

NABITÁ ČÁSTICE V MAGNETICKÉM POLI ELEMENTÁRNĚ

Pavla MUSILOVÁ, Jana MUSILOVÁ

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity,
Kotlářská 2, 611 37 Brno, pavla@physics.muni.cz, janam@physics.muni.cz,

Abstrakt:

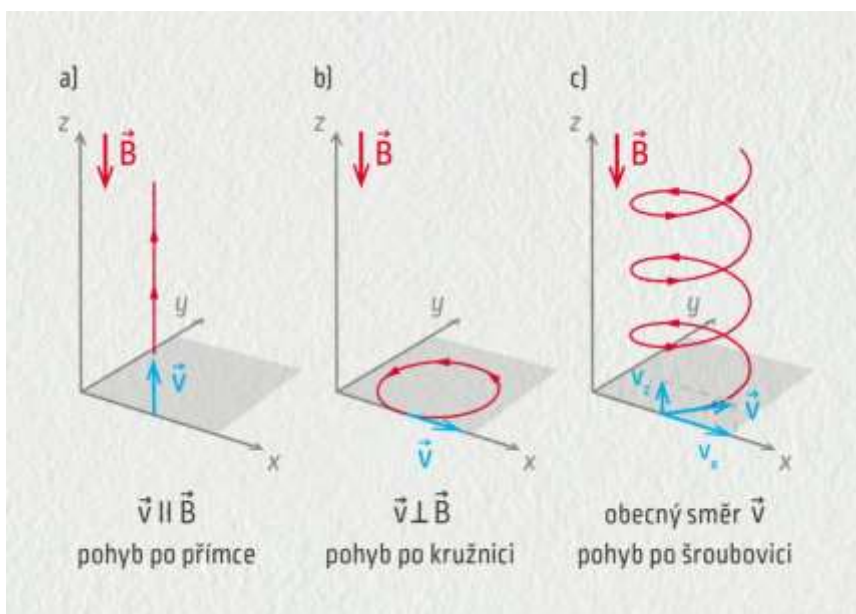
Řešení pohybu nabité částice v magnetickém poli je obvykle jednou z typických úloh v kursu mechaniky v počátku univerzitního studia fyziky. Předkládaný příspěvek ukazuje, že ke kompletnímu řešení této úlohy, tj. k nalezení trajektorie částice, je možné dospět i na střední škole zcela elementárním výkladem vycházejícím z druhého Newtonova zákona, znalosti silového zákona pro Lorentzovu sílu a úvah o energiích.

1. Úvod – úloha o nabité částici ve středoškolských učebnicích

V oficiálně doporučených středoškolských učebnicích fyziky se o pohybu náboje v magnetickém poli nehovoří. Neobjevuje se ani pojem *Lorentzovy síly* působící na nabitou částici, a to nejen v učebnici mechaniky [1], ale ani v učebnici elektřiny a magnetismu [3], kde je pod heslem „magnetická síla“ zmíněna pouze síla o velikosti $F_m = BI\ell \sin \alpha$ působící na přímý vodič s proudem I , jejíž směr je určen tzv. Flemingovým pravidlem levé ruky. (V uvedeném vztahu je B velikost vektoru indukce konstantního magnetického pole, α je úhel mezi vodičem a magnetickou indukcí, veličina ℓ není blíže charakterizována, na její význam lze usoudit až z poznámky o Ampèrově zákonu, týkající se velikosti elementární magnetické síly $|\Delta \vec{F}_m| = BI\Delta \ell \sin \alpha$).

Zákon pro působení síly $\vec{F}$ magnetického pole o indukci $\vec{B}$ na nabitou částici s nábojem q a rychlostí $\vec{v}$ uvádí ve tvaru $F = qBv \sin \alpha$ nová volně dostupná (mimořádně graficky velmi pěkně vyvedená) elektronická učebnice fyziky pro gymnázia [5]. Autoři se dokonce osmělili použít jako definiční vztah pro Lorentzovu sílu vektorový součin $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (bohužel již bez podrobnějšího rozboru směřujícího k praktickým výpočtům), což lze rozhodně považovat za pozitivní změnu oproti obvyklým učebnicovým výkladům a oproti významně převažujícím názorům, jež použití vektorového součinu na střední škole zavrhnou. Pokud jde o samotný problém pohybu nabité částice v (konstantním) magnetickém poli, omezují se na velmi orientační, avšak v daném kontextu velmi užitečnou kvalitativní úvahu doprovázenou schematickým grafickým vyjádřením trajektorií – škoda, že bez uvedení typických číselných hodnot (pouze částečně až v příkladu 3 odstavce Urychlovač částic). Následující text kurzívou je, jako ukázka, doslova citován a obrázek 1 převzat z [5]:

Vletí-li nabitá částice do homogenního magnetického pole, jsou celkem tři možnosti, jak se může pohybovat. Záleží na tom, jaký je směr rychlosti částice vzhledem k vektoru $\vec{B}$. Na obrázku vidíme, že nejjednodušší situace nastane v případě, kdy je směr vektorů $\vec{v}$ a $\vec{B}$ shodný (nebo opačný). V tomto případě magnetická síla na částici nepůsobí a ta se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Vletí-li částice do magnetického pole kolmo na $\vec{B}$, bude se díky magnetické síle pohybovat rovnoměrně po kružnici. Je to proto, že magnetická síla bude neustále kolmá na rychlost a bude tak tvořit dostředivou sílu. Jak to dopadne v případě, kdy částice vletí do magnetického pole šikmo? Rychlost částice $\vec{v}$ můžeme rozložit do dvou kolmých směrů, jak ukazuje obrázek. Rychlost v_z ve směru $\vec{B}$ se nebude měnit. Rychlost v_x je naopak kolmá k $\vec{B}$. Proto bude výsledný pohyb složením kruhového pohybu v rovině xy a rovnoměrného pohybu ve směru osy z . Částice se bude pohybovat po šroubovici podél magnetických indukčních čar.



Obr. 1: Pohyb částice v magnetickém poli – převzato z [5]¹.

Trajektorii nabité částice v konstantním magnetickém lze přitom v její úplnosti získat zcela elementárním způsobem, jak ukazujeme v tomto příspěvku v odstavci 4. Smysl takového řešení není primárně ve znalosti trajektorie jako takové, ale ve významu této úlohy pro porozumění pohybovým zákonům mechaniky a pro rozvoj fyzikálního myšlení studentů.

2. Dva cíle úlohy o nabitě částici v magnetickém poli v univerzitní výuce mechaniky

¹ V citovaném textu (kurzíva), převzatém z [5], hovoří autoři o „vektoru v_x “, resp. „vektoru v_z “, přičemž nad těmito symboly chybí šipky. Táž chyba se objevuje i v převzatém obrázku (obr. 1).

První disciplínou ve výuce obecné fyziky v univerzitním studiu fyziky a učitelství fyziky pro střední školy je mechanika. Cílem výuky v univerzitních fyzikálních disciplínách je vybudovat u studentů – budoucích profesionálních fyziků či učitelů fyziky – hlubší pochopení fyzikálních zákonitostí a rozvíjení fyzikálního myšlení jejich prostřednictvím. Mechanika je disciplínou k tomuto účelu mimořádně vhodnou díky její názornosti a často i spojení s bezprostřední smyslovou zkušeností. Základem fyzikálního myšlení v mechanice je hluboké porozumění jejím zákonitostem – pohybovým a silovým zákonům, ale i schopnost jejich aplikace na konkrétní úlohy včetně jejich řešení „až do konce“. Úloha o pohybu nabité částice v magnetickém poli je k tomu vhodná i přes to, že názorné představivosti není v tomto konkrétním případě učiněno tak zcela zadost. Na druhé straně přispívá tato úloha k posílení

- schopnosti studenta zapsat příslušný pohybový zákon (druhý Newtonův zákon) ve tvaru vektorového zápisu,
- formulovat jej v matematické podobě jako soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu,
- a tuto soustavu řešit včetně uplatnění počátečních podmínek.

„Na své“ si tedy přijde fyzika i matematika, student se hned na počátku svého studia přesvědčí o síle matematického aparátu při řešení fyzikálních problémů (na začátku řešení stojí druhý Newtonův zákon známý v řadě případů už ze základní školy, na konci je pak konkrétní závislost polohy nabité částice na čase).

Na střední škole se studenti setkají ve výuce mechaniky s aplikací Newtonových zákonů (až na zcela ojedinělé výjimky) pouze pro konstantní výslednici sil působících na částici, tj. pro konstantní zrychlení mající většinou směr shodný s počáteční rychlostí, což pak vede k rovnoměrně zrychlenému pohybu po přímce. Případy počáteční rychlosti různoběžné s konstantním zrychlením se uvádějí pouze u tzv. vrhů v homogenním gravitačním poli Země, studium křivočarých pohybů je omezeno pouze na rovnoměrný pohyb po kružnici – obojí viz např. v [1], další výjimkou je harmonický pohyb, který je na střední škole probírán ve zvláštních pasážích věnovaných kmitání a soustředí se spíše na kinematiku – viz [2]. V [3] se pak objevuje vyjádření Lorentzovy síly, aniž se nějak dále využívá. Úloha o pohybu nabité částice v (konstantním) magnetickém poli není přitom z fyzikálního hlediska o nic komplikovanější než výše zmíněné úlohy a řešení soustavy diferenciálních rovnic se lze vyhnout elementární, ale důkladně vedenou geometrickou a fyzikální úvahou a dospět k explicitnímu vyjádření trajektorie částice, tj. k časové závislosti její polohy.

3. Nabitá částice v magnetickém poli – matematické řešení

Částice s nábojem q a hmotností m se pohybuje v konstantním magnetickém poli o indukci $\vec{B}$, řídí se tedy druhým Newtonovým zákonem ve tvaru

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B},$$

kde $\vec{v}$ je okamžitá rychlost a $\vec{a}$ okamžité zrychlení částice. Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic tak, aby osa z byla souhlasně rovnoběžná s vektorem magnetické indukce, počátek

splýval s polohou částice v okamžiku $t = 0$ (vektorová počáteční podmínka $\vec{r}(0) = 0$) a počáteční rychlost ležela v souřadnicové rovině yOz , tj.

$\vec{v}(0) \sim (0, v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$, kde v_0 je velikost počáteční rychlosti a α úhel mezi vektorem počáteční rychlosti a souřadnicovou osou y , má soustava pohybových rovnic (obyčejných lineárních rovnic homogenních druhého řádu s konstantními koeficienty při této volbě (fyzikálně neomezuující obecnost řešení a matematicky zjednodušující) tvar

$$m\ddot{x} = qB\dot{y}, \quad m\ddot{y} = -qB\dot{x}, \quad m\ddot{z} = 0.$$

První dvě rovnice tvoří soustavu, v níž nejsou neznámé funkce $x(t)$, $y(t)$ odseparovány. Po jejím vyřešení se vrátíme k třetí rovnici.

→**Poznámka:** Poznamenejme, že prostřednictvím této soustavy si studenti mohou procvičit řešení obdobných soustav hned několika způsoby, například²:

- dosazením např. za $\ddot{y} = \frac{m}{qB} x^{(3)}$ z první do druhé rovnice a řešením rovnice třetího řádu pomocí charakteristické rovnice, tj. $x^{(3)} + \omega^2 \ddot{x} = 0$, kde $\omega = \frac{qB}{m}$,
- pomocí substituce $\dot{x} = \xi$, $\dot{y} = \eta$ převedením na soustavu homogenních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty $\dot{\xi} = (qB/m)\eta$, $\dot{\eta} = (-qB/m)\xi$ a použitím standardního způsobu řešení takových soustav, (tj. převodem na algebraickou úlohu nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů matice $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$, viz např. [6],
- substitucí $u = x + iy$ převedením na rovnici pouze druhého řádu $\ddot{u} - i\omega\dot{u} = 0$ a jejím řešením pomocí charakteristické rovnice,
- popřípadě převod rovnice $\ddot{u} - i\omega\dot{u} = 0$ pomocí další substituce $w = \dot{u} = \dot{x} + i\dot{y}$ na rovnici prvního řádu se separovatelnými proměnnými a její přímou integrací, $\dot{w} - i\omega w = 0$, tj. $\frac{dw}{w} = i\omega$, $w(t) = K \exp(i\omega t) = (a + ib)(\cos \omega t + i \sin \omega t)$, $K \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- převedením na soustavu algebraických rovnic pomocí Laplaceovy transformace (elegantní způsob, který však pro začínající studenty fyziky již překračuje úroveň jejich aktuální matematické přípravy). ←

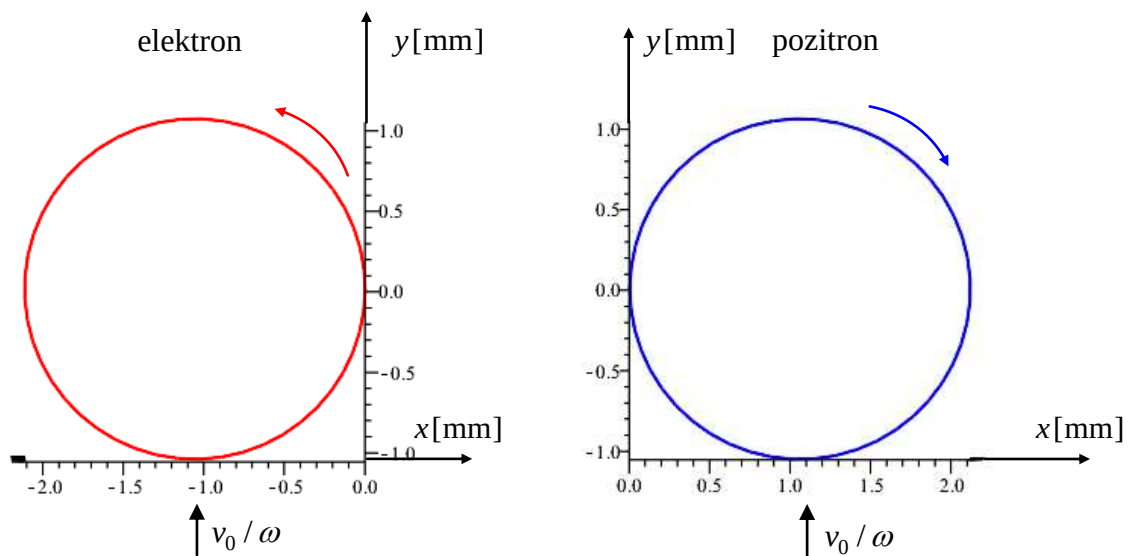
Partikulární řešení soustavy (v reálném oboru) za daných počátečních podmínek má tvar

² Odpovědí na očekávanou námitku, že studenti prvního semestru bakalářského studia nejsou vzhledem k nedostatečnému matematickému zázemí zřejmě schopni použít žádný z uvedených způsobů řešení pohybových rovnic, je poukaz na dvousemestrální předmět Základní matematické metody ve fyzice, který je součástí studijního programu Fyzika na PřF MU a je koncipován autorkami příspěvku. Jeho osnova zahrnuje potřebný matematický aparát časově uspořádaný tak, aby jednotlivá témata předcházela potřebě jejich aplikace ve výuce mechaniky.

$$u(t) = x(t) + iy(t) = -\frac{v_0}{\omega} \cos \alpha (1 - e^{i\omega t}),$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{qB} \cos \alpha \left(1 - \cos \frac{qBt}{m} \right), \quad y(t) = \frac{mv_0}{qB} \cos \alpha \sin \frac{qBt}{m}.$$

Obr. 2 ukazuje křivku, po níž se pohybuje pozitron, resp. elektron ($q = \pm 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$) v magnetickém poli o indukci o velikosti $B = 0,1 \text{ T}$ ve směru kladně orientované souřadnicové osy z . Počáteční rychlost má směr kladně orientované osy y a velikost $v_0 = 1,9 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (odpovídá urychlujícímu napětí 1 kV). Tzv. cyklotronová frekvence je $\omega = \frac{|q|B}{m} = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$, poloměr kružnic je $R = 1,1 \text{ mm}$.



Obr. 2: Tvar trajektorie elektronu a pozitronu v konstantním magnetickém poli. Počáteční rychlost je kolmá k magnetické indukci ($\alpha = 0$). (Převzato z [3].)

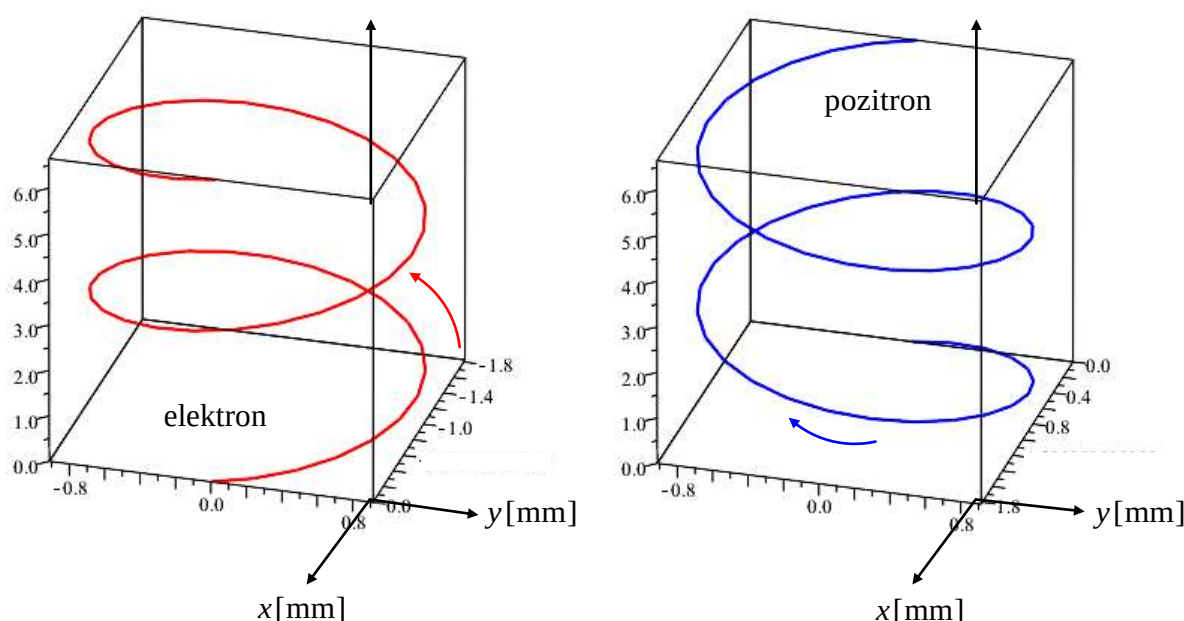
Třetí rovnice je separována od prvních dvou a její řešení za daných počátečních podmínek je

$$z(t) = v_0 t \sin \alpha.$$

Na obr. 3 je pak grafická reprezentace řešení téže úlohy pro úhel $\alpha = 30^\circ$. V dalším dospějeme k tomuto řešení elementárními úvahami.

$z [\text{mm}]$

$z [\text{mm}]$



Obr. 3: Tvar trajektorie elektronu a pozitronu v konstantním magnetickém poli pro $\alpha = 30^\circ$.

4. Nabité částice v magnetickém poli – elementární řešení

V úvodu výkladu elementárního postupu uvedme jednoduchý, avšak zcela obecný výsledek, platný i pro případ indukce magnetického pole závislé na čase a prostorových souřadnicích $\vec{B} = \vec{B}(t, \vec{r})$ a libovolnou závislost okamžité rychlosti na čase $\vec{v} = \vec{v}(t)$. Pro okamžitý výkon P síly $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r})$, závislé na čase a poloze jejího působíště, působící na částici pohybující se okamžitou rychlostí $\vec{v}(t)$, platí zcela obecně vztah $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (okamžitý výkon je podílem elementární práce $\Delta W = \vec{F} \Delta \vec{r}$ a elementárního časového intervalu Δt , přesněji $P = \delta W / dt = \vec{F} d\vec{r} / dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$). Lorentzova síla $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ je ovšem kolmá k magnetické indukci i k rychlosti částice. Její výkon je tedy v každém okamžiku nulový, stejně jako práce, kterou tato síla koná v libovolném časovém intervalu. Vzhledem k tomu, že celková práce vykonaná v daném časovém intervalu všemi silami působícími na částici je rovna změně kinetické energie částice v tomto intervalu, je zřejmé, že se kinetická energie nabité částice, na niž jako jediná působí Lorentzova síla, nemění. Nemění se tedy ani velikost rychlosti částice. Dostáváme první výsledek, získaný elementárně:

Pohyb nabité částice v magnetickém poli je rovnoměrný.

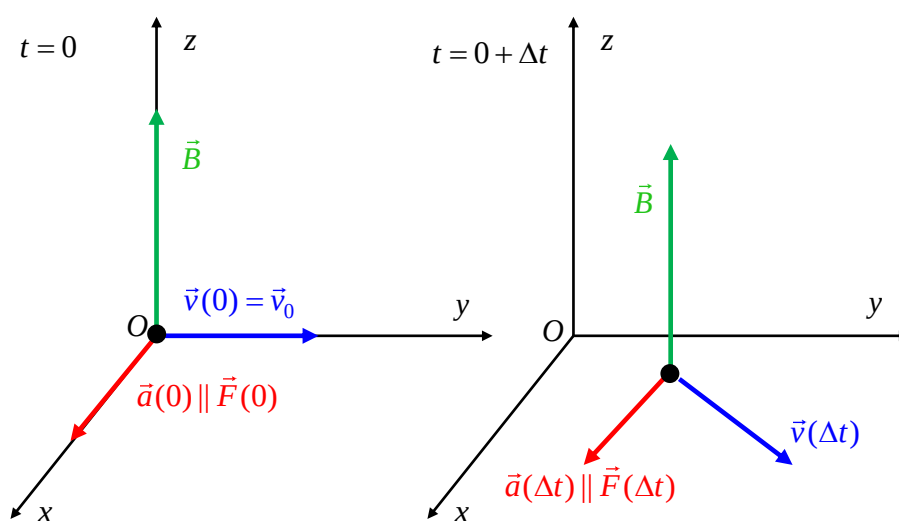
→ **Poznámka:** Středoškolské učebnice, konkrétně obě citované [1] a [5], zavádějí pojmy *práce síly* a *výkon* pouze pro speciální situace (působení konstantní síly o velikosti F na částici pohybující se po přímce a urazivší dráhu s , v případě výkonu pak pouze pro sílu rovnoběžnou s dotyčnou přímkou), ve tvaru $W = Fs \cos \alpha$, $P = Fv$ (okamžitý výkon jako

součin velikostí síly a rychlosti, tj. pro $\alpha = 0$), text [5] se v tzv. „poznámce na okraj“ zmiňuje o skalárním součinu bez dalšího využití.

Za zcela elementární lze však považovat výklad prezentující *elementární práci* jako skalární součin vektoru síly a vektoru elementárního posunutí (s elementárními veličinami středoškolské texty běžně pracují), $\Delta W = \vec{F} \Delta \vec{r}$, nebo i $\delta W = \vec{F} d\vec{r}$, a to bez jakýchkoli speciálních předpokladů o síle $\vec{F}$ a typu pohybu částice, odkud je už jen krok k *okamžitému výkonu* $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \vec{v}$, nebo $P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}$ pro libovolné závislosti $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r})$, popřípadě i $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$ a $\vec{v} = \vec{v}(t)$.³ ←

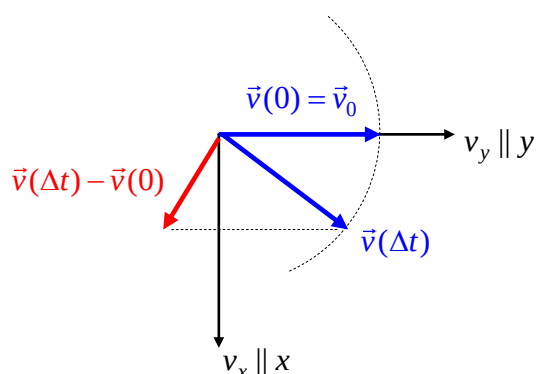
V dalším výkladu rozdělme řešení úlohy na dvě části. V první části si všimneme zjednodušené situace, kdy je rychlost částice v počátečním okamžiku kolmá k magnetické indukci, poté směr počáteční rychlosti zobecníme.

Zvolme kartézskou souřadnicovou soustavu $\langle O; x, y, z \rangle$ tak, aby v okamžiku $t = 0$ procházela částice počátkem O a aby osa y byla souhlasně rovnoběžná s její rychlostí v tomto okamžiku. Osa z je zvolena souhlasně rovnoběžně s vektorem $\vec{B}$ (viz schematický (!!) obr. 4, zakreslený pro případ kladného náboje, v případě záporného náboje směřuje Lorentzova síla proti směru osy x). Ilustrační obrázek 5 ukazuje tzv. hodograf pohybu.



Obr. 4: Volba soustavy souřadnic, okamžik $t = 0$ a situace v následujících okamžicích.

³ Formální tvar zápisů $\delta W = \vec{F} d\vec{r}$, $P = \delta W / dt$ je nezbytný vzhledem k závislosti mechanické práce vykonané danou silou na tvaru křivky, po níž se pohybuje působíště této síly. Vztah $P = dW / dt = Fv$ a komentář: „Říkáme, že okamžitý výkon je derivací práce podle času.“, jak jsou uváděny v [5] v tzv. „poznámce na okraj“ jsou zásadně nesprávné.



Obr. 5: Část tzv. hodografu pohybu v časovém intervalu $[0, \Delta t]$.

Vzhledem k tomu, že Lorentzova síla je v každém okamžiku kolmá k vektoru magnetické indukce, jehož směr je stálý, je zřejmé, že leží stále v rovině xy (působišťem síly je částice). Totéž platí pro zrychlení a tedy i pro rychlost částice. Dostáváme druhý výsledek elementárních úvah:

Pohyb částice je rovinný (tvarem její trajektorie je rovinná křivka).

Závěrečná úvaha se opírá o výše zjištěné skutečnosti: rychlost částice je stále kolmá k indukci a má konstantní velikost. Proto je i velikost Lorentzovy síly a odpovídajícího zrychlení konstantní. Okamžité zrychlení leží v rovině kolmé k indukci, je kolmé k okamžité rychlosti a má stále stejnou velikost $a = \frac{|q|B}{m}v = \frac{|q|B}{m}v_0$. Výsledek:

Částice koná rovnoměrný pohyb po kružnici v rovině kolmé k magnetické indukci.

Zbývá určit poloměr kružnice a kruhovou frekvenci oběhu. Tyto hodnoty lze velmi jednoduše získat z obecného vztahu pro dostředivé zrychlení a výše uvedeného vztahu pro zrychlení:

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \frac{|q|B}{m}v_0 \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B}, \quad |\omega| = \frac{v_0}{R} = \frac{|q|B}{m}.$$

Znaménko náboje určuje orientaci oběhu. K získání trajektorie (vyjádření polohy částice na čase) si stačí vzpomenout na znalosti o rovnoměrném pohybu hmotného bodu po kružnici (pomůže také obr. 2). Její kartézská rovnice je $(x \mp R)^2 + y^2 = R^2$ (kružnice se v počátku dotýká osy y , její střed leží na ose x ve vzdálenosti R od počátku, vpravo v případě kladného náboje, vlevo v případě náboje záporného. Pro kladný náboj dostaneme

$$x(t) = R(1 - \cos \omega t), \quad y(t) = R \sin \omega t,$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{qB}(1 - \cos \omega t), \quad y(t) = \frac{mv_0}{qB} \sin \omega t.$$

Má-li počáteční rychlost částice $\vec{v}_0$ obecný směr, lze soustavu souřadnic zvolit tak, aby tato rychlost ležela v rovině xz . Pak stačí do získaných parametrických rovnic dosadit místo hodnoty v_0 velikost průmětu počáteční rychlosti do roviny xy , při popsané volbě soustavy souřadnic konkrétně $v_0 \cos \alpha$, kde α je úhel mezi počáteční rychlostí a osou y . Vzhledem k tomu, že z -ová složka zrychlení je nulová, můžeme psát třetí parametrickou rovnici trajektorie, $z(t) = v_0 t \sin \alpha$ (pohyb částice promítnuté do osy z je rovnoměrný s rychlostí $v_z = v_0 \sin \alpha$ a v okamžiku $t = 0$ je $z(0) = 0$).

Porovnáním takto elementárně získané trajektorie s výsledky řešení odpovídající soustavy diferenciálních rovnic v odstavci 2 zjistíme shodu.

5. Závěr

V příspěvku jsme se snažily poukázat na skutečnost, že při výuce fyzika na střední škole není třeba se omezovat na přímočaré rovnoměrné či rovnoměrně zrychlené pohyby, resp. pohyby, při nichž na částici působí konstantní síla (homogenní tíhové pole), ale že lze elementárně řešit i některé na první pohled složitější případy, jejichž rozbor může přispět k důkladnému pochopení pohybových zákonů, souvislosti kinetické energie s prací výslednice sil, problematiky počátečních podmínek, a celkově k rozvoji fyzikálního myšlení studentů.

Literatura

- [1] E. Svoboda, M. Bednařík, M. Šíroká: Fyzika pro gymnázia. Mechanika. Dotisk 5., přepracovaného vydání. Prometheus, Praha 2013. (První vydání 1993.)
- [2] O. Lepil: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. 5., přepracované vydání. Prometheus, Praha 2017. (První vydání 1994.)
- [3] O. Lepil, P. Šedivý: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. 7., přepracované vydání. Prometheus, Praha 2017. (První vydání 1992.)
- [4] J. Musilová: Mechanika. Masarykova univerzita. Brno 2022.
- [5] M. Kubera, T. Nečas, V. Beneš: E-MANUEL. Online učebnice fyziky pro gymnázia. Gymnázium Matyáše Lercha 2022. [https:// e-manuel.cz](https://e-manuel.cz).
- [6] J. Musilová, P. Musilová: Matematika pro porozumění i praxi II/1. VUTIUM (Vysoké učení technické v Brně), Brno 2012.