máme za úkol vyjádřit všechny Laurentovy rozvoje zadané funkce se středem v bodě z_0 , tj. rozvoje v jednotlivých mezikružích s tímto středem, v nichž je funkce $f(z)$ holomorfní. Předpokládejme nejprve, že $z_0 \neq \infty$, ale také $z_0 \neq z_1, z_2, z_3$. Předpokládejme dále pro určitost, že $|z_1 - z_0| < |z_2 - z_0| < |z_3 - z_0|$, tj. $|i - z_0| < |z_0| < |-2 - z_0|$ (obrázek 13.19 vlevo). Počítejme:



Obrázek 13.19: K příkladu 13.19 — oblasti holomorfnosti funkce.

- $M_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < |i - z_0|\}$

Při úpravě parciálních zlomků budeme postupovat obdobně jako v důkazu věty 13.22.

$$\begin{aligned} \frac{2}{z - i} &= \frac{2}{(z - z_0) - (i - z_0)} = -\frac{2}{i - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{i - z_0}} = -\frac{2}{i - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{i - z_0}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{2}{(i - z_0)^{n+1}}\right] (z - z_0)^n, \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{(z - z_0) + z_0} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}\right] (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{(z-z_0) + (2+z_0)} = \frac{1}{2+z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-z_0}{2+z_0}} = \frac{1}{2+z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-z_0}{2+z_0} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2+z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Rozvoj funkce $f(z)$ v oblasti M_1 , která je kruhovým okolím bodu z_0 o poloměru $R_1 = |i - z_0|$ je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{2}{(i-z_0)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(2+z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n.$$

Skutečnost, že hlavní část rozvoje v této oblasti nemá žádné členy, jistě nikoho nepřekvapuje. Funkce $f(z)$ je totiž v dané oblasti holomorfní, takže Laurentova řada je řadou Taylorovou. Nabízí se kontrola: pro koeficienty c_n musí platit $c_n = n!f^{(n)}(z_0)$. Zkusme to ověřit jen pro $n = 1$:

$$c_n = -\frac{2}{(i-z_0)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{z_0^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(2+z_0)^{n+1}} \implies c_1 = -\frac{2}{(i-z_0)^2} - \frac{2}{z_0^2} + \frac{1}{(2+z_0)^2},$$

$$f'(z) = -\frac{2}{(z-i)^2} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+2)^2}, \quad f'(z_0) = -\frac{2}{(z_0-i)^2} - \frac{1}{z_0^2} + \frac{1}{(z_0+2)^2}.$$

- $M_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid |i - z_0| < |z - z_0| < |z_0|\}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{z-i} &= \frac{2}{(z-z_0) - (i-z_0)} = \frac{2}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i-z_0}{z-z_0}} = \frac{2}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i-z_0}{z-z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[2(i-z_0)^{-(n+1)} \right] (z-z_0)^n, \\ \frac{1}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} \right] (z-z_0)^n, \\ \frac{1}{z+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2+z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Všimli jste si, že rozvoj parciálních zlomků $\frac{1}{z}$ a $\frac{1}{z+2}$ v mezikruží M_2 je stejný jako v M_1 ? To proto, že funkce $\frac{1}{z}$ a $\frac{1}{z+2}$ jsou holomorfní nejen v M_2 , ale dokonce v kruhu $B(z_0, |z_0|)$. Jejich Laurentova řada je řadou Taylorovou. Nemuseli jsme proto nic počítat, jen jsme Taylorovy rozvoje opsali z předchozích výpočtů platných pro oblast M_1 . Laurentova

řada funkce $f(z)$ v M_2 má tvar

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[2(i - z_0)^{-(n+1)} \right] (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2 + z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n.$$

První součet je hlavní část funkce $f(z)$, druhý pak její část regulární.

- $M_3 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z_0| < |z - z_0| < |-2 - z_0|\}$
V mezikruží M_3 je funkce $\frac{1}{z+2}$ stále holomorfní, takže její rozvoj zůstává Taylorovou řadou. Rozvoj funkce $\frac{2}{i-z}$ zůstane stejný jako v případě M_2 , neboť tato funkce je holomorfní nejen v M_3 , ale dokonce v $\mathbf{C}^+ \setminus M_1$. Platí proto

$$\begin{aligned} \frac{2}{z-i} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[2(i - z_0)^{-(n+1)} \right] (z - z_0)^n, \\ \frac{1}{2+z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2 + z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Situace se změnila pouze u funkce $\frac{1}{z}$, která byla v $B(z_0, |z_0|)$ stále holomorfní, avšak posunem proměnné z do oblasti M_3 jsme „překročili“ její singularitu $z_2 = 0$. Rozvoj proto musíme spočítat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(z - z_0) + z_0} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z_0}{z - z_0} \right)^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[(-1)^{n+1} z_0^{-(n+1)} \right] (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Pro $f(z)$ pak platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{(-1)^n}{(2 + z_0)^{n+1}} + (-1)^{n+1} z_0^{-(n+1)} \right] (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2 + z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n.$$

- $M_4 = \{z \in \mathbf{C}^+ \mid |z - z_0| > |-2 - z_0|\}$
Rozvoje funkcí $\frac{2}{i-z}$ a $\frac{1}{z}$ zůstanou stejné jako v případě c), spočítat je třeba pouze rozvoj funkce $\frac{1}{2+z}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+z} &= \frac{1}{(2 + z_0) + (z - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2+z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2 + z_0}{z - z_0} \right)^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[(-1)^{n+1} (2 + z_0)^{-(n+1)} \right] (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[2(i-z_0)^{-(n+1)} + (-1)^{n+1} z_0^{-(n+1)} + (-1)^n (2+z_0)^{-(n+1)} \right] (z-z_0)^n$$

A teď se pustíme do rozvoju kolem bodu $z_0 = \infty$. Singularity funkce $f(z)$ opět vymeží v Gaussově rovině oblasti, v nichž je funkce holomorfní (obrázek 13.19 vpravo). Rozvineme v nich funkci $F(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ v řadu se středem v bodě $\xi_0 = 0$. Postupovat budeme opět tak, že najdeme rozvoje jednotlivých parciálních zlomků.

- $M_1 = \{z \in \mathbf{C}^+ \mid |z| > 2\} = B(\infty, 2)$, $z \rightarrow \frac{1}{\xi}$, tj. $0 < |\xi| < \frac{1}{2}$
V oblasti M_1 jsou všechny parciální zlomky funkce $f(z)$ holomorfní, takže Laurentova řada bude obsahovat pouze regulární část. Platí

$$\begin{aligned} \frac{2}{z-i} &= \frac{2}{\frac{1}{\xi}-i} = \frac{2\xi}{1-i\xi} = 2i - 2i \frac{1}{1-i\xi} = 2i - 2i \sum_{n=0}^{\infty} (i\xi)^n = \\ &= -2i \sum_{n=1}^{\infty} i^n z^{-n}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = z^{-1} \quad \text{rozvoj má jeden člen}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{\frac{1}{\xi}+2} = \frac{\xi}{1+2\xi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+2\xi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \xi^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n z^{-n}, \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-2i^{n+1} + (-1)^n 2^{n-1} \right] z^{-n} = z^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} \left[-2i^{-n+1} + (-1)^n 2^{-n-1} \right] z^n,$$

přičemž při jsme v poslední úpravě provedli záměnu $n \rightarrow -n$ a vzali v úvahu, že $(-1)^n = (-1)^{-n}$.

- $M_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$, $z \rightarrow \xi^{-1}$, tj. $\frac{1}{2} < |\xi| < 1$
Parciální zlomky $\frac{1}{z}$ a $\frac{2}{z-1}$ jsou holomorfní v oblasti $M_1 \cup M_2 = B(\infty, 1)$. Jejich rozvoje budou proto obsahovat jen regulární část a budou stejné jako v předchozím případě. Pro zlomek $\frac{1}{z+2}$ platí

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{\frac{1}{\xi}+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2\xi}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \xi^{-n} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{-n} z^n,$$

$$f(z) = \left(-\frac{1}{2} + z^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{n=-2} -2i^{-n+1} z^n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{-n} z^n.$$

V závorce je regulární část Laurentovy řady funkce (absolutní člen a záporné mocniny proměnné z), zbytek tvoří hlavní část (kladné mocniny proměnné z).

- $M_3 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}$, tj. $1 < |\xi| < \infty \quad z \rightarrow \frac{1}{\xi}$
Rozvoje parciálních zlomků $\frac{1}{z}$ a $\frac{1}{z+2}$ zůstanou stejné jako v předchozím případě, změní se pouze rozvoj zlomku $\frac{1}{z-i}$. Platí

$$\frac{1}{z-i} = \frac{i}{1 + \frac{i}{\xi}} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \xi^{-n} = i + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} z^n,$$

$$f(z) = \left(i - \frac{1}{2} + z^{-1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [2^{-n} + i^{n+1}] z^n.$$

Regulární část rozvoje má pouze dva členy — absolutní člen a člen s mocninou z^{-1} .

Příklad 13.30: Není něco v nepořádku?

Zamyslíme-li se nad výsledky předchozího příkladu, můžeme pojmout „podezření“, zda není něco v nepořádku v souvislosti s tvrzením, které jsme vyslovili těsně před uvedeným příkladem: hlavní části Laurentových řad funkce $f(z)$ se středem z_0 na jednotlivých oblastech M_1 až M_4 (s výjimkou M_1 , kde jsou všechny parciální zlomky holomorfní) mají nekonečně mnoho členů, přestože všechny singularity funkce $f(z)$ jsou pouze jednonásobné póly. Tento rozpor je ovšem jen zdánlivý. Tvrzení se totiž týká situací, kdy singularita je přímo středem řady. V příkladu 13.29 je však středem řady obecný bod z_0 , který sám není singularitou. Abychom se přesvědčili o správnosti této úvahy, vyjádříme funkci $f(z)$ z příkladu 13.29 její Laurentovou řadou se středem v některé ze singularit. Zvolme třeba $z_0 = z_2 = 0$. Funkce $f(z)$ je holomorfní v prstencovém okolí $P(0, 1)$ této singularity. Na tento případě se proto vztahuje tvrzení uvedené před příkladem 13.29. Najdeme Laurentovy rozvoje jednotlivých parciálních zlomků funkce $f(z)$ v $P(0, 1)$:

$$\frac{2}{z-i} = -\frac{2}{i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{i}} = 2i \frac{1}{1+iz} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} z^n,$$

$$\frac{1}{z} = z^{-1},$$

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n,$$

$$f(z) = z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-i)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] z^n.$$

Hlavní část Laurentovy řady má skutečně jediný člen, z^{-1} . Hlavní části Laurentových řad funkce $f(z)$ v se středem $z_0 = 0$ v dalších oblastech, které vymezí singularity v Gaussově rovině, již samozřejmě budou mít obecně nekonečně mnoho členů — proveďte příslušné rozvoje a přesvědčte se o tom.

Rozvineme-li funkci $f(z)$ v prstencových okolicích dalších singularit, v nichž je holomorfní, tj. $P(i, |z_2 - z_1|) = P(i, 1)$ a $P(2, |z_1 - z_3|) = P(2, 2)$, zjistíme, že v obou případech má hlavní část Laurentovy řady pouze jediný člen (jak odpovídá násobnosti pólu), v prvním případě $\frac{2}{z-i}$, v druhém $-\frac{1}{z+2}$.

Příklad 13.31: Ještě jednou racionální lomená funkce

V předchozích příkladech jsme získali návod, jak rozvinout racionální lomenou funkci do Laurentovy řady s předepsaným středem. Jednalo se však o speciální případ — racionální ryze lomenou funkci s pouze jednonásobnými kořeny jmenovatele. Parciální zlomky proto byly tvaru $\frac{A}{z-a}$, kde a je kořen jmenovatele. Nebude-li racionální funkce ryze lomená, přepíšeme ji snadno do tvaru částečného podílu (který bude polynomem) a zbytku (ten již bude racionální funkcí ryze lomenou). Co ale v případě, že jmenovatel bude mít vícenásobný kořen? Uvažme třeba funkci

$$f(z) = \frac{Az + B}{(z - a)^2}$$

a hned ji šikovně upravme:

$$f(z) = \frac{A(z - a)}{(z - a)^2} + \frac{Aa + B}{(z - a)^2} = \frac{A}{z - a} + \frac{K}{(z - a)^2}.$$

První zlomek už rozvinout v Laurentovu řadu s libovolným středem umíme. U druhého zlomku, v němž jsme pro zjednodušení označili $K = Aa + B$, si stačí uvědomit, že je derivací funkce $f_2(z) = -\frac{K}{z-a}$, kterou ovšem také rozvinout umíme. Vzhledem k tomu, že Laurentova řada konverguje stejnoměrně, stačí už jen výsledek zderivovat, tj.

$$f(z) = f_1(z) + [f_2(z)]' = \frac{A}{z - a} + \left[-\frac{K}{(z - a)} \right]'$$

Konkrétní výpočet provedeme třeba pro $a = 1$ a $z_0 = 0$.

- $M_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 \leq |z| < 1\}$

$$\begin{aligned}\frac{A}{z-1} &= -A \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \\ \frac{-K}{z-1} &= K \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \left[\frac{-K}{z-1}\right]' = K \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1},\end{aligned}$$

$$f(z) = -A \sum_{n=0}^{\infty} z^n + (A+B) \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = B + \sum_{n=1}^{\infty} [nA + (n+1)B] z^n.$$

- $M_2 = \{z \in \mathbf{C}^+ \mid |z| > 1\}$

$$\begin{aligned}\frac{A}{z-1} &= \frac{A}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{A}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} A z^n \\ \frac{-K}{z-1} &= -K \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n, \quad \left[\frac{-K}{z-1}\right]' = -K \sum_{n=-\infty}^{-1} n z^{n-1},\end{aligned}$$

$$f(z) = A \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - (A+B) \sum_{n=-\infty}^{-1} n z^{n-1} = A z^{-1} - \sum_{n=-\infty}^{-2} [nA + (n+1)B] z^n.$$

Objeví-li se parciální zlomek typu

$$f(z) = \frac{A_{k-1} z^{k-1} + A_{k-2} z^{k-2} + \dots + A_1 z + A_0}{(z-a)^k},$$

postupujeme obdobně a vyjádříme funkci $f(z)$ ve tvaru

$$f(z) = \frac{B_1}{z-a} + \frac{d}{dz} \left(\frac{B_2}{z-a} \right) + \dots + \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{B_{k-1}}{z-a} \right),$$

v němž jsou koeficienty B_1, \dots, B_{k-1} jednoznačně určeny koeficienty A_1, \dots, A_{k-1} a kořenem a jmenovatele.

Příklad 13.32: A ještě jeden....

Zkusme ještě rozvoj funkce v řadu se středem v podstatné singularitě, třeba

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}, \quad \text{tj. } z_0 = 1.$$

Nejprve zapíšeme rozvoj funkce $\sin \frac{1}{z-1}$,

$$\sin \frac{1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z-1} \right)^{2k+1},$$

a pak jej vynásobíme rozvojem funkce z^2 , tj.

$$z^2 = (z-1)^2 + 2z - 1 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} f(z) &= \left[(z-1)^2 + 2(z-1) + 1 \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z-1} \right)^{2k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[(z-1)^{-2k+1} + 2(z-1)^{-2k} + (z-1)^{-2k-1} \right] = \\ f(z) &= (z-1) + 2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k-1)!} \right] z^{-2k+1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k}. \end{aligned}$$

Regulární částí rozvoje je konečný polynom $(z-1) + 2$, zbytek představuje hlavní část rozvoje.

A proč se vůbec singularitám a rozvojmům funkcí kolem nich tak věnujeme? Víme totiž, že singularity způsobují to, že integrál z dané funkce po uzavřené křivce, která nějaké singularity obepíná, nebude obecně nulový. Jak tedy přispívají singularity k integrálu? Vyzkoušíme to na nejjednodušším možném případě. Budeme integrovat funkci $f(z)$, která je holomorfní v prstencovém okolí $P(z_0, r)$ izolované singularity z_0 , po kružnici se středem právě v této singularitě a poloměrem $\rho < r$. Využijeme přitom rozvoje funkce v Laurentovu řadu se středem v bodě z_0 a možnosti její integrace člen po členu. Nejprve vezměme v úvahu případ, kdy $z_0 \neq \infty$. Integrační kružnici parametrizujeme takto:

$$\mathcal{K} : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow z(t) = z_0 + \rho e^{it} \in \mathbf{C}.$$

Pak

$$\int_{\mathcal{K}} f(z) dz = \int_{\mathcal{K}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} c_n \rho^n e^{int} i \rho e^{it} dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} ic_n \varrho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Pro $n \neq -1$ platí

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \left| \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = 0,$$

nenulový je pouze jediný z integrálů, pro $n = -1$, a ten je roven 2π . Odtud je již příspěvek singularity k integrálu zřejmý:

$$\int_{\mathcal{K}} f(z) dz = 2\pi ic_{-1}.$$

(Díky globální Cauchyově větě víme, že integrál bude stejný v případě, že integrujeme po libovolné uzavřené křivce \mathcal{C} ležící v $P(z_0, r)$, která obíhá singularitu jednou v kladném smyslu, tj. $\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z_0) = 1$.) Výsledek je tak trochu překvapením. Ať je Laurentův rozvoj jak chce dlouhý, na integrál má vliv pouze první člen jeho hlavní části! Integrál bude nulový i v případě, že funkce má v bodě z_0 singularitu, třeba pól nějakého řádu, nebo dokonce i podstatnou, ale hlavní části Laurentovy řady „chybí“ první člen. To je třeba případ funkce $f(z) = \cos \frac{1}{z}$, která má podstatnou singularitu v bodě $z_0 = 0$. Její Laurentova řada je, jak víme, tvaru

$$\cos \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{z^{2k}} \implies c_{-1} = 0.$$

Prozkoumejme ještě případ, kdy singularitou bude bod $z_0 = \infty$ a funkce je holomorfní v prstencovém okolí $P(\infty, R)$. Integrační kružnici parametrizujme tak, aby ležela v tomto prstencovém okolí a obíhala bod $z_0 = \infty$ jednou v kladném smyslu (bude tedy obíhat bod $\xi_0 = 0$ jednou ve smyslu záporném), tj.

$$\mathcal{K} : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow z(t) = \varrho e^{-it} \in \mathbf{C}, \quad \varrho > R.$$

Provedeme-li obdobný výpočet jako před chvílí (proved'te krok za krokem), dostaneme

$$\int_{\mathcal{K}} f(z) dz = -2\pi ic_{-1}.$$

V případě singularity v nekonečnu se v integrálu opět uplatní pouze koeficient c_{-1} . Ale pozor! Není to koeficient prvního člen hlavní části, nýbrž části

regulární! Koeficient c_{-1} je natolik významný, že se pro něj zavádí samostatný název.

Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v $P(z_0, r)$, $z_0 \neq \infty$. Koeficient c_{-1} Laurentovy řady $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ se nazývá *reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0* , značíme $c_{-1} = \operatorname{res} f(z_0)$. Je-li funkce $f(z)$ holomorfní v bodě $z_0 = \infty$ a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ její Laurentova řada se středem v bodě $z_0 = \infty$, nazývá se *reziduem funkce $f(z)$ v bodě $z_0 = \infty$* hodnota $-c_{-1}$, značíme $-c_{-1} = \operatorname{res} f(\infty)$.

Jistě teď nebude problém určit rezidua funkcí z příkladů 13.29, 13.31 a 13.32 (cvičení 13.3.5). Musíme však počítat rezidua tak, že se budeme pokaždé trápit s rozvojem funkce v Laurentovu řadu? To by jistě nebylo příliš účinné, když ostatní koeficienty řady často nebudeme vůbec potřebovat. Jak už to v matematice často bývá, i zde existuje způsob, jak zjistit rezidua jinak než přímo z definice. Vztahuje se na odstranitelné singularity a na póly. V případech podstatných singularit se nedá nic dělat, Laurentově řadě se nevyhneme. Jak tedy na rezidua bez Laurentovy řady?

Nejprve si jako obvykle všimneme situace, kdy izolovanou singularitou je bod $z_0 \neq \infty$. Je-li singularita odstranitelná (a je-li odstraněna dosazením $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$) nemá hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z)$ se středem z_0 žádné členy. Je proto $\operatorname{res} f(z_0) = 0$. Má-li funkce v bodě z_0 m -násobný pól, pak (podle věty 13.20c) ji lze v jistém prstencovém okolí $P(z_0, r)$ tohoto pólu vyjádřit ve tvaru

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad \varphi(z_0) \neq 0, \quad \varphi(z_0) \neq \infty,$$

kde funkce $\varphi(z)$ je holomorfní v $B(z_0, r)$. Stejně jako v úvaze, pomocí které jsme reziduum objevili, počítejme integrál z funkce $f(z)$ po kružnici $\mathcal{K} : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow z = z_0 + \rho e^{it}$, $0 < \rho < r$:

$$2\pi i \operatorname{res} f(z_0) = \int_{\mathcal{K}} \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} = 2\pi i \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Vzpomínáte ještě na zobecněný Cauchův vzorec (13.31)? Právě díky němu jsme mohli provést poslední úpravu. Pro reziduum tak dostáváme

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (13.44)$$

A jak to bude s reziduem funkce v nekonečnu? Pokud je v bodě $z_0 = \infty$ „opravdová“ izolovaná singularita, tj. pól, nebo podstatná, nezbyvá než napsat příslušnou Laurentovu řadu a reziduum z ní „přečíst“. V případě, že je funkce v bodě $z_0 = \infty$ regulární, nebo jsme ji regulární učinili odstraněním odstranitelné singularity, můžeme si určení rezidua zjednodušit (nezapomínejte, že na rozdíl od bodu v \mathbf{C} může být reziduum v nekonečnu nenulové i v případě, že funkce je v nekonečnu regulární). Předpokládejme tedy, že funkce $f(z)$ je regulární v bodě $z_0 = \infty$. Pak její Laurentova řada má v jistém kruhu $B(\infty, R)$ tvar

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n = c_0 + c_{-1}z^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n z^n = f(\infty) + c_{-1}z^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n z^n,$$

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1} = z[f(\infty) - f(z)] + \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n z^n,$$

a v limitě $z \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\operatorname{res} f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)], \quad (13.45)$$

je-li funkce $f(z)$ regulární v bodě $z_0 = \infty$.

Nakonec si ještě jednou uvědomme a shrňme souvislost singularit a reziduí:

- Reziduum funkce $f(z)$ v bodě $z_0 \neq \infty$ je koeficient c_{-1} její Laurentovy řady se středem v bodě z_0 .
- Je-li funkce $f(z)$ v bodě $z_0 \neq \infty$ holomorfní (regulární), je reziduum funkce v tomto bodě v každém případě nulové, neboť hlavní část Laurentovy řady funkce se středem v bodě z_0 nemá žádné členy.
- Reziduum funkce v bodě $z \neq \infty$ může být nulové i v případě, že funkce v tomto bodě není regulární, avšak člen $c_{-1}z^{-1}$ v její Laurentově řadě není obsažen (například funkce $f(z) = z^{-2}$ má v bodě $z_0 = 0$ dvojnásobný pól, ale $\operatorname{res} f(0) = 0$).
- Reziduum funkce $f(z)$ v bodě $z_0 = \infty$ je záporně vzatý koeficient c_{-1} její Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = \infty$, tj. $-c_{-1}$.
- Je-li funkce v bodě $z_0 = \infty$ regulární, přesto může mít v tomto bodě nenulové reziduum. Člen $c_{-1}z^{-1}$ totiž náleží do regulární části Laurentovy řady funkce se středem v bodě $z_0 = \infty$.

- Naopak, může se stát, že funkce regulární v bodě $z_0 = \infty$ má v tomto bodě nulové reziduum (například funkce $f(z) = z^{-2}$, zmíněná před chvílí, je v bodě $z_0 = \infty$ regulární, avšak $\text{res } f(\infty) = 0$).
- Reziduum funkce v bodě $z = \infty$ může být nulové i v případě, že funkce v tomto bodě není regulární, avšak člen $c_{-1}z^{-1}$ v její Laurentově řadě není obsažen (například funkce $f(z) = e^z$ má v bodě $z_0 = \infty$ dokonce podstatnou singularitu, ale $\text{res } f(\infty) = 0$, neboť jediným členem regulární části Laurentovy řady této funkce se středem v bodě $z_0 = \infty$ je absolutní člen $c_0z^0 = 1$).

13.3.3 Reziduová věta aneb místo integrování sčítáme rezidua

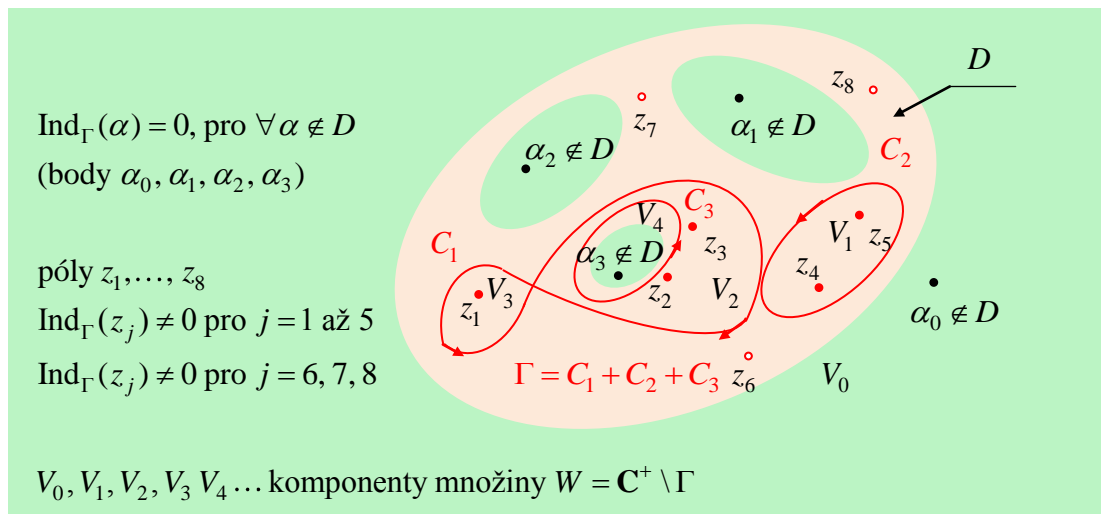
V předchozím odstavci jsme již speciální případ takzvané *reziduové věty* (také *věty o reziduích*) odvodili. Týkal se situace, kdy jsme integrovali funkci $f(z)$ s izolovanou singularitou v bodě z_0 a holomorfní v prstenci $P(z_0, r)$ po uzavřené křivce \mathcal{C} ležící v tomto prstenci, přičemž $\text{Ind}_{\mathcal{C}}(z_0) = 1$. Vráťte-li se k tomuto odvození a zobecníte-li situaci na případ, kdy index bodu z_0 vzhledem ke křivce \mathcal{C} bude mít obecnou hodnotu, dospějete ke vztahu

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \text{Ind}_{\mathcal{C}}(z_0) \text{res } f(z_0).$$

Co když ale bude integrační křivka \mathcal{C} obepínat více singularit dané funkce? Může jich být konečně mnoho, nebo i spočetně mnoho. (O případu nespočetně mnoha singularit „obehnaných“ integrační křivkou reziduová věta nevypovídá.) Znamená to tedy, že se týká meromorfních funkcí. Připomeňme, že jsou to takové funkce, které mají následující vlastnosti:

- Jsou holomorfní v množině $D \setminus A$, kde D je otevřená množina.
- V každém bodě množiny A je pól dané funkce. (Zahrnuje i případ, kdy množina A je prázdná.)
- Množina A nemá v množině D žádný hromadný bod.

Zvolme uzavřený jednorozměrný singulární řetězec ležící v množině $D \setminus A$ tak, aby neobíhal body, které neleží v množině D . Znamená to, že pro každý takový bod je $\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 0$. Pro názornost další úvahy sledujme obrázek 13.20, v němž $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ a α_3 jsou příklady bodů, které neleží v množině



Obrázek 13.20: K odvození reziduové věty.

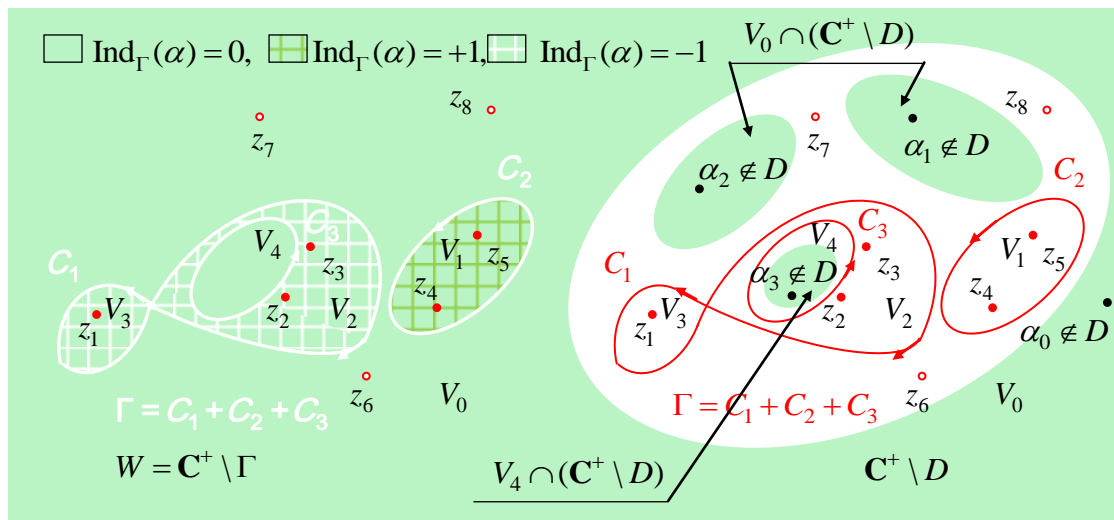
D . Pro všechny je předpoklad $\text{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ splněn, ale pro každý trochu jinak. Množina D je „děravá“ (řečeno správným jazykem matematiky, je to čtyřnásobně souvislá oblast). Bod α_0 leží zcela „mimo“ množinu D (nepatřil by do množiny D , ani kdybychom díry zaplnili), body α_1 a α_2 leží v „dírách“, ale žádná z křivek C_1, C_2, C_3 řetězce $\Gamma = C_1 + C_2 + C_3$ tyto díry neobíhá. Bod α_3 leží také v díře, tu však obíhá křivka C_1 jednou v záporném smyslu, křivka C_2 vůbec a křivka C_3 jednou v kladém smyslu. Proto

$$\text{Ind}_\Gamma(\alpha_3) = \text{Ind}_{C_1}(\alpha_3) + \text{Ind}_{C_2}(\alpha_3) + \text{Ind}_{C_3}(\alpha_3) = 1 + 0 + (-1) = 0.$$

Body typu α_3 výchozí předpoklad rovněž splňují.

Označme $B = \{z_j \in A \mid \text{Ind}_\Gamma(z_j) \neq 0\}$. Je to množina všech takových singularit funkce $f(z)$, které řetězec (resp. některá z křivek, jimž je tvořen) skutečně obíhá. (Na obrázku 13.20 je množina A tvořena body z_1 až z_8 , množina B body z_1 až z_5 .) Dále označme $W = \mathbf{C}^+ \setminus \Gamma$ (množinu W získáme vyjmutím všech bodů řetězce Γ z Gaussovy roviny). Označme $V_i, i = 1, \dots, N$, komponenty množiny W . Víme, že na každé z nich je funkce $\text{Ind}_\Gamma(z)$ konstantní (věta 13.10), na neomezené komponentě V_0 je její hodnota nulová. (Na obrázku 13.20 má množina W pět komponent, V_0, V_1, V_2, V_3 a V_4 .) Je-li pro některou z komponent V_j množiny W množina $V \cap (\mathbf{C}^+ \setminus D)$ neprázdná, pak pro každý bod α náležející do této komponenty je $\text{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$, neboť takový bod neleží v množině D . K lepšímu pochopení pomůže obrázek 13.21.

V jeho levé části jsou vyznačeny komponenty množiny $W = \mathbf{C}^+ \setminus \Gamma \setminus V_0$ (neo-



Obrázek 13.21: Ještě k odvození reziduové věty.

hraničená komponenta), V_1, V_2, V_3 a V_4 . Barvu pozadí mají komponenty V_0 a V_4 , na nichž má funkce $\text{Ind}_\Gamma(z)$ nulovou hodnotu, tmavým šrafováním je vyznačena komponenta V_1 , na níž nabývá funkce $\text{Ind}_\Gamma(z)$ hodnoty 1, světlé šrafování odpovídá hodnotě $\text{Ind}_\Gamma(z) = -1$ (komponenty V_2 a V_3). V pravé části obrázku je množina $\mathbf{C}^+ \setminus D$ (patří do ní všechny množiny s barvou pozadí). Neprázdný průnik s touto množinou mají pouze komponenty V_0 a V_4 množiny W , což jsou právě „díry“ v oblasti D .

Předchozí „množinová“ úvaha nám pomůže k tomu, abychom zjistili, kolik pólů (obecně ze spočetně mnoha pólů, tvořících množinu A) má ve skutečnosti nenulový index vzhledem k řetězci Γ , tj. kolik prvků má množina B . Dospějeme k závěru, že jich je pouze *konečně mnoho*! Uvažujme:

- Víme, že množina A nemá v D žádný hromadný bod (plyne z definice meromorfní funkce).
- Ty z bodů množiny A , pro něž je index vzhledem k řetězci Γ nenulový, leží v omezených komponentách množiny W (vlastnost funkce $\text{Ind}_\Gamma(z)$ — věta 13.10).
- Libovolná z těchto komponent, označme ji obecně V , je podmnožinou množiny D . Dokonce i pro její uzávěr \bar{V} platí $\bar{V} \subset D$. Proč i pro uzávěr?

Protože hranice komponenty je tvořena částmi grafu řetězce Γ , který leží v množině D .

- Uzávěry ohraničených komponent množiny W jsou kompaktní (jsou to uzavřené ohraničené množiny).
- Body množiny $\bar{V} \cap A$ leží uvnitř množiny V . Hranice komponenty V je totiž tvořena částmi řetězce Γ , na němž ovšem podle předpokladu nesmí ležet žádný pól funkce.
- Každý z bodů množiny $\bar{V} \cap A$ lze pokrýt kruhovým okolím ležícím v množině V tak, aby každá dvě z těchto okolí měla prázdný průnik. Ostatní body množiny \bar{V} lze pokrýt otevřenými kruhovými okolími tak, aby v žádném z nich neležely body množiny $\bar{V} \cap A$ (takové pokrývání je možné proto, že množina A nemá v D hromadné body). Vytvořili jsme tak otevřené pokrytí množiny \bar{V} .
- V komponentě V leží pouze konečný počet bodů množiny A . Kdyby tomu tak nebylo, nebylo by možné vybrat z právě vytvořeného otevřeného pokrytí množiny \bar{V} konečné podpokrytí. To by bylo v rozporu s její kompaktností.
- Počet komponent množiny W je rovněž konečný. Množina B proto obsahuje pouze konečný počet pólů funkce $f(z)$.

Označme body množiny B z_1 až z_N . Funkci $f(z)$ lze rovinout do Laurentových řad se středy z_1, z_2, \dots, z_N . Každá z nich má svou hlavní i regulární část, tj.

$$f(z) = H_i(z) + R_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(i)} (z-z_i)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)} (z-z_i)^n, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Definujme novou funkci tak, že od funkce $f(z)$ odečteme hlavní části všech těchto Laurentových řad a vzniknou funkci, která tak bude mít v bodech z_1, z_2, \dots, z_N pouze odstranitelné singularity, v těchto singularitách dodefinujeme na holomorfní funkci, tj.

$$g(z) = f(z) - H_1(z) - \dots - H_N(z) \quad \text{pro } z \neq z_i, \quad g(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} [f(z) - H_1(z) - \dots - H_N(z)].$$

Podle Cauchyovy věty je

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = 0 \implies \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma} H_i(z) dz = 2\pi i \operatorname{res} H_i(z_i).$$

Platí ale $\operatorname{res} H_i(z_i) = \operatorname{res} f(z_i)$, a tak dostáváme slavnou *reziduovou větu*:

Věta 13.23 (O reziduích): *Nechť $f(z)$ je meromorfní funkce v oblasti D , A množina všech jejích pólů ležících v D , Γ jednorozměrný singulární řetězec v $D \setminus A$ takový, že $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ pro všechny body α neležící v oblasti D . Pak platí*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_j \in A} \operatorname{res} f(z_j) \operatorname{Ind}_\Gamma(z_j). \quad (13.46)$$

Uvědomme si, že i když ve vztahu (13.46) formálně sčítáme přes všechny body množiny A , kterých může být i nekonečně (spočetně) mnoho, obsahuje součet ve skutečnosti pouze konečný počet nenulových sčítanců. Uplatní se totiž pouze rezidua v bodech množiny B , jejichž index vzhledem k řetězci Γ je nenulový. Index pólu vzhledem k řetězci, po kterém funkci integrujeme, je jakousi „vahou“ příspěvku odpovídajícího rezidua. Reziduum se prostě započte do integrálu tolikrát, kolikrát integrační obor oběhne příslušný pól.

A ještě jednu zajímavou vlastnost reziduí můžeme odvodit, má-li funkce v Gaussově rovině \mathbf{C} pouze konečný počet singularit. Předpokládejme, že tomu tak opravdu je a funkce má v \mathbf{C} p izolovaných singularit z_1, \dots, z_p . Všechny se jistě vejdou do dostatečně velkého kruhu $B(0, r)$, ohraničeného kružnicí $\mathcal{K} : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow z(t) = z_0 + e^{it}$. Podle reziduové věty je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} f(z) dz = \sum_{j=1}^p \operatorname{res} f(z_j).$$

Vně kružnice \mathcal{K} nejsou žádné singularity s možnou výjimkou singularity v bodě ∞ , v němž ovšem, jak víme, může mít funkce nenulové reziduum, i když singularitou ani nebude. Proto platí

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mathcal{K}} f(z) dz = \operatorname{res} f(\infty),$$

takže

$$\sum_{j=1}^p \operatorname{res} f(z_j) + \operatorname{res} f(\infty) = 0. \quad (13.47)$$

Věta o reziduích má řadu důležitých, zajímavých, a možná i nečekaných důsledků. Než se však pustíme do jejich formulace a dokazování, uveďme aspoň jeden příklad na použití věty.

Příklad 13.33: Místo integrování sčítáme rezidua

Uvažujme o meromorfní funkci

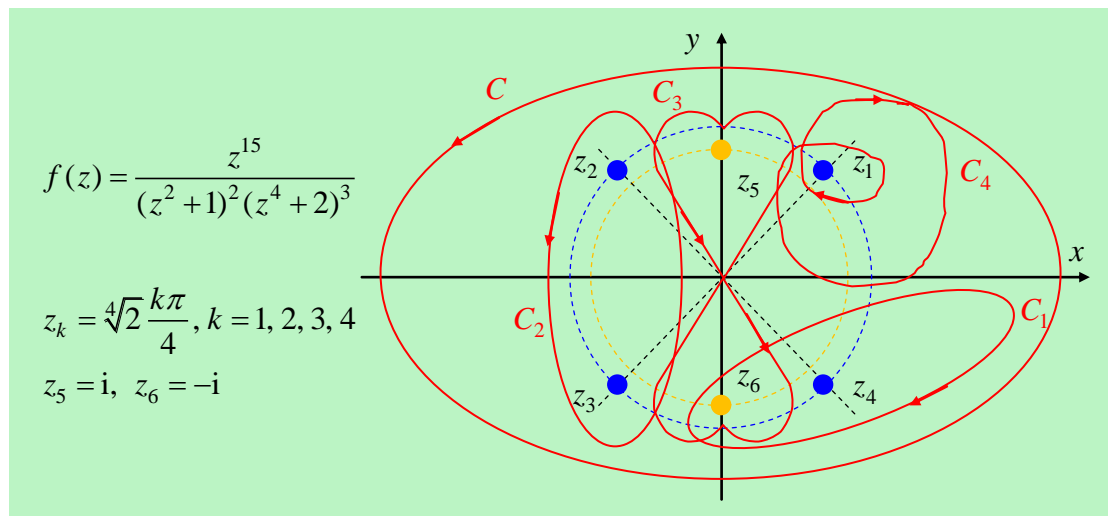
$$f(z) = \frac{z^{15}}{(z^2 + 1)^2(z^4 + 2)^3}.$$

Jejími póly jsou řešení rovnic $z^2 + 1 = 0$ a $z^4 + 2 = 0$, která spolu s hodnotami reziduí shrnuje tabulka.

rovnice	pól	nás.	res $f(z)$	res $f(z)$	res $f(z)$	res $f(z)$
$z^4 + 2 = 0$	$z_k = \sqrt[4]{2} \frac{k\pi}{4}, k = 1, 2, 3, 4$	3				
$z^2 + 1 = 0$	$z_5 = i, z_6 = -i$	2	$\frac{10}{308}$	$\frac{10}{308}$	–	–

Určit rezidua funkce ve všech jejích pólech je v tomto konkrétním případě dost nepříjemné počítání. Pokud však už rezidua máme, dokážeme pomocí nich spočítat integrál po *libovolné* uzavřené křivce (nebo jednorozměrném singulárním řetězci) v \mathbf{C} , a to pouze na základě hodnot indexu pólů vzhledem k této křivce či řetězci. Stačí tedy vědět, kolikrát integrační křivka (řetězec) obíhá jednotlivé póly a sečíst rezidua s jejich „vahami“, určenými právě počtem oběhů. A ještě samozřejmě vynásobit faktorem $2\pi i$. Ukázka různých integračních křivek je na obrázku 13.22. Označme jednorozměrný singulární řetězec, který bude integračním oborem, jako obvykle Γ . Integrál z funkce $f(z)$ může v principu nabývat hodnoty $2\pi i$ -násobku všech možných hodnot, které jsou celočíselnými kombinacemi reziduí. Žádné jiné hodnoty naopak nabýt nemůže. Tak například, označíme-li $r_j = \text{res } f(z_j)$, a budeme-li předpokládat, že žádná z křivek na obrázku 13.22 neobíhá po téže cestě více než jednou, dostaneme tyto hodnoty integrálů:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz &= 2\pi i [\text{res } f(z_4) \text{Ind}_{\mathcal{C}_1}(z_4) + \text{res } f(z_6) \text{Ind}_{\mathcal{C}_1}(z_6)] = -2\pi i(r_4 + r_6), \\ \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz &= 2\pi i [\text{res } f(z_2) \text{Ind}_{\mathcal{C}_2}(z_2) + \text{res } f(z_3) \text{Ind}_{\mathcal{C}_2}(z_3)] = -2\pi i(r_2 + r_3), \\ \int_{\mathcal{C}_3} f(z) dz &= 2\pi i [\text{res } f(z_5) \text{Ind}_{\mathcal{C}_3}(z_5) + \text{res } f(z_6) \text{Ind}_{\mathcal{C}_3}(z_6)] = 2\pi i(r_5 - r_6), \end{aligned}$$



Obrázek 13.22: K příkladu 13.33.

$$\int_{C_4} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res} f(z_1) \operatorname{Ind}_{C_4}(z_1) = -4\pi i r_1,$$

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^6 \operatorname{res} f(z_j) \operatorname{Ind}_{\mathcal{C}}(z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^6 r_j.$$

Jestliže se tedy připravíme předem hodnoty reziduí zadané funkce, můžeme pak již snadno počítat hodnoty integrálů pro libovolné uzavřené křivky či řetězce, aniž bychom vůbec integrovali. Reziduové věty se dá využít i jinak. Kdybychom třeba měli funkci $f(z)$ integrovat po nějaké složité křivce a znali hodnoty indexu pólů funkce vzhledem k této křivce, a nechtělo se nám počítat rezidua, můžeme místo toho integrovat po nějaké jiné, třeba podstatně jednodušší křivce, budou-li hodnoty indexu pólů funkce vzhledem k ní stejné jako v případě křivky původní. Hodnota integrálu musí být stejná. Tak třeba namísto integrálu po křivce C_3 v obrázku 13.22 bychom mohli integrovat po řetězci $\Gamma = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$, kde \mathcal{K}_1 by byla kladně orientovaná kružnice se středem v bodě z_5 , která by obíhala tento střed jednou, a \mathcal{K}_2 záporně orientovaná kružnice se středem z_6 , která jej rovněž obíhá jednou. Je samozřejmě otázkou konkrétního zadání, který postup zvolit.

Pokud jde o křivku \mathcal{C} , která obíhá všechny póly dané funkce ležící v nerozšířené Gaussově rovině, tj. „v konečnu“, nemusíme rezidua v nich po-

čítat vůbec. Stačí použít vztah (13.47) a určit pouze reziduum funkce v bodě $z_0 = \infty$. V našem příkladu je funkce $f(z)$ v nekonečnu regulární, neboť její limita je konečná (je nulová). Pro výpočet rezidua použijeme vzorec (13.45),

$$\operatorname{res} f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z [f(\infty) - f(z)] = -1.$$

Pak

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^6 \operatorname{res} f(z_j) = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty) = 2\pi i.$$

Výsledek se shoduje s tím, který jsme dostali pracnou cestou pomocí výpočtu jednotlivých reziduí.

Slibovali jsme zajímavé a užitečné důsledky věty o reziduích. Tři z nich, které se obvykle uvádějí jako samostatná tvrzení, uvedeme jako „tři v jednom“ v následující větě.

Věta 13.24 (Věty o kořenech a pólech:) *Nechť Γ je uzavřený jednorozměrný singulární řetězec v oblasti D takový, že pro každý bod α mimo tuto oblast platí $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 0$. Označme $D_1 = D \setminus \Gamma$ a předpokládejme, že pro každý bod $\xi \in D_1$ je $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(\xi) = 0$, nebo 1.*

- *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v D a v D_1 má právě N_f kořenů (nulových bodů), včetně násobnosti, a nemá nulové body na řetězci Γ . Pak platí*

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{Ind}_{f \circ \Gamma}(0).$$

- **Rouchéova věta** *Nechť platí všechny předchozí předpoklady. Dále předpokládejme, že funkce $h(z)$ je rovněž holomorfní v oblasti D platí pro ni $|f(z) - h(z)| < |f(z)|$ pro každý bod $z \in \Gamma$. Pak $N_h = N_f$.*
- **Princip argumentu** *Nechť platí všechny předpoklady týkající se oblasti D a řetězce Γ . Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v D s výjimkou konečně mnoha pólů. Označme N_f , resp. P_f počet kořenů, resp. pólů funkce $f(z)$ v D_1 , včetně jejich násobnosti a předpokládejme, že žádný z nich neleží na řetězci Γ . Pak*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f.$$

Zdá se vám, že taková věta k ničemu není? Naopak. Integrovaná funkce, dejme tomu $g(z)$, může mít docela často tvar tzv. *logaritmické derivace* funkce $f(z)$, jak tomu je v naší větě. Pro získání hodnoty integrálu $\int_{\Gamma} g(z) dz$ nemusíme už opravdu počítat skoro nic. V prvních dvou případech stačí jen zjistit index počátku soustavy souřadnic v Gaussově rovině vzhledem k řetězci $f \circ \Gamma$, v případě třetím počet kořenů a pólů funkce obepnutých řetězcem Γ . Anebo naopak, chceme-li určit index bodu 0 vzhledem k nějaké komplikované křivce $f \circ \Gamma$, stačí zjistit počet nulových bodů funkce $f(z)$ obepnutých řetězcem Γ . (Nesmíme však zapomenout na předpoklad, že řetězec Γ má obíhat každý z kořenů funkce $f(z)$ nejvýše jednou, a to v kladném smyslu.) A druhý případ má ještě další, velmi zajímavou a možná i trochu nečekanou aplikaci v algebře! Tu poznáme za chvíli, poté, co větu 13.24 dokážeme. Netrpěliví čtenáři mohou důkaz třeba i přeskočit a vrátit se k němu později.

Dejme tomu, že jsou splněny všechny předpoklady pro první tvrzení věty. Označme $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Tato funkce je v oblasti D meromorfní (každý její pól je kořenem jmenovatele — co myslíte, platí o obráceně, že každý kořen jmenovatele je pólem funkce $g(z)$?). Je-li bod $z_0 \in D$ kořenem funkce $f(z)$ s násobností $m = m(z_0)$, platí v jistém jeho kruhovém okolí $B(z_0, r)$ $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, kde $\varphi(z)$ je holomorfní funkce a $\varphi(z_0) \neq 0$. Proto je i funkce $\frac{1}{\varphi(z)}$ holomorfní v $B(z_0, r)$. V prstencovém okolí $P(z_0, r)$ pak platí

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1} \varphi(z) + (z - z_0)^m \varphi'(z)}{(z - z_0)^m \varphi(z)} = \\ &= \frac{m}{z - z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}. \end{aligned}$$

Funkce $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ je ovšem holomorfní v okolí $B(z_0, r)$ a tvoří regulární část Laurentovy řady funkce. Hlavní část má jediný člen, a to $\frac{m}{z - z_0}$. Je vidět, že $\text{res } g(z_0) = m = m(z_0)$. Označme A množinu všech kořenů funkce $f(z)$, které leží v množině $D_1 = D \setminus \Gamma$. Podle reziduové věty je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_0 \in A} \text{res } g(z_0) \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) = \sum_{z_0 \in A} m(z_0) = N_f.$$

Počítejme index bodu 0 vzhledem k řetězci $f \circ \Gamma$:

$$\text{Ind}_{f \circ \Gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \Gamma} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f,$$

když jsme během výpočtu provedli substituci $\xi = f(z)$.

Přikročme k důkazu druhé části věty 13.24. Zamysleme se teď nad tím, co znamená podmínka $|f(z) - h(z)| < |f(z)|$ v bodech řetězce Γ . Věta říká, že dvě holomorfní funkce, které jsou si blízké na hranici množiny D_1 ve smyslu uvedené nerovnosti, mají v D_1 stejný počet kořenů. To je docela silné tvrzení, uvědomíme-li si, že podmínka „blízkosti“ funkcí $f(z)$ a $h(z)$ není vůbec nějak silná. Bude splněna pro každou funkci $h(z)$, která se „vhodným způsobem“ neliší příliš od nulové funkce. Pro funkci $f(z)$ jsme dokázali platnost tvrzení a) věty 13.24. Funkce $h(z)$ ovšem také splňuje předpoklady a), neboť je holomorfní v D a nemá žádný kořen v bodech řetězce Γ . (Kdyby totiž bylo $h(\xi) = 0$ v některém bodě $\xi \in \Gamma$, pak by v tomto bodě musela platit nerovnost, která nikdy platit nemůže, $|f(\xi)| < |f(\xi)|$.) Pro funkci $h(z)$ tedy rovněž platí výsledek formulovaný v prvním tvrzení věty, tj.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = N_h = \text{Ind}_{h \circ \Gamma}(0).$$

Druhé tvrzení má ještě další část, kterou také musíme dokázat. Všimněme si polohy bodu $z_0 = 0$ vzhledem k řetězcům $\Gamma_f = f \circ \Gamma$ a $\Gamma_h = h \circ \Gamma$. Proč to? Ve hře jsou totiž hodnoty indexu tohoto bodu vzhledem k Γ_f i Γ_h . Pokud by bod $z_0 = 0$ na některém z řetězců ležel, nebyla by příslušná hodnota indexu definována. Pro jednoduchost na chvíli předpokládejme, že Γ je parametrizovaná (samozřejmě uzavřená) křivka, $[\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \Gamma(t) \in \mathbf{C}$. To, co bude následovat, platí i pro řetězec, který není ničím jiným než formálním součtem křivek, a snadno se to dokáže (jak, nad tím zapřemýšlejte sami). Vzhledem k předpokladu platnosti vztahu $|f(z) - h(z)| < |h(z)|$ na křivce Γ , je $|\Gamma_f(t) - \Gamma_h(t)| < |\Gamma_f(t)|$ pro všechny hodnoty parametru $t \in [\alpha, \beta]$. Kdyby bod $z_0 = 0$ ležel na křivce Γ_f , tj. pro jistou hodnotu $t_1 \in [\alpha, \beta]$ by platilo $\Gamma_f(t_1) = 0$, dostali bychom odtud nerovnost $|\Gamma_h(t_1)| < 0$, která nemůže platit. Kdyby bod $z_0 = 0$ ležel naopak na křivce Γ_h , vyšla by zase pro jistou hodnotu t_2 nerovnost $|\Gamma_f(t_2)| < |\Gamma_f(t_2)|$. Ale ta také platit nemůže. A teď definujme křivku

$$\tilde{\Gamma} : [\alpha, \beta] \ni t \longrightarrow \tilde{\Gamma}(t) = \frac{\Gamma_h(t)}{\Gamma_f(t)} \in \mathbf{C}.$$

Platí

$$\tilde{\Gamma}'(t) = \frac{\Gamma_h'(t)\Gamma_f(t) - \Gamma_h(t)\Gamma_f'(t)}{\Gamma_f^2(t)} \implies \frac{\tilde{\Gamma}'(t)}{\tilde{\Gamma}(t)} = \frac{\Gamma_h'(t)}{\Gamma_h(t)} - \frac{\Gamma_f'(t)}{\Gamma_f(t)}.$$

Počítejme index bodu $z_0 = 0$ vzhledem k řetězci $\tilde{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Ind}_{\tilde{\Gamma}}(0) &= \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{dz}{z} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\tilde{\Gamma}'(t)}{\tilde{\Gamma}(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\Gamma_h'(t)}{\Gamma_h(t)} dt - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\Gamma_f'(t)}{\Gamma_h(t)} dt = \int_{\Gamma_h} \frac{dz}{z} + \int_{\Gamma_f} \frac{dz}{z} = \\ &= 2\pi i \left[\operatorname{Ind}_{\Gamma_h}(0) - \operatorname{Ind}_{\Gamma_f}(0) \right]. \end{aligned}$$

Na druhé straně na celém intervalu parametrů $[\alpha, \beta]$ platí

$$|1 - \tilde{\Gamma}(t)| = \left| 1 - \frac{\Gamma_h(t)}{\Gamma_f(t)} \right| = \left| \frac{\Gamma_f(t) - \Gamma_h(t)}{\Gamma_f(t)} \right| < 1.$$

Je vidět, že všechny body řetězce $\tilde{\Gamma}$ leží v otevřeném kruhu $B(1, 1)$. Bod $z_0 = 0$ leží na hranici tohoto kruhu a je tak bodem neomezené komponenty množiny $\mathbf{C}^+ \setminus \tilde{\Gamma}$. Index bodu $z_0 = 0$ vzhledem k řetězci $\tilde{\Gamma}$ je proto nulový a indexy bodu $z_0 = 0$ vzhledem ke křivkám Γ_h a Γ_f shodné. Závěr zní

$$\operatorname{Ind}_{h \circ \Gamma}(0) = \operatorname{Ind}_{f \circ \Gamma}(0) \implies N_h = N_f.$$

Příklad 13.33: Základní věta algebry

Některý čtenář si právě klade otázku, k čemu vůbec Rouchéova věta je. Nejspíš k ničemu. A co zde najednou dělá algebra? Kupodivu, obojí spolu souvisí. Základní větou algebry se často nazývá klíčové tvrzení týkající se počtu kořenů polynomu: Polynom n -tého stupně jedné (komplexní) proměnné s komplexními koeficienty má v \mathbf{C} právě n kořenů včetně násobnosti. Znáte algebraický důkaz tohoto tvrzení? Asi ne. Dokazuje se totiž analyticky, a to právě s použitím Rouchéovy věty. Je to opravdu elegantní.

Uvažujme o polynomu v normovaném tvaru (normování nemá vliv na kořeny)

$$h(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0, \quad a_j \in \mathbf{C}, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Polynom $f(z) = z^n$ má v \mathbf{C} právě n -násobný kořen, totiž nulu. Pokud se nám podaří dokázat, že funkce $f(z)$ a $h(z)$ splňují předpoklady Rouchéovy věty, budeme hotovi. Především je jasné, že polynomy nemají žádné póly, jsou to holomorfní funkce. Stačí dokázat jen nerovnost $|h(z) - f(z)| < |f(z)|$ na „dostatečně velké a každé větší“ kružnici. Označme

$$g(z) = h(z) - f(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0.$$

Platí

$$\begin{aligned} \frac{|g(z)|}{|f(z)|} &= \frac{|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0|}{|z^n|} = \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| < \\ &< \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \frac{|a_{n-2}|}{|z^2|} + \dots + \frac{|a_0|}{|z^n|}. \end{aligned}$$

Zvolme číslo $R = 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|$, tj. $R > 1$. Na kružnici Γ se středem v bodě $z_0 = 0$ a poloměrem R platí

$$\begin{aligned} \frac{|h(z) - f(z)|}{|f(z)|} &= \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \frac{|a_{n-2}|}{|z^2|} + \dots + \frac{|a_0|}{|z^n|} = \\ &= \frac{|a_{n-1}|}{1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|} + \dots + \frac{|a_0|}{1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|} < 1 \implies |h(z) - f(z)| < |f(z)|. \end{aligned}$$

Tato nerovnost bude zachována i pro libovolný poloměr $R' > R$. Polynomy $f(z)$ a $h(z)$ splňují předpoklady Rouchéovy věty pro kružnici Γ , ale také pro jakoukoli kružnici s větším poloměrem. Mají proto v *libovolném* kruhu $B(0, R')$, $R' > R$, a koneckonců v celé Gaussově rovině \mathbf{C} , stejný počet kořenů.

Zbývá dokázat princip argumentu, tj. tvrzení c) věty 13.24. Podobně jako při důkazu tvrzení a) označme $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Funkce $g(z)$ je jakožto podíl meromorfních funkcí rovněž meromorfní. Víme už, že je-li bod z_0 kořenem funkce $f(z)$ násobnosti $m = m(z_0)$, je $\text{res } g(z_0) = m$. Předpokládejme, že bod \tilde{z}_0 je pólem funkce $f(z)$ násobnosti $p = p(\tilde{z}_0)$. Pak v jistém prstencovém okolí $P(\tilde{z}_0, r)$ existuje holomorfní funkce $\varphi(z)$ tak, že platí

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - \tilde{z}_0)^p}, \quad \varphi(\tilde{z}_0) \neq 0,$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z - \tilde{z}_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \implies \text{res } g(\tilde{z}_0) = -p.$$

Označme A , resp. B množinu všech kořenů, resp. pólů funkce $f(z)$ ležících v D . Podle reziduové věty je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_0 \in A} \text{res } g(z_0) + \sum_{\tilde{z}_0 \in B} \text{res } g(\tilde{z}_0) = N_f - P_f.$$

Proč se tvrzení c) věty 13.24 říká princip argumentu? Už jsme jednou podobnou úvahu prováděli v souvislosti s indexem bodu vzhledem k uzavřené

křivce. Bylo to v odstavci 13.1.4 za příkladem 13.11. Vrátime-li se k této úvaze, uvidíme, že integrál po křivce Γ z logaritmické derivace funkce $f(z)$, tj. $\int_{\Gamma} (f'(z)/f(z)) dz$, udává změnu argumentu funkce $f(z)$ při jednom oběhu křivky Γ v kladném smyslu. Tvzení c) věty 13.24 tak říká, že tato změna argumentu je rovna rozdílu počtu kořenů a počtu pólů (včetně násobnosti) meromorfní funkce $f(z)$ v dané oblasti, samozřejmě za podmínky splnění předpokladů věty. Je-li Γ jednorozměrný singulární řetězec, sečtou se všechny příspěvky ke změně argumentu funkce $f(z)$ pocházející od jednotlivých křivek, jejichž formální, součtem je řetězec Γ .

13.3.4 Reziduová věta — účinný nástroj pro výpočet reálných integrálů

Tento odstavec je čistě praktický. Ukazuje možnosti použití věty o reziduích pro výpočet reálných integrálů různých typů. Je však třeba zdůraznit, že se jedná o ukázky, nikoli o nějaké „univerzální recepty“, jak reziduovou větu při výpočtech reálných integrálů aplikovat. Ukázky s komentáři mohou samozřejmě přispět k proniknutí do podstaty aplikace reziduové věty, v žádném případě však nemohou nahradit praktickou zkušenost, kterou čtenář může získat jedině tím, že vypočte řadu desítek různých integrálů.

Často se setkáváme s integrály Riemannova typu, ať již vlastními či nevlastními, v nichž je integrandem spojitá funkce reálné proměnné. Zdá se, že v takovém případě nemůže být výpočet problémem. Ke spojitě funkci přece existuje funkce primitivní (jak jsme se přesvědčili již v prvním dílu, odstavce 2.3.2, věta 2.8). Stačí ji najít a v případě vlastního integrálu dosadit meze (Newtonova-Leibnizova formule, první díl, odstavec 2.3, vztah (2.48)), v případě integrálu nevlastního spočítat příslušné limity. Jenže věc není tak jednoduchá, jak se zdá. Nalezení primitivní funkce totiž může být problémem. Jsou-li však integrační obor a integrovaná funkce vhodné pro převod integrálu do komplexního oboru, není třeba primitivní funkci vůbec hledat. Tato situace je častá u nevlastních integrálů druhého druhu (tj. v nekonečných mezích, viz například Dodatek K v prvním dílu), kdy absolutní hodnota integrované funkce rychle klesá „vzdaluje-li se“ proměnná směrem k nekonečnu. Objevuje se však i u integrálů vlastních, na intervalech $[0, 2k\pi]$, které bývají obory parametrů při parametrizaci kružnic, resp. jiných jednoduchých uzavřených křivek.

Zdá se však, že nejlepší bude přejít rovnou k typickým ukázkám.

Příklad 13.34: Integrály na intervalech $[0, 2k\pi]$

počítejme vlastní reálný integrál

$$I = \int_0^{2\pi} \pi \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2}, \quad 0 < p < 1.$$

Netrapme se problémem, zda a jak hledat primitivní funkci a rovnou zvažme, jak by tento integrál mohl souviset s nějakým integrálem v komplexním oboru, pro jehož výpočet by se dala použít reziduová věta. Aby se tato věta vůbec dala použít, musíme integrovat po uzavřené křivce či uzavřeném jednorozměrném singulárním řetězci. Budeme-li proměnnou x považovat za parametr při parametrizaci uzavřené křivky v Gaussově rovině, může být touto křivkou třeba jednotková kružnice $\mathcal{K} : z = e^{ix}$. Tohle je docela šikovná substituce, neboť umožňuje snadno vyjádřit i funkci $\cos x$, vystupující v integrandu, konkrétně

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-iz}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad dx = -i \frac{dz}{z}$$

Pak

$$I = \int_{\mathcal{K}} -i \frac{dz}{z(1 - pz - pz^{-1} + p^2)} = \int_{\mathcal{K}} \frac{idz}{pz^2 - (p^2 + 1)z + p}.$$

Určíme póly integrované funkce. Jsou jimi kořeny polynomu ve jmenovateli. Platí $pz^2 - (p^2 + 1)z + p = p(z - p)(z - p^{-1})$. Integrovaná funkce má dva jednonásobné póly $z_1 = p$ a $z_2 = p^{-1}$. Pól $z_1 = p$ leží uvnitř kružnice \mathcal{K} , pól $z_2 = p^{-1}$ vně. Plyne to z předpokladu $0 < p < 1$. Pak

$$I = \int_{\mathcal{K}} f(z) dz = \int_{\mathcal{K}} i \frac{dz}{p(z - p)(z - p^{-1})} = 2\pi i \left(\text{Ind}_{\mathcal{K}}(p) \text{res } f(p) + \text{Ind}_{\mathcal{K}}(p^{-1}) \text{res } f(p^{-1}) \right).$$

Platí $\text{Ind}_{\mathcal{K}}(p) = 1$, $\text{Ind}_{\mathcal{K}}(p^{-1}) = 0$, stačí proto spočítat pouze reziduum funkce v bodě $z_1 = p$. Pro výpočet použijeme vztah (13.44),

$$\text{res } f(p) = \lim_{z \rightarrow p} \left[(z - p) \frac{i}{p(z - p)(z - p^{-1})} \right] = \frac{i}{p(p - p^{-1})} = \frac{ip}{p^2 - 1}.$$

Pro integrál nakonec dostáváme

$$I = 2\pi i \frac{ip}{p^2 - 1} = \frac{2\pi p}{1 - p^2}.$$

primitivní funkci k integrandu původního reálného integrálu jsme skutečně nepotřebovali.

Příklad 13.35: ... a ještě jeden podobný ...

S integrálem

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(p + q \cos x)^2}, \quad 0 < q < p$$

byste si asi poradili sami, ale pro procvičení jej vypočteme. Substituce bude stejná jak v předchozím příkladu, tj.

$$\mathcal{K} : z = e^{ix}, \quad \cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad dx = -\frac{dz}{iz},$$

$$I = \int_{\mathcal{K}} \frac{-i dz}{\left[p + \frac{q}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^2}.$$

Integrovaná funkce

$$f(z) = \frac{-i dz}{\left[p + \frac{q}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^2} = \frac{-4iz}{q^2(z - z_1)(z - z_2)},$$

$$z_1 = \frac{1}{q} \left(-p + \sqrt{p^2 - q^2} \right), \quad z_2 = \frac{1}{q} \left(-p - \sqrt{p^2 - q^2} \right).$$

Oba póly funkce $f(z)$ jsou dvojnásobné. Vzhledem k nerovnosti $0 < q < p$ leží uvnitř kružnice \mathcal{K} pouze pól z_1 , uplatní se proto jen reziduum funkce $f(z)$ v tomto bodě. Vypočteme je (závěrečné úpravy proveďte sami):

$$\operatorname{res} f(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[(z - z_1)^2 \frac{-4iz}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} \right] = \dots = \frac{-ip}{(p^2 - q^2)^{3/2}},$$

$$I = 2\pi i \operatorname{res} f(z_1) = \frac{2\pi p}{(p^2 - q^2)^{3/2}}.$$

Příklad 13.36: ... a jeden s malou obměnou

Výpočet integrálu

$$I = \int_0^{\pi} \cotg(x - a) dx, \quad a = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0,$$

je také podobný předchozím, jen trochu složitější. Má-li proměnná x parametrizovat celou kružnici, je třeba volit substituci ve tvaru $z = Ke^{it}$, kde $t = 2x$ (proběhne-li x interval $[0, \pi]$, proběhne t interval $[0, 2\pi]$, jak potřebujeme).

13.3. CO UDĚLÁ MALÁ DÍRKA V OBORU HOLOMORFNOSTI ANEB SINGULARITY 149

Aby se funkce $\cotg(x-a)$ dala vyjádřit co nejjednodušeji, zvolme $K = e^{-ia}$. Pak

$$\mathcal{K} : z = e^{2i(x-a)} = e^{2\beta} e^{2i(x-\alpha)}, \quad dx = \frac{-i dz}{2z},$$

$$\cotg(x-a) = \frac{\cos x - a}{\sin x - a} = \text{upravte sami} = i \frac{z+1}{z-1},$$

$$I = \int_{\mathcal{K}} \frac{z+1}{2z(z-1)},$$

Integrovaná funkce $f(z) = \frac{z+1}{2z(z-1)}$ má dva jednonásobné póly $z_1 = 0$ a $z_2 = 1$, jejichž poloha vzhledem ke kružnici \mathcal{K} závisí na hodnotě β .

- Pro $e^{2\beta} > 1$ leží oba póly uvnitř integrační kružnice a rezidua v nich jsou

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \frac{z+1}{2z(z-1)} \right] = -1, \quad \operatorname{res} f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{z+1}{2z(z-1)} \right] = 2.$$

Pro integrál dostaneme

$$I = 2\pi i [\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(0) \operatorname{res} f(0) + \operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(1) \operatorname{res} f(1)] = i\pi.$$

- Pro $e^{2\beta} < 1$ leží uvnitř integrační kružnice pouze pól $z_1 = 0$, integrál má hodnotu

$$I = 2\pi i \operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(0) \operatorname{res} f(0) = -i\pi.$$

Pro $\beta = 0$ integrál diverguje.

Věnujme se nyní reálným nevlastním integrálům druhého druhu. Často potřebujeme spočítat integrály tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \alpha x \, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x \, dx, \quad (13.48)$$

kde $R(x)$ je racionální lomená funkce. Speciálním případem je situace, kdy chceme v daných mezích integrovat samotnou funkci $R(x)$, tj. klademe $\alpha = \frac{\pi}{2}$, resp. $\alpha = 0$ v prvním, resp. druhém z integrálů (13.48). Pokud má jmenovatel funkce $R(x)$ kořeny na reálné ose, je třeba chápat integrály ve smyslu hlavní hodnoty. Aby bylo zaručeno, že integrály konvergují, stačí předpokladat, že funkce $R(x)$ je ryze lomená se stupněm čitatele alespoň o dvě nižším než je stupeň jmenovatele. Na příkladech uvidíme, jak tento předpoklad funguje. Je-li integrovaná funkce sudá, je snadné spočítat i integrál

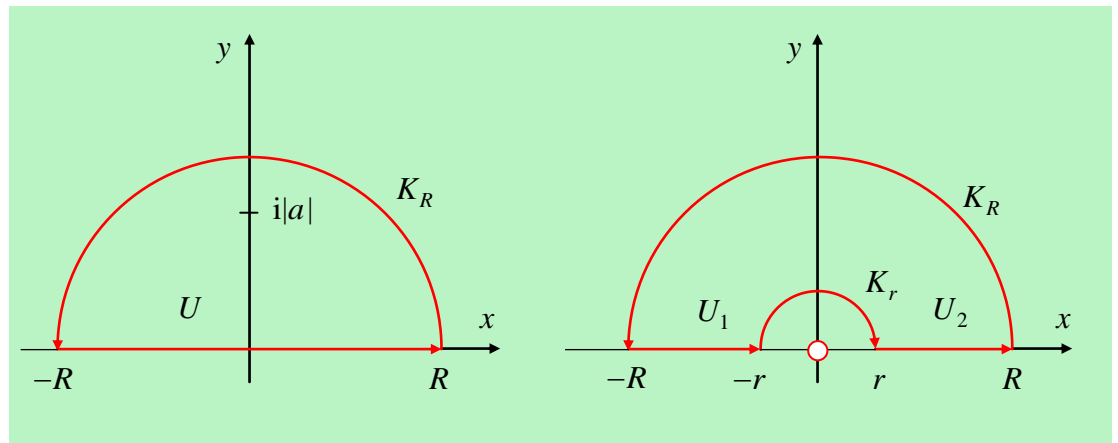
v mezích od $-\infty$ do nuly, nebo od nuly do ∞ . Způsob výpočtu integrálů typu (13.48) opět ukážeme na příkladech, neboť nějaký univerzální postup lze těžko popsat, jak jsme již avizovali.

Příklad 13.37: Nevlastní integrál z racionální lomené funkce

Počítejme integrál z racionální lomené funkce splňující výše uvedený předpoklad o stupních čitatele a jmenovatele,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0.$$

V tomto příkladu se rovnou nabízí přechod proměnné do komplexního oboru záměnou $x \rightarrow z$. Funkce $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^3}$ je v \mathbf{C} meromorfní a má trojnásobné póly $z_1 = i|a|$ a $z_2 = -i|a|$. Abychom mohli použít reziduovou větu, musíme funkci $f(z)$ integrovat po uzavřené křivce. Ta by ovšem měla být vhodně zvolena tak, aby obsahovala reálnou osu. Samozřejmě, nemůže ji obsahovat celou. Můžeme však jako součást integrační křivky zvolit úsečku \mathcal{U} spojující body $(-R, 0)$ a $(R, 0)$, $R > 0$, a pak provést limitní přechod $R \rightarrow \infty$. Křivku uzavřeme půlkružnicí \mathcal{K}_R se středem v bodě $z_0 = 0$ a poloměrem R . Situaci ukazuje obrázek 13.23 vlevo. Uvnitř integrační křivky $\mathcal{C} = \mathcal{U} + \mathcal{K}_R$, je-li



Obrázek 13.23: Integrační křivky k příkladům 13.37 až 13.39.

dostatečně velká, tj. $R > |a|$, leží pouze pól $z_1 = i|a|$. Reziduum funkce $f(z)$

v něm je

$$\operatorname{res} f(i|a|) = \lim_{z \rightarrow i|a|} \left[\frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (z - i|a|)^3 f(z) \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i|a|} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z + i|a|)^3} \right) = -\frac{3i}{16|a|^5},$$

(podrobný výpočet, tj. derivování a úpravu, proveďte sami). Protože nakonec budeme provádět limitní přechod $R \rightarrow \infty$, reziduum funkce $f(i|a|)$ do integrálu přispěje. Pro integrál z funkce $f(z)$ po křivce \mathcal{C} platí

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{U}} f(z) dz + \int_{\mathcal{K}_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\mathcal{K}_R} f(z) dz.$$

V limitě $R \rightarrow \infty$ představuje první z integrálů hledanou hodnotu I . Limitou druhého integrálu je nula. Dokážeme to pomocí odhadu. Půlkružnici \mathcal{K}_R parametrizujeme vztahem $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $dz = iRe^{it} dt$. Vzhledem k zamýšlenému limitnímu přechodu $R \rightarrow \infty$ provedeme odhad pro $R > a$. Platí

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{K}_R} \frac{1}{(z^2 + a^2)^3} dz \right| &= \left| \int_0^\pi iR \frac{e^{it}}{(R^2 e^{2it} + a^2)^3} dt \right| \leq \int_{\mathcal{K}_R} \left| iR \frac{e^{it}}{(R^2 e^{2it} + a^2)^3} \right| dt = \\ &= \frac{1}{R^5} \int_0^\pi \frac{dt}{\left| \left(1 + \frac{a^2}{R^2} e^{-2it} \right) \right|^3} \leq \frac{1}{R^5} \int_0^\pi \frac{dt}{\left(1 - \frac{|a|^2}{R^2} \right)^3} \rightarrow 0 \text{ pro } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Uvědomili jste si dobře poslední krok odhadu? Proč je ve jmenovateli zlomku najednou znaménko minus? Není to překlep. Pro $t = \frac{\pi}{2}$, nebo $t = \frac{3\pi}{2}$ má jmenovatel hodnotu $1 - \frac{|a|^2}{R^2}$, která je minimem množiny absolutních hodnot výrazu $1 + \frac{a^2}{R^2} e^{2it}$. Číslo $\frac{1}{1 - \frac{|a|^2}{R^2}}$ je proto horním odhadem integrandu.

Mohli jsme také postupovat přímo výpočtem limity druhého integrálu, závislého na R jako na parametru, s přesunem limitního přechodu $R \rightarrow \infty$ za integrál. Někdy se však bez odhadů neobejdeme, proto je třeba vědět, jak je provádět.

Nyní již náš integrál snadno dopočteme. Podle reziduové věty je

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^3} = 2\pi i \operatorname{res} f(i|a|) = \frac{3\pi}{8|a|^5}.$$

Současně díky odhadu integrálu z funkce $f(z)$ po půlkružnici \mathcal{K}_R víme, že je to právě hodnota našeho reálného nevlastního integrálu I , tj.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{3\pi}{8|a|^5}.$$

A co kdybychom potřebovali hodnotu integrálu z téže funkce, ale pouze v mezích $[0, \infty)$? Protože je integrovaná funkce sudá, je hodnota takového integrálu polovinou hodnoty I , stejně jako integrál z funkce $f(x)$ v mezích $(-\infty, 0]$.

Příklad 13.38: Integrál z racionální lomené funkce „modulované“ kosinem
Vypočteme integrál

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx, \quad a \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0.$$

Pozor, meze integrálu jsou $[0, \infty)$. Integrand je však sudou funkcí, proto je roven polovině integrálu z této funkce v mezích $(-\infty, \infty)$. Jistě tušíte, že postup při výpočtu tohoto integrálu bude velice podobný jako v příkladu 13.37, dokonce integrační křivka bude stejná. Jen si musíme poradit s volbou funkce $f(z)$. Protože stupeň čitatele racionální lomené funkce v integrandu je tentokrát *právě* o dvě větší než stupeň jmenovatele (v předchozím příkladu byla v rozdílu stupňů značná „rezerva“), bude ve hře také správné provedení odhadu po půlkružnici \mathcal{K}_R . Podle reziduové věty bude platit

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\mathcal{K}_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in \mathbf{C}_h} \operatorname{res} f(z_0),$$

kde jsme symbolem \mathbf{C}_h označili horní polorovinu Gaussovy roviny.

Jak tedy zvolit funkci $f(z)$? Tak, abychom její restrikcí na reálnou osu dostali funkci, která bude integrand nějak šikovně zahrnovat. Okamžitým nápadem by zřejmě mohla být volba $f_1(z) = \frac{\cos z}{z^2 + a^2}$. Tato funkce nabývá na reálné ose přímo hodnot integrandu. Někomu se může zdát vhodnější volba $f_2(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$, neboť na reálné ose pro ni bude platit

$$f_2(x) = \frac{\cos x}{x^2 + a^2} + i \frac{\sin x}{x^2 + a^2}, \quad \int_{-R}^R f_2(x) dx = \int_{-R}^R \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx.$$

Imaginární část funkce $f(x)$ je totiž lichou funkcí a její integrál v mezích $(-\infty, \infty)$ je proto nulový. Je mezi oběma možnostmi volby funkce $f(z)$ nějaký rozdíl? Funkce $f_1(z)$ i $f_2(z)$ mají jednonásobné póly v bodech $i|a|$ a $-i|a|$, z nichž se při volbě integrační křivky na obrázku 13.23 vlevo uplatní pouze ten první, ležící v horní polorovině Gaussovy roviny. Vypočteme rezidua funkcí $f_1(z)$ a $f_2(z)$ v tomto pólu, a pro účely procvičení i v bodě $-i|a|$, ležícím v dolní polorovině. Předpokládejme, bez újmy na obecnosti výsledku, že $a > 0$, abychom nemuseli stále psát absolutní hodnotu. Dostaneme postupně

$$\operatorname{res} f_1(ia) = \lim_{z \rightarrow ia} \left[(z - ia) \frac{\cos z}{z^2 + a^2} \right] = \frac{\cos ia}{2ia} = \frac{e^{-a} + e^a}{4ia} = \frac{-i \cosh a}{2a},$$

$$\operatorname{res} f_1(-ia) = \lim_{z \rightarrow -ia} \left[(z + ia) \frac{\cos z}{z^2 + a^2} \right] = -\frac{\cos ia}{2ia} = -\frac{e^{-a} + e^a}{4ia} = \frac{i \cosh a}{2a},$$

$$\operatorname{res} f_2(ia) = \lim_{z \rightarrow ia} \left[(z - ia) \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \right] = \frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{e^{-a}}{4ia} = \frac{-ie^{-a}}{2a},$$

$$\operatorname{res} f_2(-ia) = \lim_{z \rightarrow -ia} \left[(z + ia) \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \right] = -\frac{e^a}{2ia} = \frac{ie^a}{2a}.$$

A je zde dilema. Rezidua funkcí $f_1(z)$ a $f_2(z)$ v jejich společných pólech (konkrétně nám jde o pól ia) jsou různá. Přece nemůžeme dostat dva různé výsledky téhož integrálu. Co je tedy správně? Problém může být (a bude) v limitní hodnotě integrálu po půlkružnici \mathcal{K}_R pro $R \rightarrow \infty$. Provedme příslušné odhady podobně jako v příkladu 13.37. Půlkružnici parametrizujeme vztahem $z = Re^{it} = R(\cos t + i \sin t)$, $dz = iRe^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Postupným dosazením dostaneme pro funkci $f_1(z)$

$$\int_{\mathcal{K}_R} \frac{\cos z}{z^2 + a^2} dz = \frac{iR}{2} \int_0^\pi \frac{(e^{iR(\cos t + i \sin t)} + e^{-iR(\cos t + i \sin t)})}{R^2 e^{2it} + a^2} e^{it} dt =$$

$$\frac{i}{2} \int_0^\pi \left[\frac{e^{-R \sin t}}{R} \frac{e^{i(t + R \cos t)}}{e^{2it} + \frac{a^2}{R^2}} + \frac{e^{R \sin t}}{R} \frac{e^{i(t - R \cos t)}}{e^{2it} + \frac{a^2}{R^2}} \right] dt.$$

Hned vidíme, že druhý sčítanec v integrandu je pro $R \rightarrow \infty$ vinou faktoru $\frac{e^{R \sin t}}{R}$ neomezenou funkcí, neboť pro $t \in [0, \pi]$ je $\sin t > 0$. (Pokles s růstem jmenovatele tohoto faktoru nepomůže, neboť jej růst exponenciální funkce v čitateli „přebije“.) Integrál z funkce $f_1(z)$ po půlkružnici \mathcal{K}_R tedy není v limitě $R \rightarrow \infty$ nulový, jak bychom si přáli. Reziduová věta samozřejmě platí

pro libovolnou půlkružnici \mathcal{K}_R , ale pro výpočet zadaného reálního integrálu I se volba funkce $f_1(z)$ nehodí.

Zkusme, jak dopadne odhad integrálu po půlkružnici \mathcal{K}_R , $R \rightarrow \infty$ pro funkci $f_2(z)$. Podobně jako v příkladu 13.37 již předjímáme limitní přechod $R \rightarrow \infty$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme $R > a$. Dostaneme rovnou

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{K}_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{i(R \cos t + i \sin t)}}{R^2 e^{2it} + a^2} iR e^{it} dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{i(R \cos t + i \sin t)}}{R^2 e^{2it} + a^2} iR e^{it} \right| dt = \int_0^\pi \frac{1}{R} \frac{e^{-R \sin t}}{|e^{2it} + \frac{a^2}{R^2}|} dt \leq \int_0^\pi \frac{e^{-R \sin t}}{R \left| 1 - \frac{a^2}{R^2} \right|} dt. \end{aligned}$$

Limita posledního integrálu pro $R \rightarrow \infty$ je nulová, totéž platí pro integrál z funkce $f_2(z)$ po půlkružnici \mathcal{K}_R . Při přechodu integrace do komplexního oboru je tedy vhodná volba funkce $f_2(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$ a platí (pro $R > a$)

$$\int_{\mathcal{C}} = \int_{-R}^R \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x^2 + a^2} dx + \int_{\mathcal{K}_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi \operatorname{res} f_2(ia).$$

S uvážením skutečnosti že $\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x^2 + a^2} dx = 0$ a v limitě pro $R \rightarrow \infty$ dostaneme nakonec

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + z^2} dx = 2\pi i \left(\frac{-ie^{-a}}{2a} \right) = \frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

A je zde další otázka: proč nevedeme půlkružnici o poloměru R , $R \rightarrow \infty$, v dolní polorovině Gaussovy roviny? Pak by se uplatnilo reziduum v bodě $-ia$ a zase bychom dostali jiný výsledek! Odpověď je i tentokrát jednoduchá. Vzhledem k tomu, že kružnice v dolní polorovině by byla parametrizována vztahem $z = R e^{it}$, $t \in [0, -\pi]$, nebyla by limita integrálu z funkce $f_2(z)$ po této kružnici pro $R \rightarrow \infty$ nulová. Reziduová věta by sice platila, ale k výpočtu našeho reálního integrálu by nám nepomohla.

Příklad 13.39: Integrál z funkce *sinc*

V optice se často vyskytuje výraz typu $\frac{\sin x}{x}$, takzvaná funkce *sinc* proměnné x , a je třeba spočítat z ní integrál v mezích $[0, \infty)$, tj.

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Protože je integrovaná funkce sudá (čitatel i jmenovatel jsou liché funkce), můžeme tento integrál získat jako polovinu integrálu v mezích $(-\infty, \infty)$. K integraci v oboru komplexní proměnné se nabízí funkce $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, neboť imaginární část její restrikce na reálnou osu je právě náš integrand $\frac{\sin x}{x}$. Funkce $f(z)$ má však singularitu v bodě $z_0 = 0$, jíž se proto integrační cesta musí vyhnout. Budeme integrovat po křivce na obrázku 13.23 a pak provedeme limitní přechody $R \rightarrow \infty$ a $r \rightarrow 0$. V oblasti ohraničené křivkou \mathcal{C} , složenou ze dvou úseček a dvou půlkružnic, jak ukazuje obrázek 13.23, nemá funkce $f(z)$ žádné singularity. Podle reziduové věty, ale i podle věty Cauchyovy, je integrál z funkce $f(z)$ po křivce \mathcal{C} nulový,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{-R}^{-r} \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx + \int_{\mathcal{K}_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx + \int_{\mathcal{K}_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\mathcal{K}_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\mathcal{K}_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \end{aligned}$$

Při úpravě integrálu jsme využili skutečnosti, že funkce $\frac{\cos x}{x}$ je lichá, takže její integrál v mezích $[-R, -r]$ je roven záporně vzatému integrálu v symetricky položených mezích $[r, R]$. Limita

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} i \left[\int_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x} dx + \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx \right]$$

je rovna hlavní hodnotě integrálu $2I$, tj.

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = 2\mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Zbývá určit, resp. odhadnout integrály po půlkružnicích \mathcal{K}_R a \mathcal{K}_r . Jistě bychom uvítali, kdyby integrál po „velké“ půlkružnici \mathcal{K}_R byl nulový. K tomu, abychom to mohli rozhodnout hned, by stačilo, aby stupeň jmenovatele racionální lomené funkce tvořící faktor u e^{iz} byl alespoň o dvě větší než stupeň čitatele. V našem případě je $R(z) = \frac{1}{z}$, jde tedy pouze o rozdíl jednoho stupně mezi čitatelem a jmenovatelem. To však ještě neznamená, že by integrál nemohl být nulový. Odhad ovšem musíme pořádně provést. Budeme integrovat per partes:

$$\int_{\mathcal{K}_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\frac{ie^{iz}}{z} \Big|_{-R}^R - \int_{\mathcal{K}_R} \frac{ie^{iz}}{z^2} dz = \frac{e^{iR} - e^{-iR}}{R} - \int_{\mathcal{K}_R} \frac{ie^{iz}}{z^2} dz.$$

Limita prvního sčítance pro $R \rightarrow \infty$ je nulová (funkce v čitateli je omezená, konkrétně $|e^{iR} - e^{-iR}| \leq 2$ pro libovolné R), v druhém sčítanci je stupeň jmenovatele racionální lomené funkce v integrandu právě o dvě větší než stupeň čitatele, a to již stačí k tomu, aby integrál byl v limitě pro $R \rightarrow \infty$ nulový.

Pozn.: Poněkud „přímější“ odhad (bez integrace per partes) je třeba tento: parametrizujeme půlkružnici \mathcal{K}_R obvyklým způsobem, $\mathcal{K}_R : z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, a počítáme

$$\left| \int_{\mathcal{K}_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{i(R \cos t + iR \sin t)}}{R e^{it}} dt \right| = \int_0^\pi \left| \frac{e^{i(R \cos t + iR \sin t)}}{R e^{it}} \right| dt =$$

$$\frac{1}{R} \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = \frac{1}{R} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-R \sin t} dt \right).$$

Proč jsme takto integrál rozdělili? Protože v intervalech $[0, \frac{\pi}{2}]$ a $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ můžeme provést vhodný odhad funkce $\sin t$ lineární funkcí, avšak v každém z obou intervalů jinou. Konkrétně je

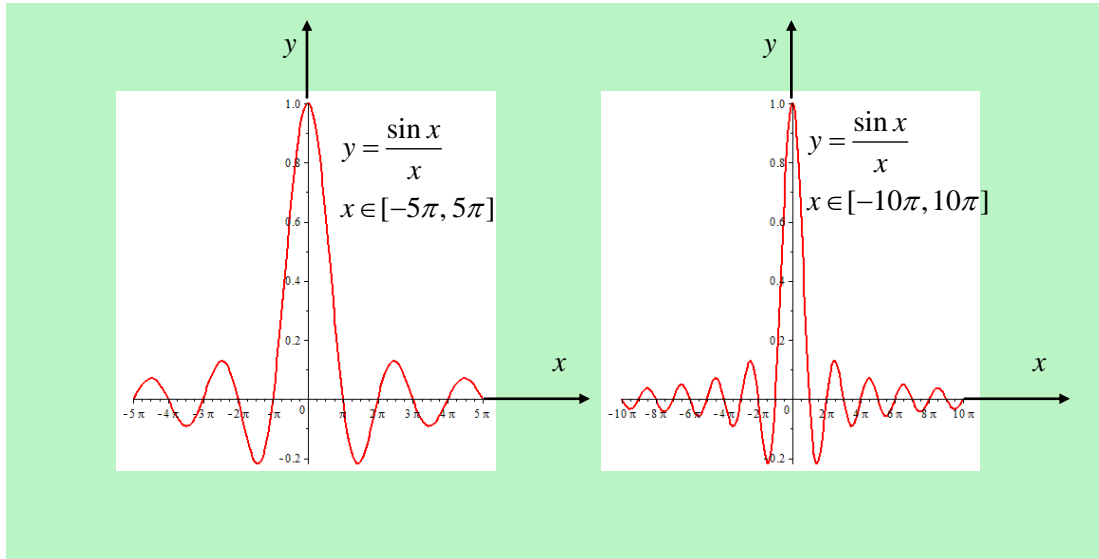
$$\sin t \geq \frac{2t}{\pi} \text{ pro } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin t \geq -\frac{2t}{\pi} + 1 \text{ pro } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

neboť graf funkce $\sin t$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ leží pod úsečkou spojující body $O = [0, 0]$ a $A = [\frac{\pi}{2}, 1]$ a na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ pod úsečkou spojující body $A = [\frac{\pi}{2}, 1]$ a $B = [\pi, 0]$. Dokončíme odhad integrálu:

$$\left| \int_{\mathcal{K}_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{1}{R} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2Rt}{\pi}} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{(\frac{2Rt}{\pi} - R)} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{R} \left[-\frac{\pi}{2R} (e^{-R} - 1) + \frac{\pi}{2R} e^{-R} (e^R - 1) \right] = \frac{\pi}{R^2} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0 \text{ pro } R \rightarrow \infty.$$

Integrál z funkce $\frac{e^{iz}}{z}$ po „malé“ půlkružnici \mathcal{K}_r v limitě $r \rightarrow \infty$ nepochybně nulový nebude. Je to vidět z tvaru integrované funkce, jejíž graf je na obrázku 13.24, a z geometrické představy o integrálu I jako o hodnotě udávající plošný obsah útvaru pod grafem (se započtením znamének — co je pod osou x , je záporné). Kdyby totiž byl integrál z funkce $\frac{e^{iz}}{z}$ po „malé“ půlkružnici \mathcal{K}_r v limitě $r \rightarrow 0$ nulový, musel by být nulový i integrál I . Z grafu na obrázku

Obrázek 13.24: K příkladu 13.39: graf funkce $\text{sinc } x$.

13.24 je hned vidět, že tomu tak není: velikosti plochy pod jednotlivými oblouky grafu v intervalech $[k\pi, (k+1)\pi]$ mezi jeho průchody nulovými body se neustále zmenšují.

Integrál po „malé“ kružnici vypočteme tak, že integrovanou funkci rozvineme v Laurentovu řadu a budeme ji integrovat člen po členu. Platí

$$\int_{\mathcal{K}_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\mathcal{K}_r} \frac{1}{z} \left[1 + iz + \frac{1}{2}(iz)^2 + \frac{1}{3!}(iz)^3 + \dots \right] dz = \int_{\mathcal{K}_r} \frac{dz}{z} + \int_{\mathcal{K}_r} \psi(z) dz,$$

kde $\psi(z)$ je funkce regulární v \mathbf{C} , tedy i v bodě $z_0 = 0$. Proto je jistém kruhovém okolí $B(0, \varrho)$ ohraničená. Vzhledem k avizovanému limitnímu přechodu $r \rightarrow 0$ můžeme volit $r < \varrho$. Pak existuje číslo $M > 0$ tak, že na půlkružnici \mathcal{K}_r platí $|\psi(z)| < M$. Odtud

$$\left| \int_{\mathcal{K}_r} \psi(z) dz \right| \leq M\pi r \rightarrow 0 \text{ pro } r \rightarrow 0.$$

Stačí už je vypočítat integrál z funkce $\frac{1}{z}$ po \mathcal{K}_r . Půlkružnici \mathcal{K}_r parametrizujeme vztahem $z = r e^{it}$, $t \in [\pi, 0]$. Pak

$$\int_{\mathcal{K}_r} \frac{1}{z} dz = \int_{\pi}^0 \left(\frac{1}{r} e^{-it} \right) (i r e^{it}) dt = -i\pi.$$

Celkově nakonec dostáváme

$$2i\mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - i\pi = 0 \implies \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Tento důležitý integrál ještě zobecníme. Označme

$$I = \int_0^{\infty} g(x) \frac{\sin x}{x} dx.$$

Úvahy, které kolem něj povedeme, jsou velmi podobné jako pro předchozí jednodušší případ, kdy $g(t) = 1$. Integrovanou funkci zvolme ve tvaru $g(z) \frac{e^{iz}}{z}$ a předpokládejme, že funkce $g(z)$ je holomorfní a navíc je sudá. To abychom mohli zvolit integrační křivku jako v předchozím případě, podle obrázku 13.23. Platí (integrál je chápán ve smyslu hlavní hodnoty)

$$2I = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^{-r} g(x) \frac{\sin x}{x} dx + \int_r^R g(x) \frac{\sin x}{x} dx \right].$$

Je-li funkce $g(z)$ v horní polorovině Gaussovy roviny ohraničená, tj. existuje „univerzálně“ číslo M tak, že v této polorovině je $|g(z)| \leq M$, můžeme při odhadu integrálu po půlkružnici \mathcal{K}_R přesně sledovat odhad, který jsme prováděli v případě funkce $\frac{e^{iz}}{z}$, a dostaneme

$$\left| \int_{\mathcal{K}_R} g(z) \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{M\pi}{R^2} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0 \text{ pro } R \rightarrow \infty.$$

Obdobně provedeme výpočet integrálu po půlkružnici \mathcal{K}_r : $z = r e^{it}$. Protože je funkce $g(z) e^{iz}$ holomorfní, rozvineme ji v Taylorovu řadu se středem v bodě $z_0 = 0$, $g(z) e^{iz} = g(0) e^0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$. Pak

$$g(z) \frac{e^{iz}}{z} = \frac{g(0)}{z} + \psi(z), \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1},$$

Funkce $\psi(z)$ je holomorfní, a proto je v jistém okolí $B(0, \varrho)$ ohraničená, tj. $|\psi(z)| \leq M$ pro všechna $z \in B(0, \varrho)$. Zvolíme-li $r < \varrho$ (což vzhledem k pozdějšímu limitnímu přechodu $r \rightarrow 0$ udělat můžeme)

$$\left| \int_{\mathcal{K}_r} \psi(z) dz \right| \leq M\pi r \rightarrow 0 \text{ pro } r \rightarrow 0.$$

Zbývá určit limitu integrálu $\int_{\mathcal{K}_r} \frac{g(0)}{z} dz$ pro $r \rightarrow 0$. V případě funkce $g(z) = 1$ jsme ji už určili, byla rovna $-i\pi$. Celkem je

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathcal{K}_r} g(z) \frac{e^{iz}}{z} dz = -i\pi g(0),$$

a konečně

$$i\mathcal{P} \int_0^{\infty} g(x) \frac{\sin x}{x} dx - i\frac{\pi}{2}g(0) = 0 \implies \mathcal{P} \int_0^{\infty} g(x) \frac{\sin x}{x} dx = g(0)\frac{\pi}{2}.$$

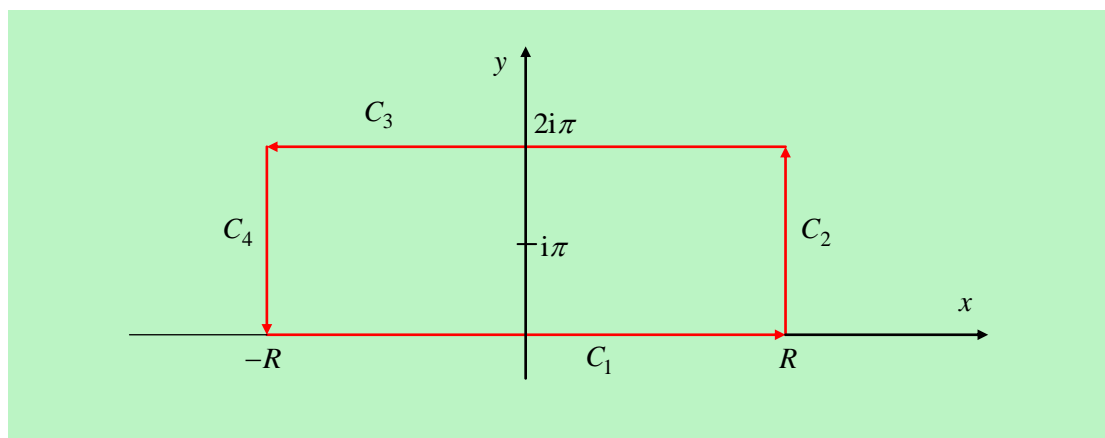
Je to nanejvýš zajímavý výsledek a později si jej znovu připomeneme. Funkce $\operatorname{sinc} x$ při integraci funkce $g(x) \operatorname{sinc} x$ na intervalu $[0, \infty)$ „vymaže“ všechny hodnoty $g(x)$ s výjimkou $g(0)$.

Příklad 13.40: Trochu jiná integrační cesta

V předchozích dvou příkladech mohl vzniknout dojem, že při výpočtu reálných nevlastních integrálů přechodem do komplexního oboru musí být součástí integrační křivky část „nekonečné“ kružnice. Tak jednoduché to není. Je třeba se řídit typem integrované funkce a předpokládanými odhady. Zkusme integrál

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx, \quad a \in \mathbf{R}, \quad 0 < a < 1$$

Jako integrovaná funkce se nabízí přímo funkce $f(z)$, vzniklá z integrandu integrálu I jen záměnou $x \rightarrow z$. Na první pohled vidíme, že má singularitu (konkrétně jde o jedno násobný pól — umíte to zdůvodnit?) v bodě $z_0 = i\pi$. Tak proč bychom nemohli integrovat po křivce za obrázku 13.23 vlevo? Jednoduše proto, že bod $z_0 = i\pi$ není singularitou jedinou. jmenovatel zlomku, tj. výraz $1 + e^z$ je nulový v bodech $z_k = z_0 + 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$, takže singularity jsou „rovnoměrně rozesety“ po imaginární ose. (Tomu se ani nedivíme,



Obrázek 13.25: K příkladu 13.40.

neboť funkce e^z je periodická s ryze imaginární periodou $2\pi i$.) Zvětšováním půlkružnice \mathcal{K}_R bychom „přibírali do hry“ další a další a nikdy bychom je neobsáhli všechny. Zvolíme proto integrační křivku tak, aby bylo možné ji podél reálné osy „rozprostít“ od $-R$ po R , $R \rightarrow \infty$, ale tak, aby uvnitř ní ležel jen konečný počet singularit, třeba jen jedna. „Šikovou“ křivku vidíme na obrázku 13.25. Podle věty o reziduích platí pro libovolné R

$$\int_C f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{C}_i} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = 2\pi i \operatorname{res} f(i\pi).$$

13.3. CO UDĚLÁ MALÁ DÍRKA V OBORU HOLOMORFNOSTI ANEB SINGULARITY 161

Počítejme integrály po jednotlivých křivkách \mathcal{C}_1 až \mathcal{C}_4 a jejich limity pro $R \rightarrow \infty$. Nezapomněme, že $e^{2\pi i} = 1$.

křivka	parametrizace	integrál	limita
\mathcal{C}_1	$z = t, z \in [-R, R]$	$\int_{-R}^R \frac{e^{at}}{1+e^t} dt$	I
\mathcal{C}_2	$z = R + 2\pi it, t \in [0, 1]$	$\int_0^1 \frac{e^{a(R+2\pi it)}}{1+e^{R+it}} dt$	0
\mathcal{C}_3	$z = t + 2\pi i, z \in [R, -R]$	$\int_R^{-R} \frac{e^{a(t+2\pi i)}}{1+e^t} dt$	$-I \cdot e^{2a\pi i}$
\mathcal{C}_4	$z = -R + 2\pi it, t \in [1, 0]$	$\int_1^0 \frac{e^{a(-R+2\pi it)}}{1+e^{-R+2\pi it}} dt$	0

Vyjádření všech integrálů jejich limitní hodnoty po křivkách \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_3 pro $R \rightarrow \infty$ jsou zřejmé na první pohled. Abychom však věřili tomu, že limitní hodnoty integrálů po křivkách \mathcal{C}_2 a \mathcal{C}_4 jsou nulové, musíme provést odhady. Provedeme odhad pro křivku \mathcal{C}_2 , pro křivku \mathcal{C}_4 jej proveďte sami — je to velice podobné. Na křivce \mathcal{C}_2 platí

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a(R+2\pi it)}}{1 + e^{R+2\pi it}} \right| \leq \frac{|e^{a(R+2\pi it)}|}{|1 - |e^{R+2\pi i}|t||} = \frac{e^{aR}}{e^R - 1},$$

$$\left| \int_{\mathcal{C}_2} \frac{e^{az}}{1 + e^z} \right| \leq 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \int_0^1 dt = 2\pi \frac{e^{(a-1)R}}{1 - e^{-R}} \rightarrow 0 \text{ for } R \rightarrow \infty$$

V limitě $R \rightarrow \infty$ dostáváme

$$(1 - e^{2a\pi i}) = 2\pi i \operatorname{res} f(i\pi).$$

Musíme ještě spočítat reziduum. Protože se jedná o jednonásobný pól, je to jednoduše limita

$$\operatorname{res} f(i\pi) = \lim_{z \rightarrow i\pi} (z - i\pi) \frac{e^{az}}{1 + e^z} = \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{e^{az} + a(z - i\pi)e^{az}}{e^z} = -e^{ia\pi},$$

kteřou jsme spočítali pomocí L'Hospitalova pravidla. Nakonec dostáváme

$$I = 2\pi i \frac{-e^{ia\pi}}{1 - e^{2ia\pi}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Další příklady si zkuste vypočítat v rámci cvičení. Těch, které obsahuje Cvičení 13.3.5 je stále velmi málo na to, abyste získali potřebnou praxi v takových výpočtech. Sbírkou úloh, v nichž je takových příkladů množství, uvádíme v soupisu literatury.

13.3.5 Cvičení

1. Dokažte, že má-li funkce $f(z)$ v bodě $z_0 \neq \infty$ pól, platí $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.
2. Dokažte, že má-li funkce $f(z)$ v bodě $z_0 = \infty$ limitu ∞ , má v tomto bodě pól.

3. Proveďte podrobně výpočty všech limit v příkladu 13.26.

Návod: V případě výpočtu limity poslední ze zadaných funkcí v bodě $z_0 = \infty$ počítejte limitu $\lim_{\xi \rightarrow 0} F(\xi)$, kde $F(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$.

4. Dokažte vlastnosti a), b) a d) a jejich důsledky e) a f), uvedené ve větě 13.20.

5. Zapište izolované singularity následujících funkcí a určete jejich typ.

6. Při důkazu věty 13.17 (věta o jednoznačnosti) jsme definovali nulový bod (kořen) násobnosti m funkce $f(z)$. Dokažte následující tvrzení:

a) Bod $z_0 \in \mathbf{C}$ je m -násobným kořenem holomorfní funkce $f(z)$ právě tehdy, lze-li v jistém kruhovém okolí $B(z_0, r)$ bodu z_0 zapsat funkci $f(z)$ ve tvaru $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, kde φ je holomorfní v $B(z_0, r)$ a platí $\varphi(z_0) \neq 0$. Vysvětlete podmínku $\varphi(z_0) \neq 0$.

b) Bod $z_0 \in \mathbf{C}$ je m -násobným kořenem holomorfní funkce $f(z)$ právě když platí $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m)}(z_0) = 0$ a $f^{(m+1)}(z_0) \neq 0$.

Návod b): Použijte tvrzení a) a rozvoj funkce v Taylorovu řadu se středem v bodě z_0 .

7. V následujících úlohách určete kořeny (nulové body) funkcí a jejich násobnosti, dále pak singularity, jejich typ, u odstranitelných singularit dodefinování, u pólů násobnost.

13.3. CO UDEĽÁ MALÁ DÍRKA V OBORU HOLOMORFNOSTI ANEB SINGULARITY 163

a) $f(z) = z^2 + 9,$

b) $f(z) = \frac{z^2+9}{z^4},$

c) $f(z) = z \sin z,$

d) $f(z) = (1 - e^z)(z^2 - 4)^3,$

e) $f(z) = 1 - \cos z,$

f) $\frac{(z^2-\pi^2)^2}{z^7} \sin z,$

g) $f(z) = \frac{\sin^3 z}{z},$

h) $f(z) = \sin z^3,$

i) $f(z) = \sin^3(z),$

j) $f(z) = \frac{1}{z-z^3},$

k) $f(z) = \frac{z^4}{1-z^4},$

l) $f(z) = \frac{z^5}{1-z^2},$

m) $f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)^2},$

n) $f(z) = \frac{e^z}{1+z^2},$

o) $f(z) = \frac{1+z^2}{e^z},$

p) $f(z) = z e^{-z},$

q) $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z},$

r) $f(z) = \frac{e^z}{z(1-e^z)},$

s) $f(z) = \frac{1-e^z}{2+e^z},$

t) $f(z) = \frac{1}{z^3(2-\cos z)},$

u) $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}},$

v) $f(z) = z e^{\frac{1}{z}},$

w) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}},$

x) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1},$

y) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2},$

z) $f(z) = \frac{z^7}{(z^2 - 4)^2} \cos \frac{1}{z-2},$

aa) $f(z) = \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2},$

bb) $f(z) = e^{-z} \cos \frac{1}{z},$ item [cc)] $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}, a \in \mathbf{R}.$

Výsledky: a) jednonásobné kořeny: $\pm 3i$, dvojnásobný pól ∞ ; b) jednonásobné kořeny: $\pm 3i$, dvojnásobný kořen ∞ ; c) dvojnásobný kořen $z_0 = 0$, jednonásobné kořeny $z_k = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, podstatná singularita ∞ ; d) trojnásobné kořeny ± 2 , jednonásobné kořeny $z_n = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, podstatná singularita ∞ ; e) dvojnásobné kořeny $z_k = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, podstatná singularita ∞ ; f) trojnásobné kořeny $\pm \pi$, jednonásobné kořeny $z_k = k\pi$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{\pm 1\}$, podstatná singularita ∞ ; g) dvojnásobný kořen $z_0 = 0$, trojnásobné kořeny $z_k = k\pi$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, podstatná singularita ∞ ; h) trojnásobný kořen $z_0 = 0$, jednonásobné kořeny $\sqrt[3]{k}\pi$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{k}\pi(1 \pm i\sqrt{3})$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, podstatná singularita ∞ ; i) trojnásobné kořeny $z_k = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, podstatná singularita ∞ ; j) trojnásobný kořen ∞ , jednonásobný pól $z_0 = 0$, jednonásobné póly ± 1 ; k) čtyřnásobný kořen $z_0 = 0$, jednonásobné póly ± 1 , $\pm i$, odstranitelná singularita ∞ , $f(\infty) = -1$; l) pětinasobný kořen $z_0 = 0$, jednonásobné póly ± 1 , trojnásobný pól ∞ ; m) pětinasobný kořen ∞ , jednonásobný pól $z_0 = 0$, dvojnásobné póly $\pm 2i$; n) jednonásobné kořeny $z_k = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, jednonásobné póly $\pm i$, podstatná singularita ∞ ; o) jednonásobné kořeny $\pm i$, podstatná singularita ∞ ; p) jednonásobný kořen $z_0 = 0$, podstatná singularita ∞ ; q) odstranitelná singularita $z_0 = 0$, $f(0) = -\frac{1}{2}$, jednonásobné póly $z_k = 2ik\pi$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, hromadný bod množiny pólů ∞ ; r) dvojnásobný pól $z_0 = 0$, jednonásobné póly $z_k = 2ik\pi$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, hromadný bod množiny pólů ∞ ; s) jednonásobné kořeny $z_k = 2ik\pi$, jednonásobné póly $\xi_k = \ln 2 + i(2k+1)\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$, hromadný bod množiny pólů ∞ ; t) trojnásobný pól $z_0 = 0$, jednonásobné póly $z_k = 2k\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$ (řešení rovnice $\cos z = 2$), $k \in \mathbf{Z}$, hromadný bod množiny pólů ∞ ; u) podstatná singularita $z_0 = 0$, odstranitelná singularita ∞ , $f(\infty) = 1$; v) podstatná singularita $z_0 = 0$, jednonásobný pól ∞ ; w) podstatná singularita $z_0 = 1$, odstranitelná singularita ∞ , $f(\infty) = \frac{1}{e}$; x) podstatná singularita $z = 1$, jednonásobné póly $z_k = 2ik\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, hromadný bod množiny pólů ∞ ; y) jednonásobné kořeny $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, dvojnásobný pól $z_0 = 0$, podstatná singularita ∞ ; z) sedminásobný kořen $z_0 = 0$, dvojnásobný pól $z_1 = -2$, podstatná singularita $z_2 = 2$, trojnásobný pól ∞ ; aa) podstatná singularita $z_0 = 0$, odstranitelná singularita ∞ , $f(\infty) = 0$;

bb) podstatná singularita $z_0 = 0$, podstatná singularita ∞ , cc) podstatná singularita ∞ , jednonásobné póly $z_k = i\pi + 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$.

8. Vraťte se k příkladu 13.30 a rozviňte funkci $f(z)$ v Laurentovu řadu se středem

a) $z_0 = i$,

b) $z_0 = -2$.

Výsledky: a), b) **doplňit**

9. V následujících případech určete všechny Laurentovy rozvoje funkce $f(z)$.

a) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = 0$, $z_0 = 1$, $z_0 = \infty$,

b) $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)^2}$, $z_0 = 0$,

c) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$, $z_0 = \infty$,

d) $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 2$,

e) $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0 = 2$,

f) $f(z) = \sin^2 z$, $z_0 = 0$,

g) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$, $a \neq 0$, $z_0 = 0$, $z_0 = \infty$,

h) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0 = i$, $z_0 = \infty$,

i) $f(z) = \cos \frac{z^2-2z}{(z-2)^2}$, $z_0 = 2$,

Výsledky: a) $z_0 = 0$, $M_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}$: $f(z) = z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $M_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$: $f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$; $z_0 = 1$, $M_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z-1| < 1\}$: $f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$, $M_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z-1| < \infty\}$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} (z-1)^n$; $z_0 = \infty$, $M_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$, $M_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}$: $f(z) = z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$; c) $z_0 = 0$, $M = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$: $f(z) = \left(\frac{1}{2} + z + z^2\right) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2-k)!} z^k$, nezáporné mocniny proměnné z tvoří regulární část, zbytek je hlavní část; $z_0 = \infty$, $M_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$, $f(z) = \left(\frac{1}{2} + z + z^2\right) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2-k)!} z^k$, kladné mocniny proměnné z tvoří hlavní část, zbytek je regulární část; d) $M_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 <$

$|z - 2| < 1$ }: $f(z) = 2(z - 2)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z - 2)^n$, $M_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$: $f(z) = (z - 2)^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n (z - 2)^n$; e) $M_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z - 2| < \sqrt{5}\}$: $f(z) = (z - 2)^{-1} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}}{5^{n+1}} (z - 2)^n$, $M_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid \sqrt{5} < |z - 2| < \infty\}$: $f(z) = (1 + i)(z - 2)^{-1} + i \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{n-1} (2 - i)^{-n-1} - (2 + i)^{-n-1} (z - 2)^n$; f) $M_1 = \mathbf{C}$: $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{(2m+1)!(2k-2m-1)!} z^{2k}$; g) **Návod**: Uvědomte si, že zadaná funkce je $\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\right)$ -násobkem $(k - 1)$ -té derivace funkce $\frac{1}{z=a}$; $z_0 = 0$, $M_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 \leq |z| < |a|\}$: $f(z) = \frac{(-1)^k}{a^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \left(\frac{z}{a}\right)^n$, $M_2 = \{z \in \mathbf{C}^+ \mid |a| < |z|\}$: $f(z) = z^{-k} \sum_{n=-\infty}^0 \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \left(\frac{z}{a}\right)^n$; h) $z_0 = i$, $M_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 \leq |z - i| < 2\}$: $f(z) = -\frac{1}{4}(z - i^{-2}) - \frac{i}{4}(z - i)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(n+3)}{2^{n+4}} (z - i)^n$; $z_0 = \infty$, $M_1 = \{z \in \mathbf{C}^+ \mid |z| > 1\}$: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n-1} n z(2n - 2)$; i) $M_1 = \mathbf{C}$: $f(z) = \cos 1 + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\frac{(-1)^{-k-1} 4^{-2k-1} \sin 1}{(-2k-1)!} (z - 2)^{4k+2} + \frac{(-1)^{-k} 4^{-2k} \cos 1}{(-2k)!} (z - 2)^{4k} \right]$.

10. Funkce $f(w) = e^{\frac{z}{2} \cdot \frac{w-1}{w}}$, kde $w, z \in \mathbf{C}$ a z je parametr, je vytvářející funkce pro Besselovy funkce $J_n(z)$ celého řádu, tj. $f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n$, $0 < |w| < \infty$. Pomocí tohoto vztahu dokažte, že

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - z \sin t) dt \quad (\text{Besselův integrál}).$$

Návod: Uvědomte si, že $J_n(z)$ jsou koeficienty Laurentovy řady funkce $f(w)$ se středem $w_0 = 0$. Integrujte vztah po kružnici $w = e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.

11. Určete hodnoty reziduí ve všech izolovaných singularitách a v bodě nekonečno funkcí z příkladů 13.29, 13.31 a 13.32.

Výsledky: 13.29: $\text{res } f(i) = 2$, $\text{res } f(0) = 1$, $\text{res } f(-2) = -1$, $\text{res } f(\infty) = -2$; 13.31: $\text{res } f(a) = A$, $\text{res } f(\infty) = -a$; 13.32: $\text{res } f(1) = \frac{5}{6}$, $\text{res } f(\infty) = -\frac{5}{6}$.

12. Vypočtete integrály

a) $\int_0^{\pi} \cotg(x - a) dx$, $a = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ (pro $\beta = 0$ integrál diverguje),

b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dz$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a, b \geq 0$,

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx$, $a, b \in (0, 1)$, (**Návod**: integrál je třeba brát ve smyslu hlavní hodnoty, integrační křivka je podobná jako v příkladu 13.40, je však třeba se vyhnout bodu 0).

d) $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx, a \in \mathbf{R}, a > 0,$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2x+10},$

f) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)} \, dx, a > 0,$

g) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos bx}{(x^2+a^2)^2} \, dx, a, b > 0,$

h) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2} \, dx$

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5} \, dx,$

j) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+1)} \, dx, a > 0,$

k) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\cosh x} \, dx, a \in \mathbf{C},$ určete podmínku pro parametr $a,$

l) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)^2} \, dx,$

m) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4+1} \, dx, a \in \mathbf{R}, a > 0,$

n) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

Výsledky: a) $i\pi \operatorname{sgn} \beta$ b) $\frac{1}{2}(b-a)\pi,$ c) $\pi(\cotg a\pi - \cotg b\pi),$ d) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/a} e^{-(b^2/4a)},$
 e) $\frac{1}{3}\pi e^{-3}(3 \sin 1 - \cos 1)$ **OVĚŘIT,** f) $\frac{\pi(a+1)e^{-a}}{4a^3},$ g) $\frac{\pi e^{-ab}(1-ab)}{4a},$ h) $\frac{\pi e^{-ab}(1+ab)}{4b^3},$
 i) **DOPLNIT,** j) **DOPLNIT,** k) **DOPLNIT,** l) **DOPLNIT,** m) $\frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} \left(\sin \frac{a\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{a\sqrt{2}}{2} \right),$
 n) $-\frac{\pi}{4}.$

13.4 Co jsou to mnohoznačné funkce

Definice funkce komplexní proměnné, uvedená na začátku kapitoly, konkrétně v odstavci 13.1.2, je formulována tak, že připouští, aby funkce byla mnohoznačná. Je to totiž jakákoli relace f na množině $\mathbf{C},$ resp. $\mathbf{C}^+.$ Znamená

to, že jedné hodnotě proměnné $z \in \mathbf{C}^+$ (vzoru) může příslušet více hodnot $w \in \mathbf{C}^+$, takže „obrazem“ hodnoty z je množina $f(z) = \{w \in \mathbf{C}^+ \mid [z, w] \in f\}$. Uvedli jsme si také příklady mnohoznačných funkcí — argument a n -tou odmocninu, $n \in \mathbf{N}$. Brzy potom jsme se dohodli, že zatím budeme uvažovat pouze o jednoznačných funkcích, tj. takových, pro něž je množina $f(z)$ vždy jednoprvková, takže relace f je zobrazením, a to do chvíle, kdy dohodu zrušíme. tato chvíle nyní nastala a začneme se mnohoznačnými funkcemi zabývat podrobněji.

13.4.1 Prodloužení holomorfní funkce podél křivek — možné výsledky

Možná teď čekáte, že definici mnohoznačných funkcí začneme odvíjet od argumentu, jako jsme to udělali v případě odmocnin (příklad 13.5) nebo logaritmu (příklad 13.10). Do jisté míry by to šlo. Lepší by však bylo mít obecnější postup, který umožní charakterizovat všechny vlastnosti mnohoznačných funkcí. Za tu obecnost sice zaplatíme jistou „daň“ v podobě předpokladu existence derivace funkcí, které budou ve hře, tento předpoklad však nebude přílišným omezením: funkce, které nemají derivaci alespoň v nějakých oblastech, nejsou pro praktické účely příliš využitelné. Základním principem, který k definici mnohoznačných funkcí (s holomorfními jednoznačnými větvemi) použijeme, je věta o jednoznačnosti (věta 13.17). I když logaritmické funkci je věnován následující samostatný odstavce, ukážeme si na ní, o jaký problém se jedná.

Příklad 13.41: Logaritmus a věta o jednoznačnosti

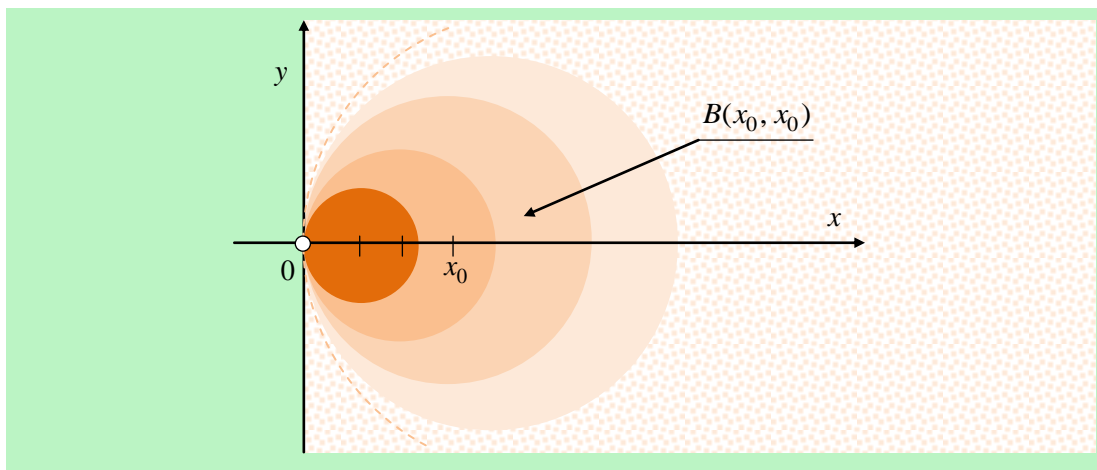
Logaritmickou funkci o základu e v reálném oboru, tj. *přirozený logaritmus* umíme podobně jako jiné funkce rozvinout v Taylorovu řadu se středem x_0 (s omezením na kladné hodnoty x_0)

$$\ln x = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n x_0^n} (x - x_0)^n,$$

přičemž řada konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $(0, 2x_0)$ (tohle jistě dokážete zdůvodnit). Provedeme-li záměnu $x \rightarrow z$, dostaneme řadu lokálně stejnoměrně konvergentní v otevřeném kruhu $B(x_0, x_0)$, viz obrázek 13.26,

$$\operatorname{Ln} z = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n x_0^n} (z - x_0)^n, \quad \operatorname{Arg} z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right). \quad (13.49)$$

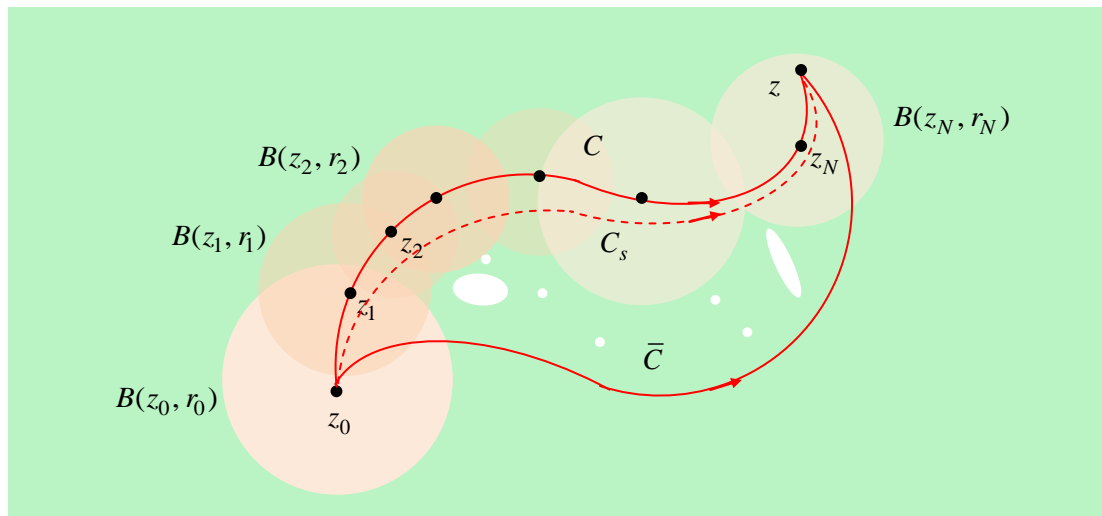
Tato řada představuje holomorfní funkci, která je holomorfním rozšířením přirozeného logaritmu z intervalu $(0, x_0)$ na oblast $B(x_0, x_0)$. Vzhledem k



Obrázek 13.26: Kam až lze rozšířit logaritmus.

tomu, že množina $(0, x_0)$ má v $B(x_0, x_0)$ hromadné body, je podle věty 13.17 a jejích důsledků toto prodloužení jediné. (Dokonce všechny body intervalu $(0, x_0) \subset \mathbf{R}$ jsou jeho hromadnými body v $B(x_0, x_0)$, i když by zcela postačil jediný.) Součet řady nazveme *přirozeným logaritmem proměnné z* . Zvětšováním hodnoty x_0 (posouváním středu řady po reálné ose vpravo) zvětšujeme oblast lokálně stejnoměrné konvergence řady, a tedy definičního oboru logaritmu.

Způsobem, který jsme ukázali v příkladu 13.41, dokážeme logaritmus definovat pouze v pravé polorovině Gaussovy roviny. Do levé se v žádném případě nedostaneme. Zdá se, že tento způsob, jak definovat logaritmus v komplexní rovině, je oproti tomu, který jsme použili v příkladu 13.10, velice nedokonalý. Jistě by to byla pravda, kdybychom polohu středu Taylorovy řady skutečně omezili jen na reálnou osu. K tomu nás však však nic nenutí. Pokusme se způsob rozšiřování definičního oboru holomorfní funkce pomocí věty o jednoznačnosti zobecnit. Využijeme k tomu schematický obrázek 13.27. Předpokládejme, že \mathcal{C} je křivka s počátečním bodem z_0 a koncovým bodem z , a že na otevřeném kruhu $B(z_0, r_0)$ je definována holomorfní funkce $f_{z_0}(\xi)$ (symbolem ξ jsme zde označili obecnou proměnnou, aby se nepletla s označením koncového bodu z). Funkci $f_{z_0}(\xi)$ budeme nazývat *výchozí element*.



Obrázek 13.27: Myšlenka a teoretický postup prodlužování podél křivek.

Můžeme ji vyjádřit pomocí Taylorovy řady

$$f_{z_0}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)}(\xi - z_0)^n.$$

Zvolme bod z_1 na křivce \mathcal{C} tak, aby ležel v kruhu $B(z_0, r_0)$ a rozvíjíme funkci $f_{z_0}(\xi)$ v řadu se středem z_1 ,

$$f_{z_1}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)}(\xi - z_1)^n,$$

a předpokládejme, že tato řada stejnoměrně konverguje na jistém kruhu $B(z_1, r_1)$ (nemusí nutně jít o největší možný kruh konvergence). Pokračováním v této proceduře nakonec dospějeme k vyjádření Taylorově řadě konvergentní na otevřeném kruhu, který bude obsahovat koncový bod z křivky \mathcal{C} . Křivka \mathcal{C} je takto pokryta otevřenými kruhy. Vzhledem k tomu, že křivka (jako množina bodů v \mathbf{C}) je kompaktní, lze z tohoto pokrytí vybrat pokrytí konečné. Volíme je tak, aby obsahovalo výchozí z kruhů $B(z_0, r_0)$. Kruhy tvořící toto pokrytí označíme $B(z_i, r_i)$, $i = 0, 1, \dots, z_n$, přičemž poslední z nich, kruh $B(z_N, r_N)$, obsahuje bod z . Pak na $B(z_N, r_n)$ dostaneme řadu

$$f_{z_N}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(N)}(\xi - z_N)^n,$$

jejímž vyčíslením v koncovém bodě z křivky \mathcal{C} pak získáme hodnotu, kterou značíme $f_{z_0, \mathcal{C}}(z)$. Tímto označením dáváme najevo, že hodnota závisí jak na výchozím elementu, tak může záviset i na křivce \mathcal{C} . Tímto postupem, složeným z konečného počtu kroků, jsme *prodloužili výchozí element podél křivky \mathcal{C} do bodu z* . Hodnotu $f_{z_0, \mathcal{C}}(z)$ proto nazýváme *výsledek analytického prodloužení výchozího elementu do bodu z podél křivky \mathcal{C}* . Uvědomme si, že když takto postupujeme *podél zadané křivky*, musíme na konci dostat výsledek analytického prodloužení jednoznačně, tj. bez ohledu na to, jak volíme konkrétní pokrývající kruhy. Proč? Vyplývá to z věty o jednoznačnosti 13.17. Uvažujme o průniku kterýchkoli dvou „sousedních“ kruhů třeba hned $B(z_0, r_0)$ a $B(z_1, r_1)$. Označme jej D_{01} . Je jistě neprázdný. Na $B(z_0, r_0)$ máme holomorfní funkci $f_{z_0}(z)$ určenou Taylorovou řadou se středem z_0 , na $B(z_1, r_1)$ holomorfní funkci $f_{z_1}(z)$ řadou se středem z_1 . Na průniku hodnoty součtu obou řad splývají. Funkce $f_{z_1}(z)$ je tedy holomorfním prodloužením funkce $f_{z_0}(z)$ z oblasti $D_{01} = B(z_0, r_0) \cap B(z_1, r_1)$ na oblast $B(z_1, r_1)$. Protože oblast D_{01} má v $B(z_1, r_1)$ hromadné body, je toto holomorfní prodloužení jediné. Tato úvaha je platná i pro další dvojice sousedních kruhů v celém „řetězu“ $B(z_0, r_0), B(z_1, r_1), \dots, B(z_N, r_N)$. Pomocí uvedené procedury by tedy bylo v principu možné získat třeba právě hodnoty logaritmu i v levé polorovině Gaussovy roviny. Na druhé straně jasné, že v podobě, jak jsme ji popsali, asi nebude vhodná pro praktické použití.

A ještě si musíme položit otázku: co když prodloužíme daný výchozí element z bodu z_0 do bodu z podél jiné křivky, například $\bar{\mathcal{C}}$? Dostaneme stejnou hodnotu jako při prodloužení podél, nebo jinou hodnotu, než při prodloužení podél křivky \mathcal{C} ? Intuitivně cítíme, že nebude-li kruhům konvergence při prodlužování „stát v cestě“ žádná překážka, jíž by mohla být třeba singularita, nebo nějaká „díra“, jako je tomu na obrázku 13.17, měli bychom dostat stejnou hodnotu. V opačném případě by výsledek prodloužení po různých křivkách mohl, ale nemusel, být odlišný. Samozřejmě, kdyby taková „překážka“ ležela přímo na křivce, prodloužení by se nedalo provést — procedura by se jednoduše na takové překážce „zarazila“. Pokud proceduru prodloužení výchozího elementu $f_{z_0}(z)$ z bodu lze uskutečnit, řekneme, že výchozí element „lze prodloužit“ podél zadané křivky.

Shrňme nyní výše uvedené úvahy a názvosloví i formálně v následující definici.

Nechť \mathcal{C} je křivka s počátečním bodem z_0 a koncovým bodem z a $f_{z_0}(\xi)$ funkce holomorfní v jistém kruhu $B(z_0, r_0)$. Tuto funkci nazveme *výchozí element*, někdy také *výchozí analytický element*. Je-li možné výše uvedenou procedurou získat hodnotu $f_{z_0, \mathcal{C}}(z)$, řekneme, že *výchozí element $f_{z_0}(\xi)$ lze*

analyticky prodloužit podél křivky \mathcal{C} . Hodnotu $f_{z_0, \mathcal{C}}(z)$ pak nazýváme *výsledek analytického prodloužení výchozího elementu $f_{z_0}(\xi)$ do bodu z podél křivky \mathcal{C} .* Funkce vznikající prodlužováním výchozích elementů nazýváme *analytické*.

Pozn.: Přemýšlivé čtenáře může napadnout, zda při analytickém prodlužování výchozího elementu nemůže nastat problém, není-li parametrizace křivky \mathcal{C} prostým zobrazením, tj. protíná-li křivka sama sebe. Jak na takové „křížovatce“ poznáme, jak bude prodlužovací procedura pokračovat? Odpověď je jednoduchá: splývající body $\mathcal{C}(t_1), \mathcal{C}(t_2) \in \mathbf{C}$, $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, jsou „odlišeny“ právě odpovídajícími hodnotami parametru, $t_1 \neq t_2$. (Některé učebnice a monografie kvůli tomu zavádějí v podstatě samoučelný pojem *funkce definované na křivce* jako zobrazení $t \rightarrow F(t) = (t, f(\mathcal{C}(t))) \in \mathbf{R} \times \mathbf{C}$, a poté pojem *funkce analytické na křivce*. V tomto textu se však bez nich obejdeme.)

Následující věta částečně odpovídá na otázky, které jsme si položili: nakolik mohou či nemohou být výsledky prodloužení daného výchozího elementu $f_{z_0}(\xi)$ do bodu z po různých křivkách spojujících body z_0 a z různé.

Věta 13.25 (o monodromii): *Nechť D je oblast obsahující body z_0 a z a nechť $f_{z_0}(\xi)$ je funkce holomorfní na jistém kruhu $B(z_0, r_0) \subset D$. Předpokládejme, že výchozí element $f_{z_0}(\xi)$ lze analyticky prodloužit do bodu z podél všech křivek spojujících body z_0 a z a ležících v oblasti D . Jsou-li křivky \mathcal{C} a $\bar{\mathcal{C}}$ náležející do takového souboru křivek homotopické, je výsledek analytického prodloužení výchozího elementu podél každé z nich shodný, tj. $f_{z_0, \mathcal{C}} = f_{z_0, \bar{\mathcal{C}}}$.*

Dokázat tuto větu není obtížné. Nejprve ovšem musíme říci, co jsou to homotopické křivky. Stačí, abychom tento pojem definovali pouze pro křivky se společnými krajními body.

Předpokládejme, že křivky \mathcal{C} a $\bar{\mathcal{C}}$ ležící v oblasti $D \subset \mathbf{C}$ mají společný počáteční bod z_0 a koncový bod z . Tyto křivky se nazývají *homotopické*, existují-li spojitě zobrazení

$$\mathcal{H} : [0, 1] \ni s \longrightarrow \mathcal{H}(s) = \mathcal{C}_s \subset D$$

takové, že $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ a $\mathcal{C}_1 = \bar{\mathcal{C}}$.

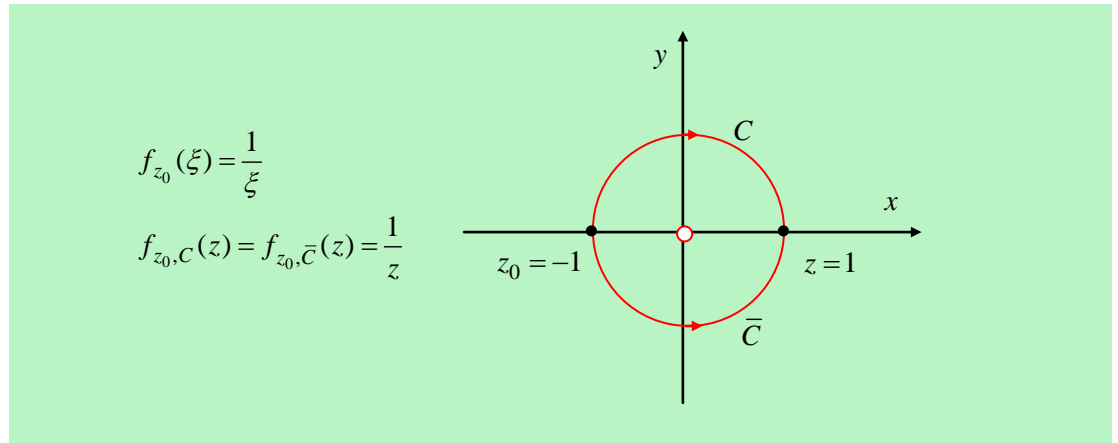
Příkladem může být třeba lineární zobrazení, $\mathcal{C}_s = (1-s)\mathcal{C} + s\bar{\mathcal{C}}$.

Vraťme se k větě o monodromii a považujme její předpoklady za splněné. Navíc předpokládejme, že křivky \mathcal{C} a $\bar{\mathcal{C}}$ jsou homotopické. Výchozí element

$f_{z_0}(\xi)$ jsme prodloužili podél křivky \mathcal{C} procedurou popsanou výše. Znamená to, že jsme z pokrytí křivky otevřenými kruhy, jejichž zavádění jsme v proceduře popsali (a které samozřejmě můžeme volit tak, aby ležely v oblasti D), vybrali konečné podpokrytí $\mathcal{O} = \{B(z_0, r_0), \dots, B(z_N, r_N)\}$, tak, aby $z \in B(z_N, r_r)$. Sjednocením těchto kruhů je oblast, která obsahuje křivku \mathcal{C} a je podmnožinou oblasti D . Existuje hodnota $s \in [0, 1]$ tak, že křivka \mathcal{C}_s celá leží v tomto sjednocení (obrázek 13.27). Provedeme-li nyní teoretickou proceduru analytického prodloužování výchozího elementu podél křivky \mathcal{C}_s , dostaneme výsledek tohoto prodloužení do bodu z , tj. f_{z_0, \mathcal{C}_s} . Otevřené kruhy pokrývající křivku \mathcal{C}_s při této proceduře mají neprázdné průniky s kruhy $B(z_0, r_0)$ až $B(z_N, r_N)$. Na každém z těchto průniků funkce vzniklé postupně jako holomorfní prodloužení původního elementu $f_{z_0}(\xi)$ splývají, jak plyne z již vícekrát zmiňované věty o jednoznačnosti 13.17. Proto je nakonec také $f_{z_0, \mathcal{C}}(z) = f_{z_0, \mathcal{C}_s}$, a to *nezávisle* na hodnotě s . Právě provedenou úvahu můžeme opakovat pro další dvojici „dostatečně blízkých“ křivek $\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{s'}$, atd. Kdyby křivky \mathcal{C} a $\bar{\mathcal{C}}$ nebyly homotopické, tj. kdyby se spojitému přechodu jedné v druhou postavila do cesty nějaká překážka typu singularity, nebo díry, nebylo by možné výše uvedenou argumentaci použít. To však ještě neznamená, že by výsledky analytického prodloužení výchozího elementu podél křivek, které nejsou homotopické, nemohly být stejné. Ze znění věty o monodromii pouze vyplývá, že výsledky prodloužení podél homotopických křivek shodné jsou.

Příklad 13.42: Prodloužení podél křivek, které nejsou homotopické, nemusí vést k různým výsledkům

Jako jednoduchý příklad situace popsané v názvu můžeme uvést třeba výchozí element $f_{-1}(\xi) = \frac{1}{\xi}$. Výsledek jeho analytického prodloužení do bodu $z = 1$ podél půlkružnic $\mathcal{C} : x(t) = e^{it}, t \in [\pi, 0]$, a $\bar{\mathcal{C}} : x(t) = e^{it}, t \in [\pi, 2\pi]$ (obrázek 13.28) je stejný, i když křivky \mathcal{C} a $\bar{\mathcal{C}}$ nejsou homotopické ve smyslu věty 13.25. Proč je výsledek stejný? protože funkce $f(\xi) = \frac{1}{\xi}$ je na množině $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ jednoznačná. A proč nejsou křivky \mathcal{C} a $\bar{\mathcal{C}}$ homotopické? Hned uvidíme. Definujme oblast D třeba jako prstenec $P(0, R), R > 1$, (nebo rovnou jako $\mathbf{C} \setminus \{0\}$). Výchozí element $f_{-1}(\xi) = \frac{1}{\xi}$ lze analyticky prodloužovat podél křivek ležících v této oblasti a spojujících body $z_0 = -1$ a $z = 1$. Nelze jej však prodloužovat podél křivek procházejících bodem $\xi_0 = 0$. Tento bod je totiž singularitou funkce $\frac{1}{\xi}$ a překážkou procedury prodloužování. Brání tedy i spojitě deformaci křivky \mathcal{C} v křivku $\bar{\mathcal{C}}$. Množina křivek \mathcal{C}_s při každé takové deformaci by totiž musela nutně obsahovat křivku procházející bodem $\xi_0 = 0$. Ta však neleží v oblasti D .



Obrázek 13.28: K příkladu 13.42.

Důkaz věty o monodromii fakticky zahrnoval jedno důležité tvrzení, které teď formulujeme explicitně, aniž bychom je již museli dokazovat. Vypovídá o prodlužování výchozího elementu podél „dostatečně blízkých křivek“.

Věta 13.26: *Jestliže lze výchozí element $f_{z_0}(\xi)$ analyticky prodloužit podél křivky C , pak existuje oblast D obsahující tuto křivku taková, že tento výchozí element lze analyticky prodloužit podél všech křivek, které v ní leží. Výsledek analytického prodloužení podél těch křivek, které mají s křivkou C stejné krajní body, je stejný.*

A ještě jeden důležitý přímý důsledek plyne z věty o monodromii. Zamyslete se nad jeho důkazem sami:

Funkce analytická v jednoduše souvislé oblasti D je v této oblasti holomorfní.

Teď je již vše připraveno pro formulaci věty, která odpovídá na otázku, kolik možných různých výsledků prodloužení daného výchozího elementu $f_{z_0}(\xi)$ nejvýše existuje. V předchozích úvahách jsme uvažovali pouze o případech, kdy bod z ležel v nerozšířené Gaussově rovině, věta však je obecnější, zahrnuje i bod $z = \infty$.

Věta 13.27: *Každému bodu $z \in \mathbf{C}^+$ odpovídá nejvýše spočetně mnoho hodnot dané analytické funkce. Neboli: různých výsledků analytického prodloužení*

daného výchozího elementu $f_{z_0}(\xi)$ do bodu z , kde $z \in \mathbf{C}^+$ je libovolný bod, je nejvýše spočetně mnoho.

Důkaz této věty je názorný, je-li z libovolný bod v \mathbf{C} . Je zřejmé, že každou z možných hodnot analytické funkce v tomto bodě lze dostat jako výsledek analytického prodloužení výchozího elementu podél některé z křivek s krajními body z_0 a z . Označme ji \mathcal{C} . Nechť \mathcal{O} je pokrytí této křivky otevřenými kruhy. Dále je zřejmé, že existuje lomená čára \mathcal{L} s týmiž krajními body taková, že její vrcholy (s možnou výjimkou krajních bodů) mají obě souřadnice racionální a pokrytí \mathcal{O} pokrývá i ji. Množina $\mathcal{C} \cup \mathcal{L}$ je kompaktní, a proto lze z jejího otevřeného pokrytí \mathcal{O} vybrat konečné podpokrytí \mathcal{O}_0 . Křivky \mathcal{C} a \mathcal{L} jsou homotopické, proto, jak plyne z věty o monodromii, platí $f_{z_0, \mathcal{C}}(z) = f_{z_0, \mathcal{L}}(z)$. Čar typu \mathcal{L} je ovšem spočetně mnoho. Více výsledků analytického prodloužení výchozího elementu $f_{z_0}(\xi)$ do bodu z už tedy být nemůže. Samozřejmě, kolik je výsledků analytického prodloužení ve skutečnosti, to závisí na jednotlivých případech. Nejdůležitějším z nich se budeme věnovat v dalších odstavcích.

13.4.2 Logaritmus jako základ mnohoznačných funkcí

Připomeňme, že logaritmus jako mnohoznačnou funkci, konkrétně relaci

$$f(z) = \{w \in \mathbf{C} \mid w = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), k \in \mathbf{Z}\}$$

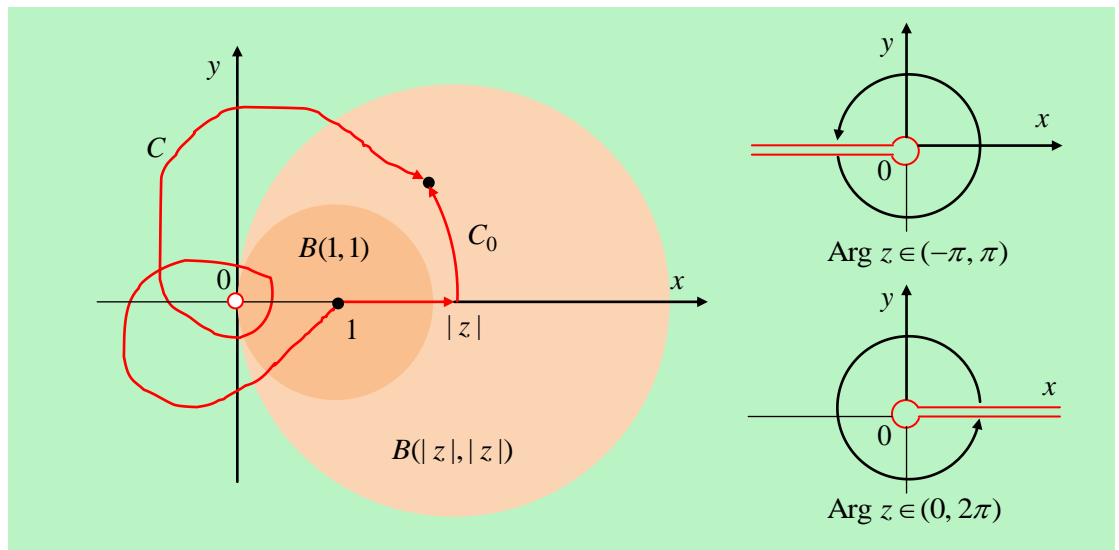
jsme zavedli už v odstavci 13.1.3 (příklad 13.10, vztah (13.7)). Pro každý bod $z \neq 0, \infty$ dostáváme spočetně mnoho hodnot w , daných mnohoznačností argumentu proměnné z . Další „verzi“ logaritmu v podobě holomorfního rozšíření reálné Taylorovy řady do pravé poloroviny Gaussovy roviny (s vyjmutým bodem $z = 0$) máme v příkladu 13.41. Otázkou je, zda jeho hodnoty získané tímto rozšířením splývají s hodnotami danými vztahem (13.7) pro $\operatorname{Arg} z \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. A ještě máme možnost vyjádřit hodnoty logaritmu na množině $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, tj. pro $z \neq 0, \infty$, pomocí analytického prodloužování podél křivek. Je potřeba zvolit vhodný výchozí element. Pomůžeme si opět znalostmi z reálného oboru. Víme, že v reálném oboru je funkce $\ln x$, až na konstantu, primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$, můžeme jej proto vyjádřit ve tvaru integrálu jako funkce horní meze

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{\xi}.$$

Položme $z_0 = 1$. Záměnou $x \rightarrow z$ dostaneme výchozí element

$$f_1(\xi) = \int_1^\xi \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (13.50)$$

který je holomorfní funkcí v každé jednoduše souvislé oblasti Gaussovy roviny obsahující bod $z_0 = 1$ a neobsahující bod 0 a nezávisí na tvaru křivky, která spojuje bod $z_0 = 1$ s bodem ξ . Zvolme libovolně bod $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, do něhož budeme výchozí element prodlužovat podél křivek, které začínají v bodě $z_0 = 1$ a končí v bodě z . Samozřejmě, žádná z těchto křivek nesmí procházet bodem $\xi_0 = 0$ (vzpomenete si proč?). Zvolme křivku C s počátečním bodem $z_0 = 1$ a koncovým bodem z tak, aby neprocházela bodem 0 , a křivku C_0 zvolme speciálně podle obrázku 13.29, ale se rovněž s počátečním bodem $z_0 = 1$ a koncovým bodem z . Křivka C_0 je tvořena úsečkou spojující body $\zeta_1 = 1$ a $\zeta_2 = |z|$ a částí kružnice $\zeta = |z|e^{it}$, $t \in [0, \text{Arg } z]$. (Připomeňme si, že argument s velkým „A“ znamená hlavní hodnotu, tj. tu, která leží v intervalu $[0, 2\pi)$.) Prodloužením výchozího elementu (13.50) do bodu z podél křivky



Obrázek 13.29: Logaritmus.

\mathcal{C}_0 dostaneme

$$\operatorname{Ln} z = f_{1, \mathcal{C}_0}(z) = \int_{\mathcal{C}_0} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^{|z|} \frac{dx}{x} + \int_0^{\operatorname{Arg} z} \frac{i|z|e^{it}}{|z|e^{it}} dt = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z. \quad (13.51)$$

Výsledek analytického prodloužení výchozího elementu do bodu z podél křivky \mathcal{C}_0 je shodný z hodnotou logaritmu z příkladu 13.10. A pokud bod z leží v pravé polorovině Gaussovy roviny pak *musí* být shodný také s hodnotou, kterou získáváme holomorfním rozšířením logaritmu z reálné osy do této poloroviny, daným vztahem (13.49). Analytické prodloužení výchozího elementu podél křivky \mathcal{C} do bodu z dostaneme jako integrál

$$f_{1, \mathcal{C}}(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Všimněme si, že křivky \mathcal{C} a \mathcal{C}_0 na obrázku 13.29 nejsou homotopické. Uvidíme, jaký vliv to má na výsledek analytického prodloužení. Uvažujme o uzavřeném jednorozměrném singulárním řetězci Γ definovaném jako formální součet $\Gamma = \mathcal{C} + (-\mathcal{C}_0)$. Platí

$$\int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\xi}{\xi} - \int_{\mathcal{C}_0} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Na druhé straně platí

$$\int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ind}_{\Gamma}(0),$$

proto

$$\ln_{\mathcal{C}}(z) = f_{1, \mathcal{C}}(z) = \operatorname{Ln}(z) + 2\pi i \operatorname{Ind}_{\mathcal{C} + (-\mathcal{C}_0)}(0). \quad (13.52)$$

Dostali jsme obecný předpis pro *všechny* hodnoty logaritmu. Jiné nejsou možné. Index bodu $\xi_0 = 0$ vzhledem k libovolné uzavřené křivce, resp. uzavřenému jednorozměrnému singulárnímu řetězci, je celočíselný. Hodnoty logaritmu dané vztahem (13.52) jsou totožné s hodnotami (13.7). Funkce logaritmus je analytická v oblasti $\mathbf{C}^+ \setminus \{0, \infty\}$. Body 0 a ∞ jsou *body větvení nekonečného (spočetného) řádu*.

Tzv. k -tá větev logaritmu je jednoznačná funkce

$$\ln_k(z) = \operatorname{Ln}(z) + i2k\pi, \quad \operatorname{Ln}(z) = \ln_0(z) = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Každé této větvi přísluší jeden *Reimannův list*, jímž je Gaussova rovina s výřezem podél nezáporné, nebo nekladné části reálné osy, podle toho, jakou konvenci pro interval hlavní hodnoty argumentu zvolíme. Obě možnosti jsou vidět na obrázku 13.29 vpravo, výřez je zakreslen červeně. Volbě

$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$ odpovídá výřez podél nekladné části reálné osy, tj. Riemannův list $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$, volbě $\operatorname{Arg} z \in (0, 2\pi)$ pak výřez podél nekladné části reálné osy, tj. Riemannův list $\mathbf{C} \setminus [0, \infty)$. Logaritmus má spočetně mnoho Riemannových listů, označme je R_k , $k \in \mathbf{Z}$. Všechny jsou stejné (jsou kopiemi Gaussovy roviny s výřezem) a představují množinu, v níž se pohybuje proměnná z . Pro daný bod z na k -tém Riemannově listu, $z \in R_k$, nabývá logaritmus hodnoty $\ln_k(z) = \ln_0(z) + i2k\pi$. Výřez na Riemannově listu zaručuje, že žádná uzavřená křivka, která v něm leží, nemůže obejít bod $\xi_0 = 0$. Proměnná z tedy „zůstává“ na tomto listu a hodnota logaritmu „zůstává“ hodnotou k -té větve. k -tý Riemannův list logaritmu je (největším možným) definičním oborem k -té (jednoznačné) větve této (mnohoznačné) analytické funkce.

Z úvah v odstavci 13.1.2 víme, že slepením Riemannových listů podél výřezů (pro případ odmocniny vzpomeňte na obrázek 13.4) získáme *Riemannovu plochu*, která již „přelévání“ větví umožňuje. Touto problematikou se dále nebudeme zabývat.

13.4.3 Další mnohoznačné funkce

Logaritmus je základem pro zavedení dalších elementárních mnohoznačných funkcí. První na řadě je *obecná mocnina*.

Obecná mocnina

V oboru reálné proměnné je obecná mocnina definována vztahem

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Odtud se volba výchozího elementu obecné mocniny přímo nabízí ve tvaru

$$f_{z_0}(\xi) = \xi^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} \xi}, \quad z \neq 0, \infty, \quad \alpha \in \mathbf{C}. \quad (13.53)$$

Tento výchozí element nazýváme *hlavní hodnota*, resp. *hlavní větev analytické funkce* z^α . Je holomorfní funkcí v Gaussově rovině s výřezem podél nezáporné, resp. nekladné části reálné osy (výřez je třeba udělat kvůli logaritmu). Případné další větve této funkce jsou dány větvemi logaritmu, ale nejen jimi. Závisí také na exponentu α . Nechť \mathcal{C} je stejně jako u logaritmu křivka spojující bod $z_0 = 1$ a obecný bod $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, která neprochází bodem $\xi_0 = 0$. Výsledek analytického prodloužení výchozího elementu obecné

mocniny podél této křivky je určen výsledkem analytického prodloužení výchozího elementu logaritmu, tj.

$$f_{z_0, \mathcal{C}}(z) = (z^\alpha)_{\mathcal{C}} e^{\alpha(\operatorname{Ln} z + 2\pi i \operatorname{Ind}_{\mathcal{C}+(-c_0)}(0))} = z^\alpha e^{2\pi i \alpha k}, \quad (13.54)$$

kde $k = \operatorname{Ind}_{\mathcal{C}+(-c_0)} \in \mathbf{Z}$. Počet různých výsledků analytického prodloužení výchozího elementu z^α závisí na exponentu α takto:

- Pro $\alpha \in \mathbf{Z}$ je součin αk celé číslo a $e^{2\pi i \alpha k} = 1$. Funkce z^α je v takovém případě jednoznačná (a ani jsme nic jiného nečekali, neboť to, že celočíselné mocniny proměnné z jsou jednoznačnými funkcemi, je zřejmé).
- Pro $\alpha \in \mathbf{Q}$ lze součin $k\alpha$ zapsat ve tvaru $k\alpha = m + \frac{p}{q}$, kde $m \in \mathbf{Z}$, $p, q \in \mathbf{N}$, $1 < p < q$, a čísla p a q jsou nesoudělná. V tom případě je výsledek analytického prodloužení obecně tvaru

$$(z^\alpha)_{\mathcal{C}} = z^\alpha e^{2\pi i \frac{p}{q} k}, \quad p \in \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

Máme tak q různých výsledků analytického prodloužení racionální mocniny. Opět se nedivíme, neboť jsme již dříve důkladně rozebrali odmocniny typu $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$, $n \in \mathbf{N}$. Body 0 a ∞ jsou *body větvení q -tého řádu* funkce $z^{\frac{1}{q}}$. Riemannova plocha má q listů, přičemž každý z nich je Gaussova rovina s výřezem podél nekladné, nebo nezáporné reálné osy. Listy na sebe navazují slepením podél výřezů a tvoří tak Riemannovu plochu. (Horní část výřezu k -tého listu je slepena s dolní částí výřezu $(k-1)$ -tého listu, $k = 1, \dots, q-1$, horní část výřezu $(q-1)$ -tého listu je slepena s dolní částí výřezu nultého listu.)

- Je-li α obecné reálné, nebo komplexní číslo, a nenastane některý z předchozích případů, je různých výsledků analytického prodloužení výchozího elementu z^α nekonečně, ale spočetně mnoho (víc jich už být nemůže).

Příklad 13.43: Charakter mnohoznačnosti obecné mocniny

Jak to vypadá s hodnotami obecné mocniny, přesněji řečeno s možnými výsledky analytického prodloužení jejího výchozího elementu, nejlépe uvidíme, vyčíslíme-li reálnou a imaginární část v obecném případě. Předpokládejme, že exponent α je obecně komplexní, $\alpha = a + ib$. Nejprve vyjádříme výchozí element:

$$z^\alpha = \left(|z| e^{i \operatorname{Arg} z}\right)^{(a+ib)} = |z|^a e^{ib \ln |z|} e^{i \operatorname{Arg} z (a+ib)} = |z|^a e^{-b \operatorname{Arg} z} e^{i(b \ln |z| + a \operatorname{Arg} z)} =$$

$$= |z|^a e^{-b \operatorname{Arg} z} (\cos(b \ln |z| + a \operatorname{Arg} z) + i \sin(b \ln |z| + a \operatorname{Arg} z))$$

Označme $(z^\alpha)_k = (z^\alpha)_C$, je-li $\operatorname{Ind}_{C+(-C_0)}(0) = k$. Pak

$$(z^\alpha)_k = z^\alpha e^{i2\alpha k\pi} = z^\alpha e^{i2(a+ib)k\pi} = z^\alpha e^{-2bk\pi} (\cos 2ak\pi + i \sin 2ak\pi).$$

Vidíme, že mnohoznačnost obecné mocniny se projeví nejen mnohoznačností argumentu, ale i mnohoznačností absolutní hodnoty, která je dána faktorem $e^{-2bk\pi}$. Ta „zmizí“, bude-li $b = 0$, tj. bude-li exponent α reálný. V případě $b \neq 0$ je obecná mocnina v každém případě mnohoznačná, a to i pro $ak \in \mathbf{Z}$, kdy je $e^{i2ak\pi} = 1$.

Příklad 13.44: Analytické prodloužení z bodu z do bodu z

Nadpis příkladu se může zdát divný: změni se něco, přejdeme-li z bodu z ($z \neq 0$) zase do bodu z ? Může se změnit. Prodlužujeme přece podél křivek, k nimž patří i takové, které v bodě z začínají i končí. Záleží pak na tom, kudy vede jejich cesta. Uvažujme o uzavřené křivce C' procházející bodem z . V jistém kruhovém okolí bodu z jsou definovány jednoznačné větve obecné mocniny. Zvolme třeba větev $(z^\alpha)_k$. Víme o ní, že ji lze získat analytickým prodloužením výchozího elementu z^α podél křivky C spojující body $z_0 = 1$ a z , je-li $\operatorname{Ind}_{C+(-C_0)} = k$ (C_0 je křivka z obrázku 13.29). Platí

$$(z^\alpha)_{C'+C} = z^\alpha e^{2\pi i \alpha \operatorname{Ind}_{C'+C+(-C_0)}(0)},$$

odkud dostáváme vcelku praktický vztah

$$(z^\alpha)_{C'} = (z^\alpha)_k e^{2\pi i \alpha \operatorname{Ind}_{C'}(0)}. \quad (13.55)$$

Vyjádření obecné mocniny můžeme ještě dále zobecnit. Důležitá je například funkce $(z - \beta)^\alpha$, tj. jakási „posunutá“ obecná mocnina. Body větvení jsou β a ∞ . Vztah (13.55) je pak třeba modifikovat takto:

$$((z - \beta)^\alpha)_{C'} = ((z - \beta)^\alpha)_k e^{2\pi i \alpha \operatorname{Ind}_{C'}(\beta)}. \quad (13.56)$$

Vzorec (13.56) hned vyzkoušíme. Uvažujme o analytické funkci $F(z) = \sqrt[4]{1 - z^4}$ a její větví určené hodnotou $F(0) = 1$. Je to holomorfní funkce definovaná na jistém okolí bodu $z_0 = 0$. Považujme ji za výchozí element $f_0(\xi)$. Naším úkolem je analyticky prodloužit tento element podél křivky C' znázorněné na obrázku 13.30. Provedeme rozklad na jednoduché obecné mocniny

$$1 - z^4 = (-1)(z+1)(z-1)(z+i)(z-i), \quad \sqrt[4]{1 - z^4} = (-1)^{\frac{1}{4}}(z+1)^{\frac{1}{4}}(z-1)^{\frac{1}{4}}(z+i)^{\frac{1}{4}}(z-i)^{\frac{1}{4}}$$

Taylorova řada (se středem v nule) arkustangenty jako reálné funkce reálné proměnné je

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Oborem její lokálně stejnoměrné konvergence je interval $(-1, 1)$. Po záměně $x \rightarrow z$ dostaneme řadu

$$\operatorname{Arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1},$$

kteřá konverguje lokálně stejnoměrně v kruhu $B(0, 1)$ a na intervalu $(-1, 1) \subset \mathbf{R}$ splývá s reálnou arkustangentou. Podle věty o jednoznačnosti je tato řada holomorfním rozšířením funkce $\operatorname{arctg} x$ na kruh $B(0, 1) \subset \mathbf{C}$ (nezapomeňme, že každý bod intervalu $(-1, 1)$ je jeho hromadným bodem ležícím v $B(0, 1)$). Hodnoty funkce arkustangens v dalších bodech Gaussovy roviny získáme analytickým prodlužováním vhodného výchozího elementu. Podobně jako u logaritmu stačí abychom, si uvědomili, že v reálném oboru je funkce $\operatorname{arctg} x$ primitivní funkcí k $\frac{1}{1+x^2}$ a „přenesli“ do komplexní roviny. Zvolme proto výchozí element ve tvaru

$$f_0(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}. \quad (13.58)$$

Můžeme jej analyticky prodlužovat podél všech křivek spojujících body $z_0 = 0$ a $z \in \mathbf{C}$, které neprocházejí žádným z bodů $\pm i$. Rozkladem integrandu ve vztahu (13.58) na parciální zlomky převedeme celý problém na problém logaritmu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\zeta^2} &= \frac{1}{2i} \frac{1}{\zeta-i} - \frac{1}{2i} \frac{1}{\zeta+i}, \\ \operatorname{Arctg} z &= \frac{1}{2i} \int_0^z \frac{d\zeta}{\zeta-i} - \frac{1}{2i} \int_0^z \frac{d\zeta}{\zeta+i} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{-i} - \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{i}, \\ \operatorname{Arctg} z &= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}. \end{aligned} \quad (13.59)$$

Prodloužili jsme tak výchozí element arkustangenty do Gaussovy roviny s výjimkou bodů $z = \pm i$ a dokonce jej můžeme použít i pro bod $z = \infty$, neboť $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{\pi}{2}$.

Funkce arkustangens je analytická v dvojnásobně souvislé oblasti $\mathbf{C}^+ \setminus \{-i, i\}$ (a lze ji tedy prodlužovat podél libovolných křivek, které v této oblasti leží). Zvolme v oblasti $\mathbf{C}^+ \setminus \{-i, i\}$ uzavřenou křivku \mathcal{C}' . Pak

$$\begin{aligned} (\operatorname{arctg} z)_{\mathcal{C}'} &= \frac{1}{2i} \left[\frac{\ln(z-i)}{-i} \right]_{\mathcal{C}'} - \frac{1}{2i} \left[\frac{\ln(z+i)}{i} \right]_{\mathcal{C}'} = \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{\operatorname{Ln}(z-i)}{-i} + 2\pi i \operatorname{Ind}_{\mathcal{C}'}(i) \right] - \frac{1}{2i} \left[\frac{\operatorname{Ln}(z+i)}{i} + 2\pi i \operatorname{Ind}_{\mathcal{C}'}(-i) \right] \implies \\ &(\operatorname{arctg} z)_{\mathcal{C}'} = \operatorname{Arctg} z + \pi [\operatorname{Ind}_{\mathcal{C}'}(i) - \operatorname{Ind}_{\mathcal{C}'}(-i)] \end{aligned} \quad (13.60)$$

Jednoznačné větve arkustangenty jsou definovány na \mathbf{C}^+ s výřezy podél imaginární osy začínajícími v bodech i a $-i$, tj. $\mathbf{C} \setminus ((-\infty, -i] \cup [i, \infty))$. (Tento výřez zajistí, aby žádná křivka nemohla oběhnout body $-i$ a i ani jednotlivě, ani jejich dvojici.) Dodejme ještě, že hlavní větev $\operatorname{Arctg} z$ splývá na reálné ose s funkcí $\operatorname{arctg} x$.

Arkussinus

Taylorova řada reálné funkce $\arcsin x$ se středem v bodě $z_0 = 0$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} x^{2n+1}$$

konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $(-1, 1)$ (vypočtete poloměr konvergence). Po záměně $x \rightarrow z$ dostaneme řadu

$$\operatorname{Arcsin} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} z^{2n+1}, \quad (13.61)$$

která konverguje lokálně stejnoměrně v kruhu $B(0, 1)$. K vyjádření hlavní hodnoty arkussinu v oboru komplexní proměnné použijeme řešení rovnice $z = \sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-i})$, tj.

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2},$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} [iz + \sqrt{1-z^2}], \quad \arcsin z = -i \ln [iz + \sqrt{1-z^2}]. \quad (13.62)$$

Při výpočtu hlavní hodnoty arkussinu se volí hlavní hodnota odmocniny $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$. Funkce argkussinus není definována v bodech ± 1 (body větvení odmocniny) a v bodě ∞ (bod větvení logaritmu). Funkce arkussinus je analytická v oblasti $\mathbf{C} \setminus \{-1, 1\}$ (trojnásobně souvislá oblast v \mathbf{C}^+ , neboť z \mathbf{C}^+

jsou vyjmuty body ± 1 a ∞). Jednoznačné holomorfní větve jsou definovány na oblasti $\mathbf{C}^+ \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty) \cup \{\infty\})$.

Zkusme prověřit, co se stane, prodloužíme-li funkci $\text{Arcsin } z$ podél kružnice \mathcal{K} o poloměru $\varrho < 1$ se středem například v bodě 1 (jeden z bodů větvení odmocniny vystupující ve vyjádření arkussinu). Volba poloměru $\varrho < 1$ zajistí, aby kružnice „neoběhla“ bod 0, který je bodem větvení logaritmu. Při takovém oběhu dojde k záměně větví odmocniny, tj. $\sqrt{1-z^2} \rightarrow -\sqrt{1-z^2}$, tj.

$$\begin{aligned} (\arcsin z)_{\mathcal{K}} &= -i \operatorname{Ln} \left[iz - \sqrt{1-z^2} \right] = -i \operatorname{Ln} \frac{z^2 - (1+z^2)}{iz + \sqrt{1-z^2}} = \\ &= -i \left[\operatorname{Ln}(-1) - \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}) \right], \quad \text{tj.} \\ (\arcsin z)_{\mathcal{K}} &= (\arcsin z)_{\mathcal{C}'} = \pi - \operatorname{Arcsin } z, \end{aligned} \quad (13.63)$$

kde \mathcal{C}' je libovolná (uzavřená) křivka homotopická s kružnicí \mathcal{K} . Obdobná úvaha by platila, kdybychom podél zmíněné kružnice \mathcal{K} či křivky \mathcal{C}' prodlužovali jinou výchozí větev arkussinu $(\arcsin z)_v$ než hlavní, tj. $(\arcsin z)_{v,\mathcal{C}'} = \pi - (\arcsin z)$. Pokuste se o podobnou úvahu pro bod větvení odmocniny -1 .

13.4.4 Mnohoznačné funkce a integrál, fyzikální aplikace

V tomto odstavci uvedeme ukázky výpočtu reálných integrálů, jejichž integrandy obsahují po přechodu do komplexního oboru mnohoznačné funkce. Při výpočtu je pak třeba dávat pozor, zda integrační křivka přechází mezi větvemi mnohoznačné funkce a v kladném případě tutu skutečnost respektovat integrováním „správné“ větve. Ukážeme také realistické případy fyzikální aplikace z oblasti fyziky pevných látek, kde se mnohoznačné funkce vyskytnou.

Příklad 13.45: Integrál obsahující logaritmus

Úskalí integrace mnohoznačných funkcí ukážeme nejprve na jedné z nejtěžších situací, kdy integrand obsahuje logaritmus. Máme za úkol spočítat pomocí přechodu do komplexního oboru reálný integrál

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Záměna proměnné se jeví jasná, jednoduše $x \rightarrow z$, integrovaná funkce bude mít tvar $f(z) = \frac{\ln z}{(z^2+1)^2}$. Funkce $\ln z$ je analytická v $\mathbf{C}^+ \setminus \{0, \infty, i, -i\}$. Body 0 a ∞ jsou body větvení, body $\pm i$ jsou dvojnásobné póly.

Tvar integrandu (polynom čtvrtého stupně ve jmenovateli a „jen“ logaritmus v čitateli) napovídá, že integrál po „velké“ půlkružnici \mathcal{K}_R , $R \rightarrow \infty$ by mohl být nulový. Samozřejmě za chvíli provedeme pořádný odhad. Integrační křivka se však musí vyhnout bodu větvení logaritmu $z_0 = 0$. Zdá se, že by mohla být použita integrační křivka na obrázku 13.23 vpravo. Vezměme v úvahu hlavní hodnotu logaritmu $\text{Ln } z$, v horní polorovině, v níže leží „kandidát“ na integrační křivku, je $\text{Arg } z \in [0, \pi]$, křivka neobíhá bod větvení, proto hodnota logaritmu „zůstává“ na hlavní větvi. Vyjádříme integrál po zmíněné křivce $\mathcal{C} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{K}_r + \mathcal{U}_2 + \mathcal{K}_R$:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\text{Ln } z}{(z^2 + 1)^2} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{\text{Ln } z}{(z^2 + 1)^2} dz + \int_{\mathcal{K}_r} \frac{\text{Ln } z}{(z^2 + 1)^2} dz + \int_r^R \frac{\text{Ln } z}{(z^2 + 1)^2} dz + \int_{\mathcal{K}_R} \frac{\text{Ln } z}{(z^2 + 1)^2} dz.$$

Provedeme nejprve odhady integrálů po půlkružnicích. Na půlkružnici \mathcal{K}_R je $z = R e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, tj. $|\text{Ln } z| = \sqrt{\ln^2 R + t^2} \leq \sqrt{\ln^2 R + \pi^2}$. Pak

$$\left| \int_{\mathcal{K}_R} \frac{\text{Ln } z}{(z^2 + 1)^2} dz \right| \leq \int_{\mathcal{K}_R} \frac{|\text{Ln } z|}{|z^2 + 1|^2} \leq \int_0^\pi \frac{\sqrt{\ln^2 R + \pi^2}}{R^4(1 - R^{-2})^2} dt = \pi \frac{\sqrt{\ln^2 R + \pi^2}}{R^3(1 - R^{-2})^2} \rightarrow 0$$

pro $R \rightarrow \infty$. Na půlkružnici \mathcal{K}_r je $z = r e^{it}$, $t \in [\pi, 0]$, $|\text{Ln } z| = |\ln r + e^{it}| \leq \sqrt{\ln^2 r + \pi^2}$. Postupnými odhady pak dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{K}_r} \frac{\text{Ln } z}{(z^2 + 1)^2} dz \right| &\leq \int_{\mathcal{K}_r} \frac{|\text{Ln } z|}{|z^2 + 1|^2} \leq \int_\pi^0 \frac{\sqrt{\ln^2 r + \pi^2}}{|r^2 e^{2it} + 1|^2} dt \leq \\ &\leq \int_\pi^0 \frac{\sqrt{\ln^2 r + \pi^2}}{|1 - r^2|^2} dt = \pi r \frac{\sqrt{\ln^2 r + \pi^2}}{|1 - r^2|^2} \rightarrow 0 \quad \text{pro } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Zbývá vyjádřit integrály po úsečkách \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 . Pro úsečku \mathcal{U}_1 je situace jednoduchá, neboť

$$\int_{\mathcal{U}_1} \frac{\text{Ln } z}{(z^2 + 1)^2} dz = \int_r^R \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx \rightarrow I \quad \text{pro } r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty.$$

Na úsečce \mathcal{U}_2 je $\text{Ln } z = \text{Ln } x = \ln(-x) + i\pi$. Substitucí $x \rightarrow -x$ dostaneme

$$\int_{\mathcal{U}_2} \frac{\text{Ln } z}{(z^2 + 1)^2} dz = - \int_R^r \frac{\ln x + i\pi}{(x^2 + 1)^2} dx \rightarrow I + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = I - \frac{\pi}{2}$$

pro $r \rightarrow 0$ a $R \rightarrow \infty$. (Pokud jste propočítali úlohy ve cvičení 13.3.5, hodnotu integrálu $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ znáte z úlohy 12n.) Dostali jsme mezivýsledek

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{Ln} z}{(z^2 + 1)^2} dz = 2I - i\frac{\pi^2}{4}.$$

Platí však také

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{Ln} z}{(z^2 + 1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{res} f(i),$$

takže od výsledku nás dělí pouze výpočet rezidua funkce $f(z)$ v bodě i , který je dvojnásobným pólem funkce ležícím uvnitř integrační křivky \mathcal{C} (při výpočtu budeme potřebovat hodnotu $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{2}$):

$$\operatorname{res} f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z - i)^2 \frac{\operatorname{Ln} z}{(z^2 + 1)^2} \right] = \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4}.$$

Porovnáním dvojího vyjádření integrálu $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ dostaneme

$$2I - i\frac{\pi^2}{4} = 2\pi i \left(\frac{\pi}{8} + i\frac{1}{4} \right) \implies I = -\frac{\pi}{2}.$$

Příklad 13.46: Integrál obsahující obecnou mocninu

V aplikacích se často vyskytují reálné integrály obsahující obecnou mocninu, například ve tvaru

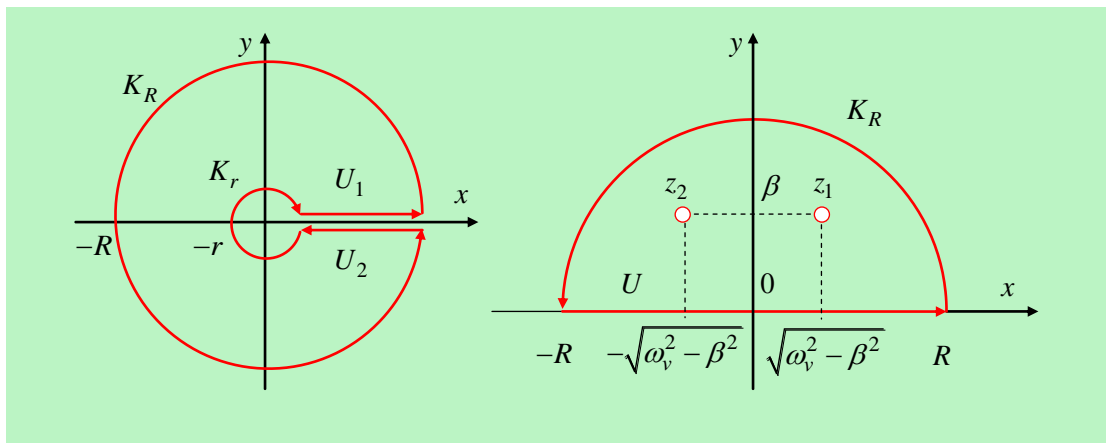
$$I = \int_0^{\infty} R(x) x^{\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

kde $R(x)$ je racionální lomená funkce a exponent α není celočíselný. Při výpočtu takového integrálu je opět vhodné přejít do komplexního oboru. Integrovaná funkce bude součinem meromorfní funkce $R(z)$ a obecné mocniny z^{α} , tj. $f(z) = R(z) z^{\alpha}$. Jejimi póly jsou kořeny jmenovatele funkce $R(z)$ a body 0 a ∞ jsou body větvení. Předpokládejme, že funkce $R(z)$ má ještě další vlastnosti, týkající se jejího chování v blízkosti bodů větvení mocniny, konkrétně

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{\alpha+1} R(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} z^{\alpha+1} R(z) = 0$$

Integrační křivka \mathcal{C} bude v tomto případě jiná než na jakou jsme dosud zvyklí. Je na obrázku 13.31 vlevo. Platí

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{res} f(z_k),$$



Obrázek 13.31: K příkladům 13.46 a 13.48.

kde index k čísluje singularity (póly) ležící v oblasti obehnuté integrační křivkou $\mathcal{C} = \mathcal{U}_\infty + \mathcal{K}_R + \mathcal{U}_2 + \mathcal{K}_r$. Při vyjádření integrálů po jednotlivých částech křivky \mathcal{C} musíme dát pozor. úsečka \mathcal{U}_2 je argument proměnné z o 2π větší než na úsečce \mathcal{U}_1 (úsečka \mathcal{U}_1 jde podél horní části výřezu směrem vpravo, úsečka \mathcal{U}_2 podél dolní části výřezu směrem vlevo). Zvolíme-li na úsečce \mathcal{U}_1 jako výchozí hlavní větev mocniny z^α , na úsečce \mathcal{U}_2 musíme počítat s větví $(z^\alpha)_{\mathcal{K}_R} = z^\alpha e^{2\pi i \alpha}$. Dostáváme tak

$$\int_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{U}_1} R(z) z^\alpha dz + \int_{\mathcal{K}_R} R(z) z^\alpha dz + \int_{\mathcal{U}_2} R(z) (z^\alpha)_{\mathcal{K}_R} dz + \int_{\mathcal{K}_r} R(z) z^\alpha dz$$

Limitní vlastnosti funkce $z^{\alpha+1}R(z)$ pro $z \rightarrow \infty$ a $z \rightarrow 0$ zaručují nulovou limitu integrálů po kružnicích \mathcal{K}_R a \mathcal{K}_r (odhady proveďte). V limitě $R \rightarrow \infty$ a $r \rightarrow 0$ pak je

$$\int_0^\infty R(x) z^\alpha dx + e^{2\pi i \alpha} \int_\infty^0 R(x) z^\alpha dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{res} f(z_k),$$

kde index k nyní čísluje všechny póly funkce $f(z)$. Po malé úpravě je

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x) dx = -\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{i\pi \alpha} \sum_k \operatorname{res} [z^\alpha R(z)]_{z_k}.$$

Tento obecný vztah použijeme hned v následujícím příkladu.

Příklad 13.47: Komplexní permitivita v okolí kritických bodů sdružené hustoty elektronových stavů

Do teorie pevných látek se v tomto textu nemůžeme ponořit. Proto budeme věřit, že tzv. komplexní permitivita látky (co to je komplexní permitivita vysvětlíme v kapitole o Laplaceově transformaci) je dána integrálem

$$\epsilon(\omega + i\eta) - 1 = \int_0^{\infty} \frac{J_{cv}\omega' d\omega'}{\omega'[(\omega')^2 - (\omega + i\eta)]},$$

kde η je kladná konstanta (tzv. rozšiřovací parametr). Komplexní funkce $\epsilon(\omega + i\eta)$ reálné proměnné ω uvedeného tvaru je rozhodující pro tvar optických spekter pevné látky v okolí přímých mezipásových přechodů elektronů. Veličina $J_{cv}(\omega')$ je již zmíněná sdružená hustota elektronových stavů valenčního a vodivostního pásu látky. V typickém případě tzv. kritického bodu $3DM_0$ (trojdimenzionální minimum sdružené hustoty stavů) závisí na (reálné) proměnné ω' vztahem $J_{cv}(\omega') = K\sqrt{\omega' - \omega_g}$ pro $\omega' \geq \omega_g$, pro $\omega' < \omega_g$ je nulová. Konstanta ω_g je kruhová frekvence odpovídající energiové vzdálenosti valenčního a vodivostního pásu v bodě přímého mezipásového přechodu, $E_g = \hbar\omega_g$. S uvážením konkrétního vztahu pro funkci $J_{cv}(\omega')$ a po substituci $x = \omega' - \omega_g$ dostaneme pro veličinu $\epsilon(\omega + i\eta)$ integrál

$$\epsilon(\omega + i\eta) = \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{(x + \omega_g)[(\omega_g + x)^2 - (\omega + i\eta)^2]}.$$

Jedná se o integrál, který jsme v obecnější podobě rozebírali v příkladu 13.46, pro $\alpha = \frac{1}{2}$ a $R(x) = \frac{1}{(x + \omega_g)[(\omega_g + x)^2 - (\omega + i\eta)^2]}$. Odpovídající funkce komplexní proměnné

$$f(z) = \frac{z^{1/2}}{(z + \omega_g)[(\omega_g + z)^2 - (\omega + i\eta)^2]}$$

má jednonásobné póly $z_1 = -\omega_g + \omega + i\eta$, $z_2 = -\omega_g - \omega - i\eta$ a $z_3 = -\omega_g$. Dosadíme-li do výsledku příkladu 13.46, dostaneme

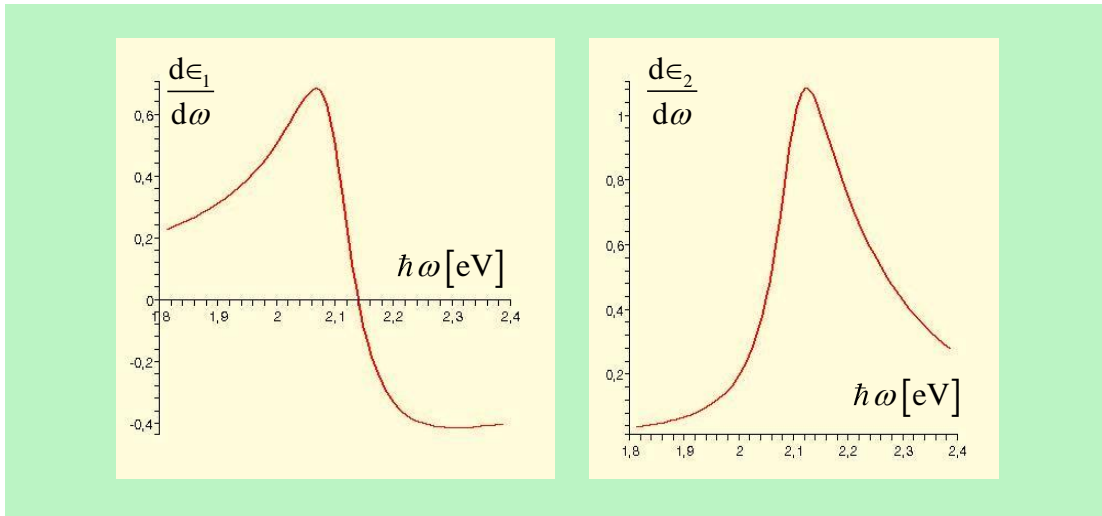
$$\epsilon(\omega + i\eta) = i\pi (\text{res } f(z_1) + \text{res } f(z_2) + \text{res } f(z_3)).$$

Už stačí jen spočítat rezidua. Vzhledem k tomu, že jsou póly jen jednonásobné, je věc jednoduchá. U odmocnin vezmeme v úvahu hlavní hodnoty, jak předepisuje vzorec z příkladu 13.46:

$$\text{res } f(z_1) = \frac{\sqrt{-\omega_g + \omega + i\eta}}{2(\omega + i\eta)^2}, \quad \text{res } f(z_2) = \frac{\sqrt{-\omega_g - \omega - i\eta}}{2(\omega + i\eta)^2}, \quad \text{res } f(z_3) = -\frac{\sqrt{-\omega_g}}{(\omega + i\eta)^2},$$

$$\epsilon(\omega+i\eta) = \frac{i\pi}{(\omega+i\eta)^2} \left[-2(-\omega_g)^{1/2} + (-\omega_g + \omega + i\eta)^{1/2} + (-\omega_g - \omega + i\eta)^{1/2} \right].$$

Pilný čtenář jistě dokáže rozdělit tuto funkci na její reálnou a imaginární část (úloha 3 ve Cvičení 13.1.5). Pro názornou představu uvádíme grafy derivace



Obrázek 13.32: Derivace reálné a imaginární části dielektrické permitivity v závislosti na frekvenci ω pro $\hbar\omega_g = 2,1$ eV a $\hbar\eta = 0,05$ eV.

reálné a imaginární části funkce $\epsilon\omega + i\eta$ pro $\omega_g = a$ a $\eta = b$ na obrázku 13.32. (U funkcí samotných jsou změny příliš malé, a také proto, že současné metody měření optických vlastností umožňují vyhodnotit z experimentu přímo derivaci dielektrické permitivity.) Reálná část je označena jako ϵ_1 , imaginární jako ϵ_2 .

Příklad 13.48: Polarizovatelnost

Veličina zvaná *polarizovatelnost* určuje odezvu látky (prostředí) na elektrické pole. Podrobněji se problémem podnětu a odezvy budeme zabývat v kapitole o Laplaceově transformaci. V tomto příkladu budeme pouze předjímat některé výsledky, abychom na nich mohli ukázat, jak se výpočty integrálů z mnohoznačných funkcí uplatní ve fyzikálních aplikacích. Předpokládejme jen závislost veličin na čase a izotropní prostředí. V oboru optických frekvencí reaguje látka na elektrické pole $E(t)$ tak, že se polarizuje. Polarizaci popisuje

veličina

$$P(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon_0 \alpha(\tau) E(t - \tau) d\tau,$$

kde $\alpha(\tau)$ je tzv. *relativní polarizovatelnost*, ε_0 je permitivita vakua (je to konstanta). Tento (lineární) integrální vztah vyhovuje principu příčinnosti. Vyjadřuje totiž fakt, že odezva je jistým způsobem zpožděna za podnětem, přesněji řečeno, odezva v okamžiku t závisí na podnětu ve všech okamžicích vůči t minulých. Později ukážeme, že polarizovatelnost, která je reálnou funkcí reálné proměnné, lze vyjádřit pomocí jejího obrazu $\tilde{\alpha}(\omega)$, závislého na frekvenci signálu šíření podnětu ($E(t) = E_0 e^{i\omega t}$) integrálním vztahem

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

přičemž nejjednodušším modelem pro získání obrazu $\tilde{\alpha}(\omega)$ je vztah $qy(t) = \varepsilon_0 \tilde{\alpha}(\omega) (E_0 e^{i\omega t})$, přičemž $y(t)$ je řešení pohybové rovnice lineárního tluměného oscilátoru s vynucující silou

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_v^2 y = \frac{q\varepsilon_0 E_0}{m} e^{i\omega t},$$

β , q a m jsou kladné konstanty (konstanta tlumení, náboj a hmotnost oscilátoru), ω_v je vlastní frekvence netlumených kmitů oscilátoru a $qy(t)$ je jeho dipólový moment. Rovnici snadno vyřešíme (nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, kdo zapomněl, jak se řeší, může vzít na pomoc kapitolu 7 v druhém dílu). Pro $\omega_v > \beta$ a v limitě pro $t \rightarrow \infty$ (vlastní kmity jsou utlumeny) přejde řešení na tvar

$$qy(t) = \frac{-q^2 \varepsilon_0 E_0 e^{i\omega t}}{\omega^2 - 2i\omega\beta - \omega_v^2}, \quad \tilde{\alpha} = -\frac{q^2}{\omega^2 - 2i\omega\beta - \omega_v^2}.$$

„Reálnou“ polarizovatelnost dostaneme výpočtem integrálu

$$\alpha(t) = -\frac{q^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{\omega^2 - 2i\omega\beta - \omega_v^2}.$$

Integrovaná funkce v komplexním oboru, kterou dostaneme jednoduše záměnou $x \rightarrow z$, tj.

$$f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2 - 2iz\beta - \omega_v^2},$$

má jednonásobné póly $z_{1,2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_v^2 - \beta^2}$. Použijeme integrační křivku $\mathcal{C} = \mathcal{U} + \mathcal{K}_R$ na obrázku 13.31 vpravo a pro dostatečně velkou hodnotu R (aby integrační křivka obehnula póly) dostaneme

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\mathcal{K}_R} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2)).$$

Integrál po půlkružnici \mathcal{K}_R je v limitě $R \rightarrow \infty$ roven nule (viz integrály typu příkladu 13.38), tj.

$$\alpha(t) = 2\pi i (\operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2)).$$

Ještě vypočteme rezidua. Platí

$$\operatorname{res} f(z_1) = \frac{e^{it(i\beta + \sqrt{\omega_v^2 - \beta^2})}}{2\sqrt{\omega_v^2 - \beta^2}}, \quad \operatorname{res} f(z_2) = -\frac{e^{it(i\beta - \sqrt{\omega_v^2 - \beta^2})}}{2\sqrt{\omega_v^2 - \beta^2}},$$

$$\operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2) = i e^{-\beta t} \frac{\sin(t\sqrt{\omega_v^2 - \beta^2})}{\sqrt{\omega_v^2 - \beta^2}}, \quad \alpha(t) = q^2 e^{-\beta t} \frac{\sin(t\sqrt{\omega_v^2 - \beta^2})}{\sqrt{\omega_v^2 - \beta^2}}.$$

U odmocniny bereme v úvahu hlavní hodnotu. (Stalo by se něco, kdybychom vzali druhou větev?)

13.4.5 Cvičení

1. Proveďte rozbor charakteru mnohoznačnosti funkce $\ln \frac{z-a}{z-b}$, $a, b \in \mathbf{C}$. Popište Riemannovy listy (tj. oblasti \mathbf{C}^+ s výřezy, na nichž jsou definovány jednoznačné větve této funkce).

2. Definujte analytické funkce arkuskotangens $\operatorname{arccotg} z$ a arkuskosinus $\operatorname{arccos} z$ pomocí $\operatorname{arctg} z$ a $\operatorname{arccos} z$ a diskutujte jejich charakter mnohoznačnosti.

Výsledek: hlavní větve: $\operatorname{Arccotg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arccos} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} z$.

3. Definujte analytické funkce, které jsou inverzními funkcemi k hyperbolickým funkcím (tzv. *hyperbolometrické* funkce) a diskutujte jejich charakter mnohoznačnosti.

Výsledky: $\operatorname{Argsinh} z = \operatorname{Ln} [z + \sqrt{z^2 + 1}]$, $\operatorname{Argcosh} z = \operatorname{Ln} [z + \sqrt{z^2 - 1}]$,
 $\operatorname{Argtgh} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$, $\operatorname{Argcotgh} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}$.

4. Dokažte následující vztahy:

a) $\sinh z = -i \sin iz$,

- b) $\cosh z = \cos iz$,
 c) $\operatorname{tgh} z = -itg iz$,
 d) $\operatorname{cotgh} z = icotg iz$.

5. Určete oblast analytičnosti zadaných funkcí a vypočtete hodnoty v předepsaných bodech. Zadání: funkční předpis, větev, body z v nichž je třeba funkci vyčíslit:

- a) $f(z) = \sqrt{\pi^2 + \ln^2 z}$, větev $f(1) = \pi$, $z = i$, $z = -i$,
 b) $f(z) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + z}}$, větev $f(8) = 2$, $z = -\frac{3}{4}$, $z = -2$,
 c) $f(z) = \ln 1 + \sqrt{z}$, větev $f(-1) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{i\pi}{4}$, $z = 4 - i0$ (dolní část výřezu),
 d) $f(z) = \arctg z$, vyjádřete obecně všechny hodnoty,
 e) $f(z) = z^z = e^{z \operatorname{Ln} z}$, hlavní větev logaritmu, $z = -e$, e1) na horním okraji výřezu, e2) na dolním okraji výřezu.

Výsledky: a) $f(i) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, $f(-i) = \frac{i\pi\sqrt{5}}{2}$, b) $f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, c) $f(4 - i0) = i\pi$,
 d) **DOPLNIT**, e1) $e^{-e(1+i\pi)}$, e2) $e^{-e(1-i\pi)}$.

6. Určete výsledek analytického prodloužení následujících mnohoznačných analytických funkcí (výchozí větev zadána) podél uzavřené křivky C' znázorněné na obrázku 13.xx.

- a) $f(z) = \sqrt[3]{z}$, výchozí větev $f(1) = 1$,
 b) $f(z) = \ln^2 z$, výchozí větev $f(1) = 0$,
 c) $f(z) = e^{z \ln z}$, za výchozí větev logaritmu volte větev hlavní,
 d) $f(z) = (1 + \sqrt{z}) \ln z$, výchozí větev $f(1) = 4\pi i$.

Výsledky: a) $(\sqrt[3]{z})_{C'} = \sqrt[3]{z} e^{-\frac{2\pi i}{3}}$, pro $z = \frac{1}{2}$ je hodnota $-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(1 + i\sqrt{3})$, b) $(\ln^2 \frac{1}{2})_{C'} = (\ln 2 + 2\pi i)^2$, c) $(e^{z \ln z})_{C'} = e^{z \ln z} e^{2\pi i z}$, pro $z = \frac{1}{2}$ je hodnota $-\sqrt{2}$, d) hodnota $[(1 + \sqrt{z}) \ln z]_{C'}$ pro $z = \frac{1}{2}$ je $-\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ln 2$.

7. Diskutujte charakter mnohoznačnosti analytických funkcí

- a) $f(z) = z^i$, charakterizujte polohu hodnot této funkce pro pevně zvolené z , tj. množinu $f(z)$,
- b) $f(z) = z^{\frac{3}{4}}$,
- c) $f(z) = z^\pi$.

Výsledky: a) $z^i = e^{-(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)} e^{i \ln |z|}$, funkce je definována na oblasti $\mathbf{C}^+ \setminus \{0, \infty\}$ a je nekonečněznačná, pro dané z leží hodnoty funkce na polopřímce $\operatorname{Arg} f(z) = \ln |z|$, moduly hodnot tvoří dvě geometrické posloupnosti s kvocienty $e^{\pm 2\pi}$, b) $z^{\frac{3}{4}} = |z|^{\frac{3}{4}} e^{\frac{3}{4}i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)}$, $k = 0, 1, 2, 3$, funkce je čtyřznačná, c) $z^\pi = |z|^\pi e^{i\pi(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)}$, $k \in \mathbf{Z}$, funkce je nekonečněznačná, pro dané z leží její hodnoty na kružnici o poloměru $|z|^\pi$ a množina těchto hodnot je hustá na této kružnici.

8. Vypočtěte následující integrály:

- a) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2} + b^2$, (**Návod:** integrační křivku zvolte podle obrázku 13.31 vlevo),
- b) $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}$, (**Návod:** funkce $f(z)$ vzniklá záměnou $x \rightarrow z$ má v Gaussově rovině s výřezem podél intervalu $[0, 1]$ na reálné ose čtyři jednoznačné holomorfní větve, na opačných stranách výřezu $\mathcal{U}_1 : z = t, t \in [0, 1]$ a $\mathcal{U}_2 : z = t, t \in [1, 0]$ má různé hodnoty, integrační křivku zvolte ve tvaru $\mathcal{C} = \mathcal{K}_R + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, kde \mathcal{K}_R je kružnice se středem v bodě 0 a poloměrem $R \rightarrow \infty$),
- c) $\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{1+x}$, $a \in (0, 1)$ (**Návod:** integrační křivku zvolte podle obrázku 13.31 vlevo),
- d) $\int_0^\infty \frac{x^2 \ln x}{(1+x^2)^2} dx$
- e) $\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx$
- f) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$
- g) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}$,

h)

Výsledky: a) $\frac{1}{2b} \ln(a^2 + b^2) \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$, b) $\frac{3\pi\sqrt[4]{2}}{64}$, c) $\frac{\pi}{\sin a\pi}$, d) $\frac{\pi}{4}$, e) $\frac{\pi^3}{8}$, f) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$,
g) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ **OVĚŘIT**

13.5 Laplaceova a Fourierova transformace

Vzpomínáte ještě na Fourierovu řadu periodické funkce? Zabývali jsme se jí v druhém dílu v odstavci 8.3.2. a také ve Cvičení 8.3.4 (úloha 9). Uvažme ji nyní ve tvaru se základní periodou $[-\ell, \ell)$, tj.

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{\pi n t}{\ell} + \beta_n \sin \frac{\pi n t}{\ell} \right),$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{\pi n t}{\ell} dt, \quad \beta_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{\pi n t}{\ell} dt, \quad \alpha_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt.$$

Oproti citované úloze jsme zde zaměnili proměnnou x za t , neboť označení x rezervujeme pro reálnou část komplexní proměnné z . Protože už pracujeme s funkcemi komplexní proměnné, bude výhodné vyjádřit goniometrické funkce pomocí komplexních jednotek,

$$\cos \frac{\pi n t}{\ell} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i\pi n t}{\ell}} + e^{-\frac{i\pi n t}{\ell}} \right), \quad \sin \frac{\pi n t}{\ell} = \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{i\pi n t}{\ell}} - e^{-\frac{i\pi n t}{\ell}} \right).$$

Fourierovu řadu pak lze (po malé úpravě) zapsat ve tvaru

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\alpha_n - i\beta_n) e^{\frac{i\pi n t}{\ell}} + (\alpha_n + i\beta_n) e^{-\frac{i\pi n t}{\ell}} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n t}{\ell}},$$

kde $c_n = \frac{1}{2}(\alpha_{-n} + i\beta_{-n})$ pro $n < 0$, $c_n = \frac{1}{2}(\alpha_n - i\beta_n)$ pro $n > 0$, $c_0 = \frac{\alpha_0}{2}$ (tj. $c_{-n} = c_n^*$ pro libovolné $n \in \mathbf{Z}$),

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{\frac{i\pi n t}{\ell}} dt.$$

A teď zauvažujme trochu nepřesně a intuitivně. Představme si, že uvažujeme o funkci $f(t)$ se stále větší a větší periodou ℓ , až nakonec pro $\ell \rightarrow \infty$ funkce fakticky přestane být periodická. Místo indexované proměnné $\frac{\pi n t}{\ell}$ nastupuje

spojitá proměnná ω a suma přejde v integrál. Místo posloupnosti koeficientů $\{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ pak máme funkci $c(\omega)$ a integrální vyjádření funkce $f(t)$ ve tvaru

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Zobrazení $f(t) \rightarrow c(\omega)$ představuje *Fourierovu transformaci* obecně neperiodické funkce $f(t)$, zobrazení $c(\omega) \rightarrow f(t)$ pak *zpětnou Fourierovu transformaci*. Samozřejmě, abychom s transformací mohli pracovat, je třeba diskutovat podmínky konvergence integrálů a další vlastnosti transformace. Přistoupíme však k problému obecněji, neboť Fourierova transformace je speciálním případem transformace Laplaceovy, která se zavádí nikoli jen formálním vyjádřením reálných goniometrických funkcí pomocí komplexních jednotek, ale rovnou obecně v komplexním oboru. Je však třeba upozornit, že odstavce o Laplaceově transformaci v tomto textu je třeba chápat spíše jako orientační seznámení s problematikou včetně nejjednodušších praktických aplikací. Je tomu tak proto, že východiskem „pořádné“ definice a rozboru problematiky je Lebesgueův integrál, jehož výklad je již mimo možnosti tohoto textu. Speciální případ Laplaceovy transformace lze založit na integrálu Riemannově, což neumožňuje důsledné rozvinutí teorie.

13.5.1 Jednostranná Laplaceova transformace

Pusťme se rovnou do definice Laplaceovy transformace. Existují různé, jen mírně odlišné verze definice, podstata problému je však stejná. Zde použijeme definici nejčastější, která se navíc dobře pamatuje.

Nechť $f(t)$ je komplexní funkce reálné proměnné t definovaná na intervalu $[0, \infty)$ taková, že Riemannův integrál

$$\mathcal{L}f = F(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt \quad (13.64)$$

absolutně konverguje alespoň v jednom bodě $z \in \mathbf{C}$. Znamená to, že alespoň pro jeden bod $z \in \mathbf{C}$ konverguje nevlastní integrál $\int_0^{\infty} |f(t) e^{izt}| dt$, tj. že existuje *konečná* limita

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B |f(t) e^{izt}| dt.$$

Pak se funkce $F(z)$ nazývá *jednostranný Laplaceův obraz* funkce $f(t)$. Množinu

$$\mathcal{L}_0 = \{f(t) \mid \mathcal{L} = F(z) \text{ existuje alespoň pro jeden bod } z \in \mathbf{C}\}$$

nazýváme *třída předmětů*. Funkce $f(t) \in \mathcal{L}_0$ se nazývá *funkce exponenciálního řádu s indexem růstu* ζ_0 , jestliže existují čísla $t_0, M \in [0, \infty)$ tak, že pro všechna $t \geq t_0$ platí $|f(t)| \leq M e^{\zeta_0 t}$. (Lze klást $t_0 = 0$.) *Jednostrannou Laplaceovou transformací* rozumíme zobrazení $\mathcal{L}_0 \ni f \rightarrow \mathcal{L}f$.

Pozn.: Obecná definice Laplaceova obrazu je formulována pomocí Lebesgueova integrálu a požaduje se konvergence integrálu typu (13.64) v Lebesgueově smyslu, jak jsme již naznačili v úvodu odstavce. V tomto textu chápeme integrál jako Riemannův, a tomu také odpovídají předpoklady.

Pro další úvahy předpokládejme, že funkce $f(t)$ je na intervalu $[0, \infty)$ po částech spojitá. Pak integrál

$$\int_0^B |f(t) e^{izt}| dt$$

existuje a má konečnou hodnotu pro každé $B > 0$. Platí

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B |f(t) e^{izt}| dt = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B |f(t)| |e^{izt}| dt \leq \lim_{B \rightarrow \infty} M \int_0^B e^{(\zeta_0 - y)t} dt = \lim_{B \rightarrow \infty} \left[\frac{M}{\zeta_0 - y} \right]_0^B.$$

Tato limita je konečná pro všechna $y = \operatorname{Im} z$, pro která je $y > \zeta_0$, tj. v části Gaussovy roviny $\mathbf{C}_h = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \zeta_0\}$. Pro taková z má integrál $\int_0^\infty |f(t) e^{izt}| dt$ konečnou hodnotu, a integrál $\int_0^\infty f(t) e^{izt} dt$ tak absolutně konverguje. Pro funkci $|F(z)|$ v oblasti \mathbf{C}_h platí

$$|F(z)| = \left| \int_0^\infty f(t) e^{izt} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t) e^{izt}| dt \leq \frac{M}{y - \zeta_0}.$$

Dokázali jsme dílčí tvrzení:

Každá po částech spojitá funkce exponenciálního řádu je prvkem třídy předmětů \mathcal{L}_0 .

Příklad 13.49: Laplaceova transformace konstantní funkce

V roli vzoru si představme konstantní funkci, $f(t) = K$. Je-li $K = 0$, je zřejmé, že integrál (13.64), definující Laplaceův obraz, je identicky nulový. Proto $F(z) = 0$ v celé Gaussově rovině \mathbf{C} . Pro $K \neq 0$ je

$$F(z) = \int_0^{\infty} K e^{izt} dt = K \left. \frac{e^{izt}}{iz} \right|_0^{\infty} = -\frac{1}{iz}, \text{ pro } y = \text{Im } z > 0.$$

Integrál (13.64) pro nenulovou konstantní funkci existuje v celé horní polorovině Gaussovy roviny.

Příklad 13.50: Laplaceova transformace exponenciální funkce

Pro $f(t) = e^{iat}$ platí

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{iat} e^{izt} dt = \left. \frac{e^{i(a+z)t}}{i(a+z)} \right|_0^{\infty} = -\frac{1}{i(a+z)} \text{ pro } \text{Im}(a+z) > 0.$$

Příklad 13.51: Absolutně integrabilní funkce

Předpokládejme, že funkce $f(t)$ je absolutně integrabilní na intervalu $[0, \infty)$, takže integrál $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ konverguje (má konečnou hodnotu). Odhadneme Laplaceův obraz této funkce

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt$$

co do absolutní hodnoty s uvážením skutečnosti, že $|e^{izt}| = |e^{iz}| \cdot |e^{-yt}|$:

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-yt} dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)| dt \text{ pro } y \geq 0.$$

Laplaceův obraz absolutně integrabilní funkce existuje v celé horní polorovině Gaussovy roviny, včetně reálné osy.

Další konkrétní příklady uvedeme až v dalším odstavci, kdy pro jejich řešení budeme moci s výhodou využít obecných vlastností Laplaceovy transformace.

13.5.2 Laplaceův obraz, jeho pozoruhodné vlastnosti a výhodné použití

Z předchozího odstavce víme, že Laplaceův obraz $F(z) = \mathcal{L}f$ funkce $f(t)$, která je absolutně integrabilní, existuje na docela „velké“ oblasti komplexní roviny — v její horní polorovině. Zjistíme, jaké má vlastnosti. Především nás bude zajímat, zda je funkce $F(z)$ holomorfní. Kdyby totiž obecně nebyla, neměla by taková transformace příliš velký význam. Vzhledem k tomu, že jedinou funkcí s komplexní proměnnou z , která do transformace vstupuje, je exponenciální funkce e^{izt} v integrandu, zdá se být holomorfnost obrazu $F(z)$ předem jasná. Musíme ji však prověřit. Označme $f(t) = g(t) + ih(t) = \operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Im} f(t)$ rozklad funkce $f(t)$ na reálnou a imaginární část, $g(t)$ a $h(t)$ jsou reálné funkce reálné proměnné. Pak

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt = \int_0^{\infty} [g(t) + ih(t)] e^{i(x+iy)t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-yt} [g(t) \cos xt - h(t) \sin xt] dt + i \int_0^{\infty} e^{-yt} [h(t) \cos xt + g(t) \sin xt] dt, \\ u(x, y) &= \operatorname{Re} F(z) = \int_0^{\infty} e^{-yt} [g(t) \cos xt - h(t) \sin xt] dt, \\ v(x, y) &= \operatorname{Im} F(z) = \int_0^{\infty} e^{-yt} [h(t) \cos xt + g(t) \sin xt] dt. \end{aligned}$$

Vyzkoušíme, zda platí Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Díky absolutní konvergenci integrálů můžeme zaměňovat pořadí parciálního derivování podle proměnných x, y s integrováním podle proměnné t a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \int_0^{\infty} e^{-yt} [-tg(t) \sin xt - th(t) \cos xt] dt, \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &= -te^{-yt} \int_0^{\infty} h(t) \cos xt + g(t) \sin xt. \end{aligned}$$

Skutečně je $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Stejně snadno se ověří druhá Cauchyova-Riemannova podmínka (proved'te). Předchozí výpočet platí nejen pro Laplaceův obraz absolutně integrabilní funkce, ale obecně pro Laplaceův obraz jakékoli funkce,

je-li definovaný na nějaké oblasti, resp. otevřené množině. Zbývá však odpovědět na otázku, jaká je pro danou funkci $f(t)$ „největší“ množina, na které Laplaceův obraz existuje. Na tuto otázku obecně odpovídá následující věta, která zároveň zahrnuje i právě odvozenou vlastnost holomorfnosti Laplaceova obrazu.

Věta 13.28: *Nechť $f(t) \in \mathcal{L}_0$. Pak existuje právě jedno číslo $\zeta_1 \in \mathbf{R}$ tak, že integrál (13.64) konverguje absolutně pro všechna $z \in \mathbf{C}$, pro která je $\operatorname{Im} z > \zeta_1$, a nekonverguje absolutně pro žádné $z \in \mathbf{C}$, pro které je $\operatorname{Im} z < \zeta_1$. V oblasti $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \zeta_1\}$ je Laplaceův obraz $F(z)$ funkce $f(t)$ holomorfní. Je-li $f(t)$ funkce exponenciálního řádu s indexem růstu ζ_0 , je $\zeta_1 \leq \zeta_0$.*

Všimněte si, že věta nehovoří i tom, zda integrál (13.64) konverguje či diverguje v bodech $z = x + i\zeta_1$. Je to analogické jako třeba u mocninných řad. tam jsme také s jistotou věděli, že řada konverguje (lokálně stejnoměrně) v otevřeném kruhu konvergence a diverguje vně tohoto kruhu. Její chování na hraniční kružnici jsme museli prověřovat případ od případu. Tak tomu je i v případě Laplaceových obrazů.

Některé části věty 13.28 máme už dokázány. Je to holomorfnost Laplaceova obrazu na množině, na které příslušný integrál (absolutně) konverguje, a také nerovnost $\zeta_1 \leq \zeta_0$ v případě, že funkce $f(t)$ je exponenciálního řádu s indexem růstu ζ_0 a že skutečně existuje číslo ζ_1 s vlastnostmi popisovanými ve větě. Předpokládejme, že tomu tak skutečně je a že funkce $f(t)$ je exponenciálního řádu s indexem růstu ζ_0 . Dále uvažujme, co by se stalo, kdyby platila nerovnost $\zeta_0 < \zeta_1$ (důkaz sporem). Pak by pro libovolný bod $z = x + i\zeta$, jehož imaginární část ζ leží v intervalu (ζ_0, ζ_1) , integrál zároveň konvergoval (neboť $\zeta > \zeta_0$) i divergoval (neboť $\zeta < \zeta_1$). A to pochopitelně není možné.

Ještě však zbývá dokázat poslední podstatou část věty, totiž existenci čísla ζ_1 určujícího „polorovinu konvergence“ a „polorovinu nekonvergence“ Laplaceova integrálu. Zvolme libovolně bod $z = x + i\zeta \in \mathbf{C}$, pro který integrál (13.64) absolutně konverguje. Platí

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{i(x+i\zeta)t} dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\zeta t} dt < \infty.$$

Předpokládejme, že množina bodů z , v nichž integrál (13.64) *nekonverguje absolutně*, je neprázdná a označme $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{\zeta}$ její libovolný bod. Pak pro každý bod w , pro který je $y = \operatorname{Im} w \leq \tilde{\zeta}$ je

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{iwt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{i(x+iy)t} dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-yt} dt \geq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\tilde{\zeta}t} dt.$$

Množina $\{y \in \mathbf{R} \mid \text{integrál (13.64) konverguje absolutně}\}$ je tedy zdola omezená. Její infimum, které označíme ζ_1 , je hledanou hodnotou omezující polovinu konvergence Laplaceova integrálu (zdola).

Základní vlastnosti Laplaceovy transformace shrneme v následující větě.

Věta 13.29 (Vlastnosti Laplaceovy transformace): *Předpokládejme, že funkce $f_i = f_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, resp. $f = f(t)$ jsou prvky třídy předmětů \mathcal{L}_0 . Označme $F_i(z)$, resp. $F(z)$ jejich Laplaceovy obrazy definované na oblasti $D \subset \mathbf{C}$. Pak*

<i>Nechť (předpoklady)</i>	<i>pak (tvrzení)</i>
$c_i \in \mathbf{C}$, $g(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t)$	$\implies \mathcal{L}g = G(z) = \sum_{i=1}^n c_i F_i(z)$ (<i>linearita</i>)
$a \in \mathbf{C}$, $g(t) = e^{iat}$	$\implies \mathcal{L}g = G(z) = F(a+z)$
$g(t) = itf(t)$	$\implies \mathcal{L}g = G(z) = F'(z)$
$f^{(n)}(t) \in \mathcal{L}_0$, $f(t)$ má na $[0, \infty)$ spojité derivace do řádu $(n-1)$ včetně, které mají v bodě $t=0$ konečné limity zprava	$\implies \mathcal{L}f' = -izF(z) - f(0_+)$ $\mathcal{L}f^{(n)} = (-iz)^n F(z) - \sum_{j=0}^{n-1} (-iz)^{n-j-1} f^{(j)}(0_+)$
$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$	$\implies \mathcal{L}g = G(z) = -\frac{F(z)}{iz}$

Dokázat tyto vlastnosti je velice snadné. První z nich, linearita, je okamžitě zřejmá z definice Laplaceovy transformace. Pro Laplaceův obraz $G(z)$ funkce $g(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t)$ dostaneme

$$G(z) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) e^{izt} dt = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \right) e^{izt} dt = \sum_{i=1}^n c_i \int_0^\infty f_i(t) e^{izt} dt = \sum_{i=1}^n c_i F_i(z).$$

Také důkaz dalších dvou vlastností je zcela přímočarý. Pro Laplaceův obraz funkce $g(t) = e^{iat} f(t)$ platí

$$G(z) = \int_0^\infty e^{iat} f(t) e^{izt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{i(a+z)t} dt = F(a+z).$$

Derivace Laplaceova obrazu funkce $f(t)$ je

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt = \int_0^{\infty} it f(t) e^{izt} dz,$$

přičemž možnost „zasunout“ derivaci podle proměnné z je zajištěna absolutní konvergencí integrálu. Pro funkci $g(t) = itf(t)$ dostaneme její Laplaceův obraz ve tvaru

$$G(z) = \int_0^{\infty} it f(t) e^{izt} dt.$$

Vidíme, že skutečně platí $G(z) = F'(z)$.

Příklad 13.52: A hned to vyzkoušíme

Prozatím jsme dokázali první tři vlastnosti ve větě 13.29. Než se pustíme do dalších důkazů, vyzkoušíme je v praxi. Pokusíme se najít Laplaceův obraz funkce $g(t) = t^2 \sin bt$. Nepůjdeme však na to z definice, ale využijeme zmíněných prvních tří vlastností z věty 13.29. Funkci $g(t)$ vyjádříme pomocí exponenciálních funkcí a drobné formální úpravy, která později umožní rovnou použít třetí vlastnosti z věty 13.29:

$$g(t) = \frac{1}{2i} t^2 (e^{ibt} - e^{-ibt}) = \frac{1}{2i} \left(-(it)^2 e^{ibt} + (it)^2 e^{-ibt} \right) = \frac{1}{2i} \left(-(it)^2 \varphi_1(t) + (it)^2 \varphi_2(t) \right).$$

Označili jsme $\varphi_1(t) = e^{ibt}$ a $\varphi_2(t) = e^{-ibt}$. Laplaceovy obrazy těchto funkcí dostaneme buď aplikací druhé vlastnosti z věty 13.29 na jednotkovou funkci, nebo přímo použitím výsledku příkladu 13.50:

$$\Phi_1(z) = -\frac{1}{i(b+z)}, \quad \Phi_2(z) = -\frac{1}{i(-b+z)}.$$

Dvojitou aplikací třetí vlastnosti z věty 13.29 pak dostaneme

$$G(z) = -\frac{1}{2i} (\Phi_1''(z) - \Phi_2''(z)) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(-\frac{1}{(b+z)} + \frac{1}{(-b+z)} \right)$$

Dvojitou derivování již proveďte sami.

Zbývá dokázat poslední dvě vlastnosti ve větě 13.29. Opět vyjdeme z definice. Předpokládejme, že funkce $f(t)$ i $f'(t)$ jsou prvky třídy předmětů. Pro Laplaceův obraz funkce $f'(t)$ (v oblasti, kde integrál vyjadřující tento obraz

absolutně konverguje) dostaneme úpravou definičního integrálu metodou per partes

$$\mathcal{L}f' = \int_0^{\infty} f'(t) e^{izt} dt = f(t) e^{izt} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} iz f e^{izt} dt = -f(0_+) - iz F(z).$$

Laplaceovy obrazy vyšších derivací dostaneme, samozřejmě za předpokladů uvedených ve větě, postupnou aplikací právě dokázaného pravidla:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f'' &= -iz f'(0_+) - iz \mathcal{L}f' = -f'(0_+) - iz(-f(0_+) - iz F(z)) = \\ &= (-iz)^2 F(z) - \sum_{j=0}^1 (iz)^{2-j-1} f^j(0_+), \end{aligned}$$

atd. Obecný vztah pro Laplaceův obraz n -té derivace funkce $f(t)$ snadno dokážeme indukcí vzhledem k n . Poslední vlastnost ve větě 13.29 okamžitě plyne z vlastnosti předposlední, aplikujeme-li ji na funkci $f(t) = g'(t)$. Vyzkoušíme ještě jednoduchý příklad na předposlední a poslední pravidlo.

Příklad 13.53: Laplaceův obraz derivace a integrálu daného předmětu

Naším úkolem bude najít Laplaceovy obrazy funkcí

$$g(t) = 2t \sin t + t^2 \cos t, \quad h(t) = t.$$

Funkce $g(t)$ je derivací funkce $f(t) = t^2 \sin bt$, $b = 1$, jejíž Laplaceův obraz jsme vyjádřili v příkladu 13.52. Předposlední pravidlo ve větě 13.29 vede k výpočtu

$$G(z) = \mathcal{L}f' = -f(0_+) - iz F(z) = -iz \left(\frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{(z+1)^3} \right).$$

Tato funkce má singularity (trojnásobné póly) na reálné ose v bodech $z = \pm 1$. Laplaceův integrál absolutně konverguje pro $\text{Im } z > 0$.

Funkce $h(t)$ je zase integrálem funkce $f(t) = 1$, konkrétně $h(t) = \int_0^t d\tau$.

Platí $F(z) = -\frac{1}{iz}$, proto

$$H(z) = \mathcal{L}h = -\frac{F(z)}{iz} = -\frac{1}{z^2}.$$

Oborem absolutní konvergence Laplaceova integrálu funkce $h(t)$ a současně oblastí holomorfnosti jejího Laplaceova obrazu je množina $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im } z > 0\}$.

Při praktických výpočtech vyžadujících nalezení Laplaceových obrazů funkcí je situace často taková, že vystačíme jen se základními obrazy vypočtenými z definice a pravidly formulovanými ve větě 13.29. V rámci Cvičení 13.5.5 si obrazy některých elementárních funkcí vypočteme — úloha 4. A když si s výsledků setavíte tabulku, můžete ji s výhodou používat při konstrukci Laplaceových obrazů funkcí, které jsou lineárními kombinacemi funkcí v jistém smyslu „základních“.

Důležitým příkladem Laplaceovy transformace, který nyní rozebereme, je nalezení Laplaceova obrazu periodické funkce

Příklad 13.54: Laplaceův obraz periodické funkce

Předpokládejme, že periodická funkce $f(t)$ je dána periodickým opakováním základního motivu, jímž je funkce $f_0(t)$ nenulová na intervalu $[0, T)$ a nulová mimo tento interval, T je perioda. Posuneme-li základní motiv o celistvý počet n period doprava, dostaneme funkci $f_n(t) = f_0(t - nT)$, $n \in (\mathbf{N} \cup \{0\})$. Periodickou funkci $f(t)$ na intervalu $[0, \infty)$ pak vytvoříme jako součet

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nT).$$

Předpokládejme, že funkce $f_0(t)$ je prvkem třídy předmětů \mathcal{L}_0 . Její Laplaceův obraz označme $F_0(z)$ a oblast, v níž příslušný Laplaceův integrál absolutně konverguje, označme D . Platí

$$F_0(z) = \int_0^{\infty} f_0(t) e^{izt} dt = \int_0^T f_0(t) e^{izt} dt.$$

Nechť také $f(t) \in \mathcal{L}_0$. Laplaceův obraz základního motivu posunutého o nT period je

$$F_n(z) = \int_0^{\infty} f_0(t - nT) e^{izt} dt = \int_{nT}^{(n+1)T} f_0(t - nT) e^{izt} dt.$$

V posledním integrálu provedeme substituci $\tau = t - nT$ a dostaneme

$$F_n(z) = e^{iznT} \int_0^T f_0(\tau) e^{iz\tau} d\tau = F_0(z) e^{iznT}.$$

Pro Laplaceův obraz funkce $f(t)$ pak platí

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_0(z) e^{iznT} = \frac{F_0(z)}{1 - e^{izT}},$$

je-li $|e^{izT}| < 1$, tj. $y > 0$, kde $y = \operatorname{Im} z$. (Výraz e^{izT} je kvocientem geometrické řady.) Laplaceův integrál funkce $f(t)$ tedy absolutně konverguje na průniku oblasti D , v níž existuje Laplaceův obraz základního motivu $f_0(t)$, s horní polorovinou Gaussovy roviny, tj. $D \cap \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

A teď obráceně: známe-li Laplaceův obraz, můžeme určit původní předmět? Problém tzv. *zpětné Laplaceovy transformace* je obtížnější než hledání Laplaceových obrazů k zadaným vzorům. Některé z vět, které se problematiky zpětné Laplaceovy transformace týkají, uvedeme tentokrát bez důkazů. Otázkou je třeba položit si nejprve takto: jak poznáme, zda zadaná funkce komplexní proměnné $F(z)$ je Laplaceovým obrazem nějakého předmětu? Následuje pak problém, jak tento předmět nalézt. Následující věta formuluje podmínky nutné pro to, aby k funkci $F(z)$ existoval nějaký předmět.

Věta 13.30: *Je-li funkce $F(z)$ Laplaceovým obrazem nějakého předmětu, pak jsou splněny následující podmínky:*

- *Existuje reálné číslo ζ_1 tak, že funkce $F(z)$ je holomorfní v polorovině $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \zeta_1\}$.*
- *Nechť $\zeta > \zeta_1$. Označme $A = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq \zeta\}$. Pak $\lim_{z \rightarrow \infty, z \in A} F(z) = 0$.*
- *Označme $M = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > k|z|, 0 < k < 1\}$. Pak existuje konečná limita $\lim_{z \rightarrow \infty, z \in M} (zF(z))$.*

Další otázkou je jednoznačnost vzoru, tj. zda je možné, aby různé vzory měly též Laplaceův obraz. Ukazuje se, že dva různé vzory $f_1(t)$ a $f_2(t)$ téhož Laplaceova obrazu se mohou na intervalu $[0, \infty)$ lišit nejvýše v bodech zanedbatelné množiny (viz odstavec 12.1.3), přičemž každý z těchto bodů je bodem nespojitosti alespoň jednoho z obou vzorů. Platí také $\int_0^\infty |f_2(t) - f_1(t)| dt = 0$.

Nejednoznačnost lze odstranit takto: nechť $f(t)$ je vzor Laplaceova obrazu $F(z)$ a bod $a \in (0, \infty)$ jeho bodem nespojitosti. Hodnotu funkce $f(t)$ v bodě a předefinujeme na $f(a) = \frac{1}{2} [f(a_-) + f(a_+)]$.

Věta 13.31 (Bromwichův vzorec): *Nechť $F(z)$ je Laplaceův obraz funkce $f(t)$. Platí*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} F(z) e^{-izt} dz = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a+ib}^{a+ib} F(x+ib) e^{-i(x+ib)t} dx, \quad (13.65)$$

integračním oborem je libovolná přímka \mathcal{P} o rovnici $z = x + ib$, $x \in \mathbf{R}$, rovnoběžná s reálnou osou a ležící v oblasti holomorfnosti funkce $F(z)$.

Zkusme větu 13.31 dokázat. Znamená to spočítat integrál

$$I = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a+ib}^{a+ib} F(z) e^{-izt} dz, \quad F(z) = \int_0^{\infty} f(t') e^{izt'} dt',$$

a dokázat, že je roven $f(t)$. Tak počítejme, samozřejmě za splnění všech předpokladů, které takový výpočet vyžaduje (postupně je budeme upřesňovat):

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a+ib}^{a+ib} F(z) e^{-izt} dz = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a+ib}^{a+ib} \left[\lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B f(t') e^{izt'} dt' \right] e^{-izt} dz = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty} \int_0^B f(t') \left[\frac{e^{iz(t'-t)}}{i(t'-t)} \right]_{-a+ib}^{a+ib} dt' = \lim_{B \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty} \int_0^B 2f(t') e^{-b(t'-t)} (a \operatorname{sinc} a(t'-t)) dt'. \end{aligned}$$

Po provedení substituce $\tau = a(t' - t)$ dostaneme integrál I do tvaru

$$I = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} g(\tau, a) \operatorname{sinc} \tau d\tau, \quad g(a, \tau) = 2f\left(t + \frac{\tau}{a}\right) e^{-\frac{b\tau}{a}}.$$

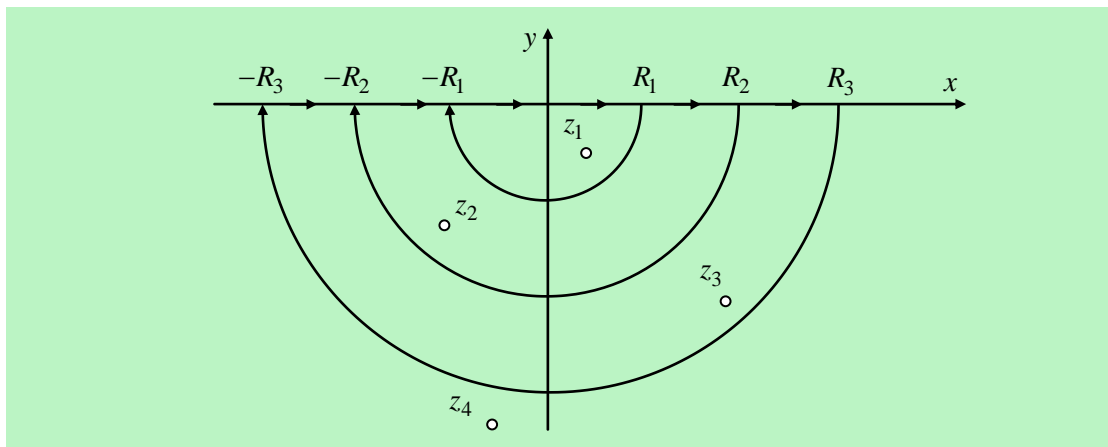
Rozšířme definiční obor funkce $g(a, \tau)$ nejprve na celou reálnou osu tak, aby vznikla funkce sudá, tj. pro $\tau < 0$ definujme $g(a, \tau) = g(a, -\tau)$, a potom do komplexního oboru. Bude-li funkce $g(a, z)$ holomorfní, můžeme bezprostředně použít výsledku příkladu 13.39 a napsat

$$I = \lim_{a \rightarrow \infty} g(0) \frac{\pi}{2} = \pi f(t) \implies f(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a+ib}^{a+ib} F(z) e^{-izt} dz.$$

A to je dokazovaný vztah pro zpětnou Laplaceovu transformaci. Připomeňme ještě jednou, že výsledek je nezávislý na volbě konstanty b . Samozřejmě je třeba, aby přímka $\mathcal{P} : z = x + ib$ ležela v oblasti holomorfnosti funkce $F(z)$.

Vzorec (13.65) se také někdy nazývá *vzorec Riemannův-Mellinův*. Protože vyžaduje přímou integraci, není pro určování vzorů příliš vhodný. Daleko praktičtější je užití reziduí.

Věta 13.32: *Nechť jsou splněny následující podmínky (obrázek 13.33):*



Obrázek 13.33: K větě 13.32.

- Funkce $F(z)$ je holomorfní v \mathbf{C} s výjimkou spočetně mnoha izolovaných pólů z_1, z_2, \dots ležících v polorovině $\{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im } z < K\}$.
- $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots$ je posloupnost kruhových oblouků, z nichž každý protíná přímku $\text{Im } z = K$ v bodech $-R_n + iK$ a $R_n + iK$, $R_1 < R_2 < \dots$.
- Každá z uzavřených křivek $\mathcal{C}_n = \mathcal{K}_n + \mathcal{U}_n$, kde $\mathcal{U}_n : z = t + iK$, $t \in [-R_n, R_n]$, obepíná póly z_1, z_2, \dots, z_n (žádný z nich neleží na \mathcal{K}_n).
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{K}_n} F(z) e^{-izt} dz = 0$.

Pak

$$f(t) = i \sum_{n=1}^{\infty} \text{res } F(z) e^{-izt} \Big|_{z=z_n}. \quad (13.66)$$

Příklad 13.55: Jak použít větu 13.32

Jako obvykle zkusíme formulované tvrzení hned použít. Uvažme funkci $f(t) = \sin \omega t$, $\omega \in \mathbf{R}$, $\omega > 0$. V reálném světě představuje tato funkce harmonické kmity s kruhovou frekvencí ω . Její Laplaceův obraz zjistíme snadno, neboť $f(t) = \frac{1}{2i} (e^{izt} - e^{-izt})$ a Laplaceův obraz exponenciálních funkce e^{iat} jsme počítali v příkladu 13.50 dokonce pro obecnou komplexní hodnotu a . Platí

$$F(z) = \frac{1}{2i} \left[-\frac{1}{i(z + \omega)} + \frac{1}{i(z - \omega)} \right] = -\frac{\omega}{z^2 - \omega^2},$$

pro všechna z , pro něž je $\operatorname{Im} z > 0$. Představme si, že máme opačný úkol: máme zadánu funkci $F(z)$ a potřebujeme zjistit předmět. Především ověříme nutné podmínky pro to, aby vzor vůbec mohl existovat. Tyto podmínky jsou dány větou 13.30. Vlastnost a) je splněna, neboť funkce $F(z)$ je holomorfní v oblasti $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, tj. $\zeta_1 = 0$. Pro limity zmiňované v požadavcích b) a c) věty 13.30 platí

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(-\frac{\omega}{z^2 - \omega^2} \right) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(-\frac{\omega z}{z^2 - \omega^2} \right) = 0.$$

Kdybychom k výpočtu vzoru chtěli použít Bromwichův vzorec (větu 13.31), museli bychom umět spočítat integrál

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a+ib}^{a+ib} -\frac{\omega}{z^2 - \omega^2} e^{-izt} dz$$

pro $z = x + ib$, $x \in (-a, a)$, $b > 0$. Použijeme-li však větu 13.32, budeme hotovi velice rychle. Funkce $G(z) = F(z) e^{-izt}$ má póly v bodech $z_1 = -\omega$ a $z_2 = \omega$, hodnoty reziduí v nich jsou

$$\operatorname{res} G(-\omega) = \lim_{z \rightarrow -\omega} \frac{-\omega e^{-izt}}{z^2 - \omega^2} (z + \omega) = \frac{1}{2} e^{i\omega t}, \quad \operatorname{res} G(\omega) = \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{-\omega e^{-izt}}{z^2 - \omega^2} (z - \omega) = -\frac{1}{2} e^{-i\omega t}.$$

Pro předmět $f(t)$ platí

$$f(t) = i(\operatorname{res} G(-\omega) + \operatorname{res} G(\omega)) = \sin \omega t.$$

Věta 13.32 výborně zafungovala, předmět k obrazu $F(z) = -\frac{\omega}{z^2 - \omega^2}$ jsme pomocí ní našli velice snadno.

Pokud si vyřešíte všechny části úlohy č. 4 ve Cvičení 13.5.5, uvidíte, jak často jsou Laplaceovými obrazy elementárních funkcí a funkcí z nich sestavených „běžnými“ operacemi, jako je lineární kombinování, popřípadě násobení, racionální ryze lomené funkce. Není v tom nějaká zákonitost? Jistěže je. Odhaluje ji následující věta.

Věta 13.33: *Racionální lomená funkce $F(z)$ je Laplaceovým obrazem jistého předmětu $f(t)$ právě tehdy, je-li ryze lomená, tj. stupeň jejího čitatele je menší než stupeň jmenovatele.*

Vypadá to skoro neuvěřitelně a docela snadno se to dokazuje pomocí věty 13.30. Předpokládejme nejprve, že funkce racionální lomená funkce $F(z)$ je

Laplaceovým obrazem nějakého předmětu. Pak podle věty 13.30 splňuje podmínky a), b) a c) (nutné podmínky). Je-li $F(z)$ racionální funkce,

$$F(z) = \frac{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_1 z + A_0}{B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \dots + B_1 z + B_0},$$

pak z podmínky b) okamžitě plyne že stupeň čitatele je nižší než stupeň jmenovatele. Podmínka c) bude již splněna automaticky, neboť

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = 0 \text{ pro } m > n + 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = \frac{A_n}{B_{n+1}} \text{ pro } m = n + 1.$$

V druhé části důkazu předpokládejme, že funkce $F(z)$ je racionální ryze lomená. Dokážeme, že pak je Laplaceovým obrazem jistého předmětu. Funkce $F(z)$ má konečně mnoho pólů. Jsou jimi nanejvýš kořeny jmenovatele. (Proč „nanejvýš“? Obecně vzato, některé kořeny čitatele a jmenovatele mohou být shodné včetně násobnosti. V takovém kořenu by funkce $F(z)$ neměla pól, ale odstranitelnou singularitu). Označíme-li ζ_1 největší ze všech hodnot imaginárních částí těchto pólů, můžeme konstatovat, že funkce $F(z)$ je holomorfní v oblasti $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \zeta_1\}$. Předpokládejme, že funkce má póly v každém z kořenů jmenovatele. Kdyby tomu tak při zadání funkce nebylo, můžeme ji dodefinovat v odstranitelných singularitách a upravit (vykrácením příslušných kořenových činitelů) tak, abychom tento předpoklad splnili. Funkci $F(z)$ můžeme rozložit na parciální zlomky. V nejjednodušším případě, kdy budou kořeny jmenovatele jednonásobné, má takový rozklad tvar

$$F(z) = \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{z - z_j}.$$

Z příkladu 13.50 víme, že funkce $-\frac{1}{i(z-z_j)}$ je Laplaceovým obrazem předmětu $f_j(t) = e^{-iz_j t}$. Označíme-li předmět k funkci $F(z)$ jako $f(t)$, dostáváme

$$f(t) = \sum_{j=1}^m -iA_j f_j(t), \quad \text{tj.} \quad F(z) = \mathcal{L} \left(-i \sum_{j=1}^m A_j e^{-iz_j t} \right),$$

kde jsme symbolem \mathcal{L}^{-1} označili zpětnou Laplaceovu transformaci. Co ale v případě, kdy kořeny jmenovatele funkce $F(z)$ budou vícenásobné? Dejme tomu, že číslo z_j je k -násobným kořenem jmenovatele funkce $F(z)$. Pak rozklad na parciální zlomky, který známe již z prvního dílu, obsahuje součet

$$\frac{A_{j,k}}{(z - z_j)^k} + \frac{A_{j,k-1}}{(z - z_j)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{j,1}}{z - z_j},$$

koeficienty jsou funkcí $F(z)$ jednoznačně určeny. Uvažme nyní obecný člen tohoto součtu, $\frac{A_{j,l}}{(z-z_j)^l}$, $l = 1, \dots, k$. Až na násobení konstantou je $(l-1)$ -tou derivací funkce $\frac{1}{z-z_j}$. Skutečně, platí

$$\frac{A_{j,l}}{(z-z_j)^l} = \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} \left(\frac{1}{z-z_j} \right), \quad l = 1, \dots, k,$$

a dál už použijeme větu 13.29:

$$\sum_{l=1}^k \frac{A_l}{(z-z_j)^l} = \mathcal{L} \left(-i \sum_{l=1}^k (-it)^{l-1} (l-1)! A_l e^{-iz_j t} \right).$$

Vyzkoušíme si právě popsaný postup na jednoduchém příkladu.

Příklad 13.56: Hledání předmětu

Ryze lomená racionální funkce

$$F(z) = -i \frac{2az}{(z^2 - a^2)^2}, \quad a \in \mathbf{C},$$

je holomorfní v \mathbf{C} s výjimkou dvojnásobných pólů $z_{1,2} = \pm a$. V polovině $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max\{-\operatorname{Im} a, \operatorname{Im} a\}\}$ je rovněž holomorfní. Podle věty 13.33 je Laplaceovým obrazem jistého předmětu $f(t)$, který, budeme-li se dost snažit, jistě najdeme. Rozložíme funkci $F(z)$ na parciální zlomky a upravíme je tak, abychom funkce, jejichž obrazy tyto zlomky budou, z rozkladu „uviděli“. Platí

$$F(z) = -i \frac{2az}{(z^2 - a^2)^2} = \frac{A_{1,2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{1,1}}{z-a} + \frac{A_{2,2}}{(z+a)^2} + \frac{A_{2,1}}{z+a}.$$

Převědeme-li všechny zlomky na pravé straně na spúolečného jmenovatele $(z^2 - a^2)$ a porovnáme čitatele levé a pravé strany, dostaneme

$$-2iaz = A_{1,2}(z+a)^2 + A_{1,1}(z-a)(z+a)^2 + A_{2,2}(z-a)^2 + A_{2,1}(z+a)(z-a)^2.$$

Jeden způsob, jak zjistit koeficienty $A_{j,l}$ je roznásobit pravou stranu a porovnat polynomy vlevo a vpravo. Jednodušší však bude, když si uvědomíme, že rovnost, kterou jsme získali, musí platit pro všechny hodnoty proměnné z . Vhodnou volbou tak získáme neznámé koeficienty přímo. Položíme-li $z = a$, resp. $z = -a$, dostaneme $-2ia^2 = 4a^2 A_{1,2}$, resp. $2ia^2 = 4a^2 A_{2,2}$, a odtud $A_{1,2} = -\frac{i}{2}$, $A_{2,2} = \frac{i}{2}$. Jestliže diskutovanou rovnost zderivujeme, dostaneme

$$-2ia = 2A_{1,2}(z+a) + A_{1,1}[(z+a)^2 + 2(z-a)(z+a)] + 2A_{2,2}(z-a) + A_{2,1}[(z-a)^2 + 2(z+a)(z-a)].$$

Opět postupně položíme $z = a$, resp. $z = -a$ a dostaneme $-2ia = 4aA_{1,2} + 4a^2A_{1,1}$, resp. $-2ia = -4aA_{2,2} + 4a^2A_{2,1}$. Dosadíme za $A_{1,2}$ a $A_{2,2}$ již dříve určené hodnoty a dostaneme $A_{1,1} = A_{2,1} = 0$. Rozklad funkce $F(z)$ na parciální zlomky je jednoduchý,

$$\begin{aligned} F(z) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{(z-a)^2} + \frac{i}{2} \frac{1}{z+a} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{-i(z-a)} - \frac{1}{i(z+a)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\mathcal{L}(e^{-iat}) - \mathcal{L}(e^{iat}) \right] = -i \frac{d}{dz} \mathcal{L}(\sin at). \end{aligned}$$

Podle třetí vlastnosti ve větě 13.29, když si v ní zaměníme označení $F(z)$ za $G(z)$ a naopak, dostáváme předmět $f(t)$, jehož Laplaceovým obrazem je zadaná funkce $F(z)$, $f(t) = t \sin at$.

Na závěr tohoto odstavce ještě ukážeme, jak je možné použít Laplaceovy transformace pro nalezení partikulárního řešení obecně nehomogenních obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty se zadanými počátečními podmínkami. Laplaceova transformace totiž umožňuje převést takové rovnice na rovnice algebraické.

Příklad 13.57: Laplaceova transformace jako nástroj pro řešení diferenciálních rovnic

Rovnici $f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = e^t$ pro neznámou funkci $f(t)$, s počátečními podmínkami $f(0_+) = 1$, $f'(0_+) = 1$, jistě umí vyřešit každý. Od toho přece máme kapitolu 7 v druhém dílu. Ukážeme si však jinou, možná i rychlejší metodu, využívající Laplaceovy transformace. Označíme $F(z)$ Laplaceův obraz předmětu $f(t)$ (předpokládáme přitom samozřejmě, že $f(t) \in \mathcal{L}_0$). Pro vyjádření derivací předmětu použijeme čtvrtou vlastnost z věty 13.29, tj.

$$\mathcal{L}f' = -izF(z) - f(0_+) = -izF(z) - 1,$$

$$\mathcal{L}f'' = -f'(0_+) - iz[-f(0_+) - izF(z)] = -1 + iz - z^2F(z)$$

, a známé vyjádření Laplaceova obraru funkce $h(t) = e^t$,

$$H(z) = \frac{1}{-i(z-i)} = -\frac{1}{1+iz}.$$

Pro Laplaceův obraz rovnice tak dostaneme

$$\left[-1 + iz - z^2F(z) \right] - 2[-izF(z) - 1] + 2F(z) = -\frac{1}{1+iz},$$

odkud

$$(-z^2 + 2iz + 2)F(z) = -\frac{1}{1+iz} - (1+iz) \implies F(z) = -\frac{1}{1+iz}.$$

Tato funkce, získaná řešením jednoduché *algebraické* rovnice, je Laplaceovým obrazem předmětu $f(t) = e^t$, který je řešením výchozí rovnice při daných počátečních podmínkách. Rychlé, že?

Příklad 13.58: A ještě jedna rovnice, tentokrát integro-diferenciální

Máme řešit následující integro-diferenciální rovnici se zadanou počáteční podmínkou:

$$f'(t) + 5f(t) + 6 \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad f(0_+) = 1.$$

Opět použijeme větu 13.29, tentokrát také její poslední vlastnost. Při označení $\mathcal{L}f = F(z)$ dostaneme

$$\mathcal{L}f' = -f(0_+) - izF(z) = -1 - izF(z), \quad \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = -\frac{F(z)}{iz},$$

$$-izF(z) + 5F(z) - \frac{6F(z)}{iz} = 0 \implies F(z) = \frac{iz}{z^2 + 5iz - 6}.$$

Rozložíme funkci $F(z)$ na parciální zlomky a z rozkladu hned „přečteme“ řešení rovnice:

$$F(z) = \frac{iz}{(z-3i)(z-2i)} = \frac{3i}{z-3i} - \frac{2i}{z-2i},$$

$$f(t) = 3e^{-3t} - 2e^{-2t}.$$

Další rovnice a soustavy rovnic k procvičení najdete v úlohách 8 a 9 Cvičení 13.5.5.

13.5.3 Dvoustranná a vícerozměrná Laplaceova transformace, Fourierova transformace

V předchozích odstavcích jsme s velmi podrobně věnovali takzvané *jednostranné, jednorozměrné* Laplaceově transformaci. „Jednostrannost“ znamenala, že oborem integrace definičního nevlastního integrálu byl interval $[0, \infty)$,

„jednorozměrnost“ pak respektovala fakt, že předmět, resp. jeho Laplaceův obraz, byly funkcemi jedné reálné proměnné t , resp. jedné komplexní proměnné z . V případě *dvoustranné* Laplaceovy transformace bude integračním oborem definičního integrálu celá reálná osa, v případě *vícerozměrné* Laplaceovy transformace budou předmět i obraz funkcemi více proměnných, konkrétně n reálných proměnných, $f = f(t_1, \dots, t_n)$, resp. n komplexních proměnných, $F = F(z_1, \dots, z_n)$. Zdaleka se nebudeme problematice těchto typů Laplaceovy transformace věnovat tak podrobně, jako jednostranné jednorozměrné Laplaceově transformaci. Dvoustranné jednorozměrné Laplaceovy transformace si všimneme proto, že se z ní jako speciální případ odvozuje Fourierova transformace, ostatní typy zmíníme pouze informativně, tentokrát bez hlubšího rozboru matematického zázemí.

Nechť $f(t)$ je komplexní funkce reálné proměnné t definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ taková, že Riemannův integrál

$$\bar{\mathcal{L}}f = \bar{F}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{izt} dt \quad (13.67)$$

absolutně konverguje alespoň ve dvou různých bodech $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Znamená to, že alespoň pro dva body $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ konverguje nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{izt}| dt$, tj. že existuje *konečná* limita

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B |f(t) e^{izt}| dt.$$

Pak se funkce $\bar{F}(z)$ nazývá *dvoustranný Laplaceův obraz* funkce $f(t)$. Množinu

$$\mathcal{L} = \{f(t) \mid \mathcal{L} = F(z) \text{ existuje alespoň pro dva různé body } z_1, z_2 \in \mathbf{C}\}$$

nazýváme *třída předmětů*. *Dvoustrannou Laplaceovou transformací* rozumíme zobrazení $\bar{\mathcal{L}} \ni f \rightarrow \bar{\mathcal{L}}f = \bar{F}(z) \in \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L})$.

Připomeňme, že integrál (13.67) chápeme v Riemannově smyslu, stejně jako u jednorozměrné Laplaceovy transformace. (Víme však, že obecnější definice bere v úvahu integrál Lebesgueův.) Pro existenci a vlastnosti dvoustranného Laplaceova obrazu platí zcela analogická tvrzení jako pro jednostranný obraz.

Věta 13.34: Předpokládejme, že dvoustranný Laplaceův obraz $\bar{F}(z)$ funkce $f(t)$ existuje pro dva různé body $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, pro něž je $\text{Im } z_1 < \text{Im } z_2$. Pak

integrál (13.67) konverguje absolutně v pásu $D_{12} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_2\}$ a funkce $F(z)$ je v tomto pásu holomorfní. Existují čísla $\zeta_m < \zeta_M$ tak, že integrál konverguje absolutně v pásu $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z_{\eta_1} \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} \zeta_2\}$, a diverguje vně tohoto pásu.

Holomorfnost dvoustranného Laplaceova obrazu v pásu jeho konvergence se dokazuje pomocí Cauchyových-Riemannových podmínek, tj. úplně stejně jako v případě jednostranné Laplaceovy transformace. Pokud jde o prověření oblasti konvergence, stačí provést příslušné odhady, při nichž opět postupujeme obdobně, jako v jednostranné transformaci. Provedme je. S uvědoměním si faktu, že nevlastní integrál je limitou

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{izt} dt = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B f(t)e^{izt} dt,$$

resp.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{izt}| dt = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B |f(t)e^{izt}| dt,$$

nebudeme v dalším textu tyto limity striktně vypisovat (stejně jsme postupovali v odstavcích týkajících se jednostranné Laplaceovy transformace). Pro $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$ platí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{izt}| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-yt} dt, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-y_1 t} dt &\geq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-yt} dt \geq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-y_2 t} dt. \end{aligned}$$

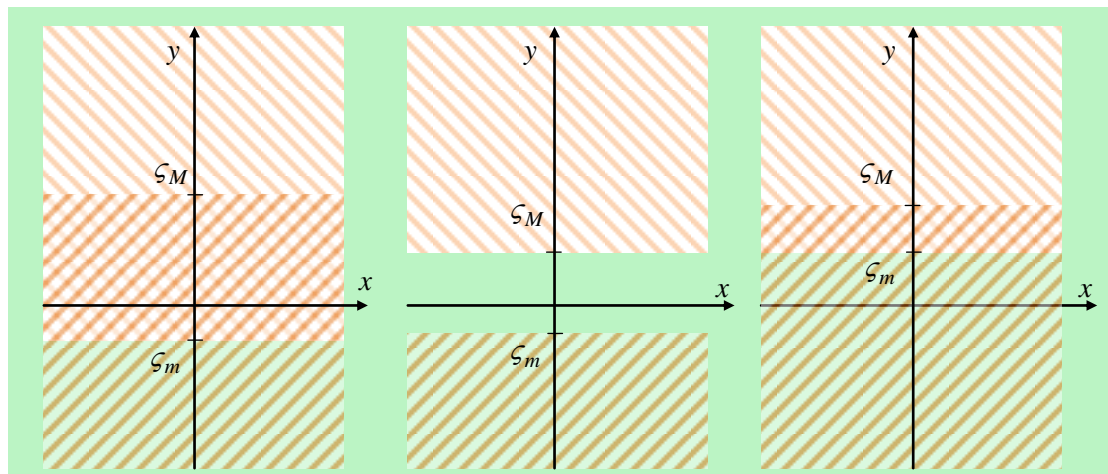
Poslední nerovnost potvrzuje absolutní konvergenci integrálu (13.67) v pásu D_{12} . V souvislosti s dvoustrannou Laplaceovou transformací provedme ještě jednu úvahu. Rozdělme definiční integrál (13.67) na dva, v intervalech $(-\infty, 0]$ a $[0, \infty)$, a odhadněme je z hlediska absolutní konvergence. Při vyjádření integrálu v mezích $(-\infty, 0]$ použijeme substituci $t \rightarrow -t$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{izt}| dt &= \int_{-\infty}^0 |f(t)|e^{-yt} dt + \int_0^{\infty} |f(t)|e^{-yt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} |f(-t)|e^{yt} dt + \int_0^{\infty} |f(t)|e^{-yt} dt. \end{aligned}$$

Integrály

$$F_-(z) = \int_0^{\infty} f(-t) e^{-izt} dt = \mathcal{L}f_-(t), \quad F_+(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-izt} dt = \mathcal{L}f_+(t), \quad (13.68)$$

kde jsme označili $f_+(t) = f(t)$ a $f_-(t) = f(-t)$ pro $t \in [0, \infty)$, vyjadřují jednostranné Laplaceovy obrazy funkcí $f_-(t)$ a $f_+(t)$. Pak $\bar{F}(z) = F_-(z) + F_+(z)$. Použijeme nyní větu 13.28. Její aplikace na integrál vyjadřující funkci $F_+(z)$ je zcela přímá: existuje číslo ζ_1 tak, že pro $\text{Im } z > \zeta_1$ integrál konverguje absolutně, pro $\text{Im } z < \zeta_1$ nekonverguje absolutně. V případě integrálu vyjadřujícího obraz $F_-(z)$ je třeba přeformulovat definici Jednostranné Laplaceovy transformace tak, že v definičním integrálu provedeme záměnu $z \rightarrow -z$. Odpovídající analogie věty 13.28 bude naopak zajišťovat existenci čísla ζ_2 tak, že integrál bude absolutně konvergovat pro $\text{Im } z < \zeta_2$ a pro $\text{Im } z > \zeta_2$ bude integrál z absolutní hodnoty integrandu divergovat. V případě, že je $\zeta_1 < \zeta_2$, je průnik oblastí absolutní konvergence obou integrálů neprázdný a můžeme označit $\zeta_m = \zeta_1$, $\zeta_M = \zeta_2$, přesně ve smyslu věty 13.34. V případě, že platí $\zeta_1 > \zeta_2$, dvoustranný Laplaceův obraz funkce $f(t)$ neexistuje a taková funkce není prvkem třídy předmětů \mathcal{L} . Situaci názorně okazuje obrázek 13.34. Vlevo je znázorněn případ, kdy existuje jak dvoustranný La-



Obrázek 13.34: Oblasti absolutní konvergence Laplaceových integrálů.

placeův obraz, tak Fourierův obraz daného předmětu. Prostřední obrázek odpovídá situaci, kdy neexistuje dvoustranný Laplaceův obraz dané funkce

$f(t)$ (a tím pádem ani obraz Fourierův), obrázek vpravo odpovídá existenci dvoustranného Laplaceova obrazu funkce $f(t)$ v pásu, který neobsahuje reálnou osu, a proto neexistuje Fourierův obraz této funkce.

Pro hodnoty proměnné z ležící v pásu konvergence $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \zeta_m < \operatorname{Im} z < \zeta_M\}$ lze pro dvoustranný Laplaceův obraz použít tvrzení platná pro obraz jednostranný, konkrétně vlastnosti z věty 13.29, vzorec (13.65) (věta 13.31) za předpokladu, že integrační přímka \mathcal{P} leží v pásu konvergence D , a také větu 13.32 umožňující zjistit předmět $f(t)$ pomocí reziduí v pólech obrazu $\bar{F}(z)$.

Označme $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ množinu všech takových funkcí ze třídy předmětů \mathcal{L} , pro něž platí $\zeta_m < 0$, $\zeta_M > 0$, tj. pro něž pás absolutní konvergence integrálu (13.67), vyjadřujícího dvoustranný Laplaceův obraz $F(z)$ předmětu $f(t)$, obsahuje reálnou osu. které tento předpoklad splňují. Funkci

$$\bar{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt \quad (13.69)$$

pro $f(t) \in \mathcal{F}$ nazýváme *Fourierův obraz* předmětu $f(t)$ a zobrazení

$$\bar{\mathcal{F}} : \mathcal{L} \ni f(t) \rightarrow \mathcal{F}f = \bar{F}(x) \in \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{L}) \subset \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{L})$$

Fourierova transformace.

Pro zpětnou (inverzní) Fourierovu transformaci platí modifikace vzorce (13.65)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(x) e^{-ixt} dx. \quad (13.70)$$

Pro hledání dvoustranných Laplaceových obrazů a Fourierových obrazů (a zpětně předmětů) je velmi užitečný vztah (13.68) můžeme často s výhodou využít i jednostranných Laplaceových obrazů, kterých budeme mít po absolvování cvičení 13.5.5 slušnou zásobu.

Příklad 13.59: Když je předmětem sudá, nebo lichá funkce

Předpokládejme, že funkce $f(t) \in \mathcal{L}$ je sudá. Pak pro její dvoustranný Laplaceův obraz dostaneme pomocí vztahu (13.68)

$$\bar{F}(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-izt} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt = F(-z) + F(z),$$

kde $F(z)$ je jednostranný Laplaceův obraz funkce $f(t)$ na intervalu $t \in [0, \infty)$. Je-li nakopak funkce $f(t)$ lichá, je $\bar{F}(z) = -F(-z) + F(z)$. Samozřejmě musíme „kontrolovat“ pás konvergence. Dejme tomu, že integrál vyjadřující jednostranný Laplaceův obraz funkce $f(t)$, $t \in [0, \infty)$, absolutně konverguje v polorovině Gaussovy roviny, v níž je $\text{Im } z > \zeta_1$, v opačné polorovině absolutně nekonverguje. Při záměně $z \rightarrow -z$ zajišťuje absolutní konvergenci podmínka $-\text{Im } z > \zeta_1$, tj. $\text{Im } z < -\zeta_1$. Oblast absolutní konvergence integrálu vyjadřujícího dvoustranný Laplaceův obraz funkce $f(t)$ bude neprázdná pouze v případě, že $\zeta_1 < 0$. V takovém případě bude touto oblastí pás $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |\zeta_1| < \text{Im } z < |\zeta_1|\}$ a ten obsahuje reálnou osu. Proto bude existovat i Fourierův obraz funkce $f(t)$.

Příklad 13.60: A teď prakticky ...

Už jsme si řekli dříve, že funkce $f(t) = \text{sinc } t = \frac{\sin t}{t}$ je ve fyzice velmi důležitá, vyskytuje se zejména v optice. Proto nás může zajímat její Fourierův obraz. V úloze 10 Cvičení 13.5.5 si sami dokážete, že jednostranným Laplaceovým obrazem tohoto předmětu je funkce $F(z) = \text{Arctg}(iz^{-1})$. Funkce $\text{sinc } t$ je sudá. Proto, jak jsme před chvílí odvodili v příkladu 13.59, dostaneme její dvoustranný Laplaceův obraz $\bar{F}(z)$ ve tvaru součtu $F(-z) + F(z)$, kde $F(z)$ je jednostranný Laplaceův obraz, tj.

$$\bar{F}(z) = \text{Arctg}(-iz^{-1}) + \text{Arctg}(iz^{-1}).$$

Vyjádření arkustangenty máme k dispozici z odstavce 13.4.3, v němž jsme pro její hlavní i obecnou větev odvodili vztah (13.59). Zde vezmeme v úvahu hlavní větev. Ve vztahu (13.59) provedeme záměny $z \rightarrow -iz$ a $z \rightarrow iz$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{F}(z) &= \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{1 + i(-iz^{-1})}{1 - i(-iz^{-1})} + \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{1 + i(iz^{-1})}{1 - i(iz^{-1})} = \\ &= \frac{1}{2i} \left[\text{Ln} \frac{z+1}{z-1} + \text{Ln} \frac{z-1}{z+1} \right]. \end{aligned}$$

Teď ale pozor! Někdo by si mohl říci, že v závorce je součet logaritmů výrazů, které jsou k sobě navzájem vázány převrácenou hodnotou, takže podle pravidel logaritmování bude výsledkem nula. To by ovšem byla pravda pouze v případě, že logaritmované výrazy jsou reálné a kladné. To ovšem obecně nejsou — mohou být dokonce komplexní. A v této situaci „obyčejná“ pravidla pro logaritmování obecně neplatí. Výsledek proto musíme ještě upravit tak, že logaritmy rozepíšeme na reálnou a imaginární část. Pro reálnou část

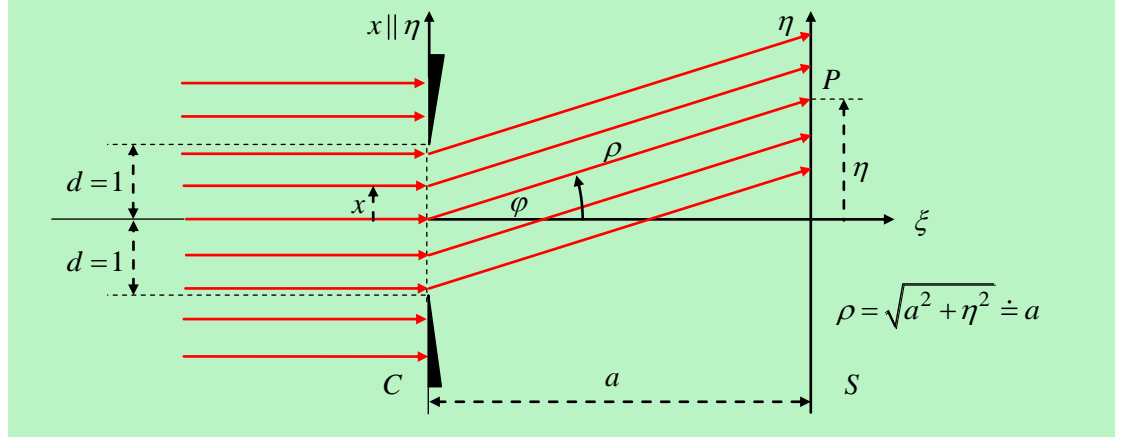
již pravidla logaritmování platit budou, dostaneme

$$\begin{aligned}\bar{F}(z) &= \frac{1}{2i} \left[\left(\ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| + i \operatorname{Arg} \frac{z+1}{z-1} \right) + \left(\ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + i \operatorname{Arg} \frac{z-1}{z+1} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{Arg} \frac{z+1}{z-1} + \operatorname{Arg} \frac{z-1}{z+1} \right].\end{aligned}$$

A jak to bude s Fourierovým obrazem funkce $\operatorname{sinc} t$? V případě Fourierovy transformace je proměnná z reálná, tj. dosazujeme $z = x$. Pro hodnoty $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ nabývají zlomky $\frac{x+1}{x-1}$ a $\frac{x-1}{x+1}$ kladných hodnot a hlavní hodnoty jejich argumentů jsou nulové. Dostaneme $\bar{F}(x) = 0$. Pro $x \in (-1, 1)$ jsou tyto zlomky záporné a hlavní hodnota každého z nich je rovna π . Dostaneme $\bar{F}(x) = 1$. Fourierův obraz funkce $\operatorname{sinc} t$ je jakýsi „puls“ konstantní (jednotkové) výšky, který se rozprostírá jen na intervalu $(-1, 1)$ (a po dodefinování jej můžeme uvažovat na intervalu $[-1, 1]$). Samozřejmě, zpětným Fourierovým obrazem tohoto pulsu bude opět funkce $\operatorname{sinc} t$.

Příklad 13.61: ... a fyzikálně

Právě získaný výsledek má značný význam. Ukazuje na těsný vztah matematického aparátu Fourierovy transformace k fyzice. I když fyzikální aplikace jsou avizovány až pro další odstavec, udělejme si malý vstup do fyziky už nyní. Představme si ve shodě s obrázkem 13.35, že na neprůhledné stínítko C (clona) s úzkou štěrbinou podél intervalu $[-d, d] = [-1, 1]$ dopadá kolmo rovnoběžný svazek světla jedné vlnové délky λ , jíž odpovídá kruhová frekvence $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$, kde T je perioda vlnění a c rychlost světla. Co uvidíme na stínítku S ? Vzhledem k tomu, že tento text není primárně fyzikální, použijeme k výkladu popisovaného experimentu značná zjednodušení. Zavedeme ještě tzv. vlnový vektor \vec{k} , jehož velikost je definována jako $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ a směr je shodný se směrem šíření světelných paprsků. Obrázek 13.35 ukazuje, jak je experiment realizován a obsahuje i další potřebná označení. Dopadající světlo se šíří podél souřadnicové osy ξ , jeho vlnový vektor má v ortonormální bázi s osami ξ, η a ζ (poslední osa není zakreslena) složky $\vec{k}_0 = (k, 0, 0)$. Vyjdeme-li z obecného tvaru zápisu rovinné vlny $E(\tau, \vec{r})$, kde proměnné τ a $\vec{r} = (\xi, \eta, \zeta)$ představují čas a prostorové souřadnice místa, v němž vlnu pozorujeme, dostaneme dopadající vlnu vztah $E = E_0 e^{-i(\omega\tau - k_0\xi)}$. V místech dopadu na clonu C je $\vec{r} = (0, \eta, \zeta)$ a $E = E_0 e^{-i\omega\tau}$. Podle jednoho ze základních principů klasické optiky, tzv. *Huygensova principu* lze šíření světelné vlny interpretovat zhruba řečeno takto: každý bod vlnoplochy (geometrického místa bodů vyznačujících se shodnou fází vlny) je zdrojem nové kulové vlny a obálka vlnoploch všech takto vzniklých sekundárních vln je vlnoplochou výsledné vlny v dalším okamžiku. Kdyby tedy rovnoběžnému svazku světla v



Obrázek 13.35: Difrakce na štěrbině.

šíření nic nepřekáželo, postupoval by nadále v podobě rovinné vlny. Clona se štěrbinou je však překážkou, která výslednou vlnoplochu změní. Dochází k ohybu a interferenci světla, k tzv. *difrakci*. Zaměříme se jen na situaci, kdy je stínítko S „hodně daleko“ od clony C , takže vlny, které k němu přicházejí, lze ve výsledku přibližně popsat opět jako rovinné. (Této aproximaci se říká *Fraunhoferova difrakce*, zatímco přesnější popis představuje difrakci *Fresnelovu*.) Předpokládejme, že výsledné vlnění pozorujeme, resp. zaznamenáváme na stínítku S v místě o souřadnicích $P = (a, \eta, 0)$. Sekundární kulová vlna o elementární amplitudě $E_0 \frac{dx}{2d} = \frac{1}{2} E_0 dx$ šířící se z obecného bodu štěrbině $(0, x, 0)$, $x \in [-1, 1]$, má v bodě $(a, \eta, 0)$ tvar

$$dE = \frac{E_0}{2\varrho} e^{-i[\omega\tau - k\sqrt{a^2 + (\eta - x)^2}]} dx,$$

výsledná funkce E je pak dána integrálem tohoto výrazu v mezích $[-1, 1]$. Předtím, než budeme integrovat, provedeme avizovanou Fraunhoferovu aproximaci. Ve jmenovateli výrazu pro sekundární vlnu nahradíme $\varrho \doteq a$ a exponent upravíme takto:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + (\eta - x)^2} &= \sqrt{a^2 + \eta^2} \sqrt{1 - \frac{2\eta x}{a^2 + \eta^2} + \frac{x^2}{a^2 + \eta^2}} \doteq \sqrt{a^2 + \eta^2} - \frac{\eta x}{\sqrt{a^2 + \eta^2}} = \\ &= \sqrt{a^2 + \eta^2} - x \sin \varphi. \end{aligned}$$

Pro vlnu v pozorovacím bodě P pak dostaneme

$$E(\tau, P) \doteq \frac{E_0}{2a} e^{-i(\omega\tau - ak)} \int_{-1}^1 e^{-ixk \sin \varphi} dx.$$

Označíme-li $t = k \sin \varphi$ a popíšeme-li „propustnost“ clony C pomocí funkce $F(x) = 1$ pro $x \in [-1, 1]$ a $F(x) = 0$ pro $x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$, můžeme vlnu v bodě P zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} E(\tau, t) = E(\tau, P) &= \frac{E_0}{2a} e^{-i(\omega\tau - ak)} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dx = \\ &= \frac{\pi E_0}{a} e^{-i(\omega\tau - ak)} \mathcal{F}^{-1} F = \frac{\pi E_0}{a} e^{-i(\omega\tau - ak)} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi E_0}{a} e^{-i(\omega\tau - ak)} \frac{\sin k \sin \varphi}{k \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Na stínítku S samozřejmě neuvidíme rozložení funkce $E(\tau, k \sin \varphi)$, ale rozložení intenzity světla, tj. $I = E^* E$,

$$I(\varphi) = \frac{\pi^2 |E_0|^2 \sin^2(k \sin \varphi)}{a^2 k^2 \sin^2 \varphi} = I_0 \frac{\sin^2(k \sin \varphi)}{k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Již jen okrajově si všimneme vícerozměrné Laplaceovy transformace, a to za zjednodušujících předpokladů.

Nechť $f(t_1, \dots, t_n)$ je komplexní funkce n reálných proměnných, která je absolutně integrabilní v \mathbf{R}^n , tj. integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(t_1, \dots, t_n)| dt_1 \dots dt_n$$

má konečnou hodnotu. Pak integrál

$$F(z_1, \dots, z_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) e^{i(z_1 t_1 + \cdots + z_n t_n)} dt_1 \dots dt_n \quad (13.71)$$

definuje n -rozměrný Laplaceův obraz funkce $f(t_1, \dots, t_n)$ a zobrazení

$$\hat{\mathcal{L}} : f(t_1, \dots, t_n) \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}f = F(z_1, \dots, z_n)$$

se nazývá n -rozměrná Laplaceova transformace.

Pro zpětnou vícerozměrnou Laplaceovu transformaci platí

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathcal{P}_1} \cdots \int_{\mathcal{P}_n} F(z_1, \dots, z_n) e^{-i(z_1 t_1 + \cdots + z_n t_n)} dz_1 \cdots dz_n, \quad (13.72)$$

kde \mathcal{P}_j , $j = 1, \dots, n$, jsou přímky v \mathbf{C}^n o rovnicích $\mathcal{P}_j : z_j = x_j + iK_j$, $z_l = 0$ pro $l \neq j$.

Nechť $F(z_1, \dots, z_n)$ je n -rozměrný Laplaceův obraz funkce $f(t_1, \dots, t_n)$. Předpokládejme, že také parciální derivace této funkce jsou absolutně integrovatelné na \mathbf{R}^n . Pak pro jejich Laplaceovy obrazy $G_j = \hat{\mathcal{L}} \frac{\partial f}{\partial t_j}$ platí

$$G_j(z_1, \dots, z_n) = -iz_j F(z_1, \dots, z_n).$$

13.5.4 Konvoluce a její Laplaceův obraz

Tento odstavec bude stručný, ale z hlediska technických a fyzikálních aplikací nesmírně důležitý. Konvoluce funkcí totiž často představují vztah mezi podnětem a odezvou při fyzikálních dějích. Přesvědčíme se o tom o něco později, v odstavci 13.6. Pojem konvoluce objasňuje následující definice.

Nechť $f(t)$, $g(t)$ a $h(t)$ jsou komplexní funkce reálné proměnné t definované na \mathbf{R} . Řekneme, že funkce $h(t)$ je *konvolucí funkcí $f(t)$ a $g(t)$* , jestliže platí

$$h(t) = \int_0^\infty f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (13.73)$$

Tuto definici lze zobecnit na případ funkcí více proměnných.

Nechť $f(t_1, \dots, t_n)$, $g(t_1, \dots, t_n)$ a $h(t_1, \dots, t_n)$ jsou komplexní funkce reálných proměnných t_1, \dots, t_n definované na \mathbf{R}^n . Řekneme, že funkce $h(t_1, \dots, t_n)$ je *konvolucí funkcí $f(t_1, \dots, t_n)$ a $g(t_1, \dots, t_n)$* , jestliže platí

$$h(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty f(\tau_1, \dots, \tau_n) g(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n. \quad (13.74)$$

Za předpokladu, že všechny funkce zúčastněné ve vztahu konvoluce splňují předpoklady pro existenci Laplaceova obrazu, můžeme provést Laplaceovu

transformaci tohoto vztahu. Provedme to pro nejjednodušší, ale pro fyzikální aplikace prakticky nejdůležitější případ, jednostrannou jednorozměrnou Laplaceovu transformaci. Označme

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt, \quad \mathcal{G}(z) = \int_0^{\infty} g(t) e^{izt} dt, \quad \mathcal{H}(z) = \int_0^{\infty} h(t) e^{izt} dt$$

Laplaceovy obrazy funkcí $f(t)$, $g(t)$ a $h(t)$. Transformujeme vztah konvoluce a použijeme při tom Fubiniovu větu. Dostáváme postupně

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int_0^{\infty} h(t) e^{izt} dz = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] e^{izt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) \left[\int_0^{\infty} g(t - \tau) e^{iz(t-\tau)} d(t - \tau) \right] e^{iz\tau} d\tau = \\ &= \mathcal{G}(z) \int_0^{\infty} f(\tau) e^{iz\tau} d\tau = \left[\int_0^{\infty} f(\tau) e^{iz\tau} d\tau \right] \left[\int_0^{\infty} g(t - \tau) e^{iz(t-\tau)} d(t - \tau) \right] \implies \\ &\mathcal{H}(z) = \mathcal{F}(z) \mathcal{G}(z). \end{aligned} \tag{13.75}$$

Skvělý výsledek! Laplaceův obraz konvoluce je prostým součinem Laplaceových obrazů funkcí, které do konvoluce vstupují! Laplaceova transformace převádí lineární integrální vztah mezi funkcemi $g(t - \tau)$ a $h(t)$ zprostředkovaný funkcí $f(\tau)$ na vztah algebraický, který lze chápat jako úměru mezi Laplaceovými obrazy $\mathcal{G}(z)$ a $\mathcal{H}(z)$ s „koeficientem“ \mathcal{F} . Analogický vztah platí i pro případ konvoluce funkcí více proměnných

$$\mathcal{H}(z_1, \dots, z_n) = \mathcal{F}(z_1, \dots, z_n) \mathcal{G}(z_1, \dots, z_n). \tag{13.76}$$

Tyto vztahy využijeme v následujícím odstavci při ukázkách fyzikálních aplikací.

13.5.5 Cvičení

1. Matematickou indukcí vzhledem k n dokažte obecný vzorec pro Laplaceův obraz n -té derivace funkce $f(t)$.

2. Z definice vypočtete Laplaceův obraz funkce $f(t) = t e^{iaz}$, $a \in \mathbf{C}$, a určete oblast D jeho holomorfnosti (tj. obor absolutní konvergence definičního

integrálu).

Výsledek: $F(z) = -\frac{1}{(a+z)^2}$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > -\operatorname{Im} a\}$

3. Z definice vypočtete Laplaceův obraz funkce $f(t) = t \sin at$, $a \in \mathbf{C}$, a určete oblast jeho holomorfnosti (tj. obor absolutní konvergence definičního integrálu).

Výsledek: $F(z) = -i \frac{2az}{(z^2 - a^2)^2}$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max\{\pm \operatorname{Im} a\}\}$

4. Vypočtete Laplaceovy obrazy následujících funkcí a určete oblasti jejich holomorfnosti:

a) $f(t) = \cos bt$,

b) $f(t) = \sin bt$,

c) $f(t) = t \cos bt$, $b \in \mathbf{C}$,

d) $f(t) = e^{iat} \cos bt$, $a, b \in \mathbf{C}$,

e) $f(t) = e^{iat} \sin bt$, $a, b \in \mathbf{C}$,

f) $f(t) = t^2 \cos bt$,

g) $f(t) = \cosh bt$, $b \in \mathbf{C}$,

h) $f(t) = \sinh bt$, $b \in \mathbf{C}$,

i) $f(t) = t^n$,

j) $f(t) = t e^{iat}$, $a \in \mathbf{C}$,

k) $f(t) = t^2 e^{iat}$, $a \in \mathbf{C}$,

l) $f(t) = t^n e^{iat}$, $a \in \mathbf{C}$,

m) $f(t) = \sin at \sinh bt$, $a, b \in \mathbf{C}$,

n) $f(t) = \cos at \sinh bt$, $a, b \in \mathbf{C}$,

o) $f(t) = \sin at \cosh bt$, $a, b \in \mathbf{C}$,

p) $f(t) = \cos at \cosh bt$, $a, b \in \mathbf{C}$,

q) $f(t) = e^{iat} \sinh bt$, $a, b \in \mathbf{C}$,

r) $f(t) = e^{iat} \cosh bt$, $a, b \in \mathbf{C}$,

s) $f(t) = \sin at \sin bt, a, b \in \mathbf{C},$

t) $f(t) = \sin at \cos bt, a, b \in \mathbf{C},$

u) $f(t) = \cos at \cos bt, a, b \in \mathbf{C},$

v) $f(t) = a^t, a \in \mathbf{R}, a > 0,$

w) $f(t) = t a^t, a \in \mathbf{R}, a > 0.$

Výsledky:

5. Uvažme funkci $f(t)$ na intervalu $[0, \infty)$, která je prvkem třídy předmětů \mathcal{L}_0 pro jednostrannou Laplaceovu transformaci a její Laplaceův obraz je $\mathcal{L}f = F(z)$. Předpokládejme, že funkce je na tomto spojitá s výjimkou bodu $a \neq 0$ a má v něm limitu $f(a_-)$ zleva, resp. limitu $f(a_+)$ zprava. Dokažte, že platí

$$\mathcal{L}f' = -izF(z) - f(0_+) - [f(a_+) - f(a_-)] e^{iaz}.$$

Zobecněte tento výsledek na obecnou po částech spojitou funkci, která je prvkem třídy předmětů. (Po částech spojitá funkce má na daném intervalu konečný počet bodů nespojitosti.)

6. Následující racionální ryze lomené funkce $F(z)$ jsou podle věty 13.33 Laplaceovými obrazy určitých předmětů (na jistých oblastech proměnné z). Najděte tyto předměty a určete oblast konvergence příslušných Laplaceových integrálů, tj. podmnožinu Gaussovy roviny, v níž je zadaná funkce $F(z)$ Laplaceovým obrazem nalezeného předmětu.

a) $F(z) = \frac{iz}{z^2 - b^2},$

b) $F(z) = -\frac{b}{z^2 - b^2},$

c) $F(z) = \frac{iz}{z^2 + b^2},$

d) $F(z) = -\frac{b}{z^2 + b^2},$

e) $F(z) = \frac{a - iz}{(a - iz)^2 + b^2},$

f) $F(z) = \frac{b}{(a - iz)^2 + b^2},$

g) $F(z) = \frac{a - iz}{(a - iz)^2 - b^2},$

h) $F(z) = \frac{b}{(a - iz)^2 - b^2},$

i) $F(z) = \frac{(a-iz)^2 - b^2}{[(a-iz)^2 + b^2]^2},$

j) $F(z) = \frac{2b(a-iz)}{[(a-iz)^2 + b^2]^2},$

k) $F(z) = \frac{1}{(z^2 - b^2)^2},$

l) $F(z) = -\frac{iz}{(a+iz)^2},$

m) $F(z) = \frac{1}{(a+iz)(b+iz)}, a \neq b,$

n) $F(z) = -\frac{z}{(z-ia)^3},$

o) $F(z) = -\frac{z^2 + a^2}{(z^2 - a^2)^2},$

p) $F(z) = \frac{2}{(1-z^2)(1-iz)^2},$

q) $F(z) = \frac{n!}{(-iz)^{n+1}}$

r) $F(z) = -\frac{1}{z^2(1-z^2)},$

s) $F(z) = \frac{3-2iz}{4-z^2},$

t) $F(z) = -\frac{3-iz}{z^2(1-z^2)},$

u) $F(z) = \frac{1}{3-4iz-z^2},$

v) $F(z) = -\frac{z^2+iz+4}{(4-iz)^2},$

Výsledky: a) $f(t) = \cos bt$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \operatorname{Im}(\pm b)\}$, b) $f(t) = \sin bt$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{\operatorname{Im}(\pm b)\}\}$, c) $f(t) = \cosh bt$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \{\max \operatorname{Re}(\pm b)\}\}$, d) $f(t) = \sinh bt$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{\operatorname{Re}(\pm b)\}\}$, e) $f(t) = e^{-at} \cos bt$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{(-\operatorname{Re} a \pm \operatorname{Im} b)\}\}$, f) $f(t) = e^{-at} \sin bt$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{(-\operatorname{Re} a \pm \operatorname{Im} b)\}\}$, g) $f(t) = e^{-at} \cosh bt$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{(-\operatorname{Re} a \pm \operatorname{Re} b)\}\}$, h) $f(t) = e^{-at} \sinh bt$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{(-\operatorname{Re} a \pm \operatorname{Re} b)\}\}$, i) $f(t) = t e^{-at} \cos bt$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{(-\operatorname{Re} a \pm \operatorname{Im} b)\}\}$, j) $f(t) = t e^{-at} \sin bt$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{(-\operatorname{Re} a \pm \operatorname{Im} b)\}\}$, k) $f(t) = \frac{\sin bt - bt \cos bt}{3b^2}$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{\pm \operatorname{Im} b\}\}$, l) $f(t) = (1 + at) e^{at}$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} a\}$, m) $f(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b\}\}$, n) $f(t) = (t + \frac{1}{2}at^2) e^{at}$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} a\}$, o) $f(t) = t \cos at$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > \max \{\pm \operatorname{Im} a\}\}$, p) $f(t) = (1 + t) e^{-t} - \cos t$, $D =$

$\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, q) $f(t) = t^n$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, r) $f(t) = t - \sin t$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, s) $f(t) = 2 \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, t) $f(t) = 3t - 1 - \cos t - 3 \sin t$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, u) $f(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > -1\}$, v) $f(t) = \frac{t}{2}(\sin 2t + 2 \cos 2t)$, $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. **Prověřit předměty, oblasti D jsou prověřeny — v pořádku.**

7. Platí tzv. *Heavisideova věta o rozkladu*: Lze-li funkci $F(z)$ pro $|z| > R$, kde $R > 0$, vyjádřit ve tvaru (lokálně stejnoměrně) konvergentní řady $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(-iz)^n}$, pak je Laplaceovým obrazem předmětu $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n t^{n-1}}{(n-1)!}$. Pomocí této věty dokažte, že funkce $F(z) = \operatorname{Arctg}(iz^{-1})$ je Laplaceovým obrazem předmětu $f(t) = \operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$.

Návod: Vyjádřete mocninné rozvoje obrazu i předmětu. V případě arkustangenty berte v úvahu hlavní větev. Uvědomte si, že platí $(\operatorname{arctg} \xi)' = \frac{1}{1+\xi^2}$, sečtěte tuto geometrickou řadu a integrujte ji.

8. Použitím Laplaceovy transformace řešte následující diferenciální rovnice se zadanými počátečními podmínkami (hledáte tedy partikulární řešení těchto rovnic).

a) $f''(t) + 5f'(t) + 6f(t) = 12e^t$, $f(0_+) = 1$, $f'(0_+) = 1$,

b) $f''(t) + 6f(t) = \cos t$, $f(0_+) = 0$, $f'(0_+) = 0$,

c) $f'''(t) + f'(t) = 12e^{2t}$, $f(0_+) = -1$, $f'(0_+) = 2$,

d) $f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) = t + e^{-t}$, $f(0_+) = 0$, $f'(0_+) = 0$,

e) $f'(t) + 6f(t) + 9 \int_0^t f(\tau) d\tau = 0$, $f(0_+) = 1$,

f) $f'(t) - f(t) - 2 \int_0^t f(\tau) d\tau = \sin t$, $f(0_+) = 0$,

g) $f(t) = \cos 3t + e^{-t} \int_0^t e^{\tau} f(\tau) d\tau$,

h) $f''(t) + f'(t) + f(t) + \int_0^t f(\tau) d\tau = 2$, $f(0_+) = 2$, $f'(0_+) = -2$.

i) $f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = 0$, $f(0_+) = 1$, $f'(0_+) = 1$,

j) $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = \sin t$, $f(0_+) = 0$, $f'(0_+) = 0$,

$$\text{k) } f''(t) + f(t) = \cos t, f(0_+) = -1, f'(0_+) = 1,$$

$$\text{l) } f'(t) + 2f(t) + \int_0^t f(\tau) d\tau = \sin t, f(0_+) = 0.$$

Výsledky: a) $f(t) = e^t$, b) $f(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$, c) $f(t) = \frac{1}{10}(36 \cos t - 12 \sin t - e^t - 15)$, d) $\frac{3}{4}(e^{-2t} - 1) - te^{-t} + \frac{t}{2}$, e) $f(t) = (1 - 3t)e^{-3t}$, f) $f(t) = \frac{1}{2}(\sin t - te^{-t})$, g) $f(t) = \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t$, h) $f(t) = 2e^{-t}$, i) $f(t) = e^t \cos t$, j) $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}(1 + t) - \frac{1}{2} \cos t$, k) $f(t) = \frac{t}{2} \sin t - \cos t + \sin t$, l) $f(t) = \frac{1}{2}(te^{-t} + \sin t)$. **Výsledky ověřit.**

9. Pomocí Laplaceovy transformace řešte následující soustavy diferenciálních rovnic za daných počátečních podmínek.

$$\text{a) } f_1'(t) - f_1(t) + 2f_2(t) = 0, f_2'(t) - 5f_1(t) - 3f_2(t) = 0, f_1(0_+) = 1, f_2(0_+) = 1,$$

$$\text{b) } f_1'(t) - 7f_1(t) + 10f_2(t) = 12e^{-t}, f_2'(t) - 3f_1(t) - 5f_2(t) = 5e^{-t}, f_1(0_+) = 2, f_2(0_+) = 1,$$

$$\text{c) } f_1''(t) + 7f_2'(t) + 8f_1(t) = 0, f_2''(t) - f_1'(t) + 2f_2(t) = 0, f_1(0_+) = 1, f_1'(0_+) = 0, f_2(0_+) = 0, f_2'(0_+) = 0,$$

$$\text{d) } f_1'(t) - f_2'(t) + 2f_1(t) = 0, f_2'(t) + 3f_2'(t) - 2f_1(t) - f_3(t) = 0, f_3'(t) - 2f_2'(t) + 3f_3(t) = 0, f_1(0_+) = 1, f_1'(0_+) = 0, f_2(0_+) = 1, f_3(0_+) = 0.$$

$$\text{e) } f_1'(t) + f_1(t) - f_2(t) = e^t, f_2'(t) - f_1(t) + f_2(t) = e^t, f_1(0_+) = 0, f_2(0_+) = 0,$$

$$\text{f) } f_1'(t) + f_2(t) = 0, f_2'(t) - 2f_1(t) - 2f_2(t) = 0, f_1(0_+) = 0, f_2(0_+) = 0.$$

Výsledky: a) $f_1(t) = e^{2t}(\cos 3t - \sin 3t)$, $f_2(t) = e^{2t}(\cos 3t + 2 \sin 3t)$, b) $f_1(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-t} + 3e^t$, $f_2(t) = -4e^{-2t} + 2e^{-t} + e^t$, c) $f_1(t) = \frac{1}{15}(7 \cos 4t - 8 \cos t)$, $f_2(t) = \frac{1}{15}(2 \cos 4t - 8 \cos t)$, d) $f_1(t) = \frac{1}{5}(1 - e^{-5t})$, $f_2(t) = \frac{1}{5}(2 + 3e^{-5t})$, $f_3(t) = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})$, e) $f_1(t) = e^t - 1$, $f_2(t) = e^t - 1$, f) $f_1(t) = e^t(\cos t - 2 \sin t)$, $f_2(t) = e^t(\cos t + 3 \sin t)$. **Provéřít výsledky i zadání — v předloze jsou chyby.**

10. Periodická funkce je zadána motivem $f_0(t) = 1$ pro $t \in [0, 1]$ a $f_0(t) = -1$ pro $t \in (1, 2)$. (Perioda této funkce je $T = 2$.) Určete Laplaceův obraz této funkce.

Výsledek: $F_0(z) = \frac{1}{z}(1 - 2e^{iz} + e^{2iz})$, $F(z) = \frac{1 - e^{iz}}{-iz(1 + e^{iz})}$,

11. Periodická funkce je zadána motivem $f_0(t) = \sin t$ pro $t \in [0, \pi]$ a $f_0(t) = 0$ pro $t \in (\pi, 2\pi)$. (Perioda této funkce je $T = 2\pi$.) Určete Laplaceův obraz této funkce.

Výsledek: $F_0(z) = \frac{1}{1-z^2}(1 + e^{i\pi z})$, $F(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-e^{i\pi z})}$.

13.6 Funkce komplexní proměnné a fyzika

Jediným způsobem, jak potvrdit fyzikální teorie, odhalující zákonitosti v reálném světě, je experiment. Experimentální fyzika samozřejmě pracuje s reálnými veličinami. To ovšem nevylučuje možnost, aby tam, kde to povaha reálných dějů připouští, pracovala fyzika s komplexními „obrazy“ reálných veličin a s formálním matematickým aparátem založeným na oněch pěkných vlastnostech funkcí komplexní proměnné, které jsme studovali v této kapitole. Důležitou ukázkou praktických aplikací vlastností funkcí komplexní proměnné bylo třeba usnadnění, ne-li dokonce umožnění výpočtů reálných integrálů přechodem do komplexního oboru. Tato aplikace byla čistě matematická, bez fyzikálního zázemí. Povaha některých fyzikálních teorií je však taková, že si o zpracování v komplexním oboru přímo říkají. Jednou z nich je teoretický popis vztahu mezi podnětem a odezvou, druhou použití tzv. konformních zobrazení pro řešení úloh hydromechaniky či elektrostatiky. Obojímu se budeme stručně věnovat v jednotlivých částech tohoto odstavce. Ne-fyzikové, nelekejte se, základní prvky fyzikálního zázemí budou vždy stručně objasněny. Čtenář, jehož fyzika nezajímá, může následující odstavce vynechat.

13.6.1 Podnět, odezva a příčinnost

Problematiku podnětu a odezvy vysvětlíme na příkladu elektrického pole. Elektrické pole v prostoru a čase pocházející od nějakých zdrojů, jimiž jsou náboje a proudy, je popsáno *elektrickou intenzitou*, která je vektorovou funkcí času a souřadnic, $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$. S intenzitou elektrického pole je těsně spjata jeho *indukce*, a to vztahem $\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t)$ pro případ, že se jedná o elektrické pole ve vakuu. Veličina ε_0 je *permitivita vakua* a má hodnotu $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$. V látkovém prostředí již situace není zdaleka tak jednoduchá. Vztah, který jste se učili na střední škole ve tvaru $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$, zahrnující vliv prostředí pomocí relativní permitivity ε_r platí jen velmi omezeně. Podívejme se na problém podrobněji s tím, že pro jednoduchost budeme uvažovat pouze o izotropním prostředí (tj. takovém, jehož vlastnosti nejsou směrově závislé). Vložíme-li látku do elektrického pole o intenzitě $\vec{E}(\vec{r}, t)$ (toto pole nazveme *podnět*), reaguje tím, že se elektricky

polarizuje. Stav polarizace je makroskopicky popsán veličinou $\vec{P}(\vec{r}, t)$, zvanou *polarizace*, která představuje *odezvu* látky na podnět. Elektrická indukce je pak dána součtem dvou příspěvků, $\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t)$. Nejjednodušší vztah mezi podnětem a odezvou, který si vůbec dovedeme představit, má tvar

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \alpha(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 (1 + \alpha(\vec{r}, t)) \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (13.77)$$

Tento vztah je

- *lineární*: odezva je úměrná podnětu, úměru zprostředkovává *odezвовá funkce* $\alpha(\vec{r}, t)$ zvaná *polarizovatelnost*, resp. $\varepsilon_0(1 + \alpha(\vec{r}, t))$ zvaná *dielektrická permitivita*,
- *lokální*: odezva v daném místě závisí na podnětu pouze v tomtéž místě,
- *synchronní*: odezva v daném okamžiku závisí na podnětu pouze v tomtéž okamžiku.

Jenže takhle to v přírodě obecně nechodí. Reakce prostředí, tj. odezva, má obvykle jistou *setrvačnost*. Částicím látky chvíli trvá, než se polarizují. Vztahy (13.77) tak představují realistický model skutečnosti jen tehdy, jsou-li (poněkud nepřesně řečeno) časové změny podnětu velmi pomalé a prostorové změny se poznají až na velkých vzdálenostech. Pokusíme se vztah mezi podnětem a odezvou „vylepšit“ tak, aby zůstala zachována jeho linearita (tj. nebudeme brát v úvahu například jevy elektrické hystereze) a lokálnost, ale aby byla respektována zmíněná „setrvačnost“ prostředí. Musíme také vzít v úvahu *příčinnost* fyzikálních jevů, na základě níž může odezva v daném okamžiku záviset na podnětu pouze v okamžicích minulých. Jediný rozumný způsob, jak toto všechno skloubit, je vyjádření odezvy v integrálním tvaru

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \alpha(\vec{r}, t - t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \alpha(\vec{r}, \tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau, \\ \vec{D}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \alpha(\vec{r}, \tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (13.78)$$

V případě, že by prostředí bylo homogenní (jeho vlastnosti by byly polohově nezávislé) by se vztahy zjednodušily,

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \alpha(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau,$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \int_0^\infty \alpha(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau. \quad (13.79)$$

Pro odezvu jsme získali *lineární, lokální a nesynchronní*, avšak *příčinné* vztahy. Odezvové funkce $\varepsilon_0 \alpha(\vec{r}, t - t')$ (*polarizovatelnost*, nebo také *dielektrická susceptibilita*), resp. $\alpha(\vec{r}, t - t')$ (*relativní polarizovatelnost*, nebo také *relativní dielektrická susceptibilita*) svazují odezvu v bodě \vec{r} v okamžiku t s podnětem v tomtéž bodě, avšak v okamžiku $t - t'$. Dielektrickou permitivitu tyto vztahy nedefinují. Další zobecnění vztahu mezi podnětem a odezvou představuje zahrnutí skutečnosti, že odezva v daném místě prostředí může obecně záviset na podnětu ve všech místech prostředí, tj.

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \int_{\mathcal{K}} \alpha(\vec{r}, \vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t') dt' d\vec{r}', \\ \vec{D}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \int_{\mathcal{K}} \alpha(\vec{r}, \vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t') dt' d\vec{r}', \end{aligned} \quad (13.80)$$

kde integračním oborem \mathcal{K} je oblast časoprostorového kužele odpovídající minulosti události (\vec{r}, t) . Tyto vztahy jsou *lineární, nelokální, nesynchronní*, avšak *příčinné* a platí pro obecně nehomogenní prostředí. V prostředí homogenním v odezvové funkci $\alpha(\vec{r}, \vec{r} - \vec{r}', t - t')$ vymizí samostatná závislost na proměnné \vec{r} a odezva je zprostředkována funkcí $\alpha(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$. Lineární příčinné vztahy mezi podnětem a odezvou, ať již lokální, nebo nelokální, dobře vystihují chování prostředí v elektrických polích tzv. *optických frekvencí*. Pro ilustraci uveďme jen rozsah optických frekvencí v oblasti viditelného světla: jedná se o frekvence zhruba v intervalu $(4, 0 - 8, 0) \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ odpovídající vlnovým délkám stovek nanometrů. Do oblastí optických frekvencí se pochopitelně zahrnuje ještě část infračervené a ultrafialové oblasti elektromagnetického spektra.

Dodejme ještě, že vztahy typu podnět-odezva, které charakterizují prostředí (materiál), v němž se odehrávají, nazýváme ve fyzice *materiálové vztahy*.

V tomto textu nám nejde o fyziku ve všech detailech, ale o fyzikální použití aparátu funkcí komplexní proměnné. Soustředíme se proto na zjednodušenou situaci, kterou popisují lineární lokální vztahy (prostředí, v nichž takové materiálové vztahy platí, se nazývají *bezdisperzní*). V případě homogenního prostředí dokonce „zmizí“ prostorová závislost. Vzhledem k linearitě a izotropnosti prostředí ani nemusíme psát vektory. Dostaneme tak jedno-

duchý tvar vztahu mezi podnětem a odezvou

$$P(t) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \alpha(\tau) E(t-\tau) d\tau, \quad D(t) = \varepsilon_0 E(t) + \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \alpha(\tau) E(t-\tau) d\tau. \quad (13.81)$$

Hned vidíme, že odezva je konvolucí odezvové funkce a podnětu! Znovu si uvědomme, že vztah konvoluce je (za předpokladu linearit) přímým důsledkem obecného principu příčinnosti!

13.6.2 Odezva látky na světlo a vliv příčinnosti aneb krásná fyzika

Předpokládejme, že všechny zúčastněné funkce jsou prvky třídy předmětů pro jednostrannou Laplaceovu transformaci a jejich Laplaceovy obrazy označme $\mathcal{P}(z)$, $\mathcal{E}(z)$ a $\tilde{\alpha}(z)$. Proč tento předpoklad? Protože v případě jeho splnění dostaneme mezi Laplaceovými obrazy těchto fyzikálních veličin algebraický vztah. Například k tomu, aby funkce $\alpha(t)$ byla prvkem třídy předmětů, stačí jednoduchá věc — aby byla absolutně integrabilní na intervalu $[0, \infty)$. A k tomu zase stačí, aby byly nenulová a ohraničená pouze na konečném intervalu. To odpovídá realitě, neboť vazba odezvy v okamžiku t k podnětu v okamžiku $t' < t$ je přirozeně tím slabší, čím jsou okamžiky t a t' vzdálenější. Funkci $\alpha(t-t') = \alpha(\tau)$ tedy jistě bude možné od jisté hodnoty τ_0 aproximovat nulou. Laplaceův obraz funkce $\alpha(\tau)$ takové realistické odezvové funkce bude holomorfní funkcí v horní polorovině Gaussovy roviny a Laplaceův integrál bude také absolutně konvergovat na reálné ose. Skutečně,

$$\int_0^{\infty} |\alpha(\tau) e^{ix\tau}| d\tau = \int_0^{\infty} |\alpha(\tau)| d\tau.$$

Podle předpokladu absolutní integrability funkce $\alpha(\tau)$ má tento integrál konečnou hodnotu.

Pro Laplaceovy obrazy $\mathcal{E}(z)$, $\tilde{\alpha}(z)$ a $\mathcal{P}(z)$ podnětu, odezvové funkce a odezvy platí vztah typu, tj. (13.75)

$$\mathcal{P}(z) = \varepsilon_0 \tilde{\alpha}(z) \mathcal{E}(z).$$

Jenže co s tím? Experimentálně potřebujeme získat odezvoovou funkci $\alpha(\tau)$ a také podnět a odezva jsou reálné funkce reálné proměnné. Pokud bychom však nějakým způsobem dokázali z reálného experimentu získat funkci $\tilde{\alpha}(z)$, mohli bychom pomocí zpětné transformace nalézt odezvoovou funkci $\alpha(\tau)$

charakterizující chování látky v elektromagnetickém poli při frekvencích, pro něž platí vztah (13.81). A jak se ukazuje, příroda je dokonce taková, že umožňuje porovnávat mikroskopické kvantověmechanické modely odezvy na světlo přímo s Laplaceovým obrazem odezvové funkce na reálné ose. To má ovšem dalekosáhlý význam: například u pevných látek, kde odezva souvisí s přechody elektronů v mezi valenčním a vodivostním pásem, to umožňuje studovat tvar těchto elektronových pásem a pochopit tak další procesy v pevných látkách. Podívejme se tedy, co se bude „matematicky“ dít, bude-li na prostředí dopadat monochromatická rovinná vlna $E(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$. Tato funkce je reálnou částí komplexní rovinné vlny $E(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$, jejíž zápis známe z příkladu 13.61. Vzhledem k tomu, že reálná a imaginární část komplexních funkcí jsou určeny jednoznačně, můžeme pracovat z komplexní vlnou — bude to jednodušší. Pro pochopení problému získání časové závislosti odezvové funkce, resp. jejího Laplaceova obrazu, není důležitá prostorová závislost funkcí, proto stačí zapsat pouze časovou část dopadající vlny, $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ (popřípadě si představit, že prostorová část je zahrnuta v E_0). Počítejme odezvu,

$$\begin{aligned} P(t) &= \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \alpha(\tau) E(t - \tau) d\tau = \varepsilon_0 E_0 \int_0^{\infty} \alpha(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau = \\ &= \varepsilon_0 E_0 e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} \alpha\tau e^{i\omega\tau} d\tau \implies \\ P(t) &= \varepsilon_0 \tilde{\alpha}(\omega) E(t), \quad D(t) = \varepsilon_0(1 + \tilde{\alpha}(\omega))E(t) = \tilde{\varepsilon}(\omega)E(t). \quad (13.82) \end{aligned}$$

(V posledním vztahu jsme použili označení $\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + \tilde{\alpha}(\omega)$, které ovšem neznamená, že $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ je hodnota Laplaceova obrazu funkce $\varepsilon(t)$. O existenci jejího Laplaceova obrazu jsme nic nepředpokládali.)

Uvažujme, co právě získaný výsledek principiálně znamená. Pokud bychom dokázali experimentálně zjistit odezvu látky na monochromatickou vlnu o kruhové frekvenci ω , dostali bychom přímo hodnotu Laplaceova obrazu odezvové funkce (polarizovatelnosti) v bodě $z = \omega + i0$ komplexní roviny, tj. na reálné ose. Měření spektrální závislosti odezvy, tj. její závislosti na frekvenci dopadající monochromatické vlny, by umožnilo získat spektrální závislosti Laplaceova obrazu odezvové funkce na reálné ose. Už to samo o sobě je dostatečné pro možnost testování relevance teoretických mikroskopických modelů (polarizovatelnost v závislosti na frekvenci totiž dokáže kvantová teorie například u pevných látek spočítat na základě modelu jejich elektronové pásové struktury). Ve skutečném experimentu ale situace není tak jednoduchá, jak se nám z předchozí jednoduché úvahy může jevit. Úvaha naznačuje

pouze podstatu toho, jak se experimentálně k odezvové funkci dostat. Popíšme, jak experiment zhruba probíhá ve skutečnosti. Dejme tomu, že světlo dopadá na vhodně upravený vzorek, vyleštěný objemový blok, nebo tenkou destičku. Částečně se odráží, částečně absorbuje, částečně projde (je-li vzorek dost tenký). Dejme tomu, že budeme měřit odražené světlo, popsané vlnou o amplitudě $E_r = \tilde{r}E_0$, kde \tilde{r} je *koefficient odrazivosti*. Pracujeme-li s vlnami formálně jako s vlnami komplexními, je koeficient odrazivosti samozřejmě rovněž komplexní a můžeme jej zapsat ve tvaru $\tilde{r} = \varrho e^{i\theta}$, kde $\varrho = |\tilde{r}|$ je jeho modul a θ jeho fáze. Koeficient odrazivosti zachycuje jak změnu amplitudy vlny vlivem odrazu, tak změnu její fáze. Závisí na úhlu dopadu, frekvenci a polarizaci dopadající vlny a samozřejmě na vlastnostech látky. Potřebujeme vědět, jak $\tilde{r}(\omega)$ souvisí s odezovou funkcí $\tilde{\alpha}(\omega)$. Fyzika říká toto: při kolmém dopadu světla na povrch vzorku (úhel dopadu je nulový, polarizace není podstatná) platí

$$\tilde{r}(\omega) = \varrho(\omega) e^{i\theta(\omega)} = \frac{\tilde{n}(\omega) - 1}{\tilde{n}(\omega) + 1}, \quad \tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0[1 + \tilde{\alpha}(\omega)] = [\tilde{n}(\omega)]^2,$$

kde $\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + ik(\omega)$ je tzv. *komplexní index lomu*, jeho reálná a imaginární část jsou index lomu (vystupující ve Snellově zákonu) a index absorpce látky. Zdá se to být jednoduché. Stačí přece změřit frekvenční spektrum koeficientu odrazivosti a z výše uvedených jednoduchých vztahů získáme spektrum odezvové funkce, již přímo porovnatelné a výpočty mikroskopických modelů. Ale to by nebyla fyzika, aby nám co cesty nepoložila další překážku. Přímým měřením je dostupná pouze intenzita odraženého světla, tj. veličina $|E_r|^2$, a odpovídající kvadrát modulu koeficientu odrazivosti $R(\omega) = |\tilde{r}|^2 = \varrho^2$, nazývaný *odrazivost*. Jinými slovy, při experimentu se *ztrácí* informace o fázi. Tato informace však naštěstí není ztracena úplně. Vzpomínáte si ještě na příklad 13.20? V něm jsme již narazili na pojem komplexní dielektrické permitivity, kterou jsme ve zmíněném příkladu značili $\epsilon(z)$, avšak její fyzikální význam jsme nevysvětlovali. Předpokládali jsme, že veličina $\alpha(z) = \epsilon(z) - 1$ je holomorfní v horní polorovině Gaussovy roviny a dokázali jsme pro ni platnost Kramersových-Kronigových relací (13.27), resp. (13.28), udávajících vztah mezi reálnou a imaginární částí funkce $\epsilon(z) - 1$ na reálné ose, tj. pro $z = \omega + i0$. Veličinu ϵ jsme nazvali komplexní relativní Souvislost veličiny ϵ s permitivitou $\tilde{\epsilon}$ je jednoduchá, $\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0\epsilon(\omega)$. Z Kramersových-Kronigových vztahů pro veličinu $\tilde{\alpha}(\omega) = \tilde{\epsilon} - 1$ a z její souvislosti s koeficientem odrazivosti snadno odvodíme integrální vztah pro fázi

koeficientu odrazivosti

$$\theta(\omega) = -\frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln [R(x)/R(\omega)]}{x^2 - \omega^2} dx,$$

který vyplývá z relací

$$\theta(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln \varrho(x)}{x^2 - \omega^2} dx, \quad \ln \varrho(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x\theta(x)}{x^2 - \omega^2} dx,$$

pro $\omega > 0$. Problém spočívající v tom, že neznáme a ani nemůžeme změřit spektrum odrazivosti v nekonečném oboru frekvencí, se v praxi řeší pomocí extrapolace spektra z oblasti frekvencí, v níž jsme měření prováděli, do oblastí sousedních (nižších a vyšších frekvencí). K extrapolaci lze třeba použít měření, která již byla v potřebných oblastech frekvencí provedena jinými autory zabývajícími se vlastnostmi dané látky v odlišném spektrálním rozsahu. Pokud taková měření v literatuře nenajdeme, musíme se spokojit s extrapolací nulovou funkcí, což samozřejmě vede k méně přesným výsledkům.

Příklad 13.62: Plazmony

V příkladu 13.48 jsme kvůli procvičení výpočtu reálných integrálů převodem do komplexního oboru uvedli ukázkou mikroskopického modelu odezvy fyzikální soustavy na elektrické pole dané frekvence. Tehdy jsme ještě nehovořili v souvislosti se vztahem podnět-odezva o Laplaceově transformaci. Když se k příkladu 13.48 vrátíme, uvidíme, že jsme pomocí modelu popisujícího mechanismus odezvy fakticky vypočítali dvoustranný Laplaceův obraz odezvové funkce (relativní polarizovatelnosti) na reálné ose (tj. Fourierův obraz) a zpětnou transformací jsme pak získávali „skutečnou“ odezvovou funkci. Uvedeme ještě jeden příklad výpočtu Laplaceova obrazu polarizovatelnosti pomocí modelu. Konkrétně půjde o volné elektrony v látce, které vlivem elektrického pole konají tzv. *plazmové kmity*. Uvažujme o systému volných elektronů s objemovou koncentrací N_0 . Nejjednodušším klasickým mikroskopickým modelem pohybu tohoto systému v elektrickém poli $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ je *model Drudeho*, založený na pohybové rovnici

$$m\dot{\vec{v}} + m\Gamma\vec{v} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t},$$

kde m a e představují hmotnost a náboj elektronu, \vec{v} jeho rychlost, Γ parametr charakterizující tlumení. Řešením této rovnice je vektorová funkce

$$\vec{v}(t) = \vec{A} e^{-\Gamma t} + \frac{ie\vec{E}_0}{m(\omega + i\Gamma)} e^{-i\omega t},$$

kde \vec{A} je vektorová integrační konstanta. Pro „dlouhé časy“, kdy dochází k utlumení příspěvku $\vec{A}e^{-\Gamma t}$ (obecné řešení odpovídající homogenní rovnice) v porovnání s příspěvkem odpovídajícím vynucující síle (partikulární řešení nehomogenní rovnice), dostáváme pro rychlost a odpovídající proudovou hustotu $\vec{j} = eN_0\vec{v}$ vztahy

$$\vec{v}(t) = \frac{ie\vec{E}_0}{\omega + i\Gamma} e^{-i\omega t}, \quad \vec{j}(t) = \frac{ie^2N_0\vec{E}_0}{m(\omega + i\Gamma)} e^{-i\omega t}.$$

Před chvílí jsme odvodili vztah (13.82) $\vec{P}(t) = \varepsilon_0\tilde{\alpha}(\omega)\vec{E}(t)$. Abychom získali funkci $\tilde{\alpha}(\omega)$, potřebujeme ještě dát do souvislosti veličiny \vec{P} a \vec{j} . Tato souvislost je obsažena v rovnici

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\alpha}(\omega)\vec{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Dostáváme tak

$$\tilde{\alpha}(\omega) = -\frac{e^2N_0}{\varepsilon_0m} \frac{1}{\omega(\omega + i\gamma)}, \quad \tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\Gamma)} \right], \quad \omega_p^2 = \frac{e^2N_0}{\varepsilon_0m}.$$

Hodnotu ω_p nazýváme *plazmová frekvence*. Výpočet jsme provedli pro systém elektronů ve vakuu. V prostředí o statické relativní permitivitě ε_S je třeba ještě funkci $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ touto hodnotou vynásobit.

Čtenáře, kterého fyzika zajímá, napadne otázka, kde a proč jsme vzali název *plazmová frekvence*. Frekvence by měla odpovídat nějakým kmitům. O jaké kmity jde v tomto případě? Stručné elementární vysvětlení omezující se na jednorozměrný pohyb podél osy ξ by mohlo vypadat třeba takto: Představme si, že element náboje (vytvářeného elektrony) se z bodu o souřadnici ξ vysune z rovnováhy o výchylku $u(\xi, t)$. Náboj $N_0 d\xi$, rozložený v rovnováze v intervalu $(\xi, \xi + du)$, se rozloží do intervalu $(\xi + u, \xi + u + d\xi + du)$, odpovídající koncentrace bude $N = N(\xi, t)$. Pak

$$N_0 d\xi = N(d\xi + du) \implies N \doteq N_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right).$$

V rovnováze je hustota celkového náboje (tvořeného kladnými ionty a zápornými elektrony) nulová. Předpokládejme, že rozložení iontů se nemění. Vlivem posunu elementu elektronového náboje se celková hustota náboje změní a bude popsána funkcí

$$\varrho = e[N - N_0] = -eN_0 \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Ve vakuu platí odpovídá této hustotě náboje intenzita elektrického pole daná první Maxwellovou rovnicí

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \varrho \implies \frac{\partial E}{\partial \xi} = -\frac{eN_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

přičemž pro $u = 0$ je $E = 0$. Pohybová rovnice elementu elektronového náboje má tedy tvar

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{e^2 N_0}{\varepsilon_0} u = 0 \implies m\ddot{u} + \omega_p^2 u = 0.$$

Jejím řešením jsou netlumené kmity právě s plazmovou frekvencí, $u(\xi, t) = A(\xi) \cos \omega_p t + B(\xi) \sin \omega_p t$.

Úvahy týkající se fyzikálních aplikací matematického aparátu, kterými jsme se zabývali v tomto odstavci, ukazují, nakolik je samotná matematika „přímočará“ a v podstatě snadná oproti fyzice, která vyžaduje modely, aproximace a často tak trochu „spekulativní“ argumentaci vedenou tak, aby vystihovala realitu.

13.6.3 Něco málo o konformních zobrazeních

Často se setkáváme s fyzikálními či technickými úlohami, jejichž symetrie je taková, že je lze řešit jako úlohy rovinné. Znamená to, že hledáme průběh nějakých funkcí $\Phi(x, y, z)$ v prostoru, závislých však pouze na dvou souřadnicích, x a y . Typickými příklady tohoto typu jsou úlohy, jejichž cílem je najít průběh potenciálu elektrostatického pole „nekonečně dlouhého“ válce, nebo elektrostatického pole uvnitř dlouhého válcového kondenzátoru, tepelný tok mezi dvěma válcovými trubkami zahřátými na různou teplotu (ať již soustřednými či uloženými excentricky), apod. V takových případech je popisovaný fyzikální jev jistě nezávislý na souřadnici měřené podél osy válců. Nemusí také jít přímo o válce, ale třeba i obecná *válcová tělesa*, která jsou stejně jako válec dlouhá, avšak jejich příčným řezem není kruh, ale obecnější útvar, který se podél tělesa nemění. Přímé řešení řady praktických úloh v rovině xy je značně komplikované, či dokonce neschůdné. Zejména tehdy, nemají-li v rovině xy žádnou symetrii. Metoda *konformního zobrazení* umožňuje, pomocí převodu úlohy do oboru komplexní proměnné, najít řešení podstatně snadněji a elegantně. Její podstatou je následující postup:

- Z proměnných x a y se sestaví komplexní proměnná z a hledaná funkce $\Phi(x, y)$, definovaná na jisté oblasti $D \subset \mathbf{R}^2$ se považuje za reálnou, nebo imaginární část jisté (holomorfní) komplexní funkce $\tilde{\Phi}(z)$ na oblasti $D \subset \mathbf{C}$, resp. $D \subset \mathbf{C}^+$, kterou je ovšem třeba sestavit.

- Samotný první krok ke snazšímu nalezení řešení úlohy nepomůže. Hledá se však vhodné zobrazení $w = f(z)$, které převede oblast D na jinou, symetričtější oblast $f(D)$, avšak zachovává rovnice, jimiž se řídí funkce v rovině původní proměnné z také pro odpovídající funkce nové proměnné w .
- Úloha se vyřeší v rovině proměnné w , $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tj. nalezneme se funkce $F(u, v)$ taková, že $\Phi(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$.
- Dosazením $w = w(z)$ se (obecně komplexní) řešení převede zpět do roviny původní proměnné $z = x + iy$ a rozdělí se na reálnou a imaginární část. Jedna z nich bude řešením původní úlohy — podle toho, jak jsme zavedli komplexní veličinu, která je řešením úlohy v rovině proměnné w .

Samozřejmě, vzniká otázka, zda takový postup v konkrétních situacích vůbec existuje, tj. zda se vždy podaří najít vhodné zobrazení $w = f(z)$. Hezkou vlastností funkcí komplexní proměnné je, že odpověď na tuto otázku je kladná. Potřebné požadavky splňují právě holomorfní *konformní zobrazení*. Problematika konformních zobrazení je velmi široká a je do detailů řešena v obsáhlých kapitolách řady dostupných učebnic a monografií. V tomto textu se jí nemůžeme zabývat podrobně. Ukážeme pouze její podstatu a některé aplikace.

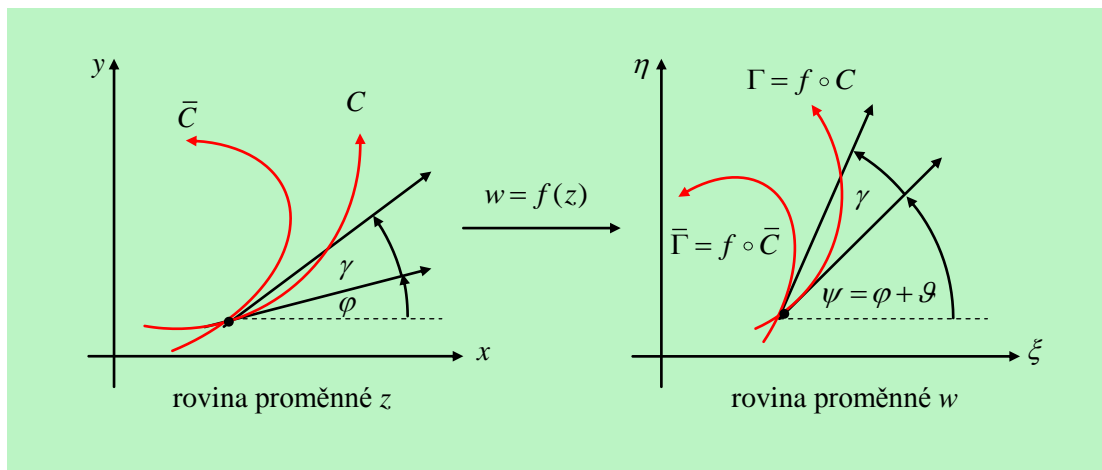
S jistou nadsázkou lze říci, že metoda řešení fyzikálních problémů pomocí konformních zobrazení je založena na geometrickém významu derivace funkce komplexní proměnné. Vyložíme nejprve názorně, o co se jedná. Uvažujme o funkci $f(z)$ holomorfní v určité oblasti D a předpokládejme, že její derivace $f'(z_0)$ je nenulová. Pak tuto derivaci můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| e^{i\vartheta}, \quad \vartheta = \text{Arg } f'(z_0).$$

(Kdyby derivace byla nulová, nebyl by takový zápis možný, neboť argument nuly není definován.) Sledujme schematický obrázek 13.36. V jeho levé části je zakreslena křivka $\mathcal{C} : [\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbf{C}$ a její tečna v bodě $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Úhel, který tato tečna svírá s osou x , je

$$\varphi = \text{Arg } \dot{\mathcal{C}}(t_0) = \text{Arg } (\dot{x}(t_0) + i\dot{y}(t_0)).$$

(V bodech α , resp. β by se jednalo pravou, resp. levou tečnu a derivace $\dot{\mathcal{C}}(\alpha_+)$, resp. $\dot{\mathcal{C}}(\beta_-)$.) Obrazem křivky \mathcal{C} zobrazením $w = f(z) = \xi + i\eta$ je křivka $\Gamma : [\alpha, \beta] \ni t \rightarrow \Gamma(t) = f \circ \mathcal{C}(t) \in \mathbf{C}$, jejíž tečna v bodě t_0 svírá s



Obrázek 13.36: K definici konformního zobrazení.

osou ξ úhel

$$\psi = \text{Arg } \dot{\Gamma}(t_0) = \text{Arg} \left\{ f'[\mathcal{C}(t_0)] \dot{\mathcal{C}}(t_0) \right\} = \text{Arg } f'(\mathcal{C}(t_0)) + \text{Arg } \dot{\mathcal{C}}(t_0) = \vartheta + \varphi.$$

Význam tohoto výsledku je jasný: zobrazení $f(z)$ „pootočí“ tečnu ke křivce vedenou bodem dotyku $z_0 = \mathcal{C}(t_0)$ o úhel $\varphi = \text{Arg } f'(z_0)$. To znamená, že v případě, že se dvě křivky v některém bodě protínají, zachová zobrazení $f(z)$ úhel mezi nimi. To je podstatou konformnosti zobrazení. Co je na této vlastnosti tak důležité? Třeba to, že konformní zobrazení zobrazí dvě soustavy ortogonálních souřadnicových křivek na dvě soustavy obecně jiných souřadnicových křivek, ale opět ortogonálních. Na výše uvedené vlastnosti — zachování úhlů — je také založena poněkud obecnější definice konformního zobrazení, která nevyžaduje, aby funkce $f(z)$ byla holomorfní.

Zobrazení $f(z)$ se nazývá *konformní v bodě* z_0 , je-li v tomto bodě spojitě a zachová-li orientovaný úhel mezi křivkami protínajícími se v tomto bodě. Necht' M je otevřená množina (ne nutně souvislá). Zobrazení $f(z)$ se nazývá *konformní na množině* M , je-li na množině M prosté a konformní v každém jejím bodě. Říkáme, že funkce $f(z)$ *konformně zobrazuje* množinu M na množinu $f(M)$.

Z úvodní úvahy o významu derivace $f'(z_0)$ zobrazení $f(z)$ a z obecné definice konformního zobrazení vyplývá automaticky následující věta.

Věta 13.35: *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v bodě z_0 a platí $f'(z_0) \neq 0$. Pak zobrazení $f(z)$ je konformní v bodě z_0 .*

V dalším budeme uvažovat již jen o holomorfních konformních zobrazeních, která mají, díky existenci derivace, v praktických aplikacích větší význam než obecně neholomorfní konformní zobrazení. Z definice holomorfního konformního zobrazení je navíc zřejmé, že kompozice takových zobrazení je rovněž konformním zobrazením.

Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je holomorfní na množině M . Bod z_0 se nazývá *kritickým bodem*, je-li $f'(z_0) = 0$. Oblasti $D_1, D_2 \subset \mathbf{C}$ se nazývají *konformně ekvivalentní*, jestliže existuje konformní zobrazení $f(z)$ tak, že $D_2 = f(D_1)$ (pak také $D_1 = f^{-1}(D_2)$).

V souvislosti s druhou částí této definice vzniká otázka, zda a za jakých podmínek lze k zadaným oblastem $D_1, D_2 \subset \mathbf{C}$ najít konformní zobrazení $f(z)$ tak, aby se staly konformně ekvivalentními, a kolik takových zobrazení může existovat. Na tuto otázku odpovídá jedna z položek následující věty, jejímž prostřednictvím doplníme ještě další obecné vlastnosti holomorfních konformních zobrazení, které nebudeme dokazovat.

Věta 13.36 (Obecné vlastnosti konformních zobrazení):

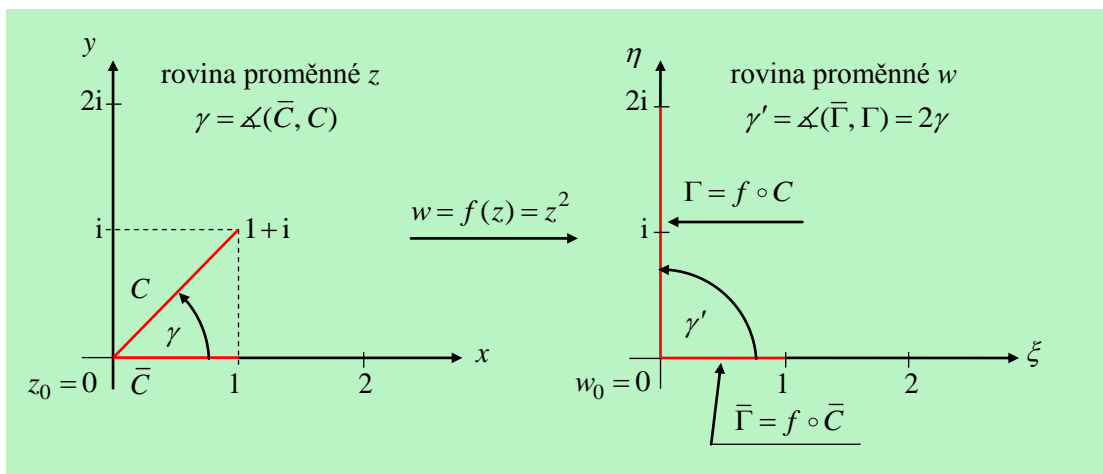
- *Je-li zobrazení $f(z)$ konformní na oblasti $D \subset \mathbf{C}$ (D neobsahuje bod ∞), pak $f(D)$ je opět oblast neobsahující bod ∞ a zobrazení $f^{-1}(z)$ je konformní na $f(D)$.*
- *Riemannova věta: Necht $D_1, D_2 \subset \mathbf{C}$ jsou libovolné jednoduše souvislé oblasti, přičemž hranice každé z nich obsahuje alespoň dva různé body. Pak existuje nekonečně mnoho konformních zobrazení zobrazujících oblast D_1 na oblast D_2 . Zvolíme-li libovolně, ale pevně body $z_0 \in D_1$ a $w_0 \in D_2$, a reálné číslo $a \in \mathbf{R}$, pak existuje právě jedno konformní zobrazení $f(z)$, pro něž je $f(D_1) = D_2$, $f(z_0) = w_0$ a $a \in \arg f'(z_0)$.*
- *Je-li D oblast a $f(D)$ konformní zobrazení definované na D , pak $f(D)$ je oblast stejné násobnosti souvislosti jako D .*
- *Princip přiřazení hranic: Necht D_1 a D_2 jsou jednoduše souvislé oblasti a $C_1 = \partial D_1$ a $C_2 = \partial D_2$ (jednoduché uzavřené křivky). Necht $f(z)$ je konformní zobrazení zobrazující D_1 na D_2 . Pak lze zobrazení $f(z)$ spojitě rozšířit na množinu \bar{D}_1 (uzávěr oblasti D_1) tak, že toto rozšíření zobrazuje množinu \bar{D}_1 homeomorfne na množinu \bar{D}_2 .*

Vlastnosti uvedené ve větě jsou velmi zajímavé a také důležité. Plyne z nich například to, že každou jednoduše souvislou oblast lze konformně zobrazit na otevřený kruh (třeba i jednotkový), ale také na otevřený čtverec. Později uvidíme na příkladech, že se této možnosti, spolu s větou 13.37, kterou uvedeme za chvíli, dá s výhodou využít při řešení rovinných fyzikálních problémů.

V následujícím příkladu se ještě vrátíme k pojmu kritického bodu, abychom ještě lépe pochopili podstatu požadavku $f'(z) \neq 0$, kladeného na holomorfní konformní zobrazení.

Příklad 13.63: Co je na kritickém bodu „kritického“

„Kritické“ je zřejmě to, že v kritickém bodě není definován argument čísla $f'(z_0)$. Jaký vliv to však má na úhel mezi dvěma křivkami C a \bar{C} , které se v tomto bodě protínají? Jedná-li se o hladké křivky, je jejich úhel nepochybně dobře definován, stejně jako úhel mezi jejich obrazy zobrazením $f(z)$, které je holomorfní a hladkost obrazů tedy „nepokazí“. Bude se úhel mezi obrazy křivek lišit od úhlu mezi nimi samotnými? Vyzkoušíme to na konkrétním jednoduchém příkladu, ilustrovaném obrázkem 13.37. Uvažme



Obrázek 13.37: Jak funguje zobrazení $f(z)$ v kritickém bodě.

zobrazení $f(z) = z^2$, které je holomorfní v celé Gaussově rovině \mathbf{C} . Jediným kritickým bodem je bod $z_0 = 0$. Hladké křivky C a \bar{C} zvolme co nejjednodušším způsobem tak, aby procházely bodem z_0 , například tak, že křivka C bude úsečka spojující body $z_0 = 0$ a $z_1 = 1 + i$, křivka \bar{C} pak část reálné osy

x mezi body $z_0 = 0$, $z_2 = 1$,

$$\mathcal{C} : [0, 1] \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) = t + it \in \mathbf{C}, \quad \bar{\mathcal{C}} : [0, 1] \ni t \rightarrow \bar{\mathcal{C}}(t) = t \in \mathbf{C}.$$

Křivka \mathcal{C} svírá s křivkou $\bar{\mathcal{C}}$ úhel $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Pro křivky $\Gamma = f \circ \mathcal{C}$ a $\bar{\Gamma} = f \circ \bar{\mathcal{C}}$ dostaneme

$$\Gamma : [0, 1] \ni t \rightarrow \Gamma(t) = (t + it)^2 = 2it^2 \in \mathbf{C}, \quad \bar{\Gamma} : [0, 1] \ni t \rightarrow \bar{\Gamma}(t) = t^2 \in \mathbf{C}.$$

Křivka $\bar{\Gamma}$ je opět částí reálné osy (osa ξ) mezi body $w_0 = 0$ a $w_2 = 1$, zatímco křivka Γ je částí imaginární osy, spojuje body $w_0 = 0$ a $w_1 = 2i$. Jedná se tedy o navzájem kolmé úsečky. Zatímco původní úsečky svíraly úhel $\frac{\pi}{4}$, svírají jejich obrazy úhel dvojnásobný. Je třeba si ještě uvědomit, že zatímco úhel původních úseček byl dobře definován pomocí argumentů derivací

$$\dot{\mathcal{C}}(0) = 1 + i \Rightarrow \text{Arg } \dot{\mathcal{C}}(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \dot{\bar{\mathcal{C}}}(0) = 1 \Rightarrow \text{Arg } \dot{\bar{\mathcal{C}}}(0) = 0,$$

pro úhel jejich obrazů zobrazením $f(z) = z^2$ to takto provést nelze, neboť derivace zobrazení $\Gamma(t)$ i $\bar{\Gamma}(t)$ v bodě $t_0 = 0$ jsou nulové a jejich argumenty proto nejsou definovány. Úhel, který úsečky Γ a $\bar{\Gamma}$ svírají, jsme určili geometricky, pomocí parametrického vyjádření samotného, bez použití derivací.

Zdůrazněme ještě, že podmínka $f'(z) \neq 0$ je pro konformnost holomorfního zobrazení podmínkou postačující, nikoli nutnou. Není-li splněna, neznamená to nutně, že zobrazení nebude v daném (kritickém bodě) konformní.

Důležitou praktickou vlastností, zejména pro fyzikální a technické aplikace, je skutečnost, že konformní zobrazení zachovává Laplaceovu rovnici. Znamená to, že je-li nějaké funkce dvou proměnných harmonická, pak její kompozice s konformním zobrazením je rovněž harmonická funkce. Přesněji to popisuje následující věta.

Věta 13.37 (Invariance Laplaceovy rovnice při konformním zobrazení): *Nechť $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ zobrazení holomorfní v oblasti $D \subset \mathbf{C}$ a $f(D) \subset G$, kde $G \subset \mathbf{C}$ je rovněž oblast. Je-li funkce $F(u, v)$ je harmonická v oblasti G , pak funkce $\Phi(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$ je harmonická v oblasti D .*

Připomeňte si, že harmonická funkce dvou proměnných je taková, která splňuje Laplaceovu rovnici. Pro funkce $\Phi(x, y)$ a $F(u, v)$ a věty 13.37 to znamená

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

Všimněte si také, že jsme ve větě nepožadovali explicitně konformnost holomorfního zobrazení $w = f(z)$, „prominuli“ jsme podmínku $f'(z) \neq 0$. Platí-li věta v této poněkud obecnější podobě, platí samozřejmě i pro případ, že podmínka nenulovosti derivace bude v oblasti D splněna a holomorfní zobrazení $f(z)$ bude v celé oblasti D také konformní, tj. bez kritických bodů. Důkaz věty je jednoduchý a provedeme jej přímým výpočtem. Pro stručnost výpočtu označme parciální derivace typu $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$ a pro ostatní funkce a proměnné obdobně, jak jsme to dělali v odstavci 5.2.3, viz třeba označení dané vztahy (5.19) na straně 106 druhého dílu. Z téhož odstavce můžeme přímo použít vztahy (5.21) na straně 111, dosadíme-li do nich za funkci F naši funkci Φ a za funkci f naši funkci F . (Lepší ale bude, když si potřebné derivace složených funkcí z cvičných důvodů znovu sami propočítáte.) Při výpočtu vezmeme v úvahu, že reálná i imaginární část holomorfní funkce $f(z)$ jsou v důsledku platnosti Cauchyových-Riemannových podmínek harmonické funkce proměnných x a y , splňují tedy rovněž Laplaceovu rovnici, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ a $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Získáme mezivýsledek

$$\begin{aligned}\Phi_{xx} &= F_{uu}u_x^2 + 2F_{uv}u_xv_x + F_{vv}v_x^2 + F_uu_{xx} + F_vv_{xx}, \\ \Phi_{yy} &= F_{uu}u_y^2 + 2F_{uv}u_yv_y + F_{vv}v_y^2 + F_uu_{yy} + F_vv_{yy}, \\ \Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= F_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2F_{uv}(u_xv_x + u_yv_y) + F_{vv}(v_x^2 + v_y^2).\end{aligned}$$

K další úpravě použijeme Cauchyovy-Riemannovy podmínky pro funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$, $u_x = v_y$ a $u_y = -v_x$, díky nimž platí

$$u_xv_x + u_yv_y = u_x(-u_y) + u_yu_x = 0, \quad v_x^2 + v_y^2 = (-u_y^2) + u_x^2 = u_x^2 + u_y^2,$$

a dostaneme

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = (F_{uu} + F_{vv})(u_x^2 + u_y^2) = 0,$$

neboť podle předpokladu věty splňuje funkce $F(u, v)$ Laplaceovu rovnici, tj. $F_{uu} + F_{vv} = 0$.

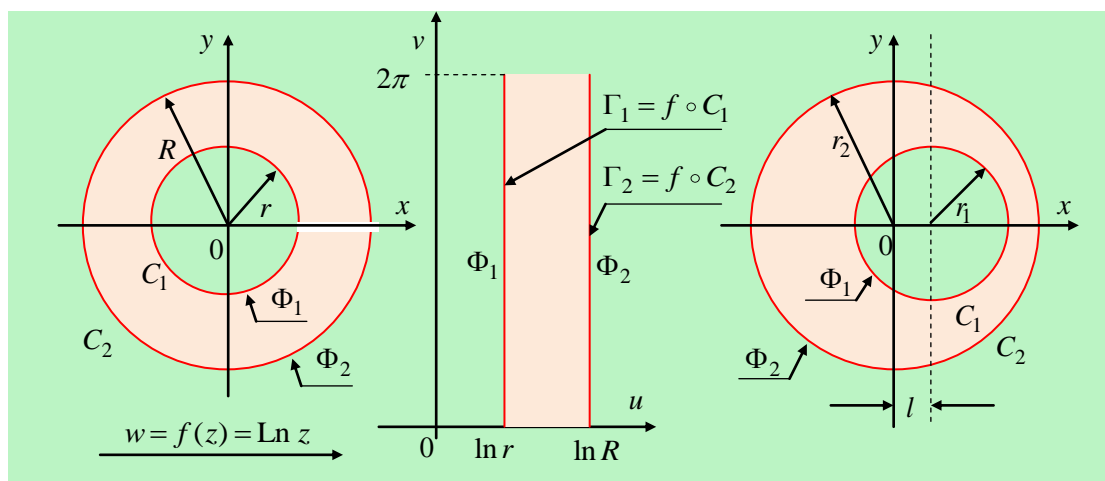
Uvědomme si, co věty 13.36 a 13.37 společně umožňují: Máme například za úkol najít řešení Laplaceovy rovnice na oblasti zadaného tvaru při zadaných okrajových podmínkách. Hledáme tedy harmonickou funkci $V(x, y)$ (tj. takovou, pro kterou platí $V_{xx} + V_{yy} = 0$) dejme tomu na dvojnásobně souvislé oblasti D , přičemž jsou zadány hodnoty funkce $\Phi(x, y)$, Φ_1 a Φ_2 , na křivkách \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_2 tvořících hranici této oblasti, tj. formálně $\partial D = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. (Popsané zadání představuje *Dirichletovu úlohu*, jíž jsme se z jiného pohledu zabývali v kapitole 12, v příkladu 12.124.) Jak budeme postupovat:

- Z vlastnosti b) ve větě 13.36 víme, že existuje konformní zobrazení $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (jen ho najít!), které převede oblast D na „šikovnější“, avšak konformně ekvivalentní oblast $f(D)$.

- Vyřešíme Dirichletovu úlohu na oblasti $f(D)$ s odpovídajícími okrajovými podmínkami. Ty budou zase dvě, neboť podle vlastnosti c) ve větě 13.36 bude nová oblast také dvojnásobně souvislá a podle vlastnosti d) si budou hraniční křivky Γ_1 a Γ_2 „správně“ přiřazeny křivkám C_1 a C_2 pomocí spojitého rozšíření zobrazení $f(z)$ na hranici oblasti D . Znamená to, že najdeme funkci $F(u, v)$, pro kterou je splněna Laplaceova rovnice $F_{uu} + F_{vv} = 0$ a okrajové podmínky $F(u, v)|_{\Gamma_1} = \Phi_1$, $F_{u,v}|_{\Gamma_2} = \Phi_2$.
- Sestavíme funkci $\Phi(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$. Věta 13.37 zajišťuje, že funkce $\Phi(x, y)$ je řešením původní úlohy.

Příklad 13.64: Potenciál koncentrického válcového kondenzátoru

Máme určit rozložení elektrostatického potenciálu uvnitř kondenzátoru tvořeného nekonečně dlouhými soustřednými válci o poloměrech r a R , $R > r$. Na vnitřním válci je předepsána hodnota Φ_1 , na vnějším hodnota Φ_2 . Elektrostatický potenciál pochopitelně splňuje trojrozměrnou Laplaceovu rovnici. Vzhledem k symetrii zadaného problému (nekonečný kondenzátor) však bude nezávislý na souřadnici měřené podél osy válce. Souřadnicovou rovinu xy můžeme zvolit kolmo k ose válce a počátek soustavy souřadnic umístit do středu větší kružnice C_2 (obrázek 13.38). Považujme proměnné x a y za reálnou a imaginární část komplexní proměnné $z = x + iy$. Hledáme řešení Laplaceovy



Obrázek 13.38: Válcové kondenzátory.

rovnice $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$ za okrajových podmínek $\Phi|_{\mathcal{C}_1} = \Phi_1$, $\Phi|_{\mathcal{C}_2} = \Phi_2$. Podle věty 13.36 existuje konformní zobrazení $w = f(z)$ takové, že převede oblast D (mezikruží mezi kružnicemi \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_2) na nějakou jinou vhodnou oblast tak, aby se postup řešení Laplaceovy rovnice zjednodušil. Kružnice jsou parametrizovány vztahy

$$\mathcal{C}_1 : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow z = r e^{it}, \quad \mathcal{C}_2 : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow z = R e^{it},$$

obecná kružnice uvnitř mezikruží pak vztahem $z = \varrho e^{it}$, $\varrho \in (r, R)$. Hledejme zobrazení $f(z)$ tak, aby hlavní hodnota argumentu proměnné z , tj. parametr t , byla přímo imaginární částí funkce $f(z)$, tj. $v = \text{Arg } z$. Čtenáři, který už má s počítáním s funkcemi komplexní proměnné zkušenost, je hned jasné, že v takovém případě bude reálnou částí funkce $f(z)$ logaritmus modulu proměnné z , tj. $u = \ln |z|$. Přesto tuto skutečnost prověříme pomocí Cauchyových-Riemannových podmínek. Pro $v(x, y) = \text{Arg } z$ platí

$$v(x, y) = \text{Arg } z = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{resp. } 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

pro $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$, resp. pro $y \leq 0$. Pro reálnou část $u(x, y)$ platí (propočítejte podrobně)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln |z|.$$

Pro $|z| = r$ (kružnice \mathcal{C}_1) je $u = \ln r$ a $v \in [0, 2\pi)$, pro $|z| = R$ (kružnice \mathcal{C}_2) je $u = \ln R$ a $v \in [0, 2\pi)$. Funkce $w = f(z) = \text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$ je konformním zobrazením, které převádí mezikruží D v rovině proměnné z mezi křivkami \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_2 a s výřezem podél intervalu $[r, R]$ na obdélník $f(D)$ v rovině proměnné w , $f(D) = [\ln r, \ln R] \times (0, 2\pi)$. Protože podle věty 13.37 zůstává při holomorfním (a tedy i konformním) zobrazení zachována Laplaceova rovnice, hledáme funkci $F(u, v)$, pro kterou je $F_{uu} + F_{vv} = 0$ a platí okrajové podmínky $F(\ln r, v) = \Phi_1$, $F(\ln R, v) = \Phi_2$. Z roztační symetrie původního problému je dále zřejmé, že funkce $\Phi(x, y)$ musí být invariantní vzhledem k otočení soustavy souřadnic, a tedy nezávislá na argumentu proměnné z . Proto je funkce $F(u, v)$ nezávislá na proměnné v a Laplaceova rovnice se zjednodušuje na tvar $F_{uu} = 0$. Její obecné řešení je $F(u, v) = Au + B$. Z okrajových podmínek pak dostaneme $A \ln r + B = \Phi_1$, $A \ln R + B = \Phi_2$, a odtud

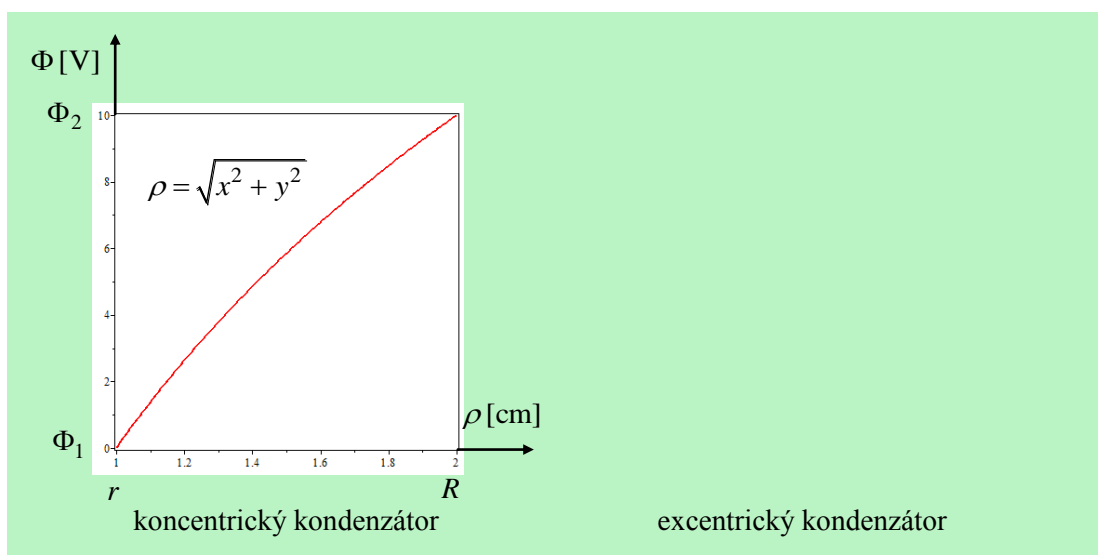
$$A = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln R - \ln r}, \quad B = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1) \frac{\ln R + \ln r}{\ln R - \ln r},$$

$$F(u, v) = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln R - \ln r} u + \left[\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1) \frac{\ln R + \ln r}{\ln R - \ln r} \right].$$

Hledané řešení $\Phi(x, y)$ dostaneme už jednoduše dosazením za $u(x, y)$,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln R - \ln r} \ln(x^2 + y^2) + \left[\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1) \frac{\ln R + \ln r}{\ln R - \ln r} \right].$$

Řešení je graficky znázorněno na obrázku 13.39 vlevo pro $r = 1$ cm, $R = 2$ cm, $\Phi_1 = 0$ V, $\Phi_2 = 10$ V. Mnozí čtenáři se možná při pročítání právě



Obrázek 13.39: Válcové kondenzátory — průběh potenciálu.

předvedeného výpočtu divili, proč volíme tak složitý postup, když řešení úlohy lze najít velmi jednoduše. Stačí přece vyjádřit Laplaceův operátor v polárních souřadnicích namísto kartézských a pak použít symetrie úlohy, z níž vyplývá nezávislost hledaného řešení na polárním úhlu, který jsme označili t . Laplaceův operátor ve válcových souřadnicích najdeme v odstavci 9.4.2 druhého dílu ve vztazích (9.27). Vynecháme-li třetí proměnnou (ve vztazích (9.27) označenou jako z), a vezmeme-li v úvahu, že funkce Φ závisí pouze na vzdálenosti ϱ od počátku soustavy souřadnic, dostaneme pro ni obyčejnou diferenciální rovnici

$$\Phi''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} \Phi'(\varrho).$$

Označíme-li $\chi(\varrho) = \Phi'(\varrho)$, získáme pro funkci $\chi(\varrho)$ rovnici se separovatelnými proměnnými, kterou snadno vyřešíme:

$$\chi'(\varrho) + \frac{1}{\varrho}\chi(\varrho) \Rightarrow \ln \chi = -\ln \varrho + K \Rightarrow \varrho\chi(\varrho) = A,$$

kde K a A jsou konstanty. Další výpočet je velmi jednoduchý:

$$\Phi'(\varrho) = \frac{A}{\varrho} \implies \Phi(\varrho) = A \ln \varrho + B.$$

Zbytek už je záležitostí okrajových podmínek. Získali jsme totéž řešení jako pomocí konformního zobrazení, ale podstatně rychleji. Proč tedy používat metodu konformního zobrazení, když je komplikovanější? Protože může snadno vést k cíli i ve složitějších případech, které třeba nemají žádnou symetrii, která by vedla k okamžitému zjednodušení rovnice. Uvidíme to v následujícím příkladu.

Příklad 13.65: Potenciál excentrického válcového kondenzátoru

Předchozí úlohu zobecníme na případ, že průřezem kondenzátoru je excentrické mezikruží s hraničními kružnicemi \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_2 (obrázek 13.38 zcela vpravo). Na hraničních kružnicích \mathcal{C}_1 , resp. \mathcal{C}_2 jsou okrajovými podmínkami opět předepsány hodnoty potenciálu Φ_1 , resp. Φ_2 .

Parametrizujme kružnice ohraničující oblast D , na které hledáme řešení problému,

$$\mathcal{C}_1 : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow z(t) = l + r_1 e^{it}, \quad \mathcal{C}_2 : [0, 2\pi] \ni t \rightarrow z(t) = r_2 e^{it}.$$

V první fázi řešení úlohy budeme hledat takové konformní zobrazení, které převede excentrické mezikruží na koncentrické, tj. takové, jehož hranici budou tvořit soustředné kružnice. Úlohu se soustřednými kružnicemi už řešit umíme díky předchozímu příkladu.

Přemýšlejme, jaká zobrazení převádějí kružnici v jinou kružnici, která bude mít oproti té původní posunutý střed a obecně jiný poloměr. Je-li výchozí kružnice \mathcal{K} parametrizována vztahem $z = r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, pak posunutí středu a změnu poloměru docílíme třeba zobrazením $w = f(z) = az + b$. Skutečně

$$f(\mathcal{K}) : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow w = az + b = ar e^{it} + b.$$

Čísla a a b mohou být obecně komplexní, konkrétně pro a můžeme napsat $a = |a| e^{it_0}$, kde $t_0 = \text{Arg } a$. Pak dostaneme parametrizaci křivky $f(\mathcal{K})$ ve tvaru

$$w \circ \mathcal{K}(t) = |a|r e^{i(t+t_0)} + b.$$

Jedná se o kružnici se středem v bodě b a poloměrem $|a|r$. Oborem parametru t je opět interval $[0, 2\pi]$, jenže jeho krajnímu bodu 0 již neodpovídá bod s nulovým argumentem, ale bod s argumentem t_0 . Další zobrazení převádějící kružnici v kružnici je například $f(z) = \frac{1}{z}$. Kružnice \mathcal{K} při něm přejde v kružnici parametrizovanou vztahem $w = r^{-1}e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Ta má střed opět v bodě $z_0 = 0$, poloměr rovný převrácené hodnotě poloměru původní kružnice \mathcal{K} , a je orientována opačně než kružnice \mathcal{K} . Zobecněním tohoto zobrazení je funkce $f(z) = (az + b)^{-1}$. Prověříme, jak funguje.

$$\begin{aligned} w \circ \mathcal{K}(t) &= \frac{1}{ar e^{it} + b} = \frac{1}{|a|r e^{i(t+t_0)} + b} = \frac{|a|r e^{-i(t+t_0)} + b}{|ar e^{i(t+t_0)} + b|^2} = \\ &= \frac{|a|r}{|ar e^{i(t+t_0)} + b|^2} e^{-i(t+t_0)} + \frac{b}{|ar e^{i(t+t_0)} + b|^2}. \end{aligned}$$

Opět jsme dostali parametrizaci kružnice, jejíž střed a poloměr jsou

$$w_0 = \frac{b}{|ar e^{i(t+t_0)} + b|^2}, \quad r' = \frac{|a|r}{|ar e^{i(t+t_0)} + b|^2}.$$

Pomocí vhodného zobrazení $f(z)$ lze danou kružnici „přesunout“ do předem zvoleného bodu a modifikovat ji tak, aby její obraz měl předem zvolený poloměr.

V případě excentrického mezikruží, které je průřezem válcového kondenzátoru, jehož elektrický potenciál máme počítat, je však třeba pomocí zobrazení $f(z)$ zobrazit dvě kružnice současně tak, aby středy jejich obrazů byly shodné. Zjednodušíme ještě situaci tím, že obrazu vnitřní kružnice předepíšeme jednotkový poloměr, $r = 1$. Poloměr obrazu vnější kružnice předem volit nebudeme, uvidíme, co vyjde. Zobrazení $f(z)$ zvolíme ve tvaru racionální lomené funkce,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Poněkud nepříjemným počítáním zjistíme (proved'te), že požadavkům kladeným na obrazy kružnic \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_2 vyhovují hodnoty

$$a = \sqrt{\frac{r_2^2 - (l + r_1)^2}{r_2^2 - (l - r_1)^2}} + 1 = A + 1, \quad c = A - 1,$$

$$b = -[A(l - r_1) + (l + r_1)], \quad d = -[A(l - r_1) - (l + r_1)],$$

poloměr obrazu vnější kružnice je

$$R = \frac{1 + \sqrt{\delta}}{1 - \sqrt{\delta}}, \quad \delta = \frac{(r_2 - r_1)^2 - l^2}{(r_2 + r_1)^2 - l^2}$$

Pro zápis řešení v rovině proměnné w můžeme použít výsledku z minulého příkladu s tím, že do vztahu pro řešení $F(u, v)$ dosadíme

$$u = \ln |w| = \ln \left| \frac{az + b}{cz + d} \right|, \quad r = 1.$$

Potenciál $\Phi(x, y)$ excentrického válcového kondenzátoru pak dostáváme ve tvaru

$$\Phi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln R} \ln \left| \frac{az + b}{cz + d} \right| + \Phi_1 = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln R} \ln \frac{a^2 \left[\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 + y^2 \right]}{c^2 \left[\left(x + \frac{d}{c} \right)^2 + y^2 \right]}.$$

Lepší představu než vzorec dává graf na obrázku 13.39 vpravo, sestrojený pro $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $l = 0,5$ cm, $\Phi_1 = 0$, V, $\Phi_2 = 10$ V.

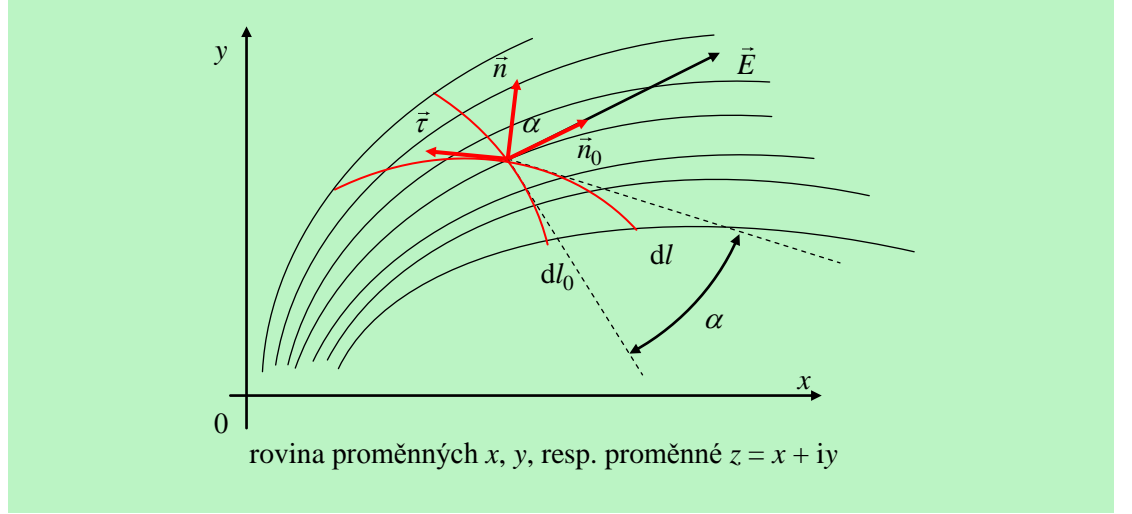
Příklad 13.65: Elektrostatika v rovině

Některé problémy elektrostatiky je možné řešit jako rovinné. To jsme viděli v předchozích dvou příkladech. Je vhodné pracovat s proměnnými x a y jako s reálnou a imaginární částí komplexní proměnné z . Při takové interpretaci je zase možné usnadnit si řešení problému přechodem k jiné proměnné w pomocí vhodného konformního zobrazení $w = f(z)$. I s tím jsme se setkali v předchozích příkladech. V tomto příkladu ukážeme obecnější aplikaci problematiky konformních zobrazení v rovinné elektrostatice. Konkrétně půjde o vyjádření toku intenzity elektrostatického pole $\vec{E} = (E_x(x, y), E_y(x, y))$ danou křivkou \mathcal{C} . (V trojrozměrných situacích jsme zvyklí na pojem toku vektorového pole plochou, kterou v rovinném případě nahrazuje křivka.) Obrázek 13.40 ukazuje, jak k pojmu toku elektrostatického pole (obecně jakéhokoli vektorového pole) křivkou dospějeme. Sestavíme diferenciální formu $d\phi_E$ reprezentující elementární tok. (Postupujeme obdobně jako při odvození toku vektorového pole plochou v odstavci 9.4.1, kde jsme počítali hmotnostní tok kapaliny. K výpočtu, jehož výsledek je dán vztahem (9.64), se vztahuje obrázek 9.43.)

Elementární tok vektorového pole \vec{E} křivkou na obrázku 13.40 je

$$\delta\phi_E = E l_0 = E dl \cos \alpha = E dl (\vec{n}_0 \vec{n}) = (\vec{E} \vec{n}) dl,$$

kde význam veličin je zřejmý z obrázku, normály \vec{n}_0 a \vec{n} jsou voleny jako jednotkové. (Pro zápis diferenciální formy vyjadřující elementární tok volíme označení $\delta\Phi_E$, abychom vyjádřili jednak „elementárnost“, jednak skutečnost,



Obrázek 13.40: Tok vektorového pole v rovině křivkou.

že v případě obecného vektorového pole \vec{E} dopředu nevíme, zda tato forma bude uzavřená.) Celkový tok je dán integrálem prvního druhu

$$\phi_E = \int_C (\vec{E}\vec{n}) dl.$$

Z kapitoly 12 víme, že takový integrál lze vyjádřit také jako integrál druhého druhu, neboť prostřednictvím integrandu závisí na orientaci integračního oboru. Abychom to provedli, je třeba vyjádřit formu dl , reprezentující jednorozměrný objemový (tj. délkový) element na křivce, jako lineární kombinaci forem dx a dy . Uvažujme o libovolné parametrizaci křivky $\mathcal{C} : [0, 1] \ni t \rightarrow \mathcal{C}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$. Jednotkový vektor tečny a normály ke křivce \mathcal{C} jsou

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right), \quad \vec{n} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{-\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right).$$

Platí

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^* \delta\phi &= [(\vec{E}\vec{n}) \circ \mathcal{C}] \mathcal{C}^* dl = \left[(E_x \circ \mathcal{C}) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + (E_y \circ \mathcal{C}) \frac{-\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right] dt = \\ &= [(E_x \circ \mathcal{C})\dot{y} - (E_y \circ \mathcal{C})\dot{x}] dt = \mathcal{C}^* (-E_y dx + E_x dy). \end{aligned}$$

pro diferenciální 1-formu reprezentující elementární tok vektorového pole \vec{E} křivkou C a pro celkový tok dostáváme výsledné vztahy

$$\delta\phi_E = -E_y(x, y) dx + E_x(x, y) dy, \quad \phi_E = \int_C -E_y(x, y) dx + E_x(x, y) dy. \quad (13.83)$$

Potud byl postup obecný, za \vec{E} lze dosadit jakékoli vektorové pole s vlastnostmi umožňujícími příslušné objekty (diferenciální formu $d\phi_E$ a její křivkový integrál) definovat. V případě, že \vec{E} je intenzita elektrostatického pole, můžeme tok vyjádřit také pomocí potenciálu, neboť $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$. V tomto případě je forma $\delta\phi_E$ skutečně uzavřená. Vyzkoušejte si to výpočtem její vnější derivace $d(\delta\phi_E)$ a uvažte, že pro potenciál Φ platí Laplaceova rovnice. Můžeme proto psát $\delta\phi_E = d\Phi$, jinými slovy, 1-forma $\delta\phi_E$ je vnější derivací jisté funkce $\phi_E(x, y)$. Pomocí potenciálu dostaneme

$$\phi_E = \int_C \frac{\partial\Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x} dy. \quad (13.84)$$

Z fyziky víme, že tok intenzity elektrostatického pole ve vakuu *uzavřenou* křivkou souvisí s celkovým nábojem Q , který tato křivka obepíná, jednoduchým vztahem $\phi_E = \varepsilon_0^{-1}Q$, kde ε_0 je permitivita vakua (už jsme se s ní setkali v předcházejícím odstavci).

Teď zkonstruujeme holomorfní funkci $w = w(z)$ tak, aby její reálná část, vyjádřená v závislosti na proměnných x a y , představovala elektrostatický potenciál $\Phi(x, y)$. Právě tak tomu bylo v příkladech 13.63 a 13.64. Hledáme $w = f(z)$ ve tvaru

$$w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \Phi(x, y) + iv(x, y),$$

přičemž funkce $u(x, y) = \Phi(x, y)$ a $v(x, y)$ musí splňovat Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Na základě roho můžeme získat kompletní vyjádření funkce $w(z)$ (až na konstantu). Platí

$$dv(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy = -\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x} dy = d\phi_E.$$

Při poslední úpravě jsme použili vztah (13.83) a vztah mezi intenzitou a potenciálem $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$. Pro funkci $v(x, y)$ dostaneme integraci

$$v(x, y) = \phi_E(x, y) + \text{konst.} \quad \text{a odtud} \quad w(z) = \Phi(x, y) + i\phi_E(x, y)$$

Vyjádříme derivaci $w'(z)$. Podle vztahů (13.15) jsou čtyři možnosti, jak ji zapsat,

$$\begin{aligned} w'(z) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

První z nich umožňuje vyjádřit derivaci $w'(z)$ přímo pomocí potenciálu $\Phi(x, y)$,

$$w'(z) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \implies iw'(z) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}.$$

Hned uvidíme, jaký fyzikální význam tato veličina má. Spočítejme formu $iw'(z) dz$:

$$\begin{aligned} iw'(z) dz &= i \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \right) (dx + i dy) = \\ &= \left[\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} dy \right] + i \left[\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dy \right], \\ iw'(z) dz &= d\phi_E + i(-dW_E), \end{aligned}$$

kde

$$dW_E(x, y) = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dy = E_x(x, y) dx + E_y(x, y) dy$$

je elementární práce elektrostatického pole (vykonaná na kladném jednotkovém testovacím náboji). Je to rovněž uzavřená forma, a to díky smíšených parciálních derivací druhého řádu funkce $\Phi(x, y)$.

Vzhledem k souvislosti toku intenzity elektrického pole uzavřenou křivkou s nábojem, který je touto křivkou obepnut, zavádíme *komplexní náboj* jako integrál po uzavřené křivce \mathcal{C}

$$\tilde{Q} = \varepsilon_0 \int_{\mathcal{C}} iw'(z) dz = \varepsilon_0 [\phi_E + i(-W_E)]. \quad (13.85)$$

Reálná část výrazu $\varepsilon_0 \tilde{Q}$ představuje tok intenzity danou uzavřenou křivkou a imaginární část pak záporně vzatou práci, kterou elektrické pole vykoná na kladném jednotkovém náboji při jeho pohybu po této křivce.

Někoho může napadnout, že elektrostatické pole je konzervativní, a proto bude výsledek nulový. To by ovšem platilo jen tehdy, kdyby křivka neobíhala žádné singularity integrovaných forem $d\phi_E$ a dW_E . Ty mohou být způsobeny například bodovými náboji.

Praktický význam vztahu (13.85) spočívá v možnosti použít pro výpočet integrálu reziduové věty,

$$\tilde{Q} = \phi_E + i(-W_E) = \int_{\mathcal{C}} i w'(z) dz = -2\pi \sum_{z_k} \operatorname{res} w'(z_k) \operatorname{Ind}_{\mathcal{C}}(z_k). \quad (13.86)$$

Ve vztahu (13.86) se sčítá přes singularity funkce $w'(z)$, přičemž se uplatní pouze ty, které křivka \mathcal{C} skutečně obíhá, tj. pro něž je $\operatorname{Ind}_{\mathcal{C}}(z_k) \neq 0$.

Abychom tedy spočítali tok elektrostatického pole uzavřenou křivkou a jeho práci po této křivce, nemusíme vůbec integrovat, pouze vypočteme a sečteme rezidua. I to je výhoda použití konformního zobrazení.

Příklad 13.66: Ustálené proudění v rovině

Matematický popis ustáleného proudění v rovině je velmi podobný jako v elektrostatičce. Také počítáme tok vektorového pole danou křivkou, jenže se jedná o pole rychlosti proudění, počítáme-li objemový tok, nebo o vektorové pole $s\vec{v}$, počítáme-li hmotnostní tok tekutiny s hustotou s . Je-li proudění ustálené, nezávisí uvažované vektorové pole explicitně na čase, tj. $\vec{v} = \vec{v}(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y))$, $s = s(x, y)$. Protože nám jde o matematickou podstatu problému, uvažujme pro jednoduchost o ideální kapalině, jejíž hustota je konstantní. Pak stačí počítat objemový tok, neboť tok hmotnostní je pouze jeho konstantním násobkem. Pro vyjádření objemového toku použijeme přímo vztah (13.83), platný pro libovolné vektorové pole,

$$\begin{aligned} \delta\phi_V &= -v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy, \\ \phi_V &= \int_{\mathcal{C}} -v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy. \end{aligned} \quad (13.87)$$

Předpokládejme, že složky vektorového pole rychlosti mají spojité parciální derivace prvního řádu na nějaké jednonásobně souvislé oblasti $D \subset \mathbf{R}^2$. V případě, že platí $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ (v případě ustáleného proudění ideální kapaliny je to důsledkem obecné rovnice kontinuity $\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(s\vec{v}) = 0$ — vztah (9.66) na straně 591 v druhém dílu), je 1-forma vyjadřující elementární objemový tok uzavřená a je vnější derivací jisté funkce $\phi_V(x, y)$. Ta

je určena až na konstantu a nazýváme ji *funkce proudění*. Křivky o rovnicích $\phi_V(x, y) = \text{konst.}$ jsou *proudnice*. Tento název je velmi názorný: funkce proudění, vyjadřující objemový tok, se podél proudnice nemění, takže „přes proudnici nic neteče“. Vektorové pole rychlosti je tedy v každém bodě prostoru tečné k proudnici, která tímto bodem prochází, jak to také odpovídá definici proudnic zavedené v odstavci 9.3.2 (vztah (9.58) na straně 572, příklad 9.69 na straně 575). Podobně jako v elektrostátice zavedeme holomorfní funkci $w = w(z)$ tak, aby funkce proudění byla její imaginární částí. Aby to bylo možné, musí být funkce $\phi_V(x, y)$ harmonická, což znamená, že musí splňovat Laplaceovu rovnici. Prověříme to:

$$\frac{\partial^2 \phi_V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_V}{\partial y^2} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \text{rot } \vec{v}.$$

V případě, že se jedná o nevírové rychlostní pole, je $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$. V našem případě uvažujeme o proudění ideální kapaliny, jejíž vlastností je kromě konstantní hustoty také absence vnitřního tření. Ideální kapalina proto nemůže tvořit víry. Funkce Φ_V při něm splňuje Laplaceovu rovnici a může být použita jako imaginární část hledané funkce $w = w(z)$. Uvidíme, co bude částí reálnou, vyplývající z Cauchyových-Riemannových podmínek. Položme tedy

$$w(z) = u(x, y) dx + i\phi_V(x, y) dy$$

a požadujeme splnění Cauchyových-Riemannových podmínek

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_V(x, y)}{\partial y} = -v_x(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial \phi_V(x, y)}{\partial x} = -v_y(x, y).$$

Pak je forma

$$\begin{aligned} \frac{u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy &= -[v_x(x, y) dx + v_y(x, y) dy] = \\ &= \left[\frac{\partial \phi_V(x, y)}{\partial y} dx - \frac{\partial \phi_V(x, y)}{\partial x} dy \right] \end{aligned}$$

uzavřená (zdůvodněte, je to snadné) a je proto vnější derivací jisté funkce $\Phi(x, y)$, kterou nazveme *potenciál*. Je určena až na konstantu. Platí

$$\Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0) = - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x(x, y) dx + v_y(x, y) dy,$$

Příčemž integračním oborem je libovolná křivka spojující počáteční bod (x_0, y_0) s koncovým bodem (x, y) .

Funkci

$$w = w(z) = \Phi(x, y) + i\phi_V(x, y) \quad (13.88)$$

nazýváme *komplexní potenciál proudění*. Pro jeho derivaci platí

$$w'(z) = \frac{\partial\phi_V(x, y)}{\partial y} + i\frac{\partial\phi_V(x, y)}{\partial x} = v_x(x, y) - iv_y(x, y). \quad (13.89)$$

Všimněme si zajímavé fyzikální souvislosti s tímto výsledkem. Je-li v nějakém bodě $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{C}$ derivace holomorfní funkce nulová, není zobrazení $w = w(z)$ v tomto bodě obecně konformní, bod z_0 je kritickým bodem. Současně je ze vztahu (13.89) vidět, že v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ je nulová i rychlost proudění, kapalina v tomto bodě „stojí“!

Podobně jako v elektrostatice ještě vypočteme formu $iw'(z) dz$. Dostaneme

$$\begin{aligned} iw'(z) dz &= i \left(\frac{\partial\phi_V(x, y)}{\partial y} + i\frac{\partial\phi_V(x, y)}{\partial x} \right) (dx + idy) = \\ &= \left(\frac{\partial\phi_V(x, y)}{\partial y} dx - \frac{\partial\phi_V(x, y)}{\partial x} dy \right) + i \left(\frac{\partial\phi_V(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi_V(x, y)}{\partial y} dy \right) = d\phi_V + id\Phi. \end{aligned}$$

Integrál

$$\tilde{\phi}_V = \int_C iw'(z) dz \quad (13.90)$$

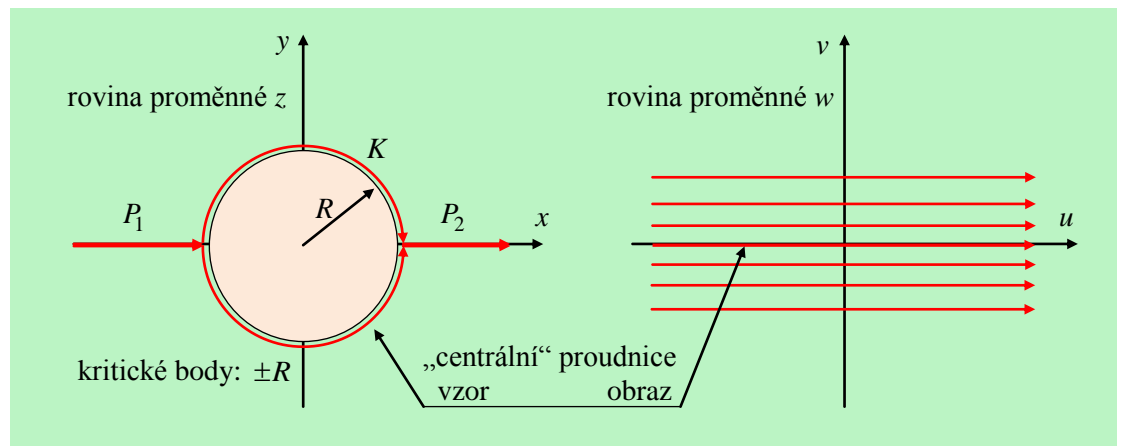
nazveme *komplexní tok*.

V případě ustáleného proudění ideální kapaliny, kdy je vektorové pole rychlostí nezřídlové ($\operatorname{div} \vec{v} = 0$) a nevírové ($\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$), nemá v dané oblasti žádné singularity, a proto je komplexní tok *uzavřenou* křivkou nulový.

Pozn.: Jestliže proudění není ustálené, může být v některých bodech prostoru $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$. Nebo třeba ustálené je (rychlost v bodech, kde je definována, nezávisí explicitně na čase), ale forma vyjadřující elementární tok není třeba v některých bodech definována. Tok uzavřenou křivkou, která obepíná takové body, je obecně nenulový. Body, v nichž tato situace nastane, představují zřídla, nebo místa zániku proudnic, obdobně jako je tomu v případě toku elektrostatického pole uzavřenou křivkou obepínající náboje. Integrál (13.87) uzavřenou křivkou obepínající jeden takový bod udává *vydatnost* zřídla (je-li kladný), resp. místa zániku (je-li záporný).

Příklad 13.67: Obtékání překážky a zobrazení Žukovského

Nakonec ještě vyřešíme jednu konkrétní úlohu. Předpokládejme, že ideální kapalina ustáleně proudí v rovině xy podél osy x . V cestě jí stojí pevný kruh se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R . Kapalina tuto překážku obtéká a naším úkolem je určit tvar (rovnice) proudnic a ekvipotenciálních křivek (křivek, podél nichž je konstantní potenciál $\Phi(x, y)$). (Pokud bychom chtěli najít skutečné proudění, které tomuto modelu zhruba odpovídá, můžeme si představit širokou a hlubokou řeku a v ní napříč uložený dlouhý válec. Vodu bychom museli považovat za ideální kapalinu, i když jí vlivem nezanedbatelného vnitřního tření ve skutečnosti není.) Ještě je třeba zadat velikost rychlosti kapaliny daleko od válce. Řekněme, že její hodnota je v_0 . Považujeme-li proměnné x a y za reálnou a imaginární část komplexní proměnné z , jak je u metody konformního zobrazení potřeba, má okrajová podmínka pro proudění tvar $v_x(\infty) = v_0$, $v_y(\infty) = 0$. Obrázek 13.41 situaci názorně přibližuje. Ze symetrie úlohy je zřejmé, že proudnice v dolní polo-



Obrázek 13.41: Obtékání kruhové překážky.

vině jsou zrcadlovým obrazem proudnic v polorovině horní. Jednu proudnici v horní polorovině (a tím i její zrcadlový obraz) fakticky známe. Je to křivka C složená z polopřímky $\mathcal{P}_1 : z = t, t \in (-\infty, -R)$ na reálné ose, půlkružnice $z = R e^{it}, t \in [\pi, 0]$, a polopřímky $\mathcal{P}_2 : z = t, t \in (R, \infty)$ opět na reálné ose. Kapalina proudí v množině \bar{D} , kde D je oblast vně kruhu představujícího překážku. Proudnice zřejmě nebudou mít nějaký jednoduchý tvar, který bychom dokázali určit přímo. Metoda konformního zobrazení však umožňuje nalézt vhodné zobrazení $w = f(D)$ a řešit úlohu místo v oblasti D v oblasti

$f(D)$, v níž je nalezení řešení snazší. Výhodné by bylo, kdyby se nám podařilo zvolit zobrazení $w = f(z)$ tak, aby oblast $f(D)$ byla rovina, nebo polorovina. Pak by okrajová podmínka kladená na rychlost znamenala, že obrazy proudnic (v rovině proměnné $w = u + iv$) budou přímky rovnoběžné z osou u . Jak ale takové zobrazení najít? Víme o něm například to, že musí křivku \mathcal{C} zobrazit na reálnou osu, speciálně $f(Re^{it}) \in \mathbf{R}$, tj. $v(R \cos t, R \sin t) = 0$. Nejjednodušší příklad takového zobrazení $f(z)$, který nám okamžitě může přijít na mysl pro $R = 1$ je $f(e^{it}) = e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t \in [-2, 2]$ pro $t \in [\pi, 0]$. Obrazem jednotkové půlkružnice je úsečka spojující body -2 a 2 na reálné ose. Zobrazení můžeme ještě upravit tak, aby obrazem jednotkové půlkružnice byla úsečka spojující body $w_1 = -1$ a $w_2 = 1$ na reálné ose. Stačí zvolit $f(e^{it}) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$. Zobecněním tohoto předpisu na $z \in \mathbf{C}^+$ je zobrazení *Žukovského*

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (13.91)$$

Na první pohled vidíme, že $f(\infty) = f(0) = \infty$. Uvedením vztahu (13.91) samozřejmě zdaleka nejsme hotovi. Musíme prozkoumat obecné vlastnosti tohoto zobrazení a především jeho obraz $f(D)$. Nejprve zjistíme, co je obrazem polopřímek $\mathcal{P}_1 : z = t, t \in (-\infty, -1]$, a $\mathcal{P}_2 : z = t, t \in [1, \infty)$. Platí

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \in \mathbf{R}, \quad f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty,$$

obrazem polopřímky \mathcal{P}_1 je opět polopřímka \mathcal{P}_1 , obrazem polopřímky \mathcal{P}_2 pak polopřímka \mathcal{P}_2 . Rovnost $f(\infty) = f(0)$, vyplývající ze vztahu (13.91) naznačuje, že zobrazení $f(z)$ není prosté. Skutečně, uvažíme-li dva různé body $z_1 \neq z_2$ a řešíme rovnici $f(z_1) = f(z_2)$, dostaneme

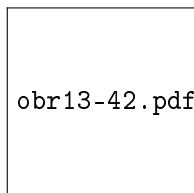
$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \implies (z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0 \implies z_1 z_2 = 1.$$

Oblast D roviny proměnné z , v níž je zobrazení *Žukovského* prosté, musí splňovat buď nerovnost $z_1 z_2 > 1$ pro libovolné dva body $z_1, z_2 \in D$, nebo nerovnost opačnou. V prvním případě je D vnitřkem jednotkového kruhu se středem v počátku soustavy souřadnic, $D = B(0, 1)$, v druhém případě vnějškem tohoto kruhu, $D = B(\infty, 1)$ — a to je náš případ, až na to, že náš kruh není jednotkový, ale má poloměr R . Zobrazení $f(z)$ tomu za chvíli snadno přizpůsobíme. Nejprve však ještě ověřme, co je obrazem oblastí $B(0, 1)$ a $B(\infty, 1)$ při zobrazení (13.91). V obou případech je to celá rovina \mathbf{C}^+ . Skutečně, zvolme libovolný bod $w \in \mathbf{C}$ a řešme rovnici $w = f(z)$

vzhledem k neznámé z ,

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \implies z^2 - 2wz + 1 = 0 \implies z_{1,2} = -w \pm \sqrt{w^2 - 1}.$$

Rovnice má vždy řešení. Ze vztahů pro kořeny, $z_1 z_2 = 1$, $z_1 + z_2 = 2w$, speciálně z prvního z nich, hned vidíme, že pro $|z_1| < 1$ je $|z_2| > 1$ a naopak. Jeden z kořenů vždy leží uvnitř oblasti $B(0, 1)$, druhý v jejím vnějšku, tj. uvnitř oblasti $B(\infty, 1)$. Konečně obrazu $w = \infty$ odpovídají vzory $z_1 = 0$ a $z_2 = \infty$, jak jsme koneckonců poznali již z definičního vztahu (13.91). První z těchto vzorů leží uvnitř $B(0, 1)$, druhý vně. Nakonec, ještě než se opravdu pustíme do řešení úlohy o obtékání, si udělejme představu, co udělá zobrazení Žukovského se standardně užívanými *sítěmi souřadnicových křivek* v rovině proměnné z , tj. jak je zobrazí do roviny proměnné w . Obrázek 13.42 ukazuje, jak se zobrazí *kartézská síť*, tvořená soustavami souřadnicových přímk $x = \operatorname{Re} z = C_1$, $y = \operatorname{Im} z = C_2$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné reálné konstanty. Pro



Obrázek 13.42: Obraz kartézské sítě při zobrazení Žukovského.

přímky $x = C_1$, $y = t \in \mathbf{R}$, resp. $x = t \in \mathbf{R}$, $y = C_2$ dostaneme

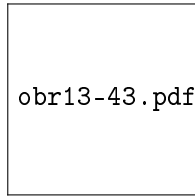
$$u(C_1, t) = \frac{C_1}{2} \left(1 + \frac{1}{C_1^2 + t^2} \right), \quad v(C_1, t) = \frac{t}{2} \left(1 - \frac{1}{C_1^2 + t^2} \right),$$

resp.

$$u(t, C_2) = \frac{t}{2} \left(1 + \frac{1}{C_2^2 + t^2} \right), \quad v(t, C_2) = \frac{C_2}{2} \left(1 - \frac{1}{C_2^2 + t^2} \right)$$

. Na obrázku 13.43 jsou pak obrazy *polární sítě*, tvořené kružnicemi $|z| = C_1$, neboli $z = C_1 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ a polopřímkami $\operatorname{Arg} z = C_2$, neboli $z = t \cos C_2 + it \sin C_2$, $t \in [0, \infty)$, kde C_1 a C_2 jsou opět libovolné reálné konstanty. Rovnice těchto křivek jsou

$$u(C_1 \cos t, C_1 \sin t) = \frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{1}{C_1} \right) \cos t, \quad v(C_1 \cos t, C_1 \sin t) = \frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{1}{C_1} \right) \sin t$$



Obrázek 13.43: Obraz polární sítě při zobrazení Žukovského.

resp.

$$u(t \cos C_2, t \sin C_2) = \left(t + \frac{1}{t}\right) \cos C_2 \quad v(t \cos C_2, t \sin C_2) = \left(t - \frac{1}{t}\right) \sin C_2.$$

První soustava křivek je soustavou elips o kartézských rovnicích v rovině proměnné w

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2}, \quad A = \frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{1}{C_1}\right), \quad B = \frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{1}{C_1}\right).$$

Kartézské rovnice jsme získali z parametrických vyjádření $\cos t$, resp. $\sin t$, umocněním na druhou a sečtením. Druhá soustava křivek je tvořena hyperbolami

$$\frac{u^2}{\cos^2 C_2} - \frac{v^2}{\sin^2 C_2} = 1.$$

Tu jsme získali vyjádření $\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right)$, resp. $\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)$ z první, resp. druhé parametrické rovnice, umocněním na druhou a odečtením.

Nyní už se dejme do řešení vlastní úlohy. Ještě musíme zobrazení $w = f(z)$ přizpůsobit tak, aby odpovídalo kruhové překážce o poloměru R , nikoli poloměru jednotkovém. Modifikace je jednoduchá. Zvolíme

$$w = f(z) = \frac{K}{2} \left(z + \frac{R^2}{z}\right),$$

přičemž konstanta K slouží k další „adjustaci“ zobrazení, která spočívá v uplatnění okrajové podmínky pro rychlost proudění v nekonečnu, $v_x(\infty) = v_0$, $v_y(\infty) = 0$. Dosazením do vztahu (13.89) dostaneme

$$v_x - iv_y = \frac{K}{2} \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right), \quad v_0 + i0 = \frac{K}{2} \text{ pro } z \rightarrow \infty,$$

proto $K = 2v_0$ a hledaná modifikace zobrazení Žukovského a jeho derivace mají definitivně tvar

$$w = f(z) = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right), \quad w' = f'(z) = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right).$$

Půlružnice $\mathcal{K} : z = R e^{it}, t \in [\pi, 0]$, se zobrazí na úsečku $f(\mathcal{K}) : w = t, t \in [-2v_0R, 2v_0R]$, její zrcadlový obraz $z = R e^{it}, t \in [-\pi, 0]$ na tutéž úsečku. Obrazem polopřímky \mathcal{P}_1 o rovnici $z = t, t \in (-\infty, -R)$ je polopřímka $f(\mathcal{P}_1)$ o rovnici $w = t, t \in (-\infty, -2v_0R]$, obrazem polopřímky \mathcal{P}_2 o rovnici $z = t, t \in [R, \infty)$ je polopřímka $f(\mathcal{P}_2)$ o rovnici $w = t, t \in [2v_0R, \infty)$. „Centrální“ proudnice je „zdvojená“ na polopřímkách \mathcal{P}_1 a \mathcal{P}_2 , „rozděluje se“ podél horní a dolní půlkružnice ohraničující překážku. Jejím obrazem je „zdvojená“ reálná osa v rovině proměnné w . Z vyjádření derivace vidíme, že zobrazení má dva kritické body, $z_1 = -R$ a $z_2 = R$. Jsou to body, v nichž se přímková část centrálních proudnic napojuje na kružnici. V těchto bodech je rychlost kapaliny nulová.

Vyjádríme komplexní potenciál proudění a jeho reálnou a imaginární část, potenciál a tok (viz vztah (13.88)):

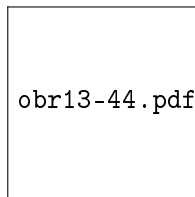
$$\begin{aligned} w &= f(z) = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) = v_0 \left(x + iy + \frac{R^2}{x + iy} \right), \\ \Phi(x, y) &= \operatorname{Re} f(z) = v_0 x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right), \\ \phi_V(x, y) &= \operatorname{Im} f(z) = v_0 y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned} \quad (13.92)$$

Rovnice obrazů proudnic v rovině proměnné w jsou $\operatorname{Im} w = \text{konst.}$, rovnice ekvipotenciálních křivek mají tvar $\operatorname{Re} w = \text{konst.}$. V rovině proměnné z pak dostáváme řešení naší úlohy,

$$\text{proudnice: } v_0 y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = K_1,$$

$$\text{ekvipotenciály: } v_0 x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = K_2.$$

Některé křivky soustavy proudnic a ekvipotenciálních křivek jsou znázorněny na obrázku 13.44.



Obrázek 13.44: Proudnice a ekvipotenciály při obtékání kruhové překážky.

Z několika málo nejjednodušších ukázek vidíme, jak mocná je metoda konformního zobrazení. A to v tomto textu nemůžeme zdaleka ukázat všechny její možnosti (řešení problémů elektrostatiky v rovině s bodovými náboji, dipóly i multipóly, nevírové i vírové proudění kapaliny v rovině se zřídly a místy zániku kapaliny, apod.) Literatura zabývající se touto problematikou je však natolik bohatá a dobře dostupná, že pro vážného zájemce není problém seznámit se s teorií i aplikacemi konformních zobrazení seznámit podrobně.

13.6.4 Cvičení

1. Dokažte, že zobrazení $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ převádí kružnice v kružnice a přímky v přímky.

2. V rovině proměnné z uvažujte síť křivek tvořenou soustavami ortogonálních křivek $x = C_1$, $y = C_2$, kde $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ jsou konstanty (tzv. *kartézská síť*). Zobrazení $w = f(z) = z^2$ je konformní v horní polorovině Gaussovy roviny, tj. v oblasti $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. Jaká síť odpovídá kartézské síti v rovině proměnné w ? Jaká síť v rovině proměnné z odpovídá kartézské síti v rovině proměnné w ?

Výsledek: Kartézské síti v rovině proměnné z odpovídá v rovině proměnné w soustava konfokálních parabol $w = C_1 - y^2 + 2iC_1y$, $w = x^2 - C_1 - 2iC_1x$. Vzorem ke kartézské síti $w = K_1$, $w = K_2$, kde K_1, K_2 jsou konstanty, v rovině proměnné z je síť rovnoosých hyperbol.

3. V rovině proměnné z uvažujte síť křivek tvořenou soustavami ortogonálních křivek $|z| = C_1$, $\text{Arg } z = C_2$, kde $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ jsou konstanty (tzv. *polární síť*). Zobrazení $w = f(z) = z^2$ je konformní v horní polorovině Gaussovy roviny, tj. v oblasti $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. Jaká síť odpovídá polární síti v rovině proměnné w ? Jaká síť v rovině proměnné z odpovídá polární síti v rovině proměnné w ?

Výsledek: V obou případech polární síť.

4. Úlohy 2. a 3. řešte pro případ zobrazení $w = e^z$, které je konformní v oblasti $D = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

Výsledek: Kartézská síť v rovině proměnné z se zobrazí na polární síť o rovnicích $|w| = e^{C_1}$, $\operatorname{Arg} w = C_2$.

5. Oblast D je vymezena třemi kružnicemi, z nichž každé dvě mají vnější dotyk (oblast D je „uvnitř“). Jeden z bodů dotyku je $z_0 = 0$. Na jakou oblast se zobrazí oblast D funkcí $w = f(z) = \frac{1}{z}$?

Výsledek: Polopás s vyňatým půlkruhem sestrojeným nad základnou polopásu jako nad průměrem.

6. Oblast D (polopás) je zadána takto: $D = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} y > 0\}$. Na jakou oblast se zobrazí funkcí $w = f(z) = \frac{1}{z}$?

Výsledek: Čtvrtý kvadrant s vyňatým půlkruhem $|w - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$.

7. Najděte všechna zobrazení typu $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, která ponechávají na místě body $z_1 = 1$ a $z_2 = -1$, tj. $f(z_1) = z_1$ a $f(z_2) = z_2$.

Výsledek: $w = \frac{az+b}{bz+a}$, $a, b \in \mathbf{C}$ jsou libovolné konstanty, neboli $\frac{w-1}{w+1} = A \frac{z-1}{z+1}$, kde $A \in \mathbf{C}$ je libovolná konstanta.

8. Najděte zobrazení typu $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ převádějící jednotkový kruh na horní polorovinu roviny \mathbf{C}^+ tak, aby bod $z_1 = -1$ přešel v bod $w_1 = \infty$, bod $z_2 = 1$ v bod $w_2 = 0$ a bod $z_3 = i$ v bod $w_3 = -1$.

Výsledek: $w = f(z) = -i \frac{z-1}{z+1}$.

9. Určete zobrazení typu $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tak, aby zobrazovalo horní polorovinu roviny \mathbf{C}^+ na sebe samu, a aby platilo $f(\infty) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = \infty$.

Výsledek: $w = f(z) = \frac{1}{1-z}$.

10. Určete zobrazení typu $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tak, aby zobrazovalo horní polorovinu $\operatorname{Im} z > 0$ roviny \mathbf{C}^+ na kruh $|w| < R$, a aby platilo $f(i) = 0$, $f'(i) = 1$. Určete poloměr R .

Výsledek: $w = f(z) = 2i \frac{z-1}{z+1}$, $R = 2$.

11. Dokažte, že zobrazení $w = f(z) = e^{i\varphi} \frac{z-z_0}{z-z_0^*}$ zobrazuje přímky $x = C_1$ na kružnice protínající kružnici $|w| = 1$ v bodě $e^{i\varphi}$ pod pravým úhlem a přímky $y = C_2$ na kružnice dotýkající se kružnice $|w| = 1$ v bodě $e^{i\varphi}$.

12. Dokažte, že zobrazení $w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ je prosté v horní polorovině $D = \{z \in \mathbf{C}^* \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ a určete oblast $f(D)$.

Výsledek: $f(D)$ je rovina s výřezy podél polopřímek $\operatorname{Re} z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $v = 0$.

13. Určete obraz $f(z)$ oblasti $D = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$ zobrazením $w = f(z) = \cos z$.

Výsledek: Pravá polorovina s výřezem podél polopřímky $1 \leq \operatorname{Re} w < \infty$, $\operatorname{Im} w = 0$.

14. Určete obraz $f(z)$ oblasti $D = \{z \in \mathbf{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\}$ zobrazením $w = f(z) = \operatorname{tg} z$.

Výsledek: Kruh $|w| < 1$.