

MOMENTY – DIDAKTICKÝ PROBLÉM?

Pavla MUSILOVÁ, Jana MUSILOVÁ

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity,
Kotlářská 2, 611 37 Brno, pavla@physics.muni.cz, janam@physics.muni.cz

Abstrakt:

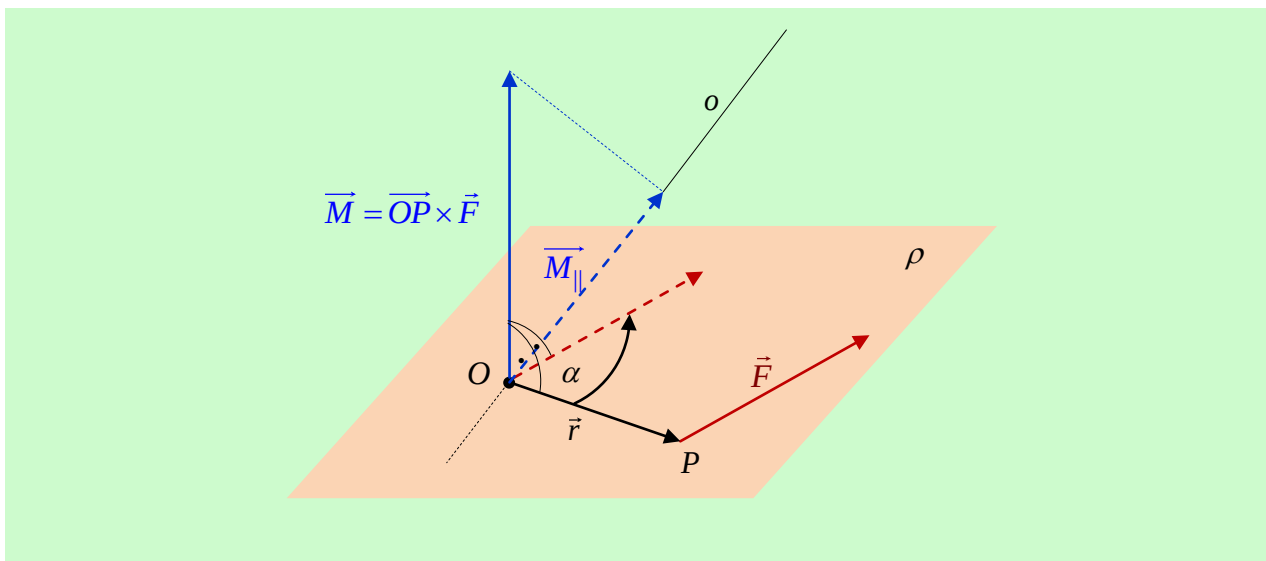
Příspěvek spadající do oblasti praktické didaktiky fyziky, středoškolské i bakalářské univerzitní, se zabývá problematikou didaktického přístupu k výkladu momentů vektorových veličin (moment síly, moment hybnosti, jejich definice a aplikace ve fyzikálních zákonech). Na první pohled jde o triviální záležitost – matematická definice vyžaduje „pouze“ znalost pojmu vektorový součin. Ukazuje se však, že na tento matematický aparát se na středních školách, a v současnosti bohužel ani v úvodu bakalářského vysokoškolského studia, nelze příliš spoléhat. V příspěvku se zaměříme, po zhodnocení nejběžnějších používaných přístupů, na fyzikálně a matematicky korektní výklad pojmů „moment síly vzhledem k bodu“ a „moment síly vzhledem k ose“. Věnujeme se také pojmu „rameno síly“, jen zdánlivě neproblematickému. (Problematika momentu hybnosti je pak zcela analogická.)

1. Proč momenty?

Jistě není pochybnost o smyslu pojmu *moment vektorové veličiny*. Už ve výuce fyziky na střední škole má své místo *moment síly*, potřebný pro výklad rovnováhy tělesa, a v přednáškách obecné fyziky v úvodu univerzitního studia pak nejen *moment síly*, ale také *moment hybnosti*, bez nichž nevysvětlíme časový vývoj rotačního pohybu těles. Má však smysl se tak pochopitelným pojmem podrobně zabývat matematicky, fyzikálně či didakticky? Jaký s tím může být problém? Například *moment síly* $\vec{F}$ vzhledem k bodu O je vektorový součin polohového vektoru $\vec{r}$ působící P síly vzhledem k bodu O a této síly, tedy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, *moment síly* $\vec{F}$ vzhledem k ose o (pevné, nebo okamžité) je kolmý průmět vektoru $\vec{M}$ do této osy, leží-li bod O na ní (obr. 1), viz např. [7], [8]¹. (Rovina ρ tvořená vektory $\vec{r}$ a $\vec{F}$ je obecná, tj. obecně není kolmá k ose o .) V tomto příspěvku umístíme vztažný bod O vždy na osu rotace. To jsou jednoduché definice², jejichž opodstatněnost, či „rozumnost“ se ukáže při jejich fyzikálních aplikacích. Vektorový součin a ortogonální průmět vektoru do daného směru jsou přece jasné pojmy. Není tedy o čem diskutovat a v tomto místě by výklad o momentu síly mohl skončit. Možná ale jen zdánlivě.

¹ Leží-li vztažný bod O mimo uvažovanou osu o , kolem níž těleso rotuje (nejčastěji osa pevná v nějaké inerciální vztažné soustavě), je momentem síly $\vec{F}$ vzhledem k ose o průmět vektorového součinu $(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$ do osy, přičemž $\vec{r}_0$ je polohový vektor libovolného body osy o vzhledem k bodu O .

² Definici lze posunout do „abstraktnější“ polohy: Momentem vázaného vektoru (P, ξ) , umístěného v bodě P prostoru $\mathbf{R}^3$ vzhledem k bodu O rozumíme vektorový součin $\vec{r} \times \vec{\xi} = \overrightarrow{OP} \times \vec{\xi}$, kde $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ je polohový vektor bodu P vzhledem k předem stanovenému vztažnému bodu O . Zobecnění vektorového součinu, včetně jeho interpretace jako tenzoru, i na vícerozměrné situace je záležitostí multilineární algebry.



Obr. 1: Moment síly vzhledem k bodu a vzhledem k ose.

Dojem oné „zdánlivé“ jednoduchosti může mít každý, kdo je dobře obeznámen s potřebným matematickým aparát, v tomto případě vektorovým součinem a obecně s počítáním s vektory. Takový předpoklad je jistě samozřejmý u učitelů, nelze však očekávat jeho splnění u studentů – středoškoláků, a bohužel ani u začínajících studentů fyziky na vysoké škole. Proto je vhodné zavést pojem moment síly tak, aby vektorový součin nebyl potřeba (i když skrytě samozřejmě ve výkladu přítomen bude), a aby byl výklad fyzikálně správný a pokud možno i obecný. Příspěvek představuje především určitý názor, předkládaný středoškolským učitelům k možné diskusi, jak se výkladu zhostit. Jako alternativa k standardním učebnicovým partiím by mohl posloužit začínajícím univerzitním studentům fyziky, nebo i pokročilejším zájemcům o fyziku z řad gymnazistů.

2. Moment síly v učebnicích fyziky

Poznatky zkušených učitelů fyziky středních (a často i vysokých škol) ukazují, že problém s tak jednoduchým zavedením momentů vektorových veličin, jak bylo uvedeno v předchozím odstavci, může být a skutečně je. Spočívá totiž v matematice a se stále klesající úrovní matematických dovedností absolventů našich středních škol se postupně ještě prohlubuje. Studenti algebraickou definici vektorového součinu příliš nechápou a ve schopnost praktického počítání se složkami už nelze doufat vůbec - viz například [2, 3]. (Od konce minulého století, kam se řadí práce [2], kdy začalo docházet k poměrně značným změnám ve výukových plánech řady předmětů, včetně přírodovědných – kdysi „osnovy“, nyní RVP – úroveň výsledků matematického vzdělání rok od roku bohužel klesá, což ukazuje lety potvrzená zkušenost obou autorek z výuky fyziky i matematiky u začínajících studentů fyziky na PřF MU. Položku [3] citujeme jako přistoupení na názor kolegy, renomovaného učitele fyziky a autora učebnic, právě po jisté polemice předchozích let – a léta mu dala zapravdu.) Je zřejmě třeba se vzdát optimistického názoru, že při výuce středoškolské fyziky lze s vektory a operacemi s nimi (rozklad do složek v bázi, skalární a vektorový součin včetně výpočtů ve složkách) běžně pracovat.

Přesto je nutné najít cesty, jak momenty vektorových veličin zavést a pracovat s nimi již na střední škole (a již jako pojmy nikoli neznámé je upřesňovat a používat v úvodních etapách univerzitního studia fyziky či technických oborů). Bez nich totiž nelze rozumně vysvětlit ani rovnováhu těles, a tím méně problematiku vůbec nejjednoduššího typu otáčivého pohybu – rotaci tuhého tělesa kolem pevné osy. Vynecháním výkladu této problematiky nebo jeho ochuzením nevhodným obcházením matematického aparátu zůstává výuka mechaniky, jedné ze základních disciplín obecné fyziky, jež ve srovnání s abstraktnějšími oblastmi významně napomáhá k utváření fyzikálního myšlení studentů, takřkajíc „v půli cesty“. Stručně řečeno, impulsové věty (samozřejmě v matematické formulaci pro středoškoláky schůdné) do středoškolské fyziky patří.

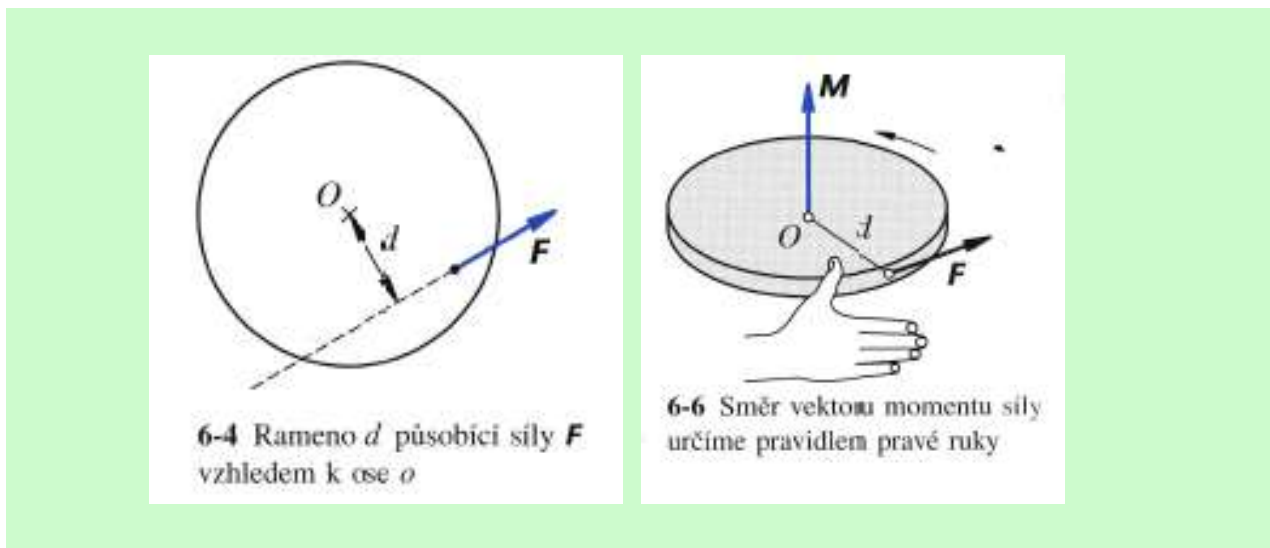
Shodneme se jistě, že „kamenem úrazu“ je počítání s vektory, konkrétně vektorový součin. Všimněme si tedy, jak různé učebnice řeší zavedení momentů (především momentu síly) tak, aby se vektorovému součinu vyhnuly. (Dodejme, že některé z nich potom připojují poněkud povrchní dodatek o vyjádření momentů pomocí vektorového součinu, aniž se problémem zabývají hlouběji.) Uvedme několik příkladů zavedení momentu síly nejen ve známých učebnicích středoškolské fyziky, v nichž se studenti setkávají s důkladnějším zavedením pojmu moment síly v podstatě poprvé), ale také v učebnicích obecné fyziky na bakalářské univerzitní úrovni, jež, jak se ukazuje, výklad na matematicky pokročilejší úroveň příliš neposouvají³. Ze středoškolských učebnic jsme jako ukázkou zvolili jednak po léta oficiálně uznávanou a hojně používanou učebnici mechaniky [1] ze série Fyzika pro gymnázia nakladatelství Prometheus, vydávanou od 90. let minulého století až po přepracovaná vydání současnosti, jednak, pro srovnání, zcela novou moderní elektronickou učebnici [4] brněnských autorů. Pro ukázky výkladu na úrovni úvodních pasáží univerzitní mechaniky jsou zvoleny položky [5] (oblíbená učebnice z doby jejího vydání při tehdejší výuce na PřF MU) a dnes velmi populární učebnice [6], jež je na brněnských vysokých školách (zejména Vysokém učení technickém a Přírodovědecké fakultě MU) masivně doporučovaná a na PřF MU se stala dokonce tzv. srovnávací literaturou⁴.

Oficiální učebnice fyziky pro gymnázia [1].

Uvažujme těleso, které je v inerciální soustavě otáčivé kolem nehybné osy. Ze zkušenosti víte, že chceme-li takové těleso roztočit, musíme na ně působit silou. Budeme uvažovat jen případy, kdy je působící síla kolmá k ose otáčení. ... kromě vektorové veličiny síla je nutné u otáčivého pohybu zavést další vektorovou veličinu vyjadřující otáčivý účinek síly. Veličina se nazývá moment síly vzhledem k ose otáčení. Moment síly je vektorová fyzikální veličina. Velikost momentu síly je rovna součinu velikosti působící síly F a kolmé vzdálenosti d vektorové přímky síly od osy otáčení (obr. 6-4): $M = Fd$. Vzdálenost d se nazývá rameno síly... Vektor momentu síly $\mathbf{M}$ leží v ose otáčení a je současně kolmý k síle i k ramenu síly. Směr momentu síly určíme podle pravidla pravé ruky: Položíme-li pravou ruku na těleso tak, aby prsty ukazovaly směr otáčení tělesa, pak vztyčený palec ukazuje směr momentu síly (obr. 6-6).

³ Množství literatury naší i zahraniční, zpracovávající diskutovanou tematiku na dané úrovni vzdělávání, je nepřehledné, cílem tohoto příspěvku však není rozbor učebnic.

⁴ Raná vydání autorů Halidaye a Resnicka pocházejí z druhé půle minulého století a k dnešku dospěla v USA k 10. vydání péčí J. Walkera. Učebnice byla přeložena do češtiny poprvé v roce 2001, podruhé v roce 2013 (8. vydání) a po vyprodaných dotiscích se připravuje další překlad.



Obr. 2: Ilustrace k zavedení momentu síly v učebnici [1].

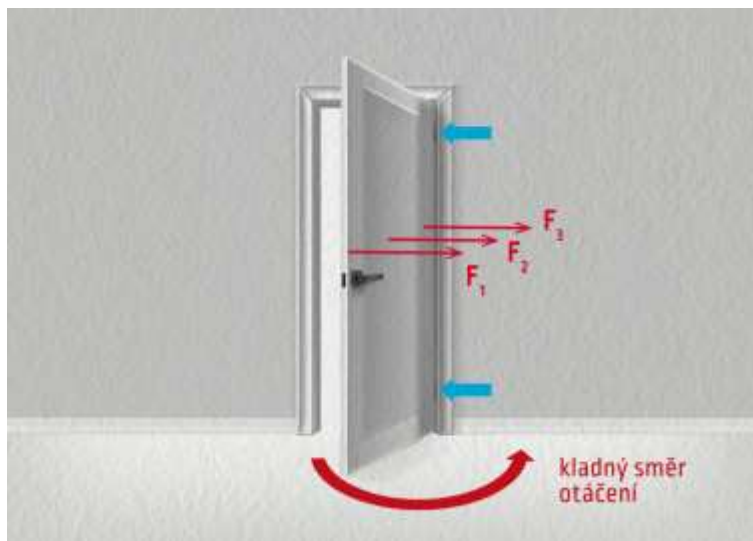
Komentář: I když definice v učebnici [1] nepoužívá vektorový součin, definuje *moment síly* vzhledem k (pevné) ose (se zdůrazněním, že jde o vektorovou veličinu), fakticky správně za speciálního předpokladu, že uvažovaná síla je k dané ose kolmá – tento předpoklad je explicitně uveden. Pojem *pevná osa* je rovněž správně specifikován, a to volbou inerciální vztažné soustavy. Problémem ovšem je „definice“ *ramene síly* jako vzdálenosti dvou přímek (v daném případě mimoběžek). Středoškolák nejen že nedokáže vzdálenost vypočítat, ale ani o ní nezíská nějakou geometrickou představu. Výjimkou jsou snad nákresy na obr. 2, relevantní pro velmi speciální případ, a to pro sílu kolmou k ose, přičemž obrázek vpravo zobrazuje pouze vzdálenost dvou bodů, konkrétně působíště síly a průsečíku osy s rovinou k ní kolmou, v níž síla jakožto vázaný vektor leží. Jak student ví, že právě tato vzdálenost bodů je současně vzdáleností osy o a přímky, v níž leží působící síla? Pojem „rameno síly“ tak zůstává z hlediska studenta poněkud prázdný.

Jiná otázka, kterou si student může položit, zní, jak je to s momentem síly vzhledem k ose, když síla k ose není kolmá. Do problému totiž na základě výkladu příliš „není vidět“. Požadavek kolmosti síly k ose není nijak zdůvodněn, a autoři se nezmiňují o možnosti zobecnění. A tak dokonce může vzniknout dojem, že definovat moment síly obecného směru nemá smysl. A otázka, jak je to úplně obecně (tj. definice momentu obecně umístěné a obecně orientované síly vzhledem ke zvolenému vztažnému bodu, nebo vzhledem k pevné či okamžité ose) zůstává nejen nezodpovězena – není ani vyřčena, zřejmě pro obtížnost odpovědi na dané úrovni vzdělávání.

Alternativní elektronická učebnice fyziky pro gymnázia [4].

V situaci na obrázku 16.13 působí na dveře tři síly. Tyto síly sice mají stejnou velikost a stejný směr, ovšem každá z nich má jiný vliv na otáčení tělesa: síla $\vec{F}_1$, působící nejdál od svislé osy

pantů, dveřmi otáčí nejvíce, naopak síla $\vec{F}_3$, působící přímo v ose otáčení, nemá žádný otáčivý účinek.



Obr. 3: Převzatý obr. 16.13 z učebnice [4].

Z toho plyne, že síla samotná k pochopení a předvídání rotace nestačí a je třeba zohlednit i její polohu vůči ose otáčení. Proto definujeme veličinu **moment síly**, která dobře vystihuje schopnost těleso roztočit.

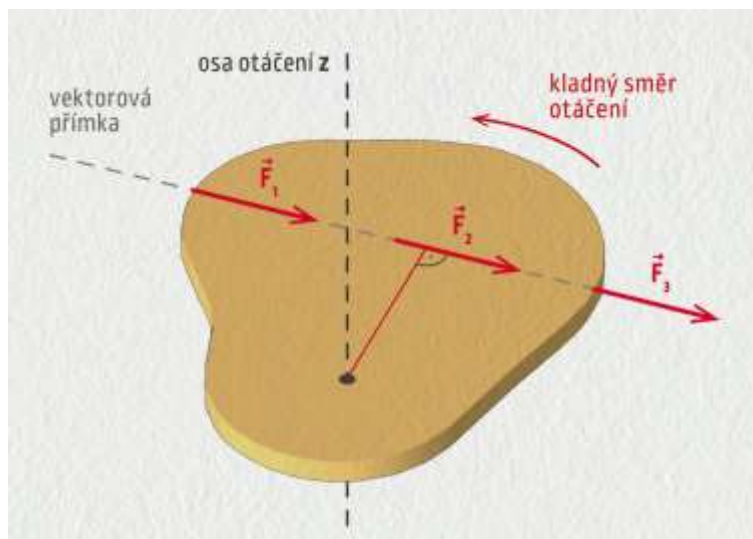
Definice momentu síly:

$M_z = \pm rF$, $M_z \dots$ moment síly vzhledem k ose otáčení z , $r \dots$ rameno síly, $F \dots$ velikost síly

Moment síly je fyzikální veličina vyjadřující otáčivý účinek síly kolem dané osy. Konstrukteři automobilů jí říkají též „točivý moment“. Pokud chceme porovnávat účinky více sil na otáčení tělesa, musíme jejich momenty vztahovat vždy k téže ose – proto je praktické indexem vyznačit, o kterou osu se jedná, v našem případě osa z , tedy M_z .

.... Rameno síly r je kolmá vzdálenost osy otáčení od přímky, v níž leží síla. Rameno síly je poněkud zrádný pojem, protože nemusí automaticky znamenat vzdálenost osy otáčení a působiště síly. Jak vidíte na dalším obrázku 16.15, tři stejné síly $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ mají různá působiště. Ale poněvadž se nacházejí na jediné společné přímce, mají všechny stejné rameno r , a tím pádem stejný otáčivý účinek: $M_{z1} = M_{z2} = M_{z3}$.⁵

⁵ K uvedenému výkladu pojmu „moment síly“ v [4] poznamenejme, že v jiné kapitole, konkrétně při výkladu působení magnetického pole na pohybující se nabitou částici, je v této učebnici použit vektorový součin (bez bližšího vysvětlení či procvičení).



Obr. 4: Převzatý obr. 16.15 z učebnice [4].

Komentář: Na rozdíl od učebnice [1] nekladou autoři učebnice [4] žádné požadavky na vztah působících sil k ose rotace, nespecifikují ani vztažnou soustavu, v níž jsou úvahy vedeny. I když v ilustračních obrázcích jsou působící síly zakresleny kolmo k ose rotace, fakt, že to není explicitně řečeno, může vést k špatnému pochopení pojmu moment síly. Čtenář se z textu nedoví ani to, že moment síly je vektorová veličina. Nepomůže k tomu ani označení M_z , jež čtenář těžko může správně chápat jako složku vektoru, nehledě na zavádějící znaménko ve vztahu $M_z = \pm rF$. A formulace: „*Rameno síly je poněkud zrádný pojem, protože nemusí automaticky znamenat vzdálenost osy otáčení a působíště síly.*“ je v daném kontextu už zcela matoucí, až nesmyslná, neboť rameno síly bylo chvíli předtím definitoricky stanoveno jako *kolmá vzdálenost osy otáčení od přímky, v níž leží síla*, což je ovšem v pořádku pouze pro případ, kdy je síla kolmá k ose. Zde je tedy definice momentu síly vzhledem k ose fyzikálně chybná, na rozdíl od učebnice [1], kde je pouze „nedotažená“ k obecnosti. Chvályhodná snaha autorů učebnice [4] přiblížit pochopení pojmu moment síly obrázky či příklady z praxe se tak poněkud mívá účinkem⁶.

Vysokoškolská učebnice [5].

The tendency of a force to rotate a body about some axis of rotation is measured by the quantity called the torque τ . The torque due to a force $\vec{F}$ has the magnitude $\tau = Fd$, distance d is the lever arm (or moment arm) of the force $\vec{F}$. The lever arm is the perpendicular distance from the axis of rotation to the line drawn along the direction of the force.

Mírou schopnosti síly otáčet tělesem kolem určité osy rotace je veličina zvaná moment síly τ . Moment síly $\vec{F}$ má velikost $\tau = Fd$, vzdálenost d je rameno síly $\vec{F}$. Rameno je kolmá vzdálenost osy rotace a přímky, v níž leží síla.

⁶ Vzhledem k počtu návštěv elektronické učebnice [4] by bylo vhodné dát věc do pořádku, přinejmenším doplněním explicitního předpokladu kolmosti síly k ose rotace tělesa.

Komentář: Stejně jako v [4] není zdůrazněn vektorový charakter momentu síly vzhledem k ose. Není také uveden předpoklad, že je směr síly k ose kolmý. Bez tohoto předpokladu je definice chybná. Rovněž *rameno síly* je didakticky nevhodně definováno jako vzdálenost přímky, v níž působí síla, od osy rotace.

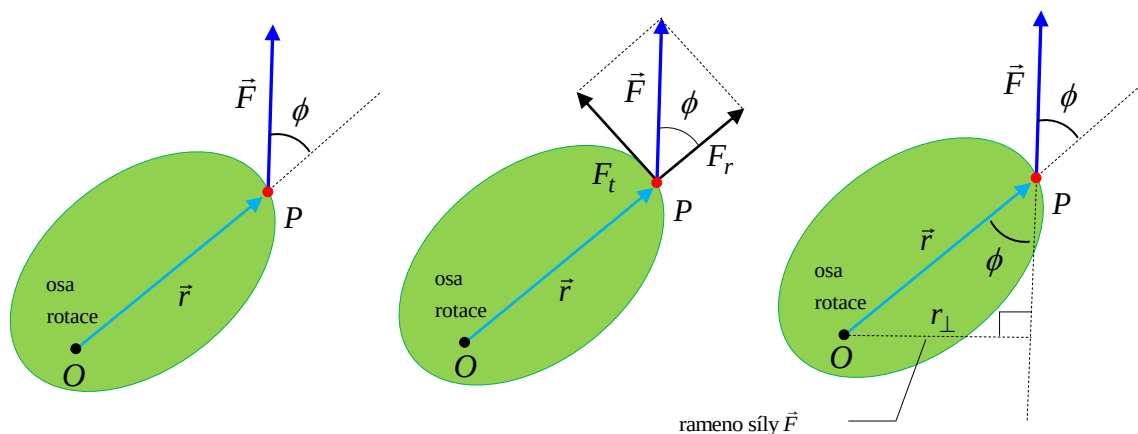
Vysokoškolská učebnice [6].

Tento text, nazývaný HRW, se deklaruje jako učebnice univerzitní obecné fyziky.

K momentům se staví takto:

Figure 10-16a shows a cross section of a body that is free to rotate about an axis passing through O and perpendicular to the cross section. A force $\vec{F}$ is applied at point P , whose position relative to O is defined by a position vector $\vec{r}$. The directions of vectors $\vec{F}$ and $\vec{r}$ make an angle ϕ with each other. (For simplicity, we consider only forces that have no component parallel to the rotation axis; thus $\vec{F}$ is in the plane of the page.) ... we define quantity called torque τ as the product of the two factors and write $\tau = (r)(F \sin \phi)$. Two equivalent ways of computing the torque are $\tau = (r)(F \sin \phi) = rF_t$, $\tau = (r \sin \phi)(F) = r_{\perp}F$, where $r_{\perp}$ is the perpendicular distance between the rotation axis at O and an extended line running through the vector $\vec{F}$ (Fig. 10-16c). This extended line is called line of action of $\vec{F}$ and $r_{\perp}$ is called the moment arm of $\vec{F}$.

Český překlad⁷: Obrázek 10-16 ukazuje řez tělesem, které může volně rotovat kolem osy procházející bodem O a kolmé k řezu. Síla $\vec{F}$ působí v bodě P , jehož poloha vzhledem k O je dána polohovým vektorem $\vec{r}$. Směry vektorů $\vec{F}$ a $\vec{r}$ svírají úhel ϕ . (Pro jednoduchost uvažujeme jen o silách, jejichž průmět do osy rotace je nulový; síla $\vec{F}$ tedy leží v rovině stránky knihy.) ... definujeme veličinu zvanou moment síly τ jako součin dvou faktorů a



Obr. 5: Obr. 10-16a,b,c, překreslený podle učebnice [6].

⁷ Pro pohodlí a okamžitou orientaci čtenáře zde uvádíme věrný překlad citované formulace, nikoli odpovídající formulaci z českého překladu, která je v některých pasážích překladatelskou úpravou originálního znění (se svolením autora originálu).

píšeme $\tau = (r)(F \sin \phi)$. Dva ekvivalentní způsoby jak počítat moment síly jsou $\tau = (r)(F \sin \phi) = rF_{\perp}$, $\tau = (r \sin \phi)(F) = r_{\perp}F$, kde $r_{\perp}$ je kolmá vzdálenost osy rotace a přímky, v níž leží vektor $\vec{F}$ (Obr. 10-16c). Tato přímka se nazývá přímka působení síly $\vec{F}$ a $r_{\perp}$ je rameno síly.

Torque revisited (s použitím vektorového součinu): To determine the magnitude of $\vec{\tau}$, we apply the general result $c = ab \sin \phi$ where ϕ is the smaller angle between directions $\vec{r}$ and $\vec{F}$, $\tau = rF_{\perp}$... component of $\vec{F}$ perpendicular to $\vec{r}$... $\tau = r_{\perp}F$, $r_{\perp}$ is moment arm of $\vec{r}$ (perpendicular distance between O and line of action $\vec{F}$).

Moment síly znovu: Abychom určili velikost vektoru $\vec{\tau}$, použijeme obecný výsledek $c = ab \sin \phi$, kde ϕ je menší z obou úhlů vektorů $\vec{r}$ a $\vec{F}$, $\tau = rF_{\perp}$... složka síly $\vec{F}$ kolmá k $\vec{r}$... $\tau = r_{\perp}F$, $r_{\perp}$ je rameno vektoru $\vec{r}$ (kolmá vzdálenost bodu O a přímky, v níž působí síla $\vec{F}$).

Komentář:

Moment síly vzhledem k ose je v kapitole 10 nejprve definován jako skalární veličina s předpokladem síly kolmé k ose a s nezdůvodněným konstatováním, že se na něm „podílí“ pouze průmět síly $\vec{F}$ do směru kolmého k polohovému vektoru jejího působistě. Vektorový charakter je momentu síly „přiznán“ teprve v „nadstavbové“ kapitole 11 Torque revisited, kde se již uvažuje moment síly vzhledem k bodu, definovaný jako $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, dále se však už vektorově nepočítá, pouze s velikostmi průmětů do preferovaných směrů. Síla $\vec{F}$ stále leží v rovině kolmé k ose, bez dalšího komentáře, přestože vektorový součin umožňuje obecnou formulaci a poté diskusi jednotlivých speciálních případů. Ve skutečnosti se tedy opět pojednává pouze moment síly vzhledem k ose, který je ve speciálním případě síly kolmé k ose shodný s momentem této síly vzhledem k bodu O, ležícím na ose (text jinou polohu bodu O nezvažuje) – aniž na to autor upozorňuje. Neobvyklé a matoucí je hovořit o „rameni vektoru $\vec{r}$ “. Formulace textu je v obou zmíněných kapitolách zbytečně komplikovaná a směřuje-li učebnice na vysokoškolskou úroveň, jak autor konstatuje, zbytečně se vyhýbá efektivnímu používání matematiky. Fakticky komplikovaně kopíruje středoškolské postupy a ani tak nepřináší pojmy a zákony v plné obecnosti. Vzhledem k omezení pojmu moment síly na moment vzhledem k ose zůstává ochuzen obsah druhé impulsové věty, „odvozené“ pro jeden hmotný bod a zobecněný na soustavu hmotných bodů. Nepochopitelné je značení průmětů síly do preferovaných směrů (např. zrovna v obr. 10-16 – zde viz obr. 5) symboly bez šipek, průměty samy však šipkami opatřeny jsou.

Ukazuje se, že společným rysem zmíněných učebnic (a nepochybně řady dalších) je definovat primárně, nebo dokonce pouze ([1], [4]) *moment síly vzhledem k ose*, nikoli vzhledem k vztažnému bodu, přestože východiskem by měl být právě moment síly vzhledem k bodu jakožto obecnější pojem – moment síly vzhledem k ose je už jen jeho průmětem do osy, leží-li vztažný bod na ose – [7, 8]. Formulace jsou neprůhledné a často zavádějící. Nepřesně či nesprávně se také zachází s pojmem *rameno síly*. Zásadním nedostatkem některých přístupů

je ovšem to, že autoři implicitně uvažují o speciálním případě, kdy síla působící na těleso rotující kolem osy je k této ose kolmá, aniž by na to zjevně upozornili. (Ani doprovodné obrázky explicitně vyslovený předpoklad nenahradí). Text pak budí dojem obecnosti, je však fakticky chybný.

3. Jak to tedy je s momentem síly?

Zdá se, že pojem momentu síly se nedá na střední škole pořádně vyložit, nepoužijeme-li přímo definici pomocí vektorového součinu. (V učebnici [6] však není příliš srozumitelně vysvětlen ani s použitím vektorového součinu.) Vzdát se rozumného popisu rotačního pohybu přinejmenším kolem osy pevné v inerciální soustavě bychom jistě neměli.

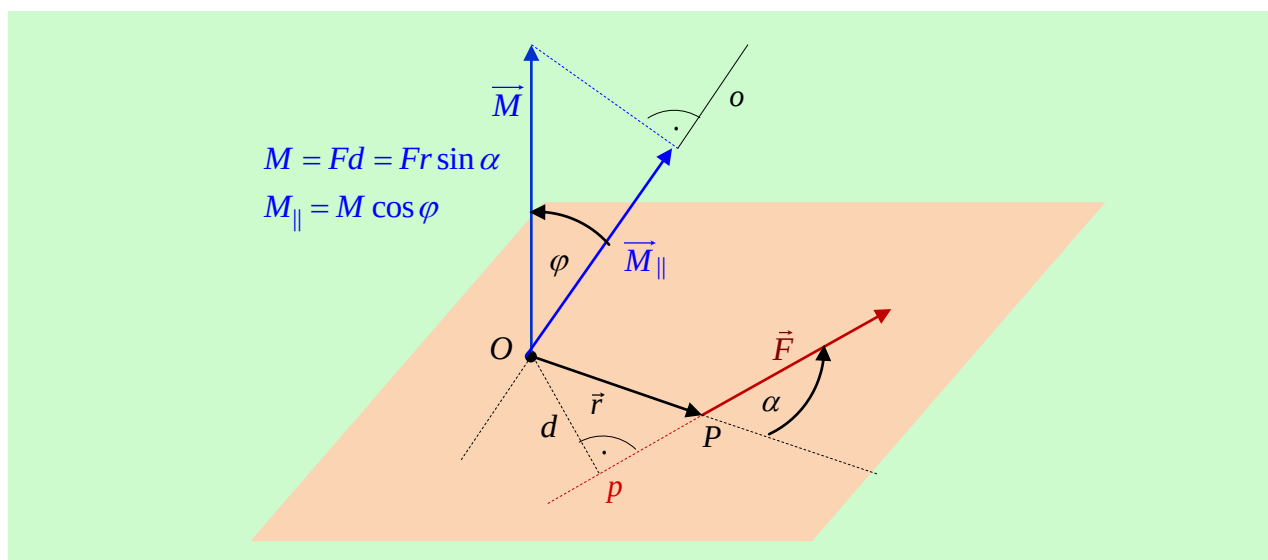
Následující postup navrhneme jako jednu z možností fyzikálně správného a didakticky vhodného výkladu bez přímého použití operace vektorového součinu:

Moment síly vzhledem k pevnému bodu: Zvolme bod O (např. počátek soustavy souřadnic) pevný v inerciální vztažné soustavě. Uvažujme o síle $\vec{F}$ působící na těleso v bodě P , jehož polohový vektor vzhledem k bodu O je $\vec{r}$ (viz obr. 1). *Moment síly $\vec{F}$ vzhledem k bodu O* je vektor $\vec{M}$, definovaný takto (obráz. 6):

- Jeho velikost je $M = Fr \sin \alpha$, kde α je (dutý) úhel mezi vektory $\vec{F}$ a $\vec{r}$. (Veličina $d = r \sin \alpha$ je vzdálenost vztažného bodu O od přímky, v níž působí síla. Nazývá se *rameno síly vzhledem k bodu O* .)
- Vektor $\vec{M}$ je kolmý k rovině tvořené vektory $\vec{F}$ a $\vec{r}$. (Jsou-li vektory $\vec{F}$ a $\vec{r}$ rovnoběžné a netvoří tedy rovinu, je vektor $\vec{M}$ podle prvního požadavku nulový.)
- Výběr jedné ze dvou možných orientací vektoru $\vec{M}$ je určen tzv. pravidlem pravé ruky (lze odkázat na obrázek – vhodný je např. náčrt na obr. 2).

K definici momentu síly vzhledem k ose o procházející bodem O se přejde již velmi jednoduše – je to průmět momentu $\vec{M}$ do směru osy. Nemusí jít ani o pevnou osu, definice se vztahuje i na osu okamžitou.

Může se zdát, že množství textu v definici je příliš velké. Jistě, jedná se fakticky o definici vektorového součinu, aniž se toto slovní spojení použije. Je to však definice správná. Protože nevyužívá žádných zavádějících či chybných formulací, je ve svém důsledku ve skutečnosti jednodušší k pochopení než výše uváděné učebnicové definice v [4], [5] a [6] formulované přímo vzhledem k ose. (Definice momentu síly vzhledem k pevné ose uvedená v [1] je v zásadě správná, je však omezena pouze na síly kolmé k ose, jak je v textu explicitně uvedeno.)



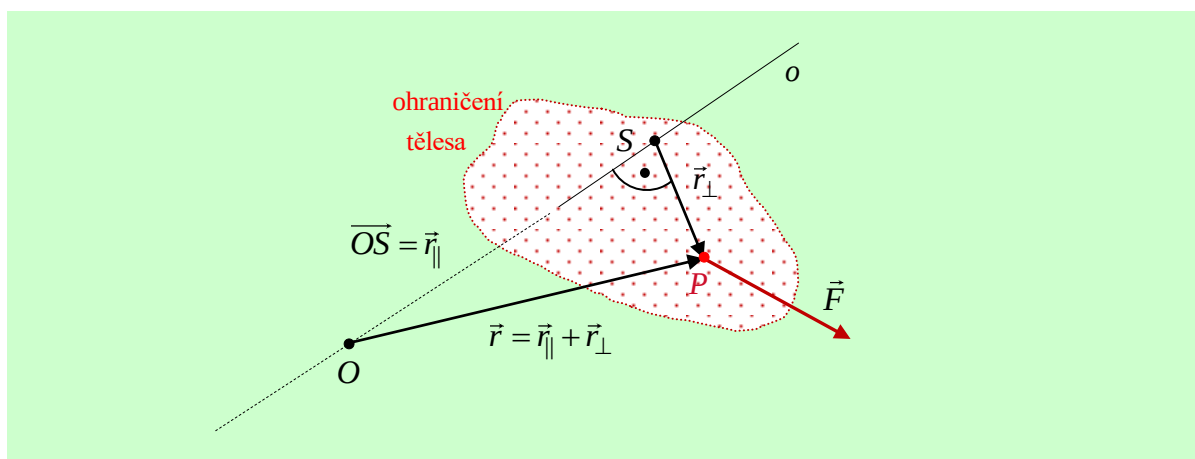
Obr. 6: K definici momentu síly vzhledem k bodu.

Definice momentu síly vzhledem ke vztažnému bodu je obecnější než definice momentu vzhledem k ose. Moment díly vzhledem k ose je pouze průmětem momentu vzhledem k bodu do směru osy (pro bod O ležící na ose).

Rameno síly: Rameno síly vzhledem k bodu O jsme definovali jako vzdálenost bodu O od přímky, v níž působí síla (leží na ní působiště síly P). Tato definice je zcela průhledná a nemůže u ní dojít k dezinformacím, na rozdíl od „definic“ uváděných v učebnicích pro případ momentu síly vzhledem k ose. V [1], [4] a [5] je ramenem síly nazvána vzdálenost přímky p , v níž působí síla $\vec{F}$, od osy o . Tato definice *ramene síly* je pro případ výpočtu momentu síly vzhledem k ose o správná, jen když je síla $\vec{F}$ kolmá k ose o . (Například pro sílu $\vec{F}$ rovnoběžnou s osou o ve vzdálenosti d je ovšem moment této síly vzhledem k ose nulový, moment vzhledem k libovolnému bodu na ose má velikost $M = Fd$ a je kolmá k ose o .)

4. Moment síly vzhledem k bodu a ose podrobněji

Vraťme se k problematice momentu síly vzhledem ke zvolenému vztažnému bodu a vzhledem ke zvolené ose (pevné, nebo i okamžité). Při výkladu s využitím vektorového součinu poukážeme na problémy objevující se při běžných středoškolských přístupech, zejména není-li explicitně uvedeno, že se týkají pouze sil kolmých k ose rotace. Moment síly $\vec{F}$ působící na těleso v bodě P (obr. 7) vzhledem k bodu O je definován vztahem $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Provedme rozklad vektorů $\vec{r}$ a $\vec{F}$ do směru osy o a do roviny k této ose kolmé, pak



Obr. 7: K momentu síly vzhledem k bodu a ose.

$$\begin{aligned}\vec{M} &= (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \times (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}) = \vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\parallel} + \vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp} = \\ &= (\vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\parallel}) + (\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp})\end{aligned}$$

Vektor v první závorce je kolmý k ose o (vektorový součin je vektor kolmý k oběma činitelům, vektor v druhé závorce je s ní rovnoběžný (nebo nulový, pokud by nastal speciální případ $\vec{r}_{\perp} \parallel \vec{F}_{\perp}$), tedy

$$\vec{M}_{\parallel} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}, \quad \vec{M}_{\perp} = \vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\parallel}.$$

Průmět $\vec{M}_{\parallel}$ je *moment síly $\vec{F}$ vzhledem k ose o* . Je vidět, že k němu přispívá pouze průmět síly do roviny kolmé k ose. Je-li ve speciálním případě síla $\vec{F}$ kolmá k ose o , je $\vec{F}_{\parallel} = \vec{0}$ a platí

$$\vec{M}_{\parallel} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}, \quad \vec{M}_{\perp} = \vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}.$$

Z posledních vztahů je zcela zřejmé, co je moment síly vzhledem k bodu a vzhledem k ose. (V souvislosti s předchozím výkladem vzniká také otázka, zda je rozumné odlišovat moment síly vzhledem k bodu a jeho průmět do osy odlišovat terminologicky tak výrazně, jako se to stalo zvykem. Vždyť jde pouze o geometrický vztah, zatímco přívlastek „vzhledem k bodu“ a „vzhledem k ose“ budí dojem rozdílu spíše zásadnějšího.)

Uveďme ještě vztah, v němž vyjádříme velikost momentu vzhledem k ose pomocí velikosti síly obecného směru. Označme $\vec{s}$ jednotkový vektor ve směru osy o . Vzhledem k tomu, že moment síly $\vec{F}$ vzhledem k ose o je průmět momentu vzhledem k bodu O do osy o , platí

$$\begin{aligned}\vec{M}_{\parallel} &= [(\vec{r} \times \vec{F}) \vec{s}] \vec{s} = [(\vec{s} \times \vec{r}) \vec{F}] \vec{s} = [(\vec{s} \times \vec{r}_{\perp}) \vec{F}] \vec{s} \Rightarrow \\ M_{\parallel} &= |(\vec{s} \times \vec{r}_{\perp}) \vec{F}| = Fr_{\perp} \cos \varphi,\end{aligned}$$

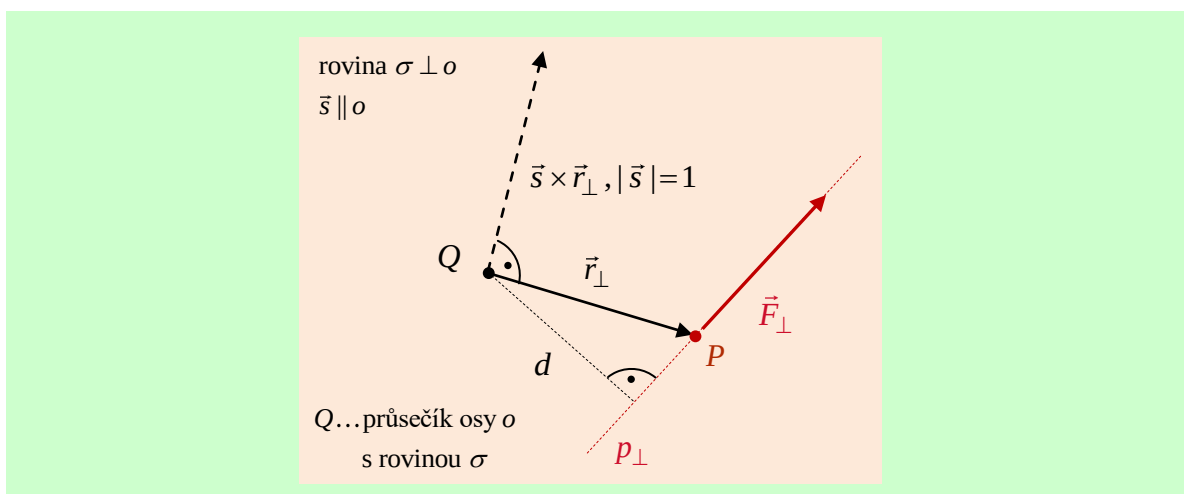
kde φ je úhel mezi vektory $\vec{s} \times \vec{r}_{\perp}$ a $\vec{F}$.

Otázkou je, co je to *rameno síly*, a zda je tento pojem vůbec potřebný. V případě momentu síly vzhledem k bodu a vzhledem k ose jsou to dvě různé veličiny – momenty

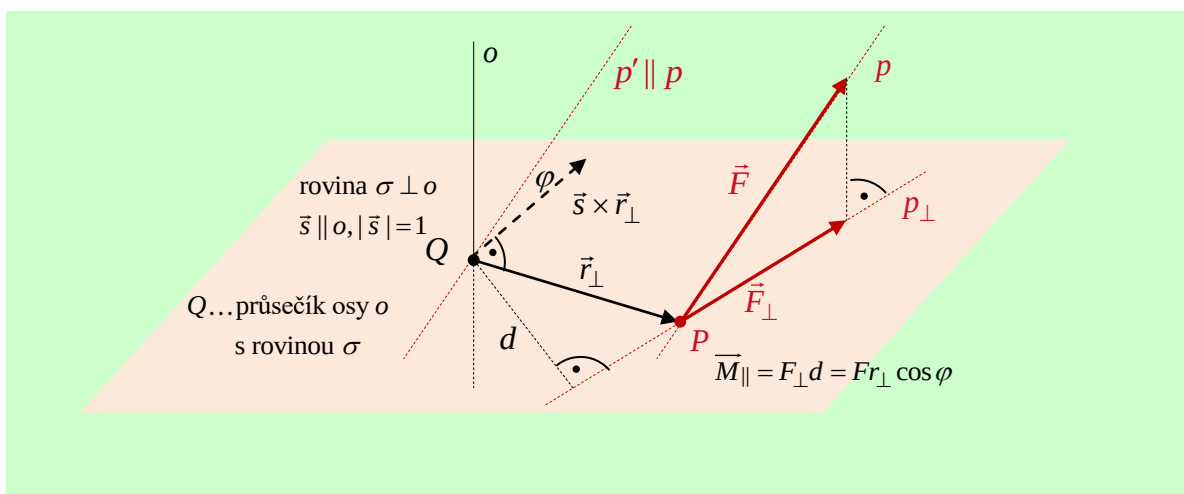
síly $\vec{F}$ vzhledem k různým osám procházejícím bodem O jsou obecně různé, zatímco moment této síly vzhledem k bodu O je stále týž. Pojem rameno síly v případě, že pracujeme s vektorovým součinem, fakticky nepotřebujeme. Standardně se však používá pro vyjádření velikosti momentu síly „poučka“

$$M = Fd \text{ tedy velikost momentu} = \text{velikost síly krát délka ramene.}$$

Ta se bohužel ve výuce fyziky tak vžila, že již málokdo přemýšlí, co vlastně znamená. Působí-li síla obecného směru v obecném bodě tělesa, co by tedy mělo být oním „ramenem“, aby poučka byla správná? Odpověď je samozřejmě různá, jde-li o moment síly vzhledem k bodu či o moment síly vzhledem k ose. V případě momentu síly vzhledem k bodu je rameno vyznačeno na obr. 6, je to vzdálenost vztažného bodu O od přímky p , v níž působí síla. V případě momentu vzhledem k ose ukazuje situaci názorně obr. 8a, zobrazující geometrické „poměry“ v rovině kolmé k ose vedené působištem síly $\vec{F}$. Prostorovou situaci přibližuje obr. 8b.



Obr. 8a: K pojmu rameno síly – náčrt v rovině σ kolmé k ose.



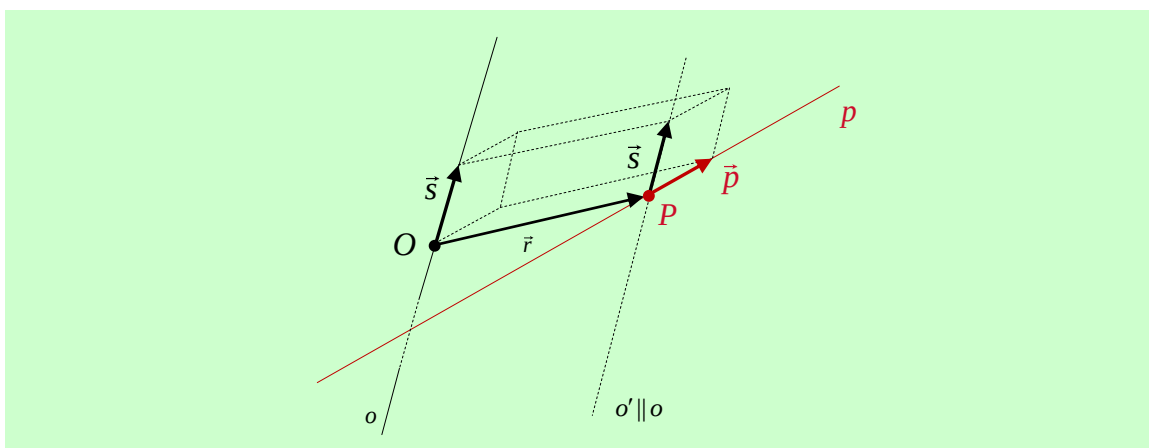
Obr. 8b: K pojmu rameno síly – prostorová situace, rovina σ je kolmá k ose.

Při výpočtu momentu síly vzhledem k ose o je tedy $M_{\parallel} = F_{\perp} d$, kde ramenem je vzdálenost osy o od přímky $p_{\perp}$, v níž leží průmět síly $\vec{F}$ do roviny kolmé k ose (vedené působišťem P síly $\vec{F}$). Zavádíme-li tedy při výpočtu momentu síly vzhledem k ose pojem rameno síly jako vzdálenost přímky, v níž působí síla, od zmíněné osy, je nutný předpoklad, že síla je kolmá k ose. Ten je správně uveden v učebnici [1].

Uvažujme o momentu síly $\vec{F}$ působící v přímce p vzhledem k ose o bez předpokladu $p \perp o$, jak to činí výklad v [4]. Pokud bychom chtěli vyjadřovat velikost $M_{\parallel}$ momentu $\vec{M}_{\parallel}$ jako součin velikosti síly a ramene, pak by „ramenem“ měl být výraz $r_{\perp} \cos \varphi$, který ovšem v obecném případě nemá názorný geometrický význam – není to vzdálenost přímek p a o .

Uvažme možnosti vzájemné polohy dvou přímek (v našem případě osy rotace a přímky, v níž působí síla $\vec{F}$):

- různoběžky, nebo totožné přímky – pak je jejich vzdálenost d nulová a nulový je i moment působící síly vzhledem k ose,
- rovnoběžky – vzdálenost d je nenulová, jenže takto působící síla „těleso neroztočí“, její moment vzhledem k ose je nulový, neplatí $M = Fd$,
- mimoběžky – k výpočtu jejich vzdálenosti pomůže obr. 9.



Obr. 9: K výpočtu vzdálenosti mimoběžek.

Hledáme vzdálenost mimoběžných přímek o (osa rotace tělesa) a p (přímka, v níž působí síla $\vec{F}$). O je vztažný bod na ose (zvolen libovolně), P je působišť síly, $\vec{s}$ a $\vec{p}$ jsou jednotkové směrové vektory těchto přímek. Vzdálenost h dvou mimoběžek je vzdálenost bodů, v nichž je protíná jejich tzv. osa, tj. přímka kolmá k oběma (minimum vzdáleností všech dvojic bodů, z nichž jeden leží na přímce o a druhý na přímce p). Je to vzdálenost podstav rovnoběžnostěnu tvořených vektory $\vec{s}$ a $\vec{p}$, vyznačeného na obr. 9, tedy jeho výška. Pro jeho objem platí

$$V = |(\vec{s} \times \vec{p}) \vec{r}| = |\vec{s} \times \vec{p}| h \Rightarrow h = \frac{|(\vec{s} \times \vec{p}) \vec{r}|}{|\vec{s} \times \vec{p}|} = \frac{|(\vec{s} \times \vec{r}) \vec{p}|}{|\vec{s} \times \vec{p}|}.$$

Současně je $M_{||} = |(\vec{r} \times \vec{F})\vec{s}| = |(\vec{r} \times \vec{pF})\vec{s}| = |(\vec{s} \times \vec{r})\vec{p}|F = |(\vec{s} \times \vec{p})|hF$.

Poslední úprava ukazuje, jaký je vztah velikosti momentu (obecně orientované) síly vzhledem k ose a vzdálenosti osy rotace a přímky, v níž působí síla. Tato velikost je součinem vzdálenosti těchto přímek a velikosti síly (viz „definice“ v [4]) pouze tehdy, je-li $p \perp o$, tj. je-li síla kolmá k ose.

Na didaktický problém související s pojmem „rameno síly“ v učebnici [1] upozorňujeme výše. Mnohem srozumitelnější je definovat rameno síly jako vzdálenost průsečíku osy o a roviny k ní kolmé, v níž leží působíště síly, a přímky, v níž působí síla (samozřejmě podle výchozího předpokladu kolmá k ose). Vzdálenost bodu od přímky v rovině je pojem podstatně názornější než vzdálenost mimoběžek (byť k sobě kolmých). Kromě toho se studenti gymnázia učí počítat vzdálenost bodu $Q = [x_0, y_0]$ v rovině od přímky o rovnici

$$p: ax + by + c = 0 \text{ vztahem } d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ takže si s takovouto definicí ramene možná}$$

dokáží poradit i prakticky.

5. Moment síly ve středoškolské fyzice – jen vzhledem k ose?

Školské učebnice se zabývají pouze momentem síly působící na tuhé těleso vzhledem k (pevné) ose jakožto primárním pojmem, nikoli jako důsledkem obecnějšího pojmu, momentu síly vzhledem k bodu. Své opodstatnění má taková koncepce zřejmě v tom, že pochopení složitějších případů otáčivého pohybu tělesa, než je rotace kolem pevné osy, je pro mladší žáky neschůdné. Jak tedy zavést pojem momentu síly vzhledem k ose

- způsobem didakticky vhodným, a přitom
- fyzikálně správným, a dokonce
- obecně (pro obecný směr síly)
- a samozřejmě bez vektorového součinu?

Je to vůbec rozumně možné? Pokusme se tedy o takový výklad, který by mohl být vhodný i pro fyziku základní školy – třeba pro úvahy o rovnováze těles. Uvažujme o tělese, které se může otáčet kolem *pevné osy* (praktických situací okolo nás je dostatek – třeba dveře, které jsou v učebnicích velmi oblíbené⁸) a o jednom z okolních objektů silově působícím na těleso tak, aby se roztáčelo. Nejprve si všimneme speciálních situací, vycházejících nejraději z experimentů provedených přímo ve vyučovací hodině, a postupně přejdeme k situaci obecné, tj. pro libovolný směr i působíště síly $\vec{F}$:

- Působíště síly $\vec{F}$ leží (kdekoli) na ose – taková síla těleso neroztočí, pouze by mohla přispět k translačnímu pohybu tělesa podél osy.
- Působíště síly $\vec{F}$ neleží na ose, ale síla je s osou rovnoběžná – tato síla může opět pouze způsobit translační pohyb tělesa podél *pevné osy*.

⁸ Je vhodné doplnit komentář, jakým způsobem lze „pevnou osu“ zajistit.

- Působíště síly neleží na ose a síla je k ose kolmá – lze uplatnit výklad obdobný učebnici [1] s tím, že *rameno síly* nebude definováno jako vzdálenost přímky, v níž působí síla, od osy rotace, ale srozumitelněji, jako vzdálenost průsečíku osy o a roviny k ní kolmé, v níž leží působíště síly, a přímky, v níž působí síla (viz výše), samozřejmě s použitím názorného obrázku.
- Zobecnění: působíště síly neleží na ose a síla má obecný směr. Sílu lze rozložit na kolmý průmět do směru osy a do roviny k ose kolmé, $\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$. K nenulovému momentu síly $\vec{F}$ vzhledem k ose přispívá pouze její průmět $\vec{F}_{\perp}$, čímž je obecná situace převedena na předchozí případ.

Tento způsob zavedení momentu síly vzhledem k ose je jednoduchý a srozumitelný, a přitom obecný a fyzikálně správný.

6. Rotace tuhého tělesa kolem pevné osy

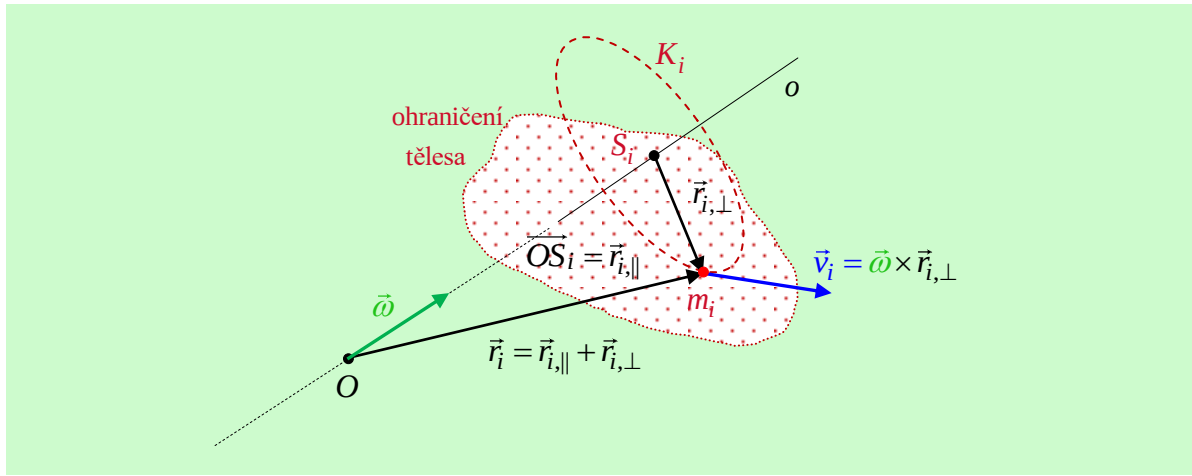
Veličinu *moment síly*, a také *moment hybnosti* potřebujeme při formulaci druhé impulsové věty, která je důsledkem druhého a třetího Newtonova zákona. Speciálně: je pohybovou rovnicí pro rotační pohyb tuhého tělesa, který nelze pominout při výuce mechaniky v úvodu univerzitního studia fyzikálních oborů a bylo by vhodné jej zahrnout rozumným způsobem do výuky mechaniky na střední škole i bez vektorového součinu, přinejmenším pro případ rotace tuhého tělesa kolem pevné osy. Je proto potřeba vyložit správně pojem momentů fyzikálních veličin (viz výše). Učitel by však měl mít pojmy zažité s jistým nadhledem s použitím relevantních pasáží vektorové algebry.

I když pro pochopení fyzikálně správného a didakticky vhodného přístupu k pojmu moment síly (či jiné vektorové veličiny) vzhledem k bodu a vzhledem k ose není třeba druhou impulsovou větu uvádět, chybí se často i v jejím výkladu. (Na střední škole se dokonce ani nevyučuje, o momentu hybnosti a o úhlovém zrychlení se nehovoří, moment setrvačnosti se objevuje pouze při vyjádření kinetické energie rotujícího tělesa – viz např. [1], [4].) Pokud se však uvádí ve vysokoškolských učebnicích obecné fyziky, většinou právě pro případ rotace tuhého tělesa kolem tzv. pevné osy, jedná se o její neúplný tvar $J\varepsilon = \overline{M}$, popřípadě správněji $J\vec{\varepsilon} = \overline{\vec{M}}$, kde $\vec{\varepsilon}$ je úhlové zrychlení rotace tělesa kolem dané osy, J jeho moment setrvačnosti vzhledem k této ose, $\overline{\vec{M}}$ moment působící síly, správně výsledný moment vnějších sil, vzhledem ke zmíněné ose – viz např. [6]. Tato neúplnost zápisu druhé impulsové věty je zřejmě důsledkem časté chyby, spočívající v domněnku, že moment hybnosti tuhého tělesa rotujícího úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ je $\vec{L} = J\vec{\omega}$. Stručně odvodíme kompletní vztah pro moment hybnosti, z něhož pak vyplývá správný zápis druhé impulsové věty.

Druhá impulsová věta obecně popisuje časový vývoj momentu hybnosti libovolné soustavy klasických částic s diskrétním, nebo spojitým rozložením hmotnosti. Pro případ diskrétního rozložení hmotnosti je

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overline{\vec{M}}^{\text{ext}}, \quad \vec{L}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \times m_i \vec{v}_i(t), \quad \overline{\vec{M}}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \times \vec{F}_i^{\text{ext}}(t, \xi) \quad ,$$

kde $\vec{L}$ je celkový moment hybnosti soustavy N částic o konstantních hmotnostech m_i a okamžitých rychlostech $\vec{v}_i$, $\vec{F}_i^{\text{ext}}(t, \xi)$ je výslednice sil, jimiž na i -tou částici působí okolí (tzv. *vnější síly*). Uvažujme o tuhé soustavě částic, která může rotovat kolem pevné osy o . Pevnou osou rozumíme přímku, která je v klidu vzhledem k jisté inerciální vztažné soustavě – v takové soustavě budeme nyní dále pracovat a její počátek O umístíme bez podstatné ztráty obecnosti na osu o (viz pozn. 1 pod čarou). Každá z částic soustavy se pohybuje po kružnici, jejíž střed leží na ose o , a jejíž poloměr je roven vzdálenosti částice od osy o (obr. 10 ukazuje situaci pro i -tou částici). Podstatná pro tuhou soustavu je skutečnost, že všechny její částice rotují kolem osy o stejnou úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. To významně zjednoduší další úvahy a výpočty.



Obr. 10: Pohyb hmotného bodu kolem osy.

Celkový moment hybnosti tuhé soustavy hmotných bodů (tělesa) je

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_{i,\parallel} + \vec{r}_{i,\perp}) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,\perp}).$$

S uvážením vztahu $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ a geometrie problému ($\vec{\omega} \perp \vec{r}_{i,\perp}$, $\vec{r}_{i,\parallel} \perp \vec{r}_{i,\perp}$) dostaneme po nevelké úpravě

$$\vec{L} = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_{i,\perp}^2 \right) \vec{\omega} + \omega \sum_{i=1}^N (-m_i r_{i,\parallel}) \vec{r}_{i,\perp} = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp}, \quad \vec{L}_{\parallel} = J \vec{\omega}, \quad \vec{L}_{\perp} = \omega \sum_{i=1}^N (-m_i r_{i,\parallel}) \vec{r}_{i,\perp}.$$

Je zřejmé, že moment hybnosti tělesa není obecně rovnoběžný s osou rotace, a to ani tehdy, kdy se jedná o pevnou osu (s osou je rovnoběžná úhlová rychlost). Vztah pro celkový moment hybnosti se rozdělil na součet průmětu momentu hybnosti do osy rotace o a do roviny k ose rotace kolmé (všechny vektorové sčítance v součtu označeném $\vec{L}_{\perp}$ jsou skutečně kolmé k ose o , jsou to násobky vektorů $\vec{r}_{i,\perp}$ ⁹). Ve výsledku se také objevuje moment setrvačnosti tělesa

⁹ Poznamenejme, že tento výsledek je obecný, platí nejen pro pevnou, ale i pro okamžitou osu rotace. Kinematické veličiny v něm vystupující závisí samozřejmě na čase.

vzhledem k dané ose o , konkrétně $J_o = \sum_{i=1}^N m_i r_{i,\perp}^2$. Je-li těleso tuhé a osa pevná, je

J_o konstantní a druhá impulsová věta má tvar

$$\frac{dL_{\parallel}}{dt} = \vec{M}_{\parallel}^{\text{ext}} \Rightarrow J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\parallel}^{\text{ext}}, \quad \frac{dL_{\perp}}{dt} = \vec{M}_{\perp}^{\text{ext}}.$$

Je-li hmotnost v tělese rozložena *symetricky*, myšleno z hlediska vyjádření momentu hybnosti, resp. druhé impulsové věty, je $\vec{L}_{\perp} = \vec{0}$ ¹⁰. (Vynikající učebnice mechaniky [7] podrobně odvozuje první část druhé impulsové věty, tj. její průmět do osy rotace, a nezabývá se průmětem do roviny kolmé k ose rotace. Kompletně se rotačnímu pohybu tuhého tělesa věnuje až na úrovni přesahující možnosti nejen střední školy, ale i možnosti výuky obecné univerzitní fyziky v první fázi studia – Eulerovy rovnice a některá jejich řešení.)

7. Závěr

Samozřejmě je nejjednodušší opírat se o definici *momentu síly vzhledem k bodu*, kterou lze formulovat od začátku zcela obecně, a to i bez vektorového součinu, tak jak je to uvedeno v odstavci 2. Nevznikne ani problém s ramenem síly, definovaným jako vzdálenost vztažného bodu od přímky, v níž působí síla. Velikost momentu je v tomto případě skutečně součinem velikosti síly a ramene (řídí se tedy známou „poučkou“, často bezmyšlenkovitě citovanou i v neodpovídajících situacích).

Při správném pochopení pojmu moment síly vzhledem k ose by pak dokonce mohlo být i na střední škole schůdné definovat také *moment hybnosti tuhého tělesa*, jehož hmotnost by byla rozložena vzhledem k ose symetricky a pro tento případ formulovat druhou impulsovou větu jako pohybovou rovnici pro rotaci kolem pevné osy.

Snad nejpřesvědčivějším závěrem, ke kterému lze dospět jak z formulací citovaných učebnic, tak z výkladu obsaženého v tomto příspěvku, je konstatování nedostatku matematických znalostí a dovedností pro výuku fyziky na střední škole (a často dokonce i v úvodu univerzitního studia fyziky) a nekoordinovanosti výuky matematiky a fyziky. Vektorový součin, který by celou věc velmi zjednodušil a zprůhlednil, je bohužel „tabu“.

Děkujeme za pečlivý recenzní posudek a cenné věcné připomínky recenzenta/recenzentky.

Literatura

[1] E. Svoboda, M. Bednařík, M. Šíroková: *Fyzika pro gymnázia: Mechanika*. (Dotisk 2. přepracovaného vyd.) Prometheus, Praha 2013.

[2] O. Lepil: Vektorový počet ve středoškolské fyzice. Z osobní korespondence 2023.

¹⁰ Je-li také $\vec{M}_{\perp} = \vec{0}$, bude osa o skutečně „pevná“ v tom smyslu, že například roztočíme-li kolem ní těleso, bude kolem této osy rotovat bez jejího dalšího ovlivňování, až se zabrzdí vlivem tření a odporu vzduchu. Anebo, při „myšlenkové“ eliminaci tření a odporu vzduchu, bude kolem této osy rotovat stále podle prvního Newtonova zákona.

- [3] I. Šantavý: Pohled fyzika na pojem vektoru v učebnicích matematiky a fyziky. Ve sborníku: *Terminologické otázky školské matematiky a fyziky*. Ed. E. Svoboda, JČMF, Praha 1985, s. 15.
- [4] M. Kubera, T. Nečas, V. Beneš: *E-MANUEL*. Online učebnice fyziky pro gymnázia. Gymnázium Matyáše Lercha 2022. [https:// e-manuel.cz](https://e-manuel.cz).
- [5] R. A. Serway, J. S. Faughn: *College Physics*. (5. vydání.) Saunders College Publishing 1985.
- [6] J. Walker: *Haliday/Resnick Fundamentals of Physics*. (8. vydání.) J. Wiley & Sons, Inc., 2008. Český překlad VUTIUM, Brno 2013.
- [6a] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. (Český překlad 5. vydání *Fundamentals of Physics*. J. Wiley & Sons, Inc., 1997), VUTIUM Brno, Prometheus Praha, 2000.
- [7] J. Kvasnica, A. Havránek, P. Lukáč, B- Sprušil: *Mechanika*. Academia, Praha 1988.
- [8] J. Musilová: *Mechanika*. Muni Press, Brno 2022.