OSTRAVSKÁ UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

VARIAČNÍ POČET

Prof. RNDr. Olga Krupková, DrSc.
RNDr. Martin Swaczyna, Ph.D.

OSTRAVA 2006

Vysvětlivky k používaným symbolům

Průvodce studiem – vstup autora do textu, specifický způsob, kterým se studentem komunikuje, povzbuzuje jej, doplňuje text o další informace

Příklad – objasnění nebo konkretizování problematiky na příkladu ze života, z praxe, ze společenské reality, apod.

Pojmy k zapamatování.

Shrnutí – shrnutí předcházející látky, shrnutí kapitoly.

Literatura – použitá ve studijním materiálu, pro doplnění a rozšíření poznatků.

Kontrolní otázky a úkoly – prověřují, do jaké míry studující text a problematiku pochopil, zapamatoval si podstatné a důležité informace a zda je dokáže aplikovat při řešení problémů.

Úkoly k textu – je potřeba je splnit neprodleně, neboť pomáhají dobrému zvládnutí následující látky.

Korespondenční úkoly – při jejich plnění postupuje studující podle pokynů s notnou dávkou vlastní iniciativy. Úkoly se průběžně evidují a hodnotí v průběhu celého kurzu.

Úkoly k zamyšlení.

Část pro zájemce – přináší látku a úkoly rozšiřující úroveň základního kurzu. Pasáže a úkoly jsou dobrovolné.

Testy a otázky – ke kterým řešení, odpovědi a výsledky studující najdou v rámci studijní opory.

Řešení a odpovědi – vážou se na konkrétní úkoly, zadání a testy.

OBSAH

ÚVOD

V každodenním životě člověk neustále stojí před rozhodováním, kdy zvažuje jednu z několika možností, které v dané situaci přicházejí v úvahu. Nakonec většinou zvolí tu, která se v dané situaci a v daném okamžiku jeví jako nejlepší, nejvhodnější, nejefektivnější, nebo-li optimální. Motivy pro tato rozhodování jsou prosté, ušetřit čas, ušetřit peníze, snížit spotřebu, maximalizovat zisk, minimalizovat ztráty a podobně.

Tato snaha o maximální efektivitu vede v různých odvětvích lidské činnosti k hledání optimálních řešení. Chceme-li najít optimální z možností, musíme řešit úlohy na nalezení maxima nebo minima, to je největších nebo nejmenších hodnot nějakých veličin. Oba tyto pojmy- maximum a minimum- lze shrnout pod jeden termín **extrém**. Úlohy na nalezení maxima nebo minima se pak nazývají **extremálními úlohami**.

Může jít o nejjednodušší úlohy typu určit maximum nebo minimum nějaké kvantitativní veličiny, u niž je za daných okolností podstatná závislost na několika parametrech či proměnných. Ke zvládnutí takovýchto úloh vystačíme se znalostmi diferenciálního počtu funkcí jedné nebo více proměnných a lineární algebry. V praxi však veličiny, jejichž extrémy se mají určovat, závisí často na velkém počtu parametrů, které mohou být navíc nějakým způsobem svázány předepsanými podmínkami. V tomto případě samotná realizace řešení je již nad lidské síly a probíhá podle předepsaných algoritmů na počítačích.

Řešením extremálních úloh však nemusí být vždy jen nějaká maximální nebo minimální hodnota nebo soubor hodnot. Často je úloha formulovaná tak, že se má navrhnout optimální tvar nějakého tělesa, určit optimální trajektorie pohybu nějakého objektu, stanovit efektivní model nějakého procesu, navrhnout optimální plán dopravy a podobně. Na extremální úlohy je proto nutné nahlížet v obecnějších souvislostech.

Každá extremální úloha musí být nejdříve přesně a jednoznačně formulována. Potom je nutné převést úlohu z popisného jazyka do formálního jazyka matematiky. Takový převod se nazývá **formalizace úlohy**. Přesně formalizovaná extremální úloha musí obsahovat následující prvky. Jednak musí být zadána množina všech přípustných prvků, tzn. množina všech možností, které přicházejí v úvahu, ze které se pak vybírá optimální možnost nebo optimální prvek nebo-li extrém. Dále musí být uvedena omezení, která je nutno brát v úvahu a která musí splňovat i hledaný extrém. Tato omezení se zadávají ve formě podmnožiny v množině všech přípustných prvků, nebo ve formě dodatečných podmínek. Klíčovým prvkem extremální úlohy je zobrazení, které přiřazuje každému prvku z množiny přípustných prvků jistou hodnotu z nějakého oboru hodnot, kterým bývá nejčastěji podmnožina reálných čísel nebo obecněji nějaký normovaný vektorový prostor. Toto zobrazení se nazývá **funkcionál**. Hodnoty zadaného funkcionálu pro různé prvky z množiny přípustných prvků se dají porovnávat a lze tedy rozhodnout na kterém prvku, resp. pro kterou možnost nabývá zadaný funkcionál maximální nebo minimální hodnoty. Řešit extremální úlohy tedy obecně znamená nalézt prvek z množiny všech přípustných prvků splňujících zadaná omezení, na kterém se realizuje **extrémní hodnota funkcionálu**.

Po formalizaci úlohy následuje vlastní řešení úlohy, při kterém se využívají různé matematické prostředky a metody. Postup řešení některých úloh může být dosti složitý a taky technicky náročný, navíc některé úlohy nemusí mít řešení vůbec, některé úlohy zase naopak mohou mít za jistých podmínek nekonečně mnoho řešení. U některých praktických úloh vedoucích na hledání extrému máme sice zaručenu existenci řešení, ovšem to dokážeme určit pouze přibližně s jistou chybou.

Důležitá je ovšem také správná **interpretace řešení**, to znamená dát do souvislosti získané matematické řešení s formulovaným extremálním problémem a zabývat se otázkou, zda toto řešení má reálný smysl, zda se ve skutečnosti nebo v praxi může realizovat.

Informace o struktuře a obsahu učebního textu

Předkládaná výuková opora je pomocným učebním textem ke kurzu Variační počet 1, který je věnován klasickému variačnímu počtu. Variační počet je dnes nepostradatelnou součástí nejen samotné matematiky, ale nachází široké uplatnění v různých oblastech lidské činnosti (např. ve fyzice, technice, informatice, ekonomii a mnoha dalších) při hledání optimálních řešení motivovaných snahou o maximální efektivitu.

Učební text je určen jako pomůcka pro studenty distančního a kombinovaného studia matematiky. Tento text v žádném případě nesupluje učebnici ani sbírku příkladů, má sloužit jako základní průvodce učivem, usnadňující pochopení látky a poskytující dobrou orientaci v dané problematice, má také sloužit jako materiál pro konzultace, které se konají místo pravidelných přednášek v denním studiu. K hlubšímu zvládnutí a procvičení látky je nutné doplnit jej další literaturou, např. některou z těch, které jsou uvedeny v seznamu doporučené literatury na konci textu.

K úspěšnému zvládnutí tohoto textu je nutné dobře znát diferenciální počet funkcí jedné a více reálných proměnných, ovládat integrální počet funkcí jedné proměnné a umět řešit obyčejné diferenciální rovnice.

V těchto textech se budeme zabývat variačním počtem diferencovatelných křivek v Euklidových prostorech, tzn. že množina všech přípustných prvků uvažovaných extremálních úloh bude množina diferencovatelných zobrazení $c : R \to R^m$, definovaných na otevřeném intervalu $I = (a,b) \subset R$. Jelikož definičními obory křivek jsou intervaly jednorozměrné reálné osy, mluvíme někdy o „jednorozměrném“ variačním počtu.

Látka obsažená v textu je rozdělena do dvou kapitol. V první kapitole jsou nejdříve zavedeny základní pojmy variačního počtu jako je **Lagrangian**, **funkce akce**, **variace řezu**, **variace funkce akce**, potom je uvedená a dokázána **první variační formule**, v dalším odstavci se studují **extremály funkce akce** asociované s Lagrangiánem, odvozují se podmínky pro extremály, tzv. **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice**, definují se a diskutují se **triviální a ekvivalentní Lagrangiány**, nakonec se z principu nejmenší akce odvozují pohybové rovnice mechanického systému.

Druhá kapitola je věnována regulárním variačním problémům. Nejdříve se uvádějí příklady regulárních a singulárních Lagrangiánů, definují se **Hamiltonián a impulzy**, zavádí se **Legendreova transformace**, pomocí které se transformují Eulerovy-Lagrangeovy rovnice na **Hamiltonovy kanonické rovnice**, diskutuje se fyzikální význam Hamiltoniánu. V odstavci 2.3. se vyšetřují funkce, které jsou konstantní podél extremál, tzv. **první integrály** Eulerových-Lagrangeových rovnic, které představují zákony zachování. Nakonec se studují **kanonické transformace**, které lze využít jako integrační metodu pro řešení Hamiltonových rovnic, a tedy jako integrační metodu pro hledání extremál regulárních variačních problémů.

Příklady uvedené v textu mají jednak ilustrativní charakter, na kterých se konkretizuje právě vyložená problematika nebo se předvádí metoda řešení, a jednak motivační charakter, v tom případě na něj bezprostředně navazuje další výklad. Často se jedná o příklady fyzikálního nebo historického významu.

Úkoly obsažené v textu jsou trojího druhu. Jednak jsou to **Úkoly k textu**, které nejsou číslované a které je potřeba splnit neprodleně, neboť pomáhají dobrému zvládnutí následující látky. Dále jsou to **Kontrolní úkoly**, označené dvěmi čísly, první označuje číslo kapitoly a druhé je pořadové číslo kontrolního úkolu v této kapitole. Tyto úkoly prověřují, do jaké míry studující problematiku pochopil, zda jí dokáže aplikovat při řešení úloh. Postup řešení těchto úkolů může být předmětem diskuse na tutoriálu. Správnost řešení kontrolních úkolů je možné si také ověřit porovnáním s výsledky uvedenými na konci učební opory. Třetím typem úkolů jsou **Korespondenční úkoly**, které je nutno zaslat ke kontrole dle harmonogramu studia.

Po prostudování textu

- seznámíte se s základními pojmy variačního počtu (Lagrangian, funkce akce, variace řezu, variace funkce akce);
- budete znát nutné a postačující podmínky pro extremály Lagrangiánu prvního řádu
- budete umět řešit variační úlohy pro křivky v R^m naučíte se hledat extrémy funkcí více proměnných.
- budete vědět co jsou triviální a ekvivalentní Lagrangiány a jaký mají význam
- pochopíte význam variačního principu v mechanice
- budete vědět co je Legendreova transformace, Hamiltonián, impulzy
- budete umět převádět Eulerovy-Lagrangeovy rovnice na kanonické rovnice Hamiltonovy
- budete vědět co jsou kanonické transformace a jaký je jejich význam
- pochopíte význam Hamilton-Jacobiho rovnice při integraci Hamiltonových kanonických rovnic
- budete umět řešit Hamilton-Jacobiho rovnici metodou separace proměnných

Čas potřebný k prostudování textu: 30 hodin(teorie) + 20 hodin(řešení úloh)

Z historie variačního počtu

Ohlédneme-li se do historie, zjistíme, že různé úlohy na hledání největších nebo nejmenších hodnot nějaké veličiny byly formulovány již dávno ve starověku. Někdy kolem roku 825 př. n. l. vznikla legenda o královně Didó, která sehrála významnou roli při formulaci snad nejstarší extremální úlohy tzv. **klasické izoperimetrické úlohy**. Legenda vypráví o tom, že královna Didó se rozhodla usídlit se i se svým oddílem na africkém pobřeží. To se příliš nelíbilo místním obyvatelům, proto jejich vůdce Hiarbos lehkomyslně slíbil darovat Didó pouze takový kousek země, který je možné ohraničit býčí kůží. Didó rozřezala kůži na úzké proužky, svázala je v jeden dlouhý řemen a ohraničila jím značné území, na kterém pak založila město Kartágo.

V klasické izoperimetrické úloze jde o to nalézt mezi všemi rovinnými uzavřenými křivkami předepsané délky takovou křivku, která ohraničuje plochu s maximálním obsahem. Analogickou úlohu je pak možné formulovat i v prostoru, to znamená nalézt mezi tělesy zadaného povrchu takové těleso, které má maximální objem. Řešení izoperimetrické úlohy bylo známo již Aristotelovi. Mezi rovinnými obrazci o stejném obvodu má největší obsah kruh a mezi tělesy o stejném povrchu má největší objem koule. Formulaci klasické izoperimetrické úlohy lze různě modifikovat a dostat tak různé varianty této úlohy. Později se názvu izoperimetrická úloha začalo používat v obecnějším významu pro pojmenování daleko širší třídy extremálních úloh, ve kterých se hledají extrémy integrálních funkcionálů s omezeními v integrálním tvaru. Obecné metody řešení izoperimetrických úloh později rozpracoval Euler.

Z dalších starověkých extremálních úloh se obvykle uvádí ještě například **Euklidova úloha**, podle které se do daného trojúhelníka má vepsat rovnoběžník maximálního obsahu, nebo **Archimédova úloha**, která si zase klade za cíl ze všech kulových úsečí stejného povrchu určit tu, která má maximální objem, nebo úloha, jak vést z daného bodu nejkratší a nejdelší úsečku ke kuželosečce, kterou formuloval a řešil Apollonius.

Po zániku antické civilizace nastává dlouhé období stagnace vědecké činnosti. Teprve v 16. století se objevují první extremální úlohy algebraického charakteru, např. Tartaglia formuluje úlohu rozdělit číslo osm na dvě části tak, aby součin jejich rozdílu a jejich součinu byl maximální. V 17. století řešil několik konkrétních extremálních úloh Kepler, ale v té době ještě nebyly známy žádné obecné metody řešení extremálních úloh a tak se každá z nich řešila speciálně vypracovaným postupem. První obecnou metodu pro řešení extremálních úloh vypracoval Fermat, kterou pak zobecnili Leibniz a Newton a současně tak položili i základy matematické analýzy.

Fermat také formuloval první variační princip, tzv. **Fermatův variační princip** pro problémy geometrické optiky. Podle tohoto principu si světelný paprsek ze všech možných trajektorií mezi dvěma body vždy vybírá právě tu, podél které se dostane z výchozího bodu do cílového bodu za nejkratší dobu. Tomuto principu se proto také někdy říká princip nejkratší doby. Fermatův princip teoreticky objasnil zákon lomu, který měl dosud pouze empirickou povahu.

Úspěchy s jakými se setkal Fermatův princip v geometrické optice přirozeně vedly k otázkám, zda-li podobný princip lze formulovat nejen pro pohyby paprsku, ale také pro mechanické pohyby bodů a těles. V této souvislosti důležitou roli sehrála **úloha o brachystochroně**, která je vlastně aplikací Fermatova principu v mechanice. Úlohu zformuloval v roce 1696 Johann Bernoulli. V podstatě jde o nalezení takové křivky spojující dva zadané body, aby se částice vypuštěná z výchozího bodu pohybující se v tíhovém poli po této křivce dostala do koncového bodu v co nejkratší době. Mezi řešiteli této úlohy byl kromě Johanna Bernoulliho, Leibniz, Newton, Jakob Bernoulli a l´Hospital.

Tento problém sice nepřinesl odpověď na otázku, která mechanická veličina má v průběhu pohybu nabývat extrémní hodnoty (protože hledanou křivkou nejrychlejšího sestupu je cykloida, přitom ve skutečnosti se částice v tíhovém poli za žádných podmínek po takové trajektorii nikdy nepohybuje), avšak přinesl nový obecnější pohled na extremální úlohy. Zatímco doposud v extremálních úlohách množina přípustných prvků závisela na jednom parametru, to znamená, že v těchto úlohách šlo o nalezení extrémů funkcí jedné proměnné, v úloze o brachystochroně je množina přípustných prvků, to je množina všech křivek spojujících dva body nekonečněrozměrná a je tedy třeba najít extrém funkce nekonečného počtu proměnných. Vývoj matematiky zde tedy zaznamenal obrovský pokrok od teorie funkce jedné proměnné k teorii úloh typu úlohy o brachystochroně.

Brzy po tom, co byla rozřešena úloha o brachystochroně, bylo vyřešeno mnoho podobných úloh, např. **úloha o nejkratších čarách**, tzv. **geodetikách** na dané ploše, **úloha o rovnováze těžkého vlákna** a jiné. V roce 1744 vyšla Eulerova práce *Metoda nalezení křivek majících vlastnosti minima nebo maxima neboli řešení izoperimetrické úlohy chápané v širším smyslu*, ve které byly položeny základy nové matematické disciplíny - **variačního počtu**. Euler aproximoval křivky lomenými čarami a odvodil diferenciální rovnici pro extremály, tzv. **Eulerovu rovnici**. O několik let později pak Lagrange zavedl nové pojmy jako **variace křivky**, **variace funkcionálu**, pro úlohy variačního počtu s omezeními zformuloval obecnou metodu řešení, tzv. **pravidlo multiplikátorů**, které pak aplikoval i na konečněrozměrné úlohy.

Ve fyzice zase Fermatův princip inspiroval mnohé vědce k hypotéze, podle které každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina je během procesu minimální, dlouho se však nevědělo, která veličina to má přesně být. Teprve v roce 1760 Lagrange poprvé přesně zformuloval **princip nejmenší akce** pro konzervativní mechanické systémy a vymezil platnost tohoto principu.

Lagrange pochopil význam zobecněných souřadnic, začal variační počet aplikovat v analytické mechanice a odvodil pohybové rovnice z principu nejmenší akce, tzv. Lagrangeovy rovnice. Hamilton později princip nejmenší akce zobecnil i pro systémy nekonzervativní, transformoval Lagrangeovy rovnice, které jsou diferenciálními rovnicemi druhého řádu, na soustavu prvního řádu o dvojnásobném počtu rovnic, tzv. **Hamiltonovy kanonické rovnice**, jejichž význam daleko přesahuje rámec klasické mechaniky. V Hamiltonových pracích pokračoval Jacobi, který rozvinul transformační teorii kanonických rovnic a odstranil řadu obtíží při jejich integraci.

Teprve když se princip nejmenší akce osvědčil i v dalších oblastech fyziky jako například v hydrodynamice nebo v teorii pružnosti, kde jiné metody selhávaly, byl uznán význam tohoto principu nejen pro mechaniku ale i pro celou fyziku. Časem většina vědců dospěla k přesvědčení, že příroda si „vybírá" skutečný pohyb tak, jako by řešila nějakou extremální úlohu.

Princip nejmenší akce a další variační principy se ukázaly být nepostradatelnými ve všech oblastech fyziky, sehrály rozhodující roli v aproximativních (variačních) metodách, významně zasáhly do moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic, prosazují se v teorii operátorů apod.

V současnosti se variační počet rozvíjí jak v oblasti teoretické tak v oblasti aplikační. V oblasti teoretické se ve variačním počtu používají moderní metody a nástroje diferenciální geometrie a globální analýzy a mluvíme již spíše o variační analýze. V oblasti aplikační nachází variační počet široké uplatnění v různých odvětvích lidské činnosti při řešení různých fyzikálních, technických, ekonomických a organizačních problémů motivovaných snahou o maximální efektivitu.

Úvodní poznámky a označení

Všude v tomto textu budeme uvažovat prostor R^n uspořádaných n-tic reálných čísel, kde $n \geq 1$, s přirozenou topologií a s přirozenou vektorovou strukturou. Jak víme z kurzu matematické analýzy, tato topologie je normovatelná, přičemž všechny normy na R^n jsou ekvivalentní a generují právě přirozenou topologii.

Dále budeme často pracovat se zobrazeními z R^n do R^m. Zapisujeme je ve tvaru

$$f : R^n \to R^m, \quad (x^1, x^2, \ldots, x^n) \to f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (y^1, y^2, \ldots, y^m).$$

V uspořádané m-tici $(y^1, y^2, \ldots, y^m)$ reálných čísel jsou jednotlivé složky $y^1, y^2, \ldots, y^m$ reálné funkce n reálných proměnných; označujeme je

$$\begin{aligned}
y^1 &= f^1(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\
y^2 &= f^2(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\
&\ldots \\
y^m &= f^m(x^1, x^2, \ldots, x^n)
\end{aligned}$$

a tyto vztahy nazýváme **rovnice zobrazení** $f : R^n \to R^m$.

Připomeňme si, že zobrazení $f : R^n \to R^m$ definované na otevřené množině v R^n se nazývá **třídy** C^r, kde r je přirozené číslo, je-li na svém definičním oboru diferencovatelné až do řádu r a jeho r-tá derivace je spojitá. Zobrazení $f : R^n \to R^m$ definované na otevřené množině v R^n se nazývá **třídy** C^∞, nebo také **hladké**, jestliže má na svém definičním oboru derivace všech řádů. V tomto kontextu se také **spojité** zobrazení nazývá zobrazení **třídy** C^0.

Platí, že **zobrazení $f : R^n \to R^m$ je třídy C^r, $r = 0,1,2,\ldots,\infty$, právě tehdy, když všechny jeho složky $f^1, f^2, \ldots, f^m$ jsou funkce třídy C^r.**

Zobrazení $f : R^n \to R^n$ definované na otevřené množině $U \subset R^n$ se nazývá **difeomorfismus** třídy C^r (kde $r \geq 1$), je-li bijektivní, a obě zobrazení $f : U \to f(U)$ i $f^{-1} : f(U) \to U$ jsou diferencovatelná třídy C^r. f se nazývá **lokální difeomorfismus** třídy C^r, jestliže každý bod $x \in U$ má okolí, na němž je f difeomorfismus třídy C^r. Z **Věty o inverzním zobrazení** vyplývá, že **je-li f zobrazení třídy C^r a je-li Jacobiho matice zobrazení f regulární na U, tj. jestliže**

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_x \neq 0$$

v každém bodě x množiny U, pak f je lokální difeomorfismus třídy C^r. V tom případě pak **funkce $(f^1, \ldots, f^m)$ jsou souřadnice na okolí bodu x.**

Symbolem id_M označujeme **identické zobrazení** množiny M na sebe.

Užíváme také sumační symboliku, to znamená kdykoliv se ve výrazu vyskytne dvakrát stejný index, znamená to, že se ve výrazu sčítá přes všechny hodnoty, kterých tento index nabývá, přitom sumační znaménko se vynechává. Například výraz $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i$ představuje zkrácený zápis výrazu $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2}\dot{q}^2 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m}\dot{q}^m$.

1. VARIAČNÍ PRINCIP PRO KŘIVKY V EUKLIDOVĚ PROSTORU

V této kapitole vycházíme z pojmu křivky v R^m a jejího grafu, který lze reprezentovat lokálním **řezem projekce** kartézského součinu $R \times R^m$ na první faktor R. Zavádíme základní pojmy variačního počtu jako je **prodloužení řezu**, **Lagrangián** a **funkce akce**, která je definovaná na množině diferencovatelných řezů. Zajímají nás extrémy funkce akce. Za tím účelem zavádíme **variaci řezu**, studujeme chování funkce akce při těchto jednoparametrických deformacích řezů a dospíváme k pojmu **variace funkce akce**.

Vyjádření první variace funkce akce ve tvaru součtu integrálního a „okrajového" členu se nazývá **první variační formule**. V dalším odstavci se odvozují podmínky pro extremály, tzv. **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice**, jejichž použití při řešení variačních úloh pro křivky v R a v R^2 je ilustrováno v odstavcích 1.5. a 1.6. Dále se definují **triviální a ekvivalentní Lagrangiány** a vysvětluje se jejich význam. V odstavci 1.8. je podrobně rozebrána **úloha o brachystochroně**, která sehrála významnou roli při vzniku variačního počtu. Nakonec se z principu nejmenší akce odvozují pohybové rovnice mechanického systému.

Po prostudování této kapitoly

- seznámíte se s základními pojmy variačního počtu (Lagrangian, funkce akce, variace řezu, variace funkce akce);
- budete znát nutné a postačující podmínky pro extremály Lagrangiánu prvního řádu
- budete umět řešit variační úlohy pro křivky v R^m naučíte se hledat extrémy funkcí více proměnných.
- budete vědět co jsou triviální a ekvivalentní Lagrangiány a jaký mají význam
- pochopíte význam variačního principu v mechanice

Klíčová slova: Křivka v R^m, graf křivky, řez projekce, prodloužení řezu, Lagrangián, funkce akce, deformace řezu, deformace řezu s pevnými konci a s volnými konci na uzavřeném intervalu, variace funkce akce, první variační formule, extremála, Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, Eulerovy-Lagrangeovy výrazy, triviální Lagrangián, ekvivalentní Lagrangiány, brachystochrona, kinetická a potenciální energie mechanického systému, Newtonovy rovnice, volná částice, rovnice pro geodetiky.

Čas potřebný k prostudování kapitoly: 15 hodin(teorie) + 10 hodin(řešení úloh)

1.1. Křivky a jejich grafy

Připomeňme si, že **křivkou** v R^m, $m \geq 1$, rozumíme zobrazení $c: R \to R^m$, definované na otevřeném intervalu $I = (a,b) \subset R$. Takové zobrazení tedy přiřazuje každému bodu $t \in I$ bod $c(t) = (c^1(t), \dots, c^m(t)) \in R^m$. Proměnná t se nazývá **parametr**. Křivka často popisuje **dráhu** nějakého bodu nebo složitějšího fyzikálního systému v závislosti na čase. V tom případě se parametr t nazývá **čas** a říkáme, že křivka c popisuje **časový vývoj** uvažovaného systému.

Je-li křivka c **diferencovatelná v bodě** $t \in I$, existuje její **derivace** $Dc(t) \equiv \dot{c}(t)$, což je lineární zobrazení $R \to R^m$. Zvolíme-li v R a R^m báze (např. kanonické), lze toto lineární zobrazení ztotožnit s vektorem v R^m; derivace $\dot{c}(t)$ křivky c v bodě t se proto také nazývá **tečný vektor** ke křivce c v bodě t. V případě, že parametr t má význam času, má vektor $\dot{c}(t)$ význam **okamžité rychlosti** v čase t.

Pro křivku $c: I \to R^m$, která je **diferencovatelná na intervalu** I, existuje v každém bodě $t \in I$ tečný vektor $\dot{c}(t)$. Podél křivky c tak vzniká **vektorové pole** tvořené tečnými vektory, nazývá se **pole rychlostí** křivky c. Podle definice je tedy vektorové pole rychlostí podél diferencovatelné křivky $c: I \to R^m$ zobrazení

$$\dot{c} \equiv Dc: I \to R^m,$$

definované předpisem

$$t \to \left(\frac{dc^1}{dt}(t), \dots, \frac{dc^m}{dt}(t) \right).$$

Je to rovněž křivka v R^m, které udává „rychlost obíhání“ po křivce c.

Je-li křivka c v bodě $t \in I$ **dvakrát diferencovatelná** (tj. je-li její pole rychlostí diferencovatelné v bodě t), pak její druhá derivace $D^2c(t) \equiv \ddot{c}(t)$ se nazývá **vektor zrychlení** v bodě t. Podobně jako výše vidíme, že pokud je křivka c dvakrát diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru, vzniká vektorové pole, definované podél křivky c, které nazýváme **pole zrychlení** křivky c.

Pro hladké křivky lze analogicky definovat pole vyšších derivací libovolného řádu.

V tomto textu budeme s výhodou pracovat ne přímo se samotnými křivkami, ale s jejich grafy. Jak víme z matematické analýzy, **grafem zobrazení** $f: R^n \to R^m$ rozumíme zobrazení $\Gamma_f: R^n \to R^n \times R^m$, které každému bodu $x \in R^n$ přiřadí uspořádanou dvojici $(x, f(x)) \in R^n \times R^m$. **Grafem křivky**

$$c: R \ni t \to c(t) \in R^m$$

v R^m je tedy křivka

$$\Gamma_c: R \ni t \to (t, c(t)) \in R \times R^m$$

v $R \times R^m$. **Graf křivky znázorňuje časový vývoj a tedy také zachycuje rychlost obíhání po křivce**. Rozdíl mezi křivkou a jejím grafem ilustruje následující příklad:

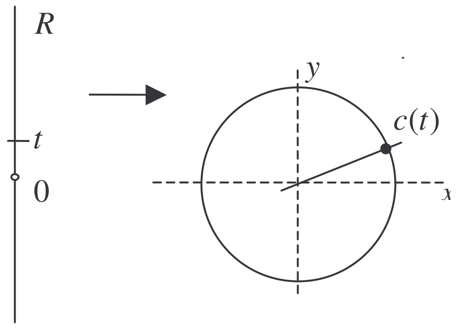
Příklad 1.1. Zobrazení

$$c: R \ni t \to c(t) = (\sin t, \cos t) \in R^2$$

je křivka v R^2. Rovnice této křivky mají tvar

$$x = \sin t,$$
$$y = \cos t.$$

Jelikož platí $x^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ pro všechna $t \in R$, je při tomto zobrazení obrazem přímky R jednotková kružnice v rovině se středem v počátku. Zobrazení c má význam „navíjení přímky R na kružnici" (Viz Obr. 1).

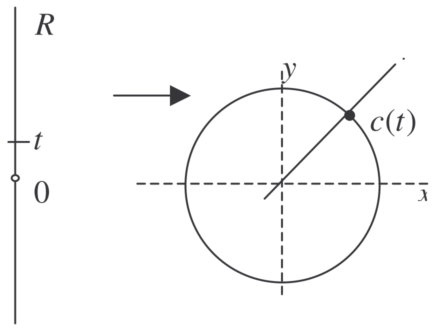


Obr. 1

Zcela stejný obraz, tedy jednotkovou kružnici v R^2 se středem v počátku, dostaneme pro zobrazení

$$\bar{c} : R \ni t \to \bar{c}(t) = (\sin 2t,\ \cos 2t) \in R^2,$$

jelikož také $x^2 + y^2 = \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$ pro všechna $t \in R$ (Obr. 2).

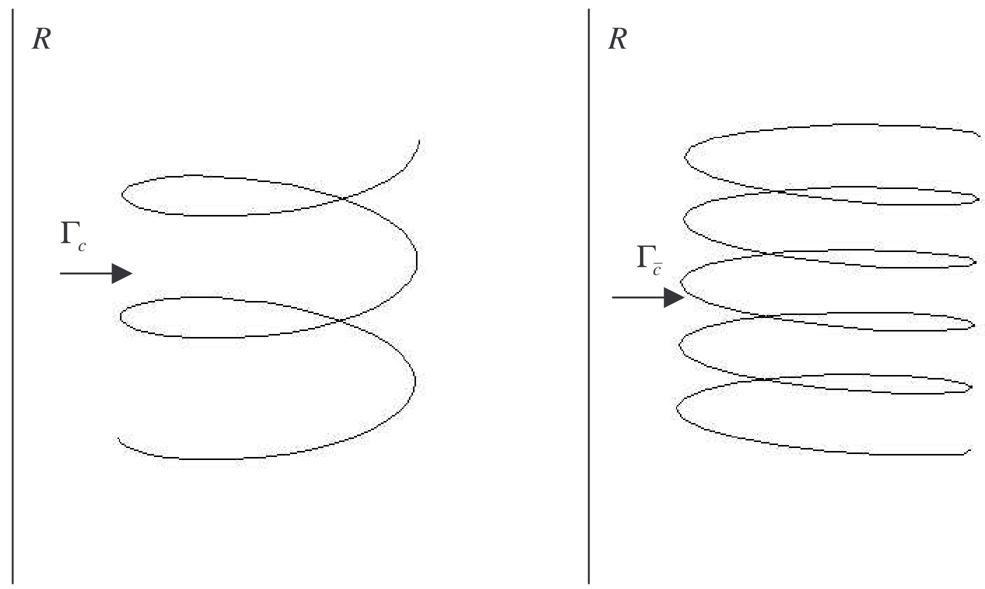


Obr. 2

Přitom zobrazení c a $\bar{c}$, jsou **různá**, liší se **rychlostí obíhání** po kružnici (tj. představují **různou parametrizaci** téže množiny - kružnice). Tento rozdíl mezi oběma zobrazeními zachytí jejich grafy: grafy zobrazení c a $\bar{c}$ jsou křivky

$$\Gamma_c : t \to (t, c(t)) = (t, \sin t,\ \cos t),$$
$$\Gamma_{\bar{c}} : t \to (t, \bar{c}(t)) = (t, \sin 2t,\ \cos 2t)$$

v R^3 (šroubovice), které jsou různé. Rychlost obíhání po kružnici je vyjádřena „hustotou závitů" šroubovice - rychlejšímu obíhání zřejmě odpovídá šroubovice s větší hustotou závitů (viz Obr. 3).



Obr. 3

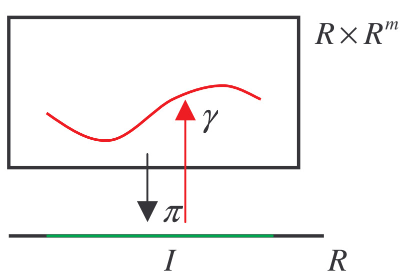
Kontrolní úkol 1.1. S využitím předchozího příkladu zadejte parametrizaci kružnice tak, aby rychlost obíhání byla menší, než u kružnice c. Napište rovnice této křivky a nakreslete její graf.

1.2. Funkce akce

Uvažujme prostor $R\times R^m$, kde m je přirozené číslo, a označme π **projekci kartézského součinu** $R\times R^m$ **na první faktor** R. π je tedy zobrazení, které každé uspořádané dvojici $(t,x)\in R\times R^m$ přiřazuje první složku t.

Definice 1.1. Zobrazení $\gamma : R\to R\times R^m$ definované na otevřeném intervalu $I\subset R$ se nazývá **řez** projekce π, jestliže splňuje podmínku

$$\pi\circ\gamma = \mathrm{id}_I .$$



Obr. 4

Vyšetřeme podrobně podmínku pro řez. Každé zobrazení $\gamma: R \to R \times R^m$ je tvaru $\gamma: t \to (\gamma_0(t), c(t))$, kde první složka γ_0 je křivka v R a druhá složka c je křivka v R^m. Složené zobrazení $\pi \circ \gamma$ přiřazuje každému bodu $t \in I \subset R$ bod $(\pi \circ \gamma)(t) = \pi(\gamma(t)) = = \pi(\gamma_0(t), c(t)) = \gamma_0(t) \in R$, tedy platí $\pi \circ \gamma = \gamma_0$. Je-li γ řez projekce π, je ovšem podle definice $\gamma_0 = \mathrm{id}_I$, jinými slovy, první složka zobrazení γ je identické zobrazení. Vidíme, tak, že **řez je** zobrazení $\gamma: I \to R \times R^m$ tvaru $\gamma: t \to (t, c(t))$, tj. **graf křivky** $c: I \to R^m$.

Definice 1.2. Nechť $\gamma: R \ni t \to (t, c(t)) \in R \times R^m$ je **diferencovatelný** řez projekce π. Zobrazení $J^1\gamma: R \to R \times R^m \times R^m$ definované vztahem

$$J^1\gamma(t) = (t, c(t), \dot{c}(t)) \quad \forall t \in R,$$

kde $\dot{c}$ je derivace křivky c, se nazývá **první prodloužení řezu** γ.

Je-li γ **dvakrát diferencovatelný** řez projekce π, pak zobrazení $J^2\gamma: R \to R \times R^{3m}$ definované vztahem

$$J^2\gamma(t) = (t, c(t), \dot{c}(t), \ddot{c}(t)), \forall t \in R,$$

kde $\ddot{c}$ je druhá derivace křivky c, se nazývá **druhé prodloužení řezu** γ.

Analogicky se definuje ***r*-té prodloužení řezu**, který je diferencovatelný řádu r.

Všimněte si, že zobrazení $J^1\gamma$ je **křivka v** $R \times R^m \times R^m$, a že je to **řez projekce** $\pi_1: R \times R^{2m} \to R$. Podobně zobrazení $J^2\gamma$ je **křivka v** $R \times R^{3m}$ a je to **řez projekce** $\pi_2: R \times R^{3m} \to R$.

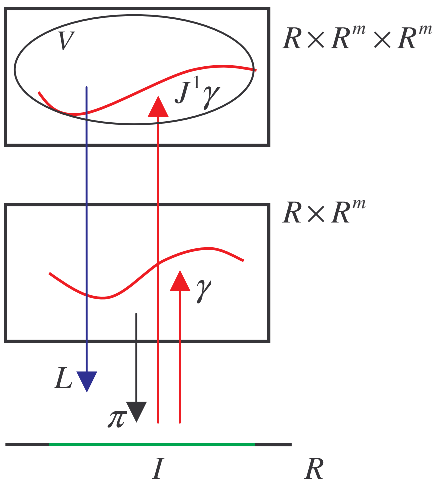
Poznámka. Nepřehlédněte, že řez $J^1\gamma$ je **speciálním případem** řezu projekce $\pi_1: R \times R^{2m} \to R$. **Obecný řez** projekce π_1 je totiž zobrazení $\delta: R \to R \times R^{2m}$ tvaru $\delta(t) = (t, c(t), f(t))$, kde složky c a f jsou **libovolné** křivky v R^m, zatímco **prodloužení** $J^1\gamma$ **řezu** γ projekce π **je takový řez** $\delta: R \to R \times R^{2m}$**, pro nějž třetí složka** f **je derivací druhé složky** c. Analogické závěry platí i pro vyšší prodloužení řezů.

Příklad 1.2. Zobrazení $\delta: R \to R \times R^{2m}$ definované vztahem $\delta(t) = (t, t^3, \sin t)$ je řez projekce $\pi_1: R \times R^{2m} \to R$, není ale prodloužením žádného řezu projekce $\pi: R \times R^m \to R$. Zobrazení $\delta: R \to R \times R^{2m}$ definované vztahem $\delta(t) = (t, t^3, 3t^2)$ je prvním prodloužením řezu $\gamma: R \to R \times R^m$, kde $\gamma(t) = (t, t^3)$, tedy platí $\delta = J^1\gamma$. Druhé prodloužení řezu $\gamma: R \to R \times R^m$, $\gamma(t) = (t, t^3)$, má tvar $J^2\gamma(t) = (t, t^3, 3t^2, 6t)$.

Poznámka. Ve fyzikálním kontextu se prostor R^m nazývá **konfigurační prostor** a prostor $R \times R^m$ **prostor událostí**. Křivky $c: R \to R^m$ se nazývají **trajektorie** a popisují pohyb mechanického systému v konfiguračním prostoru. Prostor $R \times R^m \times R^m$ se nazývá **evoluční prostor**.

Definice 1.3. **Lagrangiánem prvního řádu** nebo také **Lagrangeovou funkcí prvního řádu** rozumíme funkci $L: V \to R$, definovanou na otevřené množině $V \subset R \times R^m \times R^m$. Obecně **Lagrangiánem *r*-tého řádu**, kde r je přirozené číslo, nazýváme funkci $L: W \to R$, definovanou na otevřené množině $W \subset R \times R^m \times R^{r \cdot m}$.

V tomto textu budeme pracovat převážně s Lagrangiány prvního řádu; v tom případě budeme slova „prvního řádu" vynechávat a budeme hovořit prostě jen o „Lagrangiánech".



Obr. 5

Nechť $L: R \times R^m \times R^m \to R$ **je Lagrangián definovaný na otevřené množině** $V \subset R \times R^m \times R^m$**. Množinu všech diferencovatelných řezů** $\gamma: I \to R \times R^m$ **projekce** π **takových, že** $J^1\gamma(I) \subset V$**, budeme označovat** $\Gamma(\pi)$**. Její podmnožinu tvořenou řezy definovanými na okolí uzavřeného intervalu** $[a,b] \subset R$ **budeme označovat** $\Gamma_{[a,b]}(\pi)$**.**

Je-li Lagrangián L spojitý, pak pro každý řez $\gamma \in \Gamma_{[a,b]}(\pi)$ je složená funkce $L \circ J^1\gamma: I \to R$ spojitá; tato funkce představuje **Lagrangián podél křivky** $J^1\gamma$, tj. dosazení prodloužení řezu γ (křivky c a její derivace) do Lagrangiánu L. Existuje tedy integrál funkce $L \circ J^1\gamma$ přes interval $[a,b]$.

Definice 1.4. Zobrazení

$$S: \Gamma_{[a,b]}(\pi) \ni \gamma \to \int_a^b (L \circ J^1\gamma)dt \in R$$

se nazývá **funkce akce Lagrangiánu L na intervalu** $[a,b]$.

Naším hlavním cílem bude studium **extrémů funkce akce**. Ze základního kurzu matematické analýzy je nám dobře známý problém hledání extrémů funkcí, definovaných na otevřených podmnožinách Euklidových prostorů. Tato úloha vede na studium derivací dané funkce: nutnou podmínkou existence extrému je nulovost první derivace, vlastnosti druhé derivace (případně vyšších derivací) pak umožňují blíže charakterizovat povahu extrému (např. maximum, minimum).

V naší situaci však tento postup **nelze použít**. S je sice **reálná funkce**, ale **definovaná na množině $\Gamma_{[a,b]}(\pi)$, která zdaleka nemá strukturu Euklidova prostoru** (nemusí mít dokonce ani vektorovou strukturu a pokud ji má, jde o nekonečněrozměrný vektorový prostor). Pojem derivace na takové množině nelze zavést; pouze ve speciálních případech, kdy existuje vektorová struktura, která je „dostatečně rozumná" (Banachův prostor, nebo o něco obecnější topologický vektorový prostor, tzv. pohodlný vektorový prostor), lze definovat derivaci a při vyšetřování extrémů funkce akce postupovat metodami diferenciálního počtu.

Z této situace ovšem existuje elegantní východisko nalezené ***Lagrangem***, které je univerzální, bez ohledu na existenci či neexistenci nějaké „vhodné" struktury na množině řezů, která je definičním oborem funkce akce. Zhruba řečeno, **místo derivací budeme studovat „variace" funkce akce**; proto se příslušná matematická disciplína nazývá **variační počet** nebo moderněji také **variační analýza**.

Základní Lagrangeova myšlenka spočívá v tom, že se nestudují extrémy na celém definičním oboru funkce akce, ale pouze na jeho **jednoparametrických podmnožinách** (jednoparametrických systémech křivek). Jak uvidíme dále, tím se problém vlastně převede na hledání extrémů **reálné funkce jedné reálné proměnné**.

1.3. První variační formule

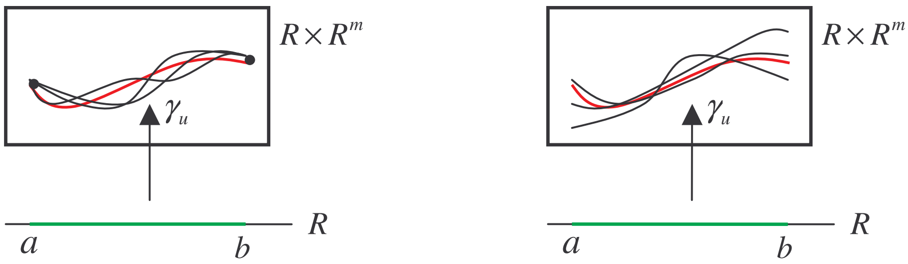
Definice 1.5. Nechť γ je diferencovatelný řez projekce $\pi: R\times R^m \to R$ definovaný na otevřené množině $I\subset R$, označme $\gamma(t)=(t,c(t))$. Nechť dále $\varphi: I\to R^m$ je pevně zvolená diferencovatelná křivka a u reálné číslo, $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)\subset R$, kde $\varepsilon>0$. Vzniká **jednoparametrický systém $\{\gamma_u\}_{u\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ řezů** $\gamma_u: I\to R\times R^m$ projekce π, definovaný vztahem

$$\gamma_u(t)=(t,c(t)+u\varphi(t)),\quad \forall t\in I.$$

Systém řezů $\{\gamma_u\}_{u\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ se nazývá **deformace** nebo také **variace řezu** γ, indukovaná **deformačním zobrazením** φ.

Je-li řez γ definován na okolí intervalu $[a,b]\subset R$ a platí-li $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, říkáme, že $\{\gamma_u\}_{u\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ je **deformace** (**variace**) **s pevnými konci** na intervalu $[a,b]$; v opačném případě hovoříme o **deformaci** (**variaci**) **s volnými konci** na intervalu $[a,b]$. (Viz Obr. 6.)
Podmínka „pevných konců" $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ se dá bez újmy na obecnosti nahradit požadavkem, že zobrazení φ má (kompaktní) nosič $[a,b]$).

Všimněte si, že podle uvedené definice je $\gamma_0=\gamma$, tedy řez γ je skutečně obsažen v systému $\{\gamma_u\}_{u\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ pro hodnotu parametru $u=0$.



Obr. 6

Abychom se vyhnuli problémům s existencí derivací zobrazení, která se dále budou vyskytovat, budeme v dalším textu předpokládat, pokud nebude uvedeno jinak, že uvažovaná zobrazení jsou diferencovatelná třídy C^2. Upozorňujeme čtenáře, že tento předpoklad již nebudeme explicitně uvádět!

Definice 1.6. Buď L Lagrangián, definovaný na otevřené množině $V \subset R \times R^m \times R^m$,

$$S: \quad \Gamma_{[a,b]}(\pi) \ni \gamma \to \int_a^b (L \circ J^1\gamma)\, dt \in R$$

jeho funkce akce na intervalu $[a,b] \subset R$. Nechť $\{\gamma_u\}_{u\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ je deformace řezu γ taková, že $\gamma_u \in \Gamma_{[a,b]}(\pi)$ pro všechna $u \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Zobrazení

$$R \supset (-\varepsilon,\varepsilon) \ni u \to \int_a^b (L \circ J^1\gamma_u)\, dt \in R$$

je reálná funkce jedné reálné proměnné. Její první derivace v bodě $u = 0$, tedy výraz

$$\left[\frac{d}{du}\left(\int_a^b (L \circ J^1\gamma_u) dt\right)\right]_{u=0}$$

se nazývá (**první**) **variace funkce akce** S a označuje se δS. Její r-tá derivace v bodě $u = 0$ se nazývá ***r*-tá variace funkce akce** S a označuje se $\delta^r S$.

Označme
$(t,q^1,\dots,q^m)$ **kartézské souřadnice na** $R \times R^m$,
$(t,q^1,\dots,q^m,\dot{q}^1,\dots,\dot{q}^m)$ **kartézské souřadnice na** $R \times R^m \times R^m$,
$(t,q^1,\dots,q^m,\dot{q}^1,\dots,\dot{q}^m,\ddot{q}^1,\dots,\ddot{q}^m)$ **kartézské souřadnice na** $R \times R^m \times R^m \times R^m$
a přijměme úmluvu, že pro jednoduchost budeme dále používat výhradně zkrácené označení (t,q^i), $(t,q^i,\dot{q}^i)$ **a** $(t,q^i,\dot{q}^i,\ddot{q}^i)$.

Budeme rovněž důsledně používat sumační symboliku - kdykoliv se ve výrazu vyskytne dvakrát stejný index, znamená to, že se ve výrazu sčítá v mezích tohoto indexu, které jsou zřejmé z kontextu.

Poznámka.

Jelikož L je funkce na (podmnožině) $R\times R^m\times R^m$, můžeme ji vyjádřit v proměnných $(t,q^i,\dot{q}^i)$. V tom případě píšeme $L(t,q^i,\dot{q}^i)$.

Řez $\gamma(t)=(t,c(t))$ pak zapisujeme pomocí složek křivky c zkráceně ve tvaru $\gamma(t)=(t,c^i(t))$, nebo, nemůže-li dojít k nedorozumění, ve tvaru $\gamma(t)=(t,q^i(t))$; nezapomeňte, že tento zápis znamená $\gamma(t)=(t,q^1(t),\ldots,q^m(t))$.

Podobně prodloužení $J^1\gamma$ řezu $\gamma(t)=(t,c(t))$ pak zapisujeme pomocí složek křivky c a její derivace $\dot{c}$ zkráceně ve tvaru $J^1\gamma(t)=(t,c^i(t),\dot{c}^i(t))$, nebo, nemůže-li dojít k nedorozumění, ve tvaru $J^1\gamma(t)=(t,q^i(t),\dot{q}^i(t))$.

Složenou funkci $L\circ J^1\gamma$ můžeme zapsat také jako $L(t,c(t),\dot{c}(t))$. V kartézských souřadnicích $(t,q^i,\dot{q}^i)$ pak používáme vyjádření $L(t,q^i(t),\dot{q}^i(t))$.

Deformovaný řez $\gamma_u(t)=(t,c(t)+u\varphi(t))$ má podle toho souřadnicové vyjádření $\gamma_u(t)=(t,c^i(t)+u\varphi^i(t))$, kde φ^i, $1\le i\le m$, jsou složky křivky φ. Pro jeho prodloužení máme $J^1\gamma_u(t)=(t,c(t)+u\varphi(t),\dot{c}(t)+u\dot{\varphi}(t))$, kde $\dot{\varphi}$ je derivace křivky φ; v souřadnicích $J^1\gamma_u(t)=(t,c^i(t)+u\varphi^i(t),\dot{c}^i(t)+u\dot{\varphi}^i(t))$, což symbolicky zapisujeme jako $(t,\bar{q}^i(t),\dot{\bar{q}}^i(t))$.

S tímto označením pak pro Lagrangián podél deformovaného řezu, tedy funkci $L\circ J^1\gamma_u=L(t,c(t)+u\varphi(t),\dot{c}(t)+u\dot{\varphi}(t))$ můžeme používat zápis $L(t,\bar{q}^i(t),\dot{\bar{q}}^i(t))$.

Věta 1.1. Variace funkce akce Lagrangiánu L na intervalu $[a,b]$ indukovaná deformačním zobrazením φ má tvar

$$\delta S=\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)(t)\varphi^i(t)dt+\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\varphi^i\right)(b)-\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\varphi^i\right)(a).$$

Definice 1.7. Výše uvedené vyjádření variace funkce akce ve tvaru součtu integrálního a „okrajového" členu se nazývá **první variační formule.**

Poznámka. Nepřehlédněte použití sumační symboliky ve Větě 1.1. Např. výraz $\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\varphi^i$ znamená součet $\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^1}\varphi^1+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^2}\varphi^2+\cdots+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^m}\varphi^m$.

Důkaz Věty 1.1. Určíme variaci funkce akce S přímým výpočtem. Podle věty o derivaci integrálu a věty o derivaci složené funkce platí

$$\delta S=\left[\frac{d}{du}\left(\int_a^b(L\circ J^1\gamma_u)dt\right)\right]_{u=0}=\left[\int_a^b\frac{d}{du}(L\circ J^1\gamma_u)dt\right]_{u=0}=$$

$$=\left[\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial\bar{q}^i}\varphi^i+\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar{q}}^i}\dot{\varphi}^i\right)(t)dt\right]_{u=0}=\int_a^b\left[\frac{\partial L}{\partial\bar{q}^i}\right]_{u=0}(t)\varphi^i(t)dt+\int_a^b\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar{q}}^i}\right]_{u=0}(t)\dot{\varphi}^i(t)dt=$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q^i}(t)\varphi^i(t)dt + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(t)\dot{\varphi}^i(t)dt =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q^i}(t)\varphi^i(t)dt - \int_a^b \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)(t)\varphi^i(t)dt + \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\varphi^i\right)dt =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)(t)\varphi^i(t)dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\varphi^i\right)(b) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\varphi^i\right)(a),$$

kde jsme při úpravě druhého členu postupně využili integraci per partes a Newtonovu formuli o integraci primitivní funkce. ♦

1.4. Eulerovy-Lagrangeovy rovnice

Definice 1.7. Buď L Lagrangián, S jeho funkce akce. Řez γ projekce $\pi : R \times R^m \to R$ se nazývá **extremála** Lagrangiánu L **na intervalu** $[a,b]$, jestliže $\delta S = 0$ pro **každé** deformační zobrazení φ takové, že $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. (Volněji můžeme říci, že řez γ se nazývá **extremála** Lagrangiánu L **na intervalu** $[a,b]$, jestliže pro **každou** deformaci řezu γ **s pevnými konci** je první variace funkce akce Lagrangiánu L na intervalu $[a,b]$ nulová).

Řez γ projekce $\pi : R \times R^m \to R$ se nazývá **extremála** Lagrangiánu L, jestliže je extremála na **každém uzavřeném intervalu** $[a,b] \subset R$.

Nyní již můžeme vyslovit základní tvrzení, udávající nutnou a postačující podmínku pro to, aby řez byl extremálou daného Lagrangiánu:

Věta 1.2 (Eulerův-Lagrangeův teorém). Nechť L je Lagrangián definovaný na otevřené množině v $R \times R^m \times R^m$. Řez $\gamma \in \Gamma(\pi)$ je extremála Lagrangiánu L právě tehdy, když je řešením rovnic

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \circ J^2\gamma = 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{1.1}$$

Definice 1.8. Rovnice (1.1) pro extremály Lagrangiánu L se nazývají **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice**. Funkce

$$E_i(L) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad 1 \le i \le m$$

vystupující na levé straně Eulerových-Lagrangeových rovnic, se nazývají **Eulerovy-Lagrangeovy výrazy**.

Než přistoupíme k důkazu věty, podíváme se na uvedené rovnice podrobněji. Jak víme, definičním oborem Lagrangiánu je otevřená množina v $R \times R^m \times R^m$, což znamená, že ve zvolených (kartézských) souřadnicích je L funkce proměnných $(t, q^i, \dot{q}^i)$ (nezapomeňte, že toto je stručné označení pro $(t, q^1, \dots, q^m, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)$). Vyšetříme nejprve definiční obor Eulerových-Lagrangeových výrazů $E_i(L)$, $1 \le i \le m$. Vyjádříme-li totální derivaci podle t, dostaneme:

$$E_i(L) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\ddot{q}^j, \quad 1 \le i \le m .$$

Vidíme, že pro všechna i, $E_i(L)$ **jsou funkce proměnných** $(t, q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i)$, což znamená, že **jejich definičním oborem je otevřená množina v** $R \times R^m \times R^m \times R^m$. Po dosazení řezu γ (křivky $c: R \to R^m$, jejímž grafem je γ) získáme **funkce závislé na křivce *c*, její první a druhé derivaci, tj. funkce závislé na druhém prodloužení řezu** γ; proto mají levé strany rovnic (1.1) tvar $E_i(L) \circ J^2\gamma$. Celkově zjišťujeme, že **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice** (1.1) **představují systém *m*** (tedy tolik, kolik je proměnných q^i) **obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu** pro m složek $c^i(t)$, $1 \le i \le m$, neznámých křivek $c: R \to R^m$. Často je stručně zapisujeme ve tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad 1 \le i \le m .$$

Všimněme si, že závislost funkcí $E_i(L)$ na proměnných $\ddot{q}^j$, $1 \le j \le m$, je afinní, tj. typu

$$A_i + B_{ij}\ddot{q}^j ,$$

kde funkce A_i, $1 \le i \le m$, a B_{ij}, $1 \le i, j \le m$, již závisejí pouze na proměnných $(t, q^1, \dots, q^m, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)$. V důsledku toho **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice tvoří systém obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, afinních v druhých derivacích**, tedy tvaru

$$B_{ij}(t, q^l(t), \dot{q}^l(t))\ddot{q}^j(t) + A_i(t, q^l(t), \dot{q}^l(t)) = 0, \quad 1 \le i \le m . \tag{1.2}$$

Úkol: S využitím výše uvedených výpočtů vyjádřete funkce A_i, B_{ij}, $1 \le i, j \le m$, pomocí Lagrangiánu L.

Ve zbývající části tohoto odstavce se budeme věnovat důkazu Eulerova-Lagrangeova teorému. Začneme pomocným tvrzením.

Lemma 1.1 (Fundamentální Lemma variačního počtu). Nechť $h: R \to R^k$ **je spojitá funkce definovaná na okolí intervalu** $[a,b] \subset R$**. Jestliže**

$$\int_a^b h(t)\varphi(t)\,dt = 0$$

pro každou spojitou křivku $\varphi: R \to R^k$ **s kompaktním nosičem** $[a,b]$**, pak platí** $h = 0$ **na** $[a,b]$**.**

Ve výše uvedeném lemmatu označuje $h(t)\varphi(t)$ standardní skalární součin vektorů v R^k, tedy

$$h(t)\varphi(t) = h^1(t)\varphi^1(t) + h^2(t)\varphi^2(t) + \cdots + h^k(t)\varphi^k(t),$$

kde h^i (resp. φ^i), $1 \le i \le k$, jsou složky zobrazení h (resp. φ).

Důkaz Lemmatu 1.1. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že zobrazení h není na intervalu $[a,b]$ nulové. Existuje tedy číslo $t_0 \in [a,b]$ takové, že $h(t_0) \neq 0$. Pro složky zobrazení h to znamená, že existuje index p, pro který $h^p(t_0) \neq 0$. Protože je zobrazení h spojité, jsou také všechny jeho složky spojité. Specielně funkce h^p je spojitá v bodě t_0, a protože $h^p(t_0) \neq 0$, existuje okolí U bodu t_0, na němž funkce h^p nemění znaménko (je na celém okolí buď kladná nebo záporná, podle toho, zda číslo $h^p(t_0)$ je kladné nebo záporné). Lze předpokládat, že $U = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a,b]$, kde $\delta > 0$ je vhodné číslo. Zvolme zobrazení φ tak, aby bylo spojité, a aby platilo

$$\varphi = 0 \quad \text{na } R \setminus U,$$

$$\varphi^p > 0 \quad \text{na } U,$$

$$\varphi^i = 0 \quad \text{na } U \text{ pro } \forall i \neq p.$$

Takto zvolené zobrazení φ má nosič $[a,b]$. Dostáváme pro něj

$$h(t)\varphi(t) = h^1(t)\varphi^1(t) + \cdots + h^p(t)\varphi^p(t) + \cdots + h^k(t)\varphi^k(t) = h^p(t)\varphi^p(t) \neq 0 \quad \text{na } U,$$

přičemž toto číslo je všude na U buď jen kladné nebo jen záporné. Platí tedy

$$\int_a^b h(t)\varphi(t)\,dt = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} h^p(t)\varphi^p(t)\,dt \neq 0,$$

neboť integrujeme funkci, která na integrované množině je všude různá od nuly a nemění znaménko. To je ovšem spor s předpokladem, že uvažovaný integrál je nulový. ♦

Nyní máme již vše připraveno pro důkaz Eulerova-Lagrangeova teorému.

Důkaz Věty 1.2. Tvrzení je přímým důsledkem první variační formule.

Nejprve předpokládejme, že řez $\gamma \in \Gamma(\pi)$ je extremála Lagrangiánu L. Podle definice je γ extremála L na každém intervalu $[a,b] \subset R$. To znamená, že pro každou deformační funkci φ s pevnými konci na intervalu $[a,b]$ je variace funkce akce Lagrangiánu L nulová, a to pro libovolný interval $[a,b] \subset R$. Zvolme pevně interval $[a,b]$. Podle Věty 1.1. platí

$$\delta S = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)(t)\varphi^i(t)dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(b)\varphi^i(b) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(a)\varphi^i(a) = 0,$$

a tedy také

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)(t)\varphi^i(t)dt = 0,$$

neboť $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Bez újmy na obecnosti se lze omezit na deformační funkce s nosičem $[a,b]$. Pak lze aplikovat Fundamentální Lemma variačního počtu: dostaneme

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)(t) = 0, \text{ pro } \forall t \in [a,b], , 1 \le i \le m,$$

neboli v přesnějším zápisu

$$\left(\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \circ J^2\gamma\right)(t) = 0 \ \text{ pro } \ \forall t \in [a,b], \quad 1 \leq i \leq m.$$

Z libovolnosti intervalu $[a,b]$ nyní vyplývá, že řez γ splňuje Eulerovy-Lagrangeovy rovnice

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \circ J^2\gamma = 0, \ \ 1 \leq i \leq m.$$

Obráceně předpokládejme, že řez γ splňuje Eulerovy-Lagrangeovy rovnice. Z první variační formule pak ihned vyplývá, že pro každou deformaci s pevnými konci je $\delta S = 0$ na každém intervalu $[a,b] \subset R$. ♦

1.5. Variační úlohy pro křivky v *R*

V tomto odstavci se budeme zabývat variačními úlohami pro křivky v *R*, to znamená pro zobrazení $c : R \ni t \to c(t) \in R$, kde $c(t)$ je diferencovatelná funkce jedné proměnné. Souřadnicové vyjádření křivky c se zapisuje buď ve tvaru $c : t \to c(t) = (q(t)) \in R$, případně pomocí kartézské souřadnice (x) ve tvaru $c : t \to c(t) = (x(t)) \in R$. Křivky v *R* si lze názorně představit jako **jednorozměrné pohyby částice**.

Příklad 1.3. Křivka $c_1 : t \to x(t) = v_0 \cdot t$, vyjadřuje rovnoměrný přímočarý pohyb částice po ose x konstantní rychlostí v_0. V čase $t = 0$ částice startuje z polohy $x = 0$ rychlostí v_0 a za stejné časové intervaly vždy urazí stejně dlouhé úseky.

Příklad 1.4. Křivka $c_2 : t \to x(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2$, vyjadřuje rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb částice po ose x s konstantním zrychlením a_0. V čase $t = 0$ částice startuje z polohy $x = 0$ s nulovou počáteční rychlostí, délka uražených úseků za stejné časové intervaly však rovnoměrně narůstá s dobou, která uplynula od začátku pohybu.

Příklad 1.5. Křivka $c_3 : t \to x(t) = A \sin t$, vyjadřuje harmonické kmitání částice po ose x kolem bodu $x = 0$ s periodou 2π a s maximální výchylkou $x = \pm A$. Částice neustále periodicky prochází polohami z intervalu $[-A, A]$.

Daleko názornější představu o křivkách v *R*, tedy o jednorozměrných pohybech poskytuje graf křivky, který vyjadřuje závislost okamžité polohy částice na čase. Připomeňme si, že **grafem křivky** $c : R \ni t \to c(t) \in R$ je zobrazení $\Gamma_c : R \ni t \to (t, c(t)) \in R^2$, které každému bodu $t \in R$ přiřadí uspořádanou dvojici $(t, c(t)) \in R^2$. Grafem křivky c v R^1 je tedy křivka Γ_c v R^2. Souřadnicové vyjádření grafu křivky c bude mít tvar $\Gamma_c : t \to (t, c(t)) = (t, q(t)) \in R^2$, nebo $\Gamma_c : t \to c(t) = (t, x(t)) \in R^2$.

Úkol : Načrtněte grafy křivek c_1, c_2, c_3 z předchozích příkladů 1.3., 1.4. a 1.5.

Graf Γ_c křivky c lze vhodně reprezentovat pomocí lokálního **řezu** γ **projekce** $\pi : R \times R \to R$, to znamená pomocí zobrazení $\gamma : R \to R \times R$ definované na otevřeném intervalu $I \subset R$, které splňuje podmínku $\pi \circ \gamma = \mathrm{id}_I$.

V extremálních úlohách vystupují také derivace hledaných křivek, proto musíme řezy prodlužovat. Zobrazení $J^1\gamma : R \to R \times R \times R$ definované vztahem

$$J^1\gamma(t) = (t, c(t), \dot{c}(t)) \quad \forall t \in I,$$

kde $\dot{c}$ je derivace křivky c, se nazývá **první prodloužení řezu** γ. Jestliže řez γ reprezentující graf Γ_c nějaké křivky c má souřadnicové vyjádření $\gamma : t \to (t, c(t)) = (t, q(t)) \in R^2$, pak jeho první prodloužení má souřadnicové vyjádření $J^1\gamma(t) = (t, q(t), \dot{q}(t))$, kde $\dot{q}(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$.

Klíčovým prvkem variačních úloh je Lagrangián, nebo-li Lagrangeova funkce. **Lagrangiánem prvního řádu** variačních úloh pro křivky v R rozumíme funkci $L : V \to R$, definovanou na otevřené množině $V \subset R^3$, tvaru $L(t, q, \dot{q})$, respektive tvaru $L(t, x, \dot{x})$.

Jelikož křivky v R mají pouze jednu složku $(q(t))$, respektive $(x(t))$, redukují se nutné a postačující podmínky pro extremály výše uvedených Lagrangiánů, tedy Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, pouze na jedinou rovnici tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0,$$

respektive tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0,$$

což je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu pro neznámou funkci $q(t)$, respektive $y(x)$, charakterizující hledanou křivku v R, případně její graf v R^2.

Z teorie diferenciálních rovnic víme, že obecné řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu závisí na dvou integračních konstantách, jinými slovy množina extremál je dvouparametrická. K určení konkrétní extremály je nutno dopočítat hodnoty těchto integračních konstant. K tomu jsou obvykle k dispozici dvě dodatečné podmínky. Většinou jde o zadání bodu, kterým má křivka (graf křivky) procházet a zadání jejího tečného vektoru v tomto bodě, jinými slovy v čase $t = t_0$ je zadána hodnota funkce $q(t_0) = q_0$, a hodnota rychlosti $\dot{q}(t_0) = v_0$, hovoříme o tzv. **počátečních podmínkách**.

Příklad 1.6. Uvažujme Lagrangián $L : R^3 \to R$, daný v kanonických souřadnicích $(t, q, \dot{q})$ vztahem

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2,$$

kde m je kladná konstanta. Tento Lagrangián má význam **kinetické energie** částice o hmotnosti m, která se pohybuje v jednorozměrném konfiguračním prostoru R.

Ze zadání je zřejmé, že L definuje variační problém pro **křivky v *R***, tedy pro zobrazení $c : R \ni t \to c(t) \in R$. Eulerovy-Lagrangeovy rovnice Lagrangiánu L proto bude tvořit jediná obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu. Jelikož funkce L nezávisí explicitně na proměnných t,q, tj. platí

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0,\ \ \frac{\partial L}{\partial q}=0,$$

má Eulerův-Lagrangeův výraz jednoduchý tvar

$$E(L)=-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\ddot{q}=-m\ddot{q}\,.$$

Eulerova-Lagrangeova rovnice je $-m\ddot{q}=0$, tj. $\ddot{q}=0$. Po dvojnásobné postupné integraci této rovnice dostaneme, že řešením jsou všechny lineární funkce

$$q(t)=c_1t+c_2,$$

kde c_1,c_2 jsou integrační konstanty. Vidíme, že **extremály** daného Lagrangiánu (grafy výše uvedených křivek) **jsou všechny přímky v rovině** R^2. Každé konkrétní řešení pak je určeno zadáním integračních konstant (volbou bodu, kterým přímka prochází a jejího směrového vektoru, tj. polohou $q(t_0)$ a rychlostí $\dot{q}(t_0)$ v čase t_0).

Uvedený variační problém popisuje pohyb volné částice (hmotného bodu, na nějž nepůsobí žádné vnější síly) o hmotnosti m s jedním stupněm volnosti.

Příklad 1.7. Uvažujme Lagrangián $L:R^3\to R$, daný v kanonických souřadnicích $(t,q,\dot{q})$ vztahem

$$L(t,q,\dot{q})=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-mgq,$$

kde m,g jsou kladné konstanty. Z předchozího příkladu víme, že první člen Lagrangiánu je kinetické energie částice o hmotnosti m, pohybující se po reálné přímce. Druhý člen, tedy výraz mgq, představuje **potenciální energii** částice v tíhovém poli ve výšce q, konstanta g označuje tíhové zrychlení.

Sestavíme Eulerovu-Lagrangeovu rovnici pro tento variační problém, to znamená vypočteme nejdříve parciální derivace

$$\frac{\partial L}{\partial q}=-mg,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q},$$

a totální derivaci

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\frac{d}{dt}(m\dot{q})=m\ddot{q}.$$

Eulerova-Lagrangeova rovnice má v tomto případě tvar

$$-mg-m\ddot{q}=0\text{, tj. }\ddot{q}=-g.$$

Jedná se opět o jednoduchou diferenciální rovnici druhého řádu, jejíž dvojnásobnou postupnou integrací dostaneme,

$$q(t)=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2,$$

kde c_1,c_2 jsou integrační konstanty. **Extremály** daného Lagrangiánu (grafy výše uvedených křivek) jsou určité **paraboly v rovině** R^2. Konkrétní řešení problému získáme vypočtením integračních konstant c_1, c_2 na základě zadaných hodnot $q(0) = q_0$ (počáteční výška, ve které se částice nachází) a $\dot{q}(t_0) = v_0$ (počáteční rychlost částice).

Jestliže počáteční rychlost částice $v_0 = 0,$ dostáváme

$$q(t) = q_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

což je křivka v R popisující volný pád částice s počáteční výšky q_0. Z této rovnice snadno určíme, za jak dlouho částice dopadne na vodorovnou rovinu, tzn. časový okamžik t_0, kdy $q(t_0) = 0,$ je dán známým vztahem $t_0 = \sqrt{\dfrac{2q_0}{g}}.$

Příklad 1.8. Uvažujme Lagrangián $L : R^3 \to R$, daný v kanonických souřadnicích $(t, q, \dot{q})$ vztahem

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} kq^2,$$

kde m,k jsou kladné konstanty. Opět se jedná o částici pohybující se v jednorozměrném konfiguračním prostoru R, tentokrát druhý člen v Lagrangiánu, tedy výraz $\frac{1}{2}kq^2$, představuje **potenciální energii pružnosti** v poloze q.

Eulerova-Lagrangeova rovnice bude mít tomto případě tvar

$$-kq - m\ddot{q} = 0\,,$$

nebo po úpravě

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0,$$

kde kladná konstanta $\omega^2 = \dfrac{k}{m}.$ Zde se jedná o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a s nulovou pravou stranou. Sestavíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

jejíž řešení tvoří dvojice komplexně sdružených vlastních čísel $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Bázi množiny všech řešení výše uvedené diferenciální rovnice tvoří funkce $q_1(t) = e^{i\omega t}$ a $q_2(t) = e^{-i\omega t}$.

Řešením naší variační úlohy však má být křivka v R, funkce $q_1(t), q_2(t)$ však nabývají komplexních hodnot a proto nejsou vhodné pro zápis řešení. Z tohoto důvodu volíme jinou bázi množiny všech řešení, a sice funkce

$$\overline{q}_1(t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \sin \omega t,$$

$$\overline{q}_2(t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \cos \omega t,$$

pomocí kterých pak má obecné řešení diferenciální rovnice $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ tvar

$$q(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Zavedeme-li místo integračních konstant C_1, C_2 vhodnější konstanty A, α pomocí vztahů $C_1 = A\cos\alpha$ a $C_2 = A\sin\alpha$, lze obecné řešení zapsat (užitím vzorce pro sinus součtu argumentů) ve tvaru

$$q(t) = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Extremály daného Lagrangiánu jsou tedy **sinusoidy v rovině** R^2 s periodou $\frac{2\pi}{\omega}$. Konkrétní řešení problému opět získáme určením integračních konstant A, α na základě zadaných hodnot $q(0) = q_0$ (počáteční poloha částice) a $\dot{q}(t_0) = v_0$ (počáteční rychlost částice).

Uvedený variační problém popisuje jednorozměrné harmonické kmitání částice kolem bodu $q = 0$ s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, amplitudou A a počáteční fází α.

Eulerova-Lagrangeova rovnice, což je obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu, se snadno řeší v případech, kdy v Lagrangiánu $L = L(t, q, \dot{q})$ se některá z proměnných nevyskytuje. V takových případech se dá jednoduše určit tzv. **první integrál**, to znamená funkce, která je konstantní podél řešení Eulerových-Lagrangeových rovnic. Pomocí prvního integrálu se pak Eulerova-Lagrangeova rovnice redukuje na diferenciální rovnici prvního řádu, kterou již pak je možné řešit různými integračními metodami. Mohou nastat následující význačné případy.

- **Lagrangián *L* nezávisí na proměnné *q*,** tedy $L = L(t, \dot{q})$.

V tomto případě $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$ a Eulerova-Lagrangeova rovnice se redukuje na tvar

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0,$$

odtud dostáváme první integrál

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = C_1,$$

kde C_1 je integrační konstanta. Z poslední rovnice lze principálně vypočítat $\dot{q}$, tzn.

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = f(t, C_1)$$

a následnou integrací dostaneme řešení $q(t)$.

- **Lagrangián *L* nezávisí explicitně na proměnné** *t*, tedy $L = L(q, \dot{q})$.

Eulerova-Lagrangeova rovnice zůstává formálně nezměněna

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$$

Vynásobíme-li jí $\dot{q}$, můžeme psát

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial q}-\dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\frac{dL}{dt}-\ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(L-\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=0,$$

což již dává první integrál

$$\left(L-\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=C_1.$$

V poslední rovnici však podle předpokladu nebude vystupovat proměnná *t*, můžeme proto vypočítat $\dot{q}$ jako funkci q

$$\dot{q}=\frac{dq}{dt}=f(q,C_1).$$

Jako další krok se zde nabízí separace proměnných nebo vhodná substituce.

- **Lagrangián *L* nezávisí explicitně na proměnné** *t*, **ani na proměnné** *q*, tedy $L=L(\dot{q})$.

S tímto případem jsme se již setkali při řešení Příkladu 1.6. Pro Lagrangián tvaru $L=L(\dot{q})$ tedy platí, že

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0,\ \ \frac{\partial L}{\partial q}=0,$$

a Eulerova-Lagrangeova rovnice získává jednoduchý tvar

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\ddot{q}=0.$$

Za předpokladu, že funkce $g(\dot{q})=\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\neq 0$, dostáváme nejjednodušší diferenciální rovnici 2. řádu $\ddot{q}=0$, jejíž řešením jsou všechny lineární funkce

$$q(t)=c_1 t+c_2,$$

kde c_1, c_2 jsou integrační konstanty.

Případ, kdy **Lagrangián *L* nezávisí na proměnné** $\dot{q}$, tedy $L=L(t,q)$ vede na nekorektně definované variační úlohy, ve kterých řešení obecně nemůže splnit počáteční podmínky. Skutečně, jestliže $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$, pak Eulerova-Lagrangeova rovnice se redukuje na tvar

$$\frac{\partial L(t,q)}{\partial q}=0,$$

což však není diferenciální rovnice, nýbrž analytická rovnice popisující nějakou množinu bodů v R^2, která obecně nemusí být grafem křivky v R a už vůbec nemusí splňovat počáteční podmínky.

Kontrolní úkol 1.2. Napište Eulerovu-Lagrangeovu rovnici Lagrangiánu L, který má tvar $L(t,q,\dot{q}) = M(t,q) + N(t,q)\cdot\dot{q}$, kde $M(t,q), N(t,q)$ jsou diferencovatelné funkce třídy C^1. Diskutujte, zda řešení této rovnice bude splňovat zadané počáteční podmínky.

1.6. Variační úlohy pro křivky v R^2

Jestliže křivky v R reprezentují pohyby částice v jednorozměrném konfiguračním prostoru R, budou křivky v R^2, tedy zobrazení $c: R \ni t \to c(t) \in R^2$, zřejmě popisovat pohyby částice ve dvojrozměrném konfiguračním prostoru R^2, to znamená **pohyby v rovině**. Souřadnicové vyjádření křivky c v R^2 bude zřejmě tvaru $c: t \to c(t) = (q^1(t), q^2(t)) \in R^2$, případně v kartézských souřadnicích (x, y) tvaru $c: t \to c(t) = (x(t), y(t)) \in R^2$.

Grafem křivky c v R^2 pak je křivka $\Gamma_c : R \ni t \to (t, c(t)) \in R^3$ v R^3, jejíž souřadnicové vyjádření bude mít tvar $\Gamma_c : t \to (t, c(t)) = (t, q^1(t), q^2(t)) \in R^3$, nebo v kartézských souřadnicích $\Gamma_c : t \to c(t) = (t, x(t), y(t)) \in R^3$.

Lagrangiánem prvního řádu pro tyto variační úlohy bude funkce $L: V \to R$, definovaná na otevřené množině $V \subset R \times R^2 \times R^2$ tvaru $L(t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2)$, případně tvaru $L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$.

Eulerovy-Lagrangeovy rovnice pro extremály výše uvedených Lagrangiánů budou dvě rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial q^1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial q^2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} = 0,$$

případně v kartézských souřadnicích

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^2} = 0.$$

Jedná se o dvě obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu pro dvě neznámé funkce $q^1(t), q^2(t)$, respektive $x(t), y(t)$, které určují hledanou křivku v R^2, případně její graf v R^3.

Řešení každé z těchto dvou diferenciálních rovnic bude záviset na dvou integračních konstantách. Celkově tedy bude množina extremál je čtyřparametrická. K určení konkrétní extremály, tzn. k určení těchto 4 integračních konstant potřebujeme 4 dodatečné podmínky. Většinou jde o zadání tzv. **počátečních podmínek**, dvě podmínky $q^1(t_0) = q_0^1$, $q^2(t_0) = q_0^2$ určují polohu částice v čase $t = t_0$ a další dvě podmínky $\dot{q}^1(t_0) = v_0^1$, $\dot{q}^2(t_0) = v_0^2$ určují složky vektoru počáteční rychlosti.

Úkol : Zopakujte si větu o implicitně určené funkci jedné proměnné.

Řešením výše uvedených Eulerových-Lagrangeových rovnic je tedy určitá křivka c v R^2, tedy zobrazení $c : t \to c(t) = (x(t), y(t)) \in R^2$. Někdy nás však zajímá pouze **obraz křivky *c*** v R^2 nebo-li **trajektorie** pohybu popsaného zobrazením c, což je množina bodů $Tr(c) = \{(x(t), y(t)) \in R^2, t \in R\}$, pro kterou se vžil název **rovinná křivka**. Množinu $Tr(c) \subset R^2$ lze tedy vyjádřit např. v kartézských souřadnicích (x, y) v R^2 pomocí parametrických rovnic

$$x = x(t)$$
$$y = y(t), t \in R.$$

Z těchto rovnic lze často eliminovat parametr t a vyjádřit rovinnou křivku $Tr(c)$ pomocí jedné rovnice $\Phi(x, y) = 0$, svazující x-ové a y-ové souřadnice bodů množiny $Tr(c)$. Za jistých předpokladů je možné lokálně, tzn. na okolí bodů množiny $Tr(c)$, rovinnou křivku $Tr(c)$ reprezentovat grafem určité diferencovatelné funkce $y = y(x)$, která je **implicitně určená** rovnicí $\Phi(x, y(x)) = 0$. To jinými slovy znamená, že obraz $Tr(c)$ křivky c v R^2, lze lokálně reprezentovat pomocí grafu $\Gamma_{c_0} : x \to c_0(x) = (x, y(x)) \in R^2$ nějaké křivky c_0 v R^1.

Zdůrazněme ovšem, že tato situace je specifická a platí pouze pro rovinné křivky, to znamená pro obrazy křivek v R^2. Prostorové křivky, tzn. obrazy křivek v R^3, nelze obecně reprezentovat pomocí grafů křivek v R^2.

Poznamenejme, že vyloučíme-li z parametrických rovnic rovinné křivky $Tr(c)$ parametr t, ztrácíme tím informaci o pohybu po křivce c. Z toho důvodu variační úlohy pro obrazy křivek v R^2, někdy nazýváme **variační úlohy pro trajektorie** v R^2.

Ke variačním úlohám pro trajektorie v R^2 lze tedy přistupovat jako k variačním úlohám pro křivky v R. Obrazy $Tr(c)$ křivek c v R^2, reprezentujeme pomocí grafů $\Gamma_{c_0} : x \to c_0(x) = (x, y(x))$ křivek c_0 v R^1. Lagrangiánem prvního řádu pro tyto úlohy bude funkce tvaru $L(x, y, y')$, kde $y' = \dfrac{dy}{dx}$ a Eulerova-Lagrangeova rovnice v těchto případech vypadá

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0.$$

Poznámka: Je evidentní, že ve variačních úlohách pro trajektorie v R^2 mají proměnné (x, y, y') (v tomto pořadí) zcela rovnocenné postavení jako proměnné $(t, q, \dot{q})$ ve variačních úlohách pro křivky v R. Všechny vztahy uvedené v notaci $(t, q, \dot{q})$, zvláště tvar prvních integrálů ve speciálních případech Lagrangiánů $L(t, q, \dot{q})$, platí ve stejném tvaru pro případ notace (x, y, y'), nahradíme li v nich odpovídající rovnocenné proměnné.

Vždy však musíme mít na paměti, že při značení derivací podle proměnné t užíváme „tečkovanou" notaci a při značení derivací podle proměnné x užíváme „čárkovanou" notaci. Takže např. totální derivace funkce $f(t, q, \dot{q})$ podle proměnné t se zapisuje

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\ddot{q},$$

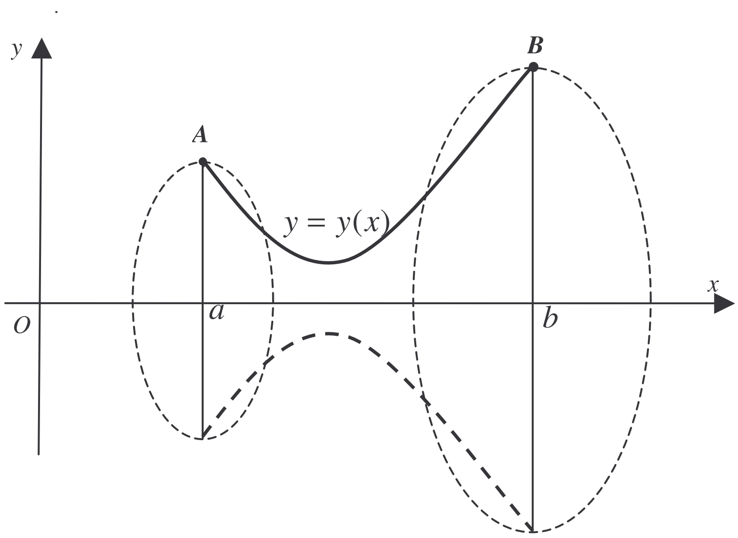
zatímco totální derivace funkce $f(x, y, y')$ podle odpovídající rovnocenné proměnné x má tvar

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''.$$

Řešení Eulerovy-Lagrangeovy rovnice zde dostáváme buď v **explicitním tvaru** $y = y(x, C_1, C_2)$ nebo v **implicitním tvaru** $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, nebo někdy také v **parametrickém tvaru** $x = x(C_1, C_2)$, $y = y(C_1, C_2)$. Řešení zde tedy stejně jako ve variačních úlohách pro křivky v R obsahuje dvě integrační konstanty. Na rozdíl od variačních úloh pro křivky v R se však v úlohách pro trajektorie v R^2 obvykle zadávají místo počátečních podmínek, tzv. **podmínky okrajové.** Jde o zadání dvou bodů, kterými má rovinná křivka $Tr(c)$, čili trajektorie křivky c procházet, jinými slovy jsou zadány hodnoty funkce $y(x)$ v krajních bodech intervalu $I = (a, b)$, tzn. $y(a) = y_1, y(b) = y_2$.

Příklad 1.9. (Minimální rotační plocha)

Nechť $(x, y(x))$ je rovinná křivka, která je grafem funkce $y(x)$. Nechť tato křivka prochází body $A(a, y_A)$ a $B(b, y_B)$. Uvažujme rotační plochu vzniklou rotací této křivky kolem osy x. Ze všech v úvahu přicházejících křivek určete tu, pro kterou je obsah odpovídající rotační plochy minimální.



Obr.7

Řešení: Obsah rotační plochy vzniklé rotací grafu funkce $y(x)$ kolem osy x v mezích $x = a$ a $x = b$ je určen integrálem

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

kde $\sqrt{1+y'^2}\,dx$ je infinitesimální element délky oblouku rovinné křivky $y = y(x)$. Tento integrál má tedy roli funkce akce v této úloze a Lagrangiánem je zde funkce $L = y\sqrt{1+y'^2}$. Množina všech v úvahu přicházejících rovinných křivek je tvořena grafy diferencovatelných funkcí třídy C^1 procházejících zadanými body.

Ze struktury Eulerovy-Lagrangeovy rovnice je zřejmé, že konstantu 2π můžeme vypustit, resp. celou rovnici pak vydělit 2π. Lagrangian nezávisí explicitně na proměnné *x*, existuje tedy první integrál Eulerovy-Lagrangeovy rovnice ve tvaru

$$L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} = C_1,$$

což po dosazení našeho Lagrangiánu dává

$$y\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

a po úpravě

$$y = C_1\sqrt{1+y'^2}.$$

Tuto diferenciální rovnici budeme řešit separací proměnných. Rovnici nejdříve umocníme na druhou a vyjádříme y'

$$y' = \frac{1}{C_1}\sqrt{y^2 - C_1^2}.$$

Provedeme separaci proměnných a integrujeme

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2 - 1}} y' = \int dx.$$

Po integraci dostáváme rovnici

$$C_1 \operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{y}{C_1}\right) = x + C_2,$$

ze které vyjádříme explicitní závislost $y = y(x)$

$$y(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x+C_2}{C_1}\right).$$

Křivky, které jsou grafy takových funkcí se nazývají **řetězovky**. Hodnoty integračních konstant C_1, C_2 stanovíme na základě okrajových podmínek $y(a) = y_A$ a $y(b) = y_B$.

Poznámka: Název řetězovka je odvozen od jiné variační úlohy, která vede ke stejnému řešení. Jedná se o rovnováhu těžkého vlákna zavěšeného na dvou koncích. Vlákno se vlivem vlastní tíhy prohne právě do tvaru řetězovky.

Poznámka: Rotací řetězovek vznikají jediné minimální plochy, které se nazývají **katenoidy**. Z geometrického hlediska je katenoid plochou nulové střední křivosti, to znamená, že v každém jejím bodě se poloměry křivosti dvou k sobě kolmých normálových řezů liší jen znaménkem.

Příklad 1.10. Mezi všemi přípustnými rovinnými křivkami, které procházejí body $A(1,3)$ a $B(2,1)$, nalezněte tu která je extremálou funkce akce

$$S=\int_1^2 y'(1+x^2y')dx.$$

Řešení: Lagrangian v tomto případě nezávisí na proměnné y, tzn. $\frac{\partial L}{\partial y}=0$, Eulerova-Lagrangeova rovnice je tedy tvaru $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}=0$, takže máme první integrál tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial y'}=1+2x^2y'=C_1,\ \text{neboli}\ y'=\frac{C_1-1}{2x^2},$$

a následnou integrací získáváme množinu extremál v explicitním tvaru

$$y(x)=-\frac{(C_1-1)}{2x}+C_2.$$

Z okrajových podmínek $y(1)=3, y(2)=1$ dostáváme soustavu rovnic pro integrační konstanty C_1, C_2

$$-\frac{1}{2}(C_1-1)+C_2=3,$$
$$-\frac{1}{4}(C_1-1)+C_2=1,$$

jejíž řešením jsou hodnoty $C_1=-7$ a $C_2=-1$. Hledanou extremálou je graf funkce $y(x)=\frac{4}{x}-1$, tedy hyperbola. Načrtněte její graf.

Příklad 1.11. Mezi všemi přípustnými rovinnými křivkami, které procházejí body $A(0,1)$ a $B(2\pi,1)$, nalezněte tu která je extremálou funkce akce

$$S=\int_0^{2\pi}(y'^2-y^2)dx.$$

Řešení: Lagrangian je v tomto případě tvaru $L(x,y,y')=(y'^2-y^2)$. Sestavíme Eulerovu-Lagrangeovu rovnici, která bude mít tvar

$$-2y-2y''=0,\ \text{resp.}\ y+y''=0,$$

Jedná o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a s nulovou pravou stranou. . Sestavíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

jejíž řešení tvoří dvojice komplexně sdružených vlastních čísel $\lambda_{1,2} = \pm i.$ Bázi množiny všech řešení výše uvedené diferenciální rovnice tvoří funkce $y_1(x) = e^{ix}$ a $y_2(x) = e^{-ix}$.

Řešením naší variační úlohy však má být rovinná křivka v R^2, funkce $y_1(x), y_2(x)$ však nabývají komplexních hodnot a proto nejsou vhodné pro zápis řešení. Z tohoto důvodu volíme jinou bázi množiny všech řešení, a sice funkce

$$\bar{y}_1(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sin x,$$

$$\bar{y}_2(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x,$$

pomocí kterých pak má obecné reálné řešení diferenciální rovnice $y'' + y = 0$ tvar

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Z okrajových podmínek $y(0) = 1, y(2\pi) = 1$ obdržíme soustavu rovnic pro integrační konstanty C_1, C_2, která bude mít v tomto případě nekonečně mnoho řešení. Pro integrační konstantu C_2 dostaneme z obou rovnic, že $C_2 = 1$, zatímco integrační konstanta C_1 nevystupuje v žádné z těchto rovnic a může být tedy zřejmě libovolná. Tato variační úloha tedy má za daných okrajových podmínek nekonečně mnoho řešení tvaru

$$y(x) = C_1 \sin x + \cos x,$$

kde C_1 je libovolné reálné číslo.

Příklad 1.12. Nalezněte extremálu funkce akce

$$S = \int_a^b ((2xy + (x^2 + e^y)\, y')dx$$

při zadaných okrajových podmínkách $y(a) = y_A$ a $y(b) = y_B$.

Řešení: Lagrangian je v tomto případě tvaru $L(x, y, y') = 2xy + (x^2 + e^y)\, y'$. Vypočteme parciální derivace

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x + e^y y', \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = e^y, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = e^y y'$$

a sestavíme Eulerovu-Lagrangeovu rovnici, která bude mít tvar

$$2x + e^y y' - e^y y' = 0, \text{ tedy } \; x = 0\,.$$

Přímka $x = 0$ však nesplňuje okrajové podmínky.

Upravíme-li Lagrangián $L(x, y, y')$ následujícím způsobem

$$L(x, y, y') = 2xy + (x^2 + e^y)\, y' = 2xy + (x^2 + e^y)\frac{dy}{dx} = 2xydx + (x^2 + e^y)dy,$$

zjišťujeme, že se jedná diferenciální formu $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ v R^2, kde $M(x, y) = 2xy$ a $N(x, y) = (x^2 + e^y)$, která je uzavřená, neboť splňuje podmínku integrability

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x.$$

Lokálně lze tedy Lagrangián $L(x, y, y')$ vyjádřit jako totální diferenciál nějaké funkce $F(x, y)$. Důsledkem toho je pak fakt, že hodnota funkce akce $S = \int_a^b 2xydx + (x^2 + e^y)dy = F(b, y_B) - F(a, y_A)$, je konstantní a tedy nezávisí na křivce spojující zadané body (a, y_A) a (b, y_B). Tato variační úloha proto nemá smysl.

Kontrolní úkoly

Kontrolní úkol 1.3. Nalezněte extremálu funkce akce

$$S = \int_1^2 (y' - 2xy)dx$$

při zadaných okrajových podmínkách $y(1) = 0$ a $y(2) = -1$.

Kontrolní úkol 1.4. Nalezněte extremálu funkce akce

$$S = \int_0^1 (y'^2 + y)dx$$

při zadaných okrajových podmínkách $y(0) = 0$ a $y(1) = 1$.

Kontrolní úkol 1.5.. Nalezněte extremálu funkce akce

$$S = \int_0^2 (y'^2 + y'^3)dx$$

při zadaných okrajových podmínkách $y(0) = 0$ a $y(2) = 1$.

1.7. Triviální a ekvivalentní Lagrangiány

Příklad 1.13. Uvažujme Lagrangiány $L_1, L_2 : R^3 \to R$, kde

$$L_1 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2, L_2 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + q + t\dot{q}.$$

Z Příkladu 1.6. víme, že Eulerův-Lagrangeův výraz Lagrangiánu L_1 má tvar $E(L_1) = -m\ddot{q}$. Pro Eulerův-Lagrangeův výraz Lagrangiánu L_2 dostáváme

$$E(L_2) = \frac{\partial L_2}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} = 1 - \frac{d}{dt}\left(m\dot{q} + t\right) = 1 - m\ddot{q} - 1 = -m\ddot{q} = E(L_1).$$

Vidíme, že ačkoli **Lagrangiány L_1, L_2 jsou různé**, jejich **Eulerovy-Lagrangeovy výrazy jsou si rovny**. V důsledku toho oba Lagrangiány mají stejnou množinu extremál. Všimněme si také, že pro jejich rozdíl $L_0 = L_2 - L_1 = q + t\dot{q}$ platí

$$E(L_0) = 0,$$

tedy **Eulerův-Lagrangeův výraz Lagrangiánu L_0 je identicky nulový**.

Uvedený příklad ukazuje, že
- existují nenulové Lagrangiány, jejichž Eulerovy-Lagrangeovy výrazy jsou rovny nule,
- různé Lagrangiány mohou mít stejné Eulerovy-Lagrangeovy výrazy.

Všimneme si těchto Lagrangiánů blíže.

Definice 1.9. Lagrangián L se nazývá **triviální**, jestliže

$$E_i(L) = 0, \quad 1 \le i \le m,$$

tj. jeho Eulerovy-Lagrangeovy výrazy jsou rovny nule. Lagrangiány L_1, L_2 se nazývají **ekvivalentní**, jestliže

$$E_i(L_1) = E_i(L_2), \quad 1 \le i \le m,$$

tj. jejich Eulerovy-Lagrangeovy výrazy jsou si rovny.

Relace „Lagrangiány L_1, L_2 jsou ekvivalentní" je evidentně relace ekvivalence. Zapisujeme ji ve tvaru

$$L_1 \sim L_2.$$

Přímo z definice je zřejmé, že triviální a ekvivalentní Lagrangiány mají tyto vlastnosti:
- Je-li L_0 triviální Lagrangián, pak pro každý Lagrangián L platí $L \sim L + L_0$.
- Eulerovy-Lagrangeovy rovnice triviálního Lagragiánu jsou triviální - mají tvar $0 = 0$, jejich řešením je tedy **každý** řez γ projekce $\pi : R \times R^m \to R$.
- Ekvivalentní Lagrangiány mají stejnou množinu extremál.

Dále snadno ukážeme, že platí:

Věta 1.3. Dva Lagrangiány jsou ekvivalentní právě tehdy, když jejich rozdílem je triviální Lagrangián.

Důkaz. Nechť $L_1 \sim L_2$, tedy $E_i(L_1) = E_i(L_2)$ pro $1 \le i \le m$. Pak pro všechny hodnoty indexu i

$$E_i(L_2 - L_1) = \frac{\partial (L_2 - L_1)}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial (L_2 - L_1)}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L_2}{\partial q^i} - \frac{\partial L_1}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^i}$$
$$= \frac{\partial L_2}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^i} - \left(\frac{\partial L_1}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^i}\right) = E_i(L_2) - E_i(L_1) = 0,$$

což znamená, že $L_2 - L_1$ je triviální Lagrangián.

Obráceně, je-li $L_2 - L_1$ triviální Lagrangián, tedy platí-li $E_i(L_2 - L_1) = 0$ pro $1 \le i \le m$, dostáváme stejným výpočtem jako výše, že $E_i(L_2) - E_i(L_1) = 0$, tj. $E_i(L_1) = E_i(L_2)$ pro $1 \le i \le m$. To ale znamená, že $L_1 \sim L_2$. ♦

Věta 1.4.

Lagrangián $L : R \times R^m \times R^m \to R$ je triviální právě tehdy, když existuje funkce $f : R \times R^m \to R$ taková, že L je její totální derivací, tj. platí

$$L = \frac{df}{dt}.$$

Lagrangiány $L_1, L_2 : R \times R^m \times R^m \to R$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když existuje funkce $f : R \times R^m \to R$ taková, že

$$L_2 = L_1 + \frac{df}{dt}.$$

Důkaz. Nechť $L = df/dt$ pro nějakou funkci $f : R \times R^m \to R$. Určíme Eulerovy-Lagrangeovy výrazy tohoto Lagrangiánu. Jelikož podle předpokladu f je funkce proměnných (t, q^i), má její totální derivace tvar

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^j}\dot{q}^j.$$

Proto platí pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q^i},$$

a dále

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\frac{df}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^j = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\right)\dot{q}^j = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q^i},$$

což znamená, že pro všechna i operátory d/dq^i a d/dt komutují. Dosazením do Eulerových-Lagrangeových výrazů nyní snadno získáme

$$E_i\left(\frac{df}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{df}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{df}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial q^i}\frac{df}{dt}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q^i}=0, \quad 1\le i\le m.$$

Tedy $L=df/dt$ je triviální Lagrangián.

Důkaz obráceného tvrzení je obtížný a vyžaduje znalosti přesahující možnosti tohoto textu. Odložíme jej do druhé části přednášky, kde se budeme zabývat variační analýzou na varietách. ♦

Poznámka. Všimněme si, jaký tvar má **funkce akce S pro triviální Lagrangián**. Je-li $L=df/dt$, pak pro každé $\gamma\in\Gamma_{[a,b]}(\pi)$,

$$S(\gamma)=\int_a^b (L\circ J^1\gamma)dt=\int_a^b\left(\frac{df}{dt}\circ J^1\gamma\right)dt=\int_a^b\left(\frac{d(f\circ J^1\gamma)}{dt}\right)dt$$

$$=\int_a^b d(f\circ J^1\gamma)=(f\circ J^1\gamma)(b)-(f\circ J^1\gamma)(a)=f((J^1\gamma)(b))-f((J^1\gamma)(a)),$$

tedy $S(\gamma)$ závisí pouze na hodnotách, které řez γ (přesněji jeho prodloužení) nabývá v **koncových** bodech intervalu $[a,b]$. Proto pro každou deformaci $\{\gamma_u\}$ řezu γ **s pevnými konci**, je složená funkce

$$u\to\int_a^b (L\circ J^1\gamma_u)\,dt=f(J^1\gamma_u(b))-f(J^1\gamma_u(a))$$

konstantní, a tedy její derivace v bodě $u=0$ (což je **variace δS funkce akce S**) **je rovna nule**.

1.8. Úloha o brachystochroně

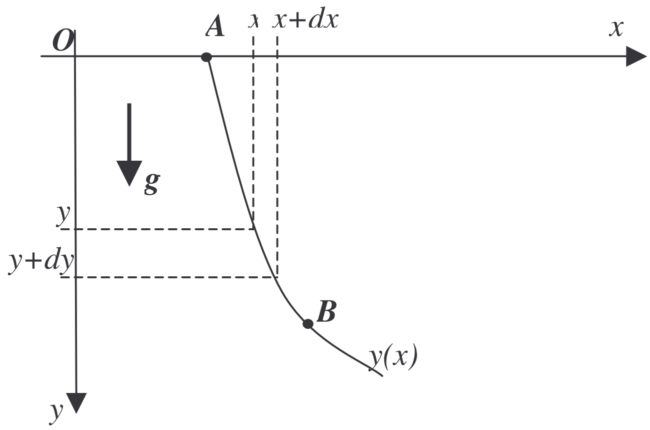
Jak již bylo zmíněno v historickém přehledu, při zrodu variačního počtu stála úloha o brachystochroně. Úlohu zformuloval v roce 1696 Johann Bernoulli. Šlo v ní **o nalezení takové křivky spojující dva zadané body A a B, po níž se těleso nebo částice působením vlastní tíhy dostane z výchozího bodu do koncového bodu v co nejkratší době.** Jedná se o přímou aplikací Fermatova principu nejkratší doby v mechanice.

Je zřejmé, že hledanou čarou není úsečka spojující body A a B,, přestože je nejkratší spojnicí dvou bodů. Při pohybu po přímce se bude rychlost částice sice zvětšovat ale poměrně pomalu. Spojíme-li však uvažované body křivkou, která je v porovnání s úsečkou AB zpočátku strmější, prodlouží se sice dráha, částice však proběhne větší část této dráhy s větší rychlostí. Mezi řešiteli této úlohy byl kromě Johanna Bernoulliho, Leibniz, Newton, Jakob Bernoulli a l´Hospital.

V tomto odstavci si nyní úlohu přesně zformulujeme a vyřešíme.

Ve svislé rovině nechť je zaveden kartézský souřadnicový systém Oxy, přičemž osa x nechť je vodorovná a osa y nechť směřuje svisle dolů. Nalezněte takovou křivku spojující zadané body $A(x_1,0)$ a $B(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$, $y_2 > 0$), aby se částice vypuštěná z bodu A pohybující se v tíhovém poli po této křivce dostala do bodu B v co nejkratší době. (Viz obrázek.) Tření a odpor vzduchu zanedbáváme.

Nejdříve odvodíme funkci akce pro tuto úlohu. Předpokládejme, že hledaná křivka je vyjádřena explicitně ve tvaru $y = y(x)$. Dále, zvolíme-li osu x za nulovou hladinu potenciální energie, máme pro **potenciální energii** vyjádření $V = -mgy$, kde m je hmotnost částice a g je tíhové zrychlení. **Kinetická energie** částice je určena známým vztahem $T = \frac{1}{2}mv^2$, kde v je okamžitá rychlost částice.



Obr. 8

Ve výchozím bodě A na ose x je tedy nulová potenciální energie. Také počáteční rychlost v a tedy i kinetická energie částice v bodě A je nulová, takže ze **zákona zachování energie** dostáváme, že v průběhu celého pohybu platí vztah

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0.$$

Odtud pro **rychlost částice** v bodě o souřadnicích (x, y)

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Vidíme tedy, že rychlost částice při volném pohybu v tíhovém poli tedy nezávisí na tvaru křivky $y = y(x)$, ale závisí pouze na souřadnici y.

Rychlost částice lze však určit také z definičního vztahu

$$v = \frac{ds}{dt},$$

kde ds je element oblouku křivky, který částice „opíše“ za infinitesimální časový interval dt. Pro element oblouku křivky $y = y(x)$ platí $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$, kde $y' = \frac{dy}{dx}$ je derivace funkce $y(x)$ podle proměnné x. Vyjádříme- li z rovnice

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{dt} = \sqrt{2gy}$$

infinitesimální časový interval dt, dostáváme

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx.$$

Integrací této rovnice pak získáme vztah pro celkovou dobu τ pohybu částice po křivce z bodu A do bodu B

$$\tau = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Naším úkolem nyní bude najít nejkratší dobu τ, to znamená minimalizovat tento integrál. Tento integrál tedy představuje **funkci akce** v úloze o brychystochroně. Roli Lagrangiánu zde má funkce $L(x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$, kde $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ je konstanta, která jak uvidíte, nemá podstatný význam, proto je možné jí vypustit přímo Lagrangiánu.

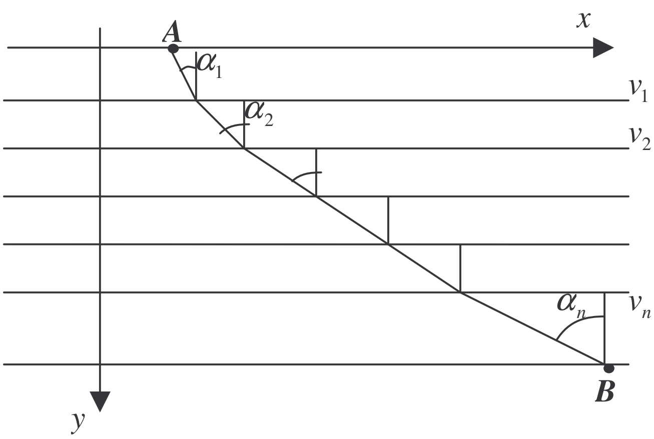
Úkol: Napište Eulerovu-Lagrangeovu rovnici tohoto Lagrangiánu.

Jelikož Eulerova-Lagrangeova rovnice pro tuto úlohu je dosti komplikovaná diferenciální rovnice 2. řádu, uvedeme zde elegantní řešení Johanna Bernoulliho založené na **analogii s lomem světla**, které vede na diferenciální rovnici 1. řádu.

Podle Fermatova principu nejkratší doby dostaneme totiž přesně tutéž úlohu, jestliže budeme zkoumat trajektorii světla v nehomogenním rovinném prostředí, kde rychlost v bodě (x, y) je rovna $v = \sqrt{2gy}$. Rozdělíme-li prostředí na tenké paralelní vrstvy, ve kterých považujeme rychlost za konstantní a rovnou v_i, $i = 1,2,\ldots$ (viz obrázek), pak při průchodu paprsku dochází k sérií lomů na rozhraních dvou po sobě následujících vrstev. Pro každý z těchto lomů platí Snellův zákon

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \ldots = \frac{\sin \alpha_i}{v_i} = const,$$

kde α_i jsou úhly dopadu paprsku měřené od kolmice k rozhraní.

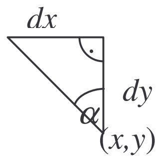


Obr. 9

Přechodem k limitě při zjemňování dělení na vrstvy dostaneme

$$\frac{\sin \alpha(x)}{v(x)} = const,$$

kde $v(x)=\sqrt{2gy(x)}$ a $\alpha(x)$ je úhel mezi tečnou křivky $y(x)$ v bodě $(x,y(x))$ a osou y. Z následujícího obrázku je vidět, že $\sin\alpha(x)=dx\big/\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=1\big/\sqrt{1+(y'(x))^2}$.



Obr. 10

Diferenciální rovnice brachystochrony má tedy tvar

$$\sqrt{1+(y'(x))^2}\sqrt{y}=C,$$

kde C je konstanta.

Poznámka: Připomeňme, že funkce, která je konstantní podél řešení Eulerových-Lagrangeových rovnic se nazývá **první integrál**. V úloze o brachystochroně je tedy prvním integrálem funkce $\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}$. K tomuto prvnímu integrálu lze dospět i z faktu, že Lagrangián této úlohy $L(x,y,y')=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ nezávisí explicitně na proměnné x, v takovém případě pak mají příslušné Eulerovy-Lagrangeovy rovnice první integrál ve tvaru $L-y'\dfrac{\partial L}{\partial y'}$, jehož úpravou bychom dostali $\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}=C$.

Umocníme-li obě strany poslední rovnice na druhou dostáváme

$$(1+y'^2)y=2C_1,$$

kde na pravé straně jsme zavedli vhodnější zápis konstanty $C^2=2C_1$.
Jedná se o implicitní diferenciální rovnici 1.řádu, která se obvykle řeší metodou zavedení parametru. Zde je vhodné položit $y'=\cot g\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$, kde φ je parametr. Rovnice pak přechází na tvar

$$y=\frac{2C_1}{1+y'^2}=\frac{2C_1}{1+\cot g^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}=2C_1\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)=C_1(1-\cos\varphi),$$

kde u poslední rovnosti jsme použili vzorec pro sinus polovičního argumentu. Derivací získaného parametrického vyjádření $y(\varphi)$ podle proměnné φ, máme $\dfrac{dy}{d\varphi}=C_1\sin\varphi$. Dále uplatníme vztah $\cot g\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)=y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\varphi}d\varphi}{dx}$, ze kterého vyjádříme diferenciál dx :

$$dx = \frac{\frac{dy}{d\varphi}d\varphi}{\cot g\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{C_1 \sin\varphi}{\cot g\left(\frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi = \frac{2C_1 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cot g\left(\frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi = 2C_1 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = C_1(1-\cos\varphi)d\varphi.$$

Po integraci pak dospíváme k parametrické závislosti $x = x(\varphi)$:

$$x = C_1(\varphi - \sin\varphi) + C_2,$$

kde C_2 je integrační konstanta. Takže celkem dostáváme vztahy

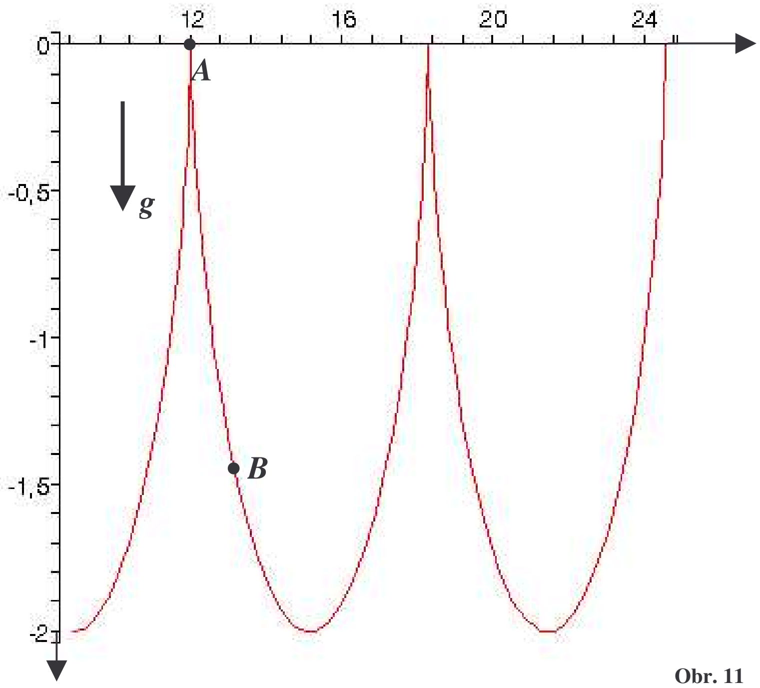
$$x = C_1(\varphi - \sin\varphi) + C_2,$$
$$y = C_1(1-\cos\varphi),$$

což jsou parametrické rovnice **cykloidy**, která je znázorněna na obrázku níže. Tímto je úloha principiálně vyřešena.

Pro určení integračních konstant C_1, C_2 využijeme zadané souřadnice výchozího bodu $A(x_1, 0)$ a koncového bodu $B(x_2, y_2)$. Integrační konstantu C_2 určíme snadno: dosazením za $\varphi = 0$ do první parametrické rovnice máme $C_2 = x_1$. Určení integrační konstanty C_1 však již je numerický problém, neboť musíme řešit **soustavu transcendentních rovnic**

$$C_1(\varphi - \sin\varphi) = x_2 - x_1,$$
$$C_1(1-\cos\varphi) = y_2,$$

jejichž řešení dokážeme najít pouze přibližně.



Obr. 11

Poznámka: Řešení úlohy o brachystochroně jasně ukázalo, že mechanické pohyby se budou řídit **jiným principem než principem nejkratší doby** a to z toho důvodu, že ve skutečnosti se částice v tíhovém poli za žádných podmínek nepohybuje po cykloidě.

1.9. Pohybové rovnice mechanického systému

Podle Fermatova variačního principu si světelný paprsek ze všech možných trajektorií mezi dvěma body vždy vybírá právě tu, podél které se dostane z výchozího bodu do cílového bodu za nejkratší dobu. Tento princip inspiroval mnohé vědce k hypotéze, podle které každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina je během procesu minimální. Dlouho se však nevědělo, která veličina to má přesně být. Problém brachystochrony ukázal, že v mechanice onou veličinou rozhodně nemůže být čas. Teprve v roce 1760 Lagrange poprvé přesně zformuloval **princip nejmenší akce** pro uzavřené mechanické systémy a vymezil platnost tohoto principu. Tento princip je jedním ze základních postulátů, na nichž stojí moderní fyzika. Pro mechanické systémy (hmotné body, tuhá tělesa) jej lze formulovat takto:

Skutečný pohyb uzavřeného mechanického systému probíhá po extremálách Lagrangiánu

$$L = T - V,$$

kde T je kinetická a V je potenciální energie systému.

Kinetická energie T je definovaná vztahem

$$T = \frac{1}{2} M g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j ,$$

kde M je zpravidla kladná konstanta (má význam hmotnosti systému) a g_{ij}, $1 \le i, j \le m$, jsou funkce proměnných $(q^1, \ldots, q^m)$. Číslo m charakterizuje **počet stupňů volnosti** mechanického systému a proměnné $(q^1, \ldots, q^m)$ se nazývají **zobecněné souřadnice** (mohou to být i jiné, než kartézské souřadnice, definované na otevřené podmnožině v R^m; v tom případě se ve fyzice hovoří o **křivočarých souřadnicích**). Funkce g_{ij}, $1 \le i, j \le m$, jsou komponenty **metrického tenzoru** g. V klasické mechanice se předpokládá, že na R^m je dán **Euklidův metrický tenzor**, jehož komponenty *v kartézských souřadnicích* mají v každém bodě tvar

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \ne j \end{cases}, \qquad 1 \le i, j \le m.$$

Potenciální energie V je obecně funkce na otevřené podmnožině v R^m, může tedy záviset na proměnných $(t, q^i, \dot{q}^i)$; nejčastěji se ale předpokládá ve tvaru $V(q^i)$, tedy, že nezávisí na čase ani na rychlostech.

Je-li $V = 0$, tj. $L = T$, hovoříme o **volném mechanickém systému**, ve speciálním případě o **volné částici**.

Určíme **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice** Lagrangiánu $L = T - V$, tedy **pohybové rovnice** mechanického systému s kinetickou energií T a potenciální energií $V = V(q^i)$ v kartézských i v obecných „křivočarých" souřadnicích na R^m.

V *kartézských souřadnicích*, které v souladu se zvyklostmi ve fyzice označíme $(t, x^1, \ldots, x^m, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^m)$, má Lagrangián L tvar

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \delta_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l - V(x^1, \ldots, x^m) = \frac{1}{2} M \sum_{k=1}^{m} (\dot{x}^k)^2 - V(x^1, \ldots, x^m),$$

což znamená, že funkce T závisí pouze na rychlostech $(\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^m)$. Eulerovy-Lagrangeovy výrazy jsou proto funkce

$$E_i(L) = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial V}{\partial x^i} = -\frac{d}{dt}\left(M\dot{x}^i\right) - \frac{\partial V}{\partial x^i} = -M\ddot{x}^i - \frac{\partial V}{\partial x^i}, \quad 1 \le i \le m.$$

Dostáváme tak Eulerovy-Lagrangeovy rovnice pro extremály uvažovaného Lagrangiánu, které zapíšeme ve tvaru

$$M\ddot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}, \quad 1 \le i \le m.$$

Pohybové rovnice v kartézských souřadnicích jsou tedy **Newtonovy rovnice**

$$M\ddot{x}^i = F^i, \quad 1 \le i \le m,$$

neboli $M\vec{a} = \vec{F}$, kde síla $\vec{F}$ na pravé straně je **„potenciálová"** (její komponenty F^i, $1 \le i \le m$, jsou určeny jako (záporně vzaté) „derivace potenciálu V", $F^i = -\partial V / \partial q^i$).

Zvolíme-li na $R \times R^m$ *obecné souřadnice* $(t, q^1, \dots, q^m)$, má Lagrangián tvar

$$L = T - V = \frac{1}{2} M\, g_{kl}(q^1,\dots,q^m)\dot{q}^k \dot{q}^l - V(q^1,\dots,q^m).$$

Počítejme Eulerovy-Lagrangeovy výrazy:

$$\begin{aligned}
E_i(L) &= \frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial V}{\partial q^i} = \frac{1}{2} M \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i}\dot{q}^k\dot{q}^l - \frac{d}{dt}\left(M g_{il}\dot{q}^l\right) - \frac{\partial V}{\partial q^i} \\
&= M\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial q^k}\right)\dot{q}^k\dot{q}^l - M g_{il}\ddot{q}^l - \frac{\partial V}{\partial q^i} \\
&= -M\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^k\dot{q}^l - M g_{il}\ddot{q}^l - \frac{\partial V}{\partial q^i}, 1 \le i \le m,
\end{aligned}$$

kde v prvním sčítanci jsme provedli rozklad na symetrickou a antisymetrickou část v indexech k, l a využili jsme skutečnosti, že stopa součinu antisymetrické a symetrické matice je rovna nule: $b_{kl}c^{lk} = 0$, je-li $b_{ij} = -b_{ji}$ a $c^{ij} = c^{ji}$ pro všechny hodnoty indexů i, j (v našem výpočtu zřejmě $b_{kl} = \frac{1}{2}(\partial g_{ik}/\partial q^l - \partial g_{il}/\partial q^k)$ a $c^{kl} = \dot{q}^k\dot{q}^l$). **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice** tedy můžeme psát ve tvaru

$$M g_{il}\ddot{q}^l + M\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^k\dot{q}^l = -\frac{\partial V}{\partial q^i}, \quad 1 \le i \le m,$$

nebo zavedeme-li s pomocí inverzní matice (g^{ij}) k matici (g_{ij}) funkce

$$\Gamma^i_{kl} = g^{ip}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{pl}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^p}\right), \qquad 1 \le i,k,l \le m,$$

které se nazývají **Christoffelovy symboly**, v přehlednějším tvaru

$$Mg_{ip}(\ddot{q}^p + \Gamma^p_{kl}\dot{q}^k\dot{q}^l) = -\frac{\partial V}{\partial q^i}, \quad 1 \le i \le m.$$

Opět se tedy jedná o Newtonovy rovnice (rovnice typu $M\vec{a} = \vec{F}$), kde ale tentokrát „síla $\vec{F}$" je součtem potenciálové síly a výrazu, který vzniká díky tomu, že v uvažovaných souřadnicích jsou komponenty metrického tenzoru g nekonstantní funkce.

Výše odvozené pohybové rovnice mechanického systému se v případě **volného systému** (**volné částice**) redukují na tyto rovnice:

- *v kartézských souřadnicích*

$$\ddot{x}^i = 0, \; 1 \le i \le m,$$

(tedy systém se pohybuje konstantní rychlostí po přímce $x(t) = c_1(t) + c_2$);

- *v obecných souřadnicích*

$$g_{il}\ddot{q}^l + \Gamma_{ikl}\dot{q}^k\dot{q}^l = 0, \; 1 \le i \le m.$$

což jsou **rovnice pro geodetiky** v prostoru R^m s metrickým tenzorem g. Jak je zřejmé z vyjádření těchto rovnic v kartézských souřadnicích, v případě Euklidova metrického tenzoru jsou jejich řešení (tj. geodetiky) přímky v R^m.

Úkol. Ověřte, že skutečně platí, že stopa součinu antisymetrické a symetrické matice je rovna nule.

Řešení. Uvažujme antisymetrickou čtvercovou matici $B = (b_{ij})$ řádu n (tj. $B = -B^T$, neboli $b_{ij} = -b_{ji}$ pro $1 \le i, j \le n$) a symetrickou čtvercovou matici $C = (c^{ij})$ řádu n (tj. $C = C^T$, neboli $c^{ij} = c^{ji}$ pro $1 \le i, j \le n$). Součin $A = BC$ je definován jako matice, jejíž prvky mají tvar $a_i^j = b_{ik}c^{kj}$ pro $1 \le i, j \le n$, stopa této matice pak je součet prvků na diagonále, tj. číslo $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_i^i = b_{ik}c^{ki}$. Využijeme-li v tomto vztahu antisymetričnosti matice B a symetričnosti matice C, dostaneme: $b_{ik}c^{ki} = -b_{ki}c^{ik}$. Jelikož přes oba indexy se sčítá v mezích od 1 do n, stojí na pravé straně rovnosti stejné číslo, jen s opačným znaménkem, jako na levé straně. To ovšem znamená, že toto číslo je rovno nule, tj. že $\operatorname{Tr} A = b_{jl}c^{lj} = 0$.

Korespondenční úkol 1

Vyřešte alespoň jednu z následujících tří úloh, vypracujte protokol s podrobným postupem řešení a výsledkem. Tento protokol pak zašlete ke kontrole vedoucímu kurzu v termínu stanoveném harmonogramem studia.

1. Nalezněte extremálu funkce akce

$$S = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x}dx$$

při zadaných okrajových podmínkách $y(0) = 0$ a $y(1) = e^{-1}$.

2. Nalezněte rovinnou křivku na níž se realizuje extrém funkce akce

$$S = \int_1^2 (xy'^2 - y)dx$$

při zadaných okrajových podmínkách $y(1) = 0$ a $y(2) = 1$.

3. Částice se pohybuje z bodu $A(a, y_1)$ do bodu $B(b, y_2)$ v rovině po takové trajektorii, že její rychlost v je stále přímo úměrná souřadnici x, to znamená $v = kx$, kde k je konstanta. Určete tvar trajektorie pro případ, že částice dorazí do bodu B v nejkratším čase. Tíhu zde neuvažujte.

2. REGULÁRNÍ VARIAČNÍ PROBLÉMY

V této kapitole jsou stručně vyloženy základní principy teorie, jejímž hlavním cílem je integrace Eulerových-Lagrangeových rovnic. Nejdříve je provedena klasifikace Lagrangiánů na regulární a singulární. Dále se definuje **Hamiltonián a impulzy**, zavádí se **Legendreova transformace**, pomocí které se transformují Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, které jsou diferenciálními rovnicemi druhého řádu, na soustavu prvního řádu o dvojnásobném počtu rovnic, tzv. **Hamiltonovy kanonické rovnice**. V odstavci 2.3. se vyšetřují funkce, které jsou konstantní podél extremál, tzv. první integrály Eulerových-Lagrangeových rovnic, které představují **zákony zachování**. V odstavci 2.5. je ukázáno, že Eulerovy-Lagrangeovy rovnice a Hamiltonovy kanonické rovnice lze odvodit z jednoho variačního principu.

Dále se studují **kanonické transformace**, které lze využít jako integrační metodu pro řešení Hamiltonových rovnic. Ukazuje se že, vhodným spojením **vytvořující funkce** kanonické transformace s funkcí Hamiltonovou lze dospět k parciální diferenciální rovnici prvního řádu, jejíž **úplný integrál** nám již zprostředkuje řešení uvažované variační úlohy. Integrační postup, vedoucí na zmíněnou rovnici nejdříve studoval Hamilton. V Hamiltonových pracích pak pokračoval Jacobi, který rozvinul teorii kanonických transformací, vyjasnil mnoho principiálních otázek s nimi spojených a odstranil řadu obtíží při integraci Hamiltonových rovnic. Z toho důvodu se jak zmíněná parciální diferenciální rovnici tak celá příslušná teorie nazývá **Hamilton-Jacobiho**.

Po prostudování této kapitoly

- budete umět rozlišovat regulární a singulární Lagrangiány
- budete vědět co je Legendreova transformace, Hamiltonián, impulzy
- dozvíte se důsledkem čeho jsou zákony zachování v mechanice a jak je používat při integraci Eulerových-Lagrangeových rovnic
- budete umět převádět Eulerovy-Lagrangeovy rovnice na kanonické rovnice Hamiltonovy
- budete vědět co jsou kanonické transformace a jaký je jejich význam
- pochopíte význam Hamilton-Jacobiho rovnice při integraci Hamiltonových kanonických rovnic
- budete umět řešit Hamilton-Jacobiho rovnici metodou separace proměnných

Klíčová slova: Regulární Lagrangián, singulární Lagrangián, Hamiltonián, impulzy, Legendreovo zobrazení, Legendreova transformace, fázový prostor, zákon zachování impulzu, zákon zachování energie, Hamiltonovy rovnice, rozšířený Lagrangián, kanonická transformace, vytvořující funkce, Hamiltonova-Jacobiho rovnice, úplný integrál.

Čas potřebný k prostudování kapitol: 15 hodin(teorie) + 10 hodin(řešení úloh)

2.1. Regulární Lagrangiány

Definice 2.1. Lagrangián $L: R \times R^m \times R^m \to R$ definovaný na otevřené množině $V \subset R \times R^m \times R^m$ se nazývá **regulární v bodě** $x \in V$, jestliže

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)_x \neq 0 .$$

Jestliže L není regulární v bodě x, říkáme, že je **singulární v bodě** x. Lagrangián L se nazývá **regulární** (resp. **singulární**) **na množině** $U \subset V$, je-li regulární (resp. singulární) v každém bodě množiny U. L se nazývá **regulární** (resp. **singulární**), je-li regulární (resp. singulární) v každém bodě svého definičního oboru.

Věta 2.1. Buď $L: R \times R^m \times R^m \to R$ Lagrangián definovaný na otevřené množině $V \subset R \times R^m \times R^m$ a třídy C^2 na V. Je-li L regulární v bodě $x \in V$, pak existuje okolí U bodu x takové, že L je regulární na U.

Důkaz. Pro důkaz tohoto tvrzení je podstatný předpoklad, že Lagrangián je funkce třídy C^2. Pak totiž matice druhých derivací

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)$$

existuje a všechny její prvky jsou spojité funkce na množině V. Z definice determinantu ovšem vyplývá, že také determinant této matice je spojitá funkce na V (jelikož je vytvořen pomocí součinů a součtů spojitých funkcí). Podle předpokladu je v bodě x

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)_x = a \neq 0 .$$

Existuje tedy otevřený interval kolem bodu a neobsahující 0; ze spojitosti funkce $\det: V \to R$ pak plyne, že jeho vzorem je otevřená množina $U \subset V$, která obsahuje bod x a na níž je funkce det různá od nuly; L je tedy regulární na U. ♦

Příklad 2.1. Uvažujme Lagrangián $L: R^3 \to R$ tvaru $L = \frac{1}{2} M \dot{q}^2$, kde $M > 0$ (L popisuje volnou částici v jednorozměrném konfiguračním prostoru). Matice druhých derivací podle rychlostí má rozměr 1×1 a pro její jediný prvek platí

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = M \neq 0$$

v každém bodě $x \in R^3$. Determinant této matice je konstantní a roven M na R^3, Lagrangián L je tedy regulární.

Příklad 2.2. Pro Lagrangián $L: R\times R^3\times R^3 \to R$,

$$L=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}M\left((\dot q^1)^2+(\dot q^2)^2+(\dot q^3)^2\right),\quad M>0,$$

má matice druhých derivací podle rychlostí tvar

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{(\partial\dot q^1)^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot q^1\partial\dot q^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot q^1\partial\dot q^3} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot q^2\partial\dot q^1} & \dfrac{\partial^2 L}{(\partial\dot q^2)^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot q^2\partial\dot q^3} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot q^3\partial\dot q^1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot q^3\partial\dot q^2} & \dfrac{\partial^2 L}{(\partial\dot q^3)^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix},$$

její determinant je tedy v každém bodě různý od nuly a roven M^3. To znamená, že Lagrangián L je regulární.

Příklad 2.3. Nechť nyní $L: R\times R^3\times R^3 \to R$ je v souřadnicích $(t,q^1,q^2,q^3,\dot q^1,\dot q^2,\dot q^3)$ dán vztahem

$$L=\dot q^1\dot q^2+\frac{1}{2}q^2(\dot q^3)^2.$$

Determinant matice druhých derivací podle rychlostí má tvar

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q^i\partial\dot q^j}\right)=\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}=-q^2,$$

tedy v bodech $x=(t,q^1,q^2,q^3,\dot q^1,\dot q^2,\dot q^3)\in R^7$, kde $q^2\neq 0$, je Lagrangián L regulární a na množině

$$\left\{x\in R\times R^3\times R^3 \mid q^2=0\right\}\subset R\times R^3\times R^3$$

je L singulární. Všimněme si, že množina singulárních bodů je uzavřená, L je proto regulární na otevřené podmnožině v $R\times R^3\times R^3$.

Příklad 2.4. Nechť Lagrangián $L: R\times R^m\times R^m \to R$ je **afinní funkce** (polynom prvního stupně) **v rychlostech** $(\dot q^1,\dot q^2,\ldots,\dot q^m)$, tj. nechť L má tvar

$$L=f_i(t,q^1,\ldots,q^m)\dot q^i+g(t,q^1,\ldots,q^m).$$

Pro takové Lagrangiány je matice druhých derivací podle rychlostí identicky nulová, což znamená, že L je (na celém svém definičním oboru) **singulární**.

Je evidentní, že pro tyto Lagrangiány se také budou redukovat Eulerovy-Lagrangeovy výrazy a Eulerovy-Lagrangeovy rovnice budou mít speciální tvar. Skutečně, přímým výpočtem dostáváme

$$E_i(L) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial f_j}{\partial q^i}\dot{q}^j + \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{df_i}{dt} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial q^i} - \frac{\partial f_i}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j + \left(\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f_i}{\partial t}\right), \quad 1 \le i \le m,$$

tj. Eulerovy-Lagrangeovy výrazy jsou rovněž funkce afinní v rychlostech. Eulerovy-Lagrangeovy rovnice tedy v tomto případě tvoří systém m obyčejných diferenciálních rovnic **prvního řádu**

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial q^i} - \frac{\partial f_i}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j + \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \; 1 \le i \le m.$$

2.2. Hamiltonián a impulzy

S Lagrangiánem jsou svázány další důležité funkce - Hamiltonián (Hamiltonova funkce) a impulzy (hybnosti), které zavedeme v tomto odstavci. **Připomínáme, že všude předpokládáme, aniž bychom to pokaždé explicitně zmiňovali, že Lagrangián je „dostatečně hladký"; jak uvidíme z kontextu, stačí, aby byl na svém definičním oboru třídy diferencovatelnosti C^2.**

Definice 2.2. Nechť $L: R \times R^m \times R^m \to R$ je Lagrangián, definovaný na otevřené množině v $R \times R^m \times R^m$. Definujeme funkce

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad 1 \le i \le m,$$

a nazýváme je **impulzy** Lagrangiánu *L*. Funkci *H* definovanou vztahem

$$H = -L + p_i\dot{q}^i = -L + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i,$$

pak nazýváme **Hamiltonián** Lagrangiánu *L*.

Definice 2.3. Nechť $L: R \times R^m \times R^m \to R$ je Lagrangián definovaný na otevřené množině v $R \times R^m \times R^m$ a nechť p_i, $1 \le i \le m$ jsou jeho impulzy. Zobrazení

$$\mathrm{Leg}: R \times R^m \times R^m \to R \times R^m \times R^m,$$

definované rovnicemi

$$\mathrm{Leg}^1(t, q^i, \dot{q}^i) = t,$$
$$\mathrm{Leg}^{k+1}(t, q^i, \dot{q}^i) = q^k,$$
$$\mathrm{Leg}^{k+m+1}(t, q^i, \dot{q}^i) = p_k,$$

kde $1 \le k \le m$, se nazývá **Legendreovo zobrazení**. Je-li zobrazení Leg difeomorfismus otevřených množin, nazývá se **Legendreova transformace**.

Legendreovo zobrazení zapisujeme často stručněji ve tvaru

$$\mathsf{Leg}:(t,q^i,\dot{q}^i)\to(\bar{t},\bar{q}^i,p_i),$$

kde

$$t=\bar{t},\quad \bar{q}^i=q^i,\quad p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i},\quad 1\le i\le m.$$

Všimněte si, že podle definice je zobrazení Leg ve svých prvních $m+1$ komponentách $(\mathrm{Leg}^1,\ldots,\mathrm{Leg}^{m+1})=(\bar{t},\bar{q}^1,\ldots,\bar{q}^m)$ **identické zobrazení** $R\times R^m$ na sebe. Proto, nemůže-li dojít k nedorozumění, označujeme Legendreovo zobrazení také

$$\mathsf{Leg}:R\times R^m\times R^m\ni(t,q^i,\dot{q}^i)\to(t,q^i,p_i)\in R\times R^m\times R^m.$$

Příklad 2.5.

• Pro **Lagrangián „volné částice"** $L:R\times R^3\times R^3\to R$,

$$L=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}M\left((\dot{q}^1)^2+(\dot{q}^2)^2+(\dot{q}^3)^2\right),\quad M>0,$$

mají impulzy tvar

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^1}=M\dot{q}^1,\quad p_2=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^2}=M\dot{q}^2,\quad p_3=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^3}=M\dot{q}^3,$$

a Hamiltonián je funkce

$$H=-L+p_i\dot{q}^i=-\frac{1}{2}M\left((\dot{q}^1)^2+(\dot{q}^2)^2+(\dot{q}^3)^2\right)+M(\dot{q}^1)^2+M(\dot{q}^2)^2+M(\dot{q}^3)^2$$
$$=\frac{1}{2}M\left((\dot{q}^1)^2+(\dot{q}^2)^2+(\dot{q}^3)^2\right).$$

Všimněme si, že v tomto případě je Hamiltonián (stejně jako Lagrangián) roven kinetické energii částice.

Legendreovo zobrazení má tvar

$$\mathsf{Leg}:R\times R^3\times R^3\ni(t,q^1,q^2,q^3,\dot{q}^1,\dot{q}^2,\dot{q}^3)\to(t,q^1,q^2,q^3,M\dot{q}^1,M\dot{q}^2,M\dot{q}^3)\in R\times R^3\times R^3,$$

odkud přímo vidíme, že je to difeomorfismus prostoru $R\times R^3\times R^3$ na sebe.

• Uvažujme nyní **Lagrangián fyzikálního systému klasické mechaniky**, který, jak víme z odstavce 1.7, má tvar

$$L=T-V,$$

kde T je kinetická a V je potenciální energie systému. Snadno se přesvědčíme, že pro funkci T platí

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}^i=2T.$$

Tato identita znamená, že T je homogenní funkce stupně 2. Jelikož potenciální energie nezávisí na rychlostech, vidíme, že pro impulzy platí

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i},$$

a Hamiltonián má tvar

$$H = -L + p_i \dot{q}^i = -T + V + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = -T + V + 2T = T + V .$$

Hamiltonián je tedy v tomto případě roven součtu kinetické a potenciální energie uvažovaného mechanického systému, tj. má význam (celkové) energie systému.

Dále si všimněme, že uvažovaný Lagrangián je **regulární**, neboť z definice kinetické energie vyplývá

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0 .$$

- Pro Lagrangián $L : R \times R^3 \times R^3 \to R$ tvaru

$$L = \dot{q}^1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} q^2 (\dot{q}^3)^2 ,$$

dostáváme impulzy

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = \dot{q}^2, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} = \dot{q}^1, \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^3} = q^2 \dot{q}^3$$

a Hamiltonián

$$H = -L + p_i \dot{q}^i = -\dot{q}^1 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} q^2 (\dot{q}^3)^2 + 2\dot{q}^1 \dot{q}^2 + q^2 (\dot{q}^3)^2$$

$$= \dot{q}^1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} q^2 (\dot{q}^3)^2 = L.$$

Legendreovo zobrazení je v tomto případě zobrazení

$$\mathrm{Leg} : R \times R^3 \times R^3 \ni (t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3) \to (t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^2, \dot{q}^1, q^2 \dot{q}^3) \in R \times R^3 \times R^3 ,$$

není to tedy difeomorfismus, jelikož na okolí bodů $x \in R \times R^3 \times R^3$, pro které $q^2 = 0$, není zobrazení Leg bijektivní.

- Lagrangián $L : R \times R^m \times R^m \to R$, který je **afinní v rychlostech**

$$L = f_i(t, q^1, \ldots, q^m) \dot{q}^i + g(t, q^1, \ldots, q^m)$$

má impulzy

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = f_i, \quad 1 \le i \le m ,$$

a Hamiltonián

$$H = -L + p_i \dot{q}^i = -f_i \dot{q}^i - g + f_i \dot{q}^i = -g .$$

V tomto případě **impulzy ani Hamiltonián nezávisejí na rychlostech**, tj. na proměnných $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)$. Znamená to, že to jsou funkce definované nikoliv na $R \times R^m \times R^m$ (kde je definován Lagrangián), ale na množině $R \times R^m$.

Legendreovo zobrazení tedy má tvar

$$\mathrm{Leg}: R \times R^m \times R^m \ni (t, q^i, \dot{q}^i) \to (t, q^i, f_i) \in R \times R^m \times R^m,$$

a není to difeomorfismus; všimněme si ale, že v tomto případě je obraz $\mathrm{Leg}(R \times R^m \times R^m)$ „evolučního prostoru" v bijekci s „prostorem událostí" $R \times R^m$.

Věta 2.2. Buď L Lagrangián definovaný na otevřené množině $V \subset R \times R^m \times R^m$. Je-li L alespoň třídy C^2 a regulární, pak Legendreovo zobrazení Leg jako zobrazení $R \times R^m \times R^m \supset V \to \mathrm{Leg}(V) \subset R \times R^m \times R^m$ je lokální difeomorfismus.

Důkaz. Prvních $m+1$ složek Legendreova zobrazení jsou identická zobrazení, jsou tudíž všechna diferencovatelná (dokonce hladká). Zbývající složky p_i, $1 \le i \le m$, jsou podle definice derivacemi Lagrangiánu podle proměnných $\dot{q}^i$, a jelikož Lagrangián L je podle předpokladu třídy C^2, jsou složky p_i diferencovatelné třídy C^1. Jacobiho matice zobrazení Leg na množině V tedy existuje, její prvky jsou spojité funkce, a má tvar

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial t} & \left(\dfrac{\partial t}{\partial q^j}\right) & \left(\dfrac{\partial t}{\partial \dot{q}^j}\right) \\ \left(\dfrac{\partial q^i}{\partial t}\right) & \left(\dfrac{\partial q^i}{\partial q^j}\right) & \left(\dfrac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^j}\right) \\ \left(\dfrac{\partial p_i}{\partial t}\right) & \left(\dfrac{\partial p_i}{\partial q^j}\right) & \left(\dfrac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ \left(\dfrac{\partial p_i}{\partial t}\right) & \left(\dfrac{\partial p_i}{\partial q^j}\right) & \left(\dfrac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}\right) \end{pmatrix},$$

kde v uvedených submaticích index j čísluje sloupce a index i čísluje řádky, E značí jednotkovou matici a 0 značí nulovou matici. To ovšem znamená, že zobrazení Leg je na množině V diferencovatelné třídy C^1 (a jeho derivace je dána Jacobiho maticí). Dále, protože Lagrangián L je třídy C^2 a je regulární na V, všechny jeho druhé parciální derivace existují a jsou spojité na množině V a platí

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = \det\left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}\right) \neq 0.$$

Odtud pro Jacobián zobrazení Leg na množině V dostáváme

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ \left(\dfrac{\partial p_i}{\partial t}\right) & \left(\dfrac{\partial p_i}{\partial q^j}\right) & \left(\dfrac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}\right) \end{pmatrix} = \det\left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}\right) \neq 0.$$

Podle Věty o inverzním zobrazení je Leg lokální difeomorfismus třídy C^1. ♦

Poznámka. Je-li

$$\mathrm{Leg}: R \times R^m \times R^m \supset V \to \mathrm{Leg}(V) \subset R \times R^m \times R^m$$

Legendreova transformace (regulárního) Lagrangiánu L, pak na množině $\mathrm{Leg}(V)$ vznikají souřadnice

$$(t, q^i, p_i), \quad 1 \le i \le m,$$

kde $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$, nazývané **Legendreovy souřadnice** Lagrangiánu L. Na této množině tedy máme jak kartézské souřadnice $(t, q^i, \dot{q}^i)$, tak Legendreovy souřadnice (t, q^i, p_i). Otevřená množina $\mathrm{Leg}(V) \subset R \times R^m \times R^m$ spolu s Legendreovými souřadnicemi se nazývá **fázový prostor** Lagrangiánu L.

Nechť $\mathrm{Leg}: R \times R^m \times R^m \supset V \to \mathrm{Leg}(V) \subset R \times R^m \times R^m$ je Legendreova transformace Lagrangiánu L. Pak na množině $\overline{V} = \mathrm{Leg}(V)$ existuje **inverzní transformace**

$$\mathrm{Leg}^{-1}: (t, q^i, p_i) \to (t, q^i, \dot{q}^i).$$

Její Jacobiho matice má tvar

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial t} & \left(\dfrac{\partial t}{\partial q^j}\right) & \left(\dfrac{\partial t}{\partial p_j}\right) \\ \left(\dfrac{\partial q^i}{\partial t}\right) & \left(\dfrac{\partial q^i}{\partial q^j}\right) & \left(\dfrac{\partial q^i}{\partial p_j}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \dot{q}^i}{\partial t}\right) & \left(\dfrac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j}\right) & \left(\dfrac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ \left(\dfrac{\partial \dot{q}^i}{\partial t}\right) & \left(\dfrac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j}\right) & \left(\dfrac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j}\right) \end{pmatrix}$$

Jacobián transformace Leg^{-1} je proto

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ \left(\dfrac{\partial \dot{q}^i}{\partial t}\right) & \left(\dfrac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j}\right) & \left(\dfrac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j}\right) \end{pmatrix} = \det \left(\dfrac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j}\right) \neq 0.$$

Věta 2.3. Matice inverzní k matici

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}\right) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)$$

je matice

$$\left(\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j}\right) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right),$$

kde *H* je Hamiltonián Lagrangiánu *L*.

Důkaz. Podle definice Hamiltoniánu je H jako funkce Legendreových souřadnic tvaru

$$H(t, q^k, p_k) = -L(t, q^k, p_k) + p_j \dot{q}^j(t, q^k, p_k).$$

Proto pro každé $i = 1, 2, \dots, m$,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{\partial L}{\partial p_i} + \dot{q}^i + p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} + \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \dot{q}^i.$$

Odtud plyne, že pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j},$$

což jsme chtěli ukázat. ♦

Úkol. Ve výše uvedeném důkazu jsme vypočítali derivace Hamiltoniánu podle proměnných p_i a dostali jsme, že v Legendreových souřadnicích

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(t, q^k, p_k) = \dot{q}^i(t, q^k, p_k).$$

Určete také derivace Hamiltoniánu podle zbývajících proměnných, tedy

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, q^k, p_k) \quad \text{a} \quad \frac{\partial H}{\partial q^i}(t, q^k, p_k).$$

Řešení. V tomto případě by při použití symbolického označení (t, q^k, p_k) pro Legendreovy souřadnice mohlo dojít k záměně stejně označených kartézských a Legendreových proměnných, proto raději Legendreovy souřadnice označíme $(\bar{t}, \bar{q}^k, p_k)$. Máme tedy určit

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{t}}(\bar{t}, \bar{q}^k, p_k) \quad \text{a} \quad \frac{\partial H}{\partial \bar{q}^i}(\bar{t}, \bar{q}^k, p_k)$$

přičemž víme, že

$$\bar{t} = t, \quad \bar{q}^k = q^k, \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}, \quad 1 \le k \le m.$$

S využitím pravidla pro derivaci složeného zobrazení dostaneme:

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}(-L + p_i \dot{q}^i) = -\frac{\partial L}{\partial \bar{t}} + p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \bar{t}} =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial L}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \bar{t}} + p_i\left(\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \bar{t}}\right) =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t} - p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \bar{t}} + p_i \left(\delta^i_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \bar{t}} \right) = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{q}^i}(-L + p_j \dot{q}^j) = -\frac{\partial L}{\partial \bar{q}^i} + p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \bar{q}^i} =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \bar{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \bar{q}^i} + p_j \left(\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \bar{q}^i} + \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i} + \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \bar{q}^i} \right) =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q^j}\delta^i_j - p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \bar{q}^i} + p_j \left(\delta^j_k \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \bar{q}^i} \right) = -\frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

Příklad 2.6. Uvažujme Lagrangián, který má v kartézských souřadnicích $(t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2)$ na $R \times R^2 \times R^2$ tvar $L(t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = 2q^2 - 4(q^1)^2 + (\dot{q}^1)^2 - (\dot{q}^2)^2$. Určete Hamiltonián a impulzy asociované s tímto Lagrangiánem. Napište tvar Legendreovy transformace a inverzní Legendreovy transformace a pak určete Hamiltonián a Lagrangian v Legendreových souřadnicích.

Řešení: Nejdříve ověříme regularitu Lagrangiánu. Determinant matice druhých parciálních derivací Lagrangiánu L podle „tečkovaných“ souřadnic

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{(\partial \dot{q}^1)^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \partial \dot{q}^1} & \dfrac{\partial^2 L}{(\partial \dot{q}^2)^2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4,$$

je tedy vždy různý od nuly, takže Lagrangian je regulární ve všech bodech prostoru $R \times R^2 \times R^2$.

Nyní určíme impulzy Lagrangiánu L

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial q^1} = 2\dot{q}^1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial q^2} = -2\dot{q}^2$$

a jeho Hamiltonián má v kartézských souřadnicích vyjádření

$$H = -L + p_i \dot{q}^i = -2q^2 + 4(q^1)^2 - (\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + 2(\dot{q}^1)^2 - 2(\dot{q}^2)^2 =$$

$$= -2q^2 + 4(q^1)^2 + (\dot{q}^1)^2 - (\dot{q}^2)^2.$$

Legendreovo zobrazení má v tomto případě tvar

$$\mathrm{Leg} : R \times R^2 \times R^2 \ni (t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \to (t, q^1, q^2, p_1, p_2) \in R \times R^2 \times R^2,$$

kde $p_1 = 2\dot{q}^1$ a $p_2 = 2\dot{q}^2$, jedná se zde tedy dokonce o globální difeomorfismus definovaný na celém $R \times R^2 \times R^2$. Inverzní Legendreovo zobrazení má tvar

$$\mathrm{Leg}^{-1} : R \times R^2 \times R^2 \ni (t, q^1, q^2, p_1, p_2) \to (t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \in R \times R^2 \times R^2,$$

kde $\dot{q}^1 = p_1/2$ a $\dot{q}^2 = -p_2/2$. Lagrangián L získá v Legendreových souřadnicích (t, q^1, q^2, p_1, p_2) tvar

$$L(t,q^1,q^2,p_1,p_2) = L(t,q^1,q^2,\dot{q}^1,\dot{q}^2)\circ \mathsf{Leg}^{-1} = 2q^2 - 4(q^1)^2 + (p_1/2)^2 - (-p_2/2)^2 =$$
$$= 2q^2 - 4(q^1)^2 + p_1{}^2/4 - p_2{}^2/4,$$

a Hamiltonián tvar

$$H(t,q^1,q^2,p_1,p_2) = -2q^2 + 4(q^1)^2 + p_1{}^2/4 - p_2{}^2/4.$$

Všimněme si ještě, že matice inverzní k matici

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{(\partial\dot{q}^1)^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^1\partial\dot{q}^2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2\partial\dot{q}^1} & \dfrac{\partial^2 L}{(\partial\dot{q}^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

tedy matice $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ je právě matice druhých parciálních derivací Hamiltoniánu podle impulzů

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{(\partial p_1)^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial p_1\partial p_2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial p_2\partial p_1} & \dfrac{\partial^2 L}{(\partial p_2)^2} \end{pmatrix}.$$

Tím jsme prakticky ověřili tvrzení Věty 2.3.

Příklad 2.7. Uvažujme Lagrangián, který má v kartézských souřadnicích $(t,q^1,q^2,\dot{q}^1,\dot{q}^2)$ na $R\times R^2\times R^2$ tvar $L(t,q^1,q^2,\dot{q}^1,\dot{q}^2) = 2tq^1 - (\dot{q}^1)^2 + \dfrac{(\dot{q}^2)^3}{3}$. Určete Hamiltonián a impulzy asociované s tímto Lagrangiánem. Napište tvar Legendreovy transformace a inverzní Legendreovy transformace a pak určete Hamiltonián a Lagrangian v Legendreových souřadnicích.

Řešení: Nejdříve ověříme regularitu Lagrangiánu. Determinant matice druhých parciálních derivací Lagrangiánu L podle „tečkovaných" souřadnic

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{(\partial\dot{q}^1)^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^1\partial\dot{q}^2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2\partial\dot{q}^1} & \dfrac{\partial^2 L}{(\partial\dot{q}^2)^2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\dot{q}^2 \end{pmatrix} = -4\dot{q}^2.$$

To znamená, že v bodech $x = (t,q^1,q^2,\dot{q}^1,\dot{q}^2)\in R^5$, kde $\dot{q}^2 \neq 0$, je tento Lagrangián L regulární a na množině

$$\{x\in R\times R^2\times R^2 \mid \dot{q}^2 = 0\} \subset R\times R^2\times R^2$$

je L singulární. Všimněme si, že stejně jako v Příkladu 2.3. je množina singulárních bodů uzavřená, proto je Lagrangian L regulární na otevřené podmnožině v $R\times R^2\times R^2$.

Nyní určíme impulzy Lagrangiánu L

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = -2\dot{q}^1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} = (\dot{q}^2)^2$$

a jeho Hamiltonián v kartézských souřadnicích

$$H = -L + p_i\dot{q}^i = -2tq^1 + (\dot{q}^1)^2 - \frac{(\dot{q}^2)^3}{3} - 2(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^3 =$$

$$= -2tq^1 - (\dot{q}^1)^2 + \frac{2(\dot{q}^2)^3}{3}.$$

Legendreovo zobrazení má v tomto případě tvar

$$\mathsf{Leg}: R\times R^2\times R^2 \ni (t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \to (t, q^1, q^2, p_1, p_2) \in R\times R^2\times R^2,$$

kde $p_1 = -2\dot{q}^1$ a $p_2 = (\dot{q}^2)^2$.

Všimněme si že na okolích bodů $x \in R\times R^2\times R^2$, pro které $\dot{q}^2 = 0$, není zobrazení Leg bijektivní. Toto zobrazení ovšem není bijektivní ani na množině $\{x \in R\times R^2\times R^2 \mid \dot{q}^2 \neq 0\} = R\times R^2\times R\times R\setminus\{0\}$, jelikož složka $\mathsf{Leg}^5 \equiv p_2 = (\dot{q}^2)^2$ není bijektivní. Ovšem pokud budeme zobrazení Leg uvažovat pouze na otevřené podmnožině $R\times R^2\times R\times R^+ = \{x \in R\times R^2\times R^2 \mid \dot{q}^2 > 0\}$, případně na otevřené podmnožině $R\times R^2\times R\times R^- = \{x \in R\times R^2\times R^2 \mid \dot{q}^2 < 0\}$, pak se již bude jednat o bijekci na otevřenou množinu $R\times R^2\times R\times R^+$. Zobrazení je diferencovatelné, to znamená že se jedná o lokální difeomorfismus. Inverzní Legendreovo zobrazení definované na podmnožině $R\times R^2\times R\times R^+$ se rozděluje na dvě části

$$(\mathsf{Leg}^{-1})_1 : R\times R^2\times R\times R^+ \ni (t, q^1, q^2, p_1, p_2) \to (t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \in R\times R^2\times R\times R^+,$$

kde $\dot{q}^1 = -p_1/2$ a $\dot{q}^2 = \sqrt{p_2}$ a

$$(\mathsf{Leg}^{-1})_2 : R\times R^2\times R\times R^+ \ni (t, q^1, q^2, p_1, p_2) \to (t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \in R\times R^2\times R\times R^-,$$

$\dot{q}^1 = -p_1/2$ a $\dot{q}^2 = -\sqrt{p_2}$.

V dalším se omezíme na body z poloprostoru $R\times R^2\times R\times R^+$, pro které platí inverzní Legendreova transformace $(\mathsf{Leg}^{-1})_1$. Lagrangián L získá v Legendreových souřadnicích (t, q^1, q^2, p_1, p_2) tvar

$$L(t, q^1, q^2, p_1, p_2) = L(t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \circ (\mathsf{Leg}^{-1})_1 = 2tq^1 - (-p_1/2)^2 + \frac{(\sqrt{p_2})^3}{3} =$$

$$= 2tq^1 - p_1^{\,2}/4 + \frac{(p_2)^{3/2}}{3}.$$

a Hamiltonián

$$H(t, q^1, q^2, p_1, p_2) = H(t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \circ (\mathsf{Leg}^{-1})_1 = -2tq^1 - (-p_1/2)^2 + \frac{2(\sqrt{p_2})^3}{3} =$$

$$= -2tq^1 - p_1^{\,2}/4 + \frac{2(p_2)^{3/2}}{3}.$$

Všimněme si ještě, že matice inverzní k matici

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{(\partial\dot{q}^1)^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^1\partial\dot{q}^2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^2\partial\dot{q}^1} & \dfrac{\partial^2 L}{(\partial\dot{q}^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\dot{q}^2 \end{pmatrix}$$

tedy matice $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2\dot{q}^2 \end{pmatrix}$ je právě matice druhých parciálních derivací Hamiltoniánu podle impulzů

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{(\partial p_1)^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial p_2 \partial p_1} & \dfrac{\partial^2 L}{(\partial p_2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2 p_2^{1/2}} \end{pmatrix},$$

ovšem podle inverzní Legendreova transformace $(\mathrm{Leg}^{-1})_1$ je $p_2^{1/2} = \dot{q}^2$. Tím jsme opět prakticky ověřili tvrzení Věty 2.3. Pro body z poloprostoru $R \times R^2 \times R \times R^-$ bychom postupovali analogicky s tím rozdílem, že tentokrát by přicházela v úvahu inverzní Legendreova transformace $(\mathrm{Leg}^{-1})_2$, pro kterou platí $\dot{q}^2 = -\sqrt{p_2}$.

Kontrolní úkol 2.1. Uvažujte Lagrangián, který má v kartézských souřadnicích $(t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2)$ na $R \times R^2 \times R^2$ tvar $L(t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = t^2 + q^1(\dot{q}^1)^2 + q^2(\dot{q}^2)^2$. Ověřte jeho regularitu. Určete s ním asociované impulzy a Hamiltonián. Napište tvar Legendreovy transformace a inverzní Legendreovy transformace a pak určete Hamiltonián a Lagrangian v Legendreových souřadnicích (t, q^1, q^2, p_1, p_2).

Kontrolní úkol 2.2. Uvažujte Lagrangián, který má v kartézských souřadnicích $(t, q, \dot{q})$ na $R \times R \times R$ tvar $L(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q})^2 - \frac{1}{2}kq^2$. Ověřte jeho regularitu. Určete s ním asociovaný impulz a Hamiltonián. Napište tvar Legendreovy transformace a inverzní Legendreovy transformace a pak určete Hamiltonián a Lagrangian v Legendreových souřadnicích (t, q, p).

2.3. Zákony zachování energie a impulzu

Uvažujme opět množinu $R \times R^m \times R^m$ s kartézskými souřadnicemi $(t, q^i, \dot{q}^i)$ a Lagrangián L definovaný na otevřené množině v $V \subset R \times R^m \times R^m$. Jsou-li p_i, $1 \le i \le m$, impulzy Lagrangiánu L, klademe

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m).$$

V každém bodě $x \in V$ je tedy $p(x)$ vektor v R^m; nazýváme jej **vektor impulzu** Lagrangiánu L. Jednotlivé impulzy $p_i(x)$, v bodě x, $1 \le i \le m$, pak tedy představují **složky vektoru impulzu v kartézských souřadnicích** prostoru R^m.

Věta 2.4. Nechť pro nějaké $k = 1, 2, \ldots, m$ je

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} = 0.$$

Je-li γ extremála Lagrangiánu L, pak

$$p_k \circ J^1\gamma = \text{ konst}.$$

Uvedené tvrzení lze formulovat také tak, že **nezávisí-li Lagrangián** L **explicitně na proměnné** q^k**, pak funkce** p_k **je konstantní podél každé extremály Lagrangiánu** L. Věta 2.4 se proto nazývá **zákon zachování *k*-té složky vektoru impulzu**.

Důkaz. Předpokládejme, že γ je extremála Lagrangiánu L, tedy že splňuje Eulerovy-Lagrangeovy rovnice:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \circ J^2\gamma = 0, \quad 1 \le i \le m.$$

Jelikož $\partial L / \partial q^k = 0$, znamená to, že

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) \circ J^2\gamma = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \circ J^1\gamma\right) = \frac{d}{dt}\left(p_k \circ J^1\gamma\right) = 0,$$

a tedy funkce $p_k \circ J^1\gamma$ (což je reálná funkce jedné reálné proměnné t) je konstantní. ♦

Důsledek. Jestliže Lagrangián L **je funkcí pouze proměnných** $(t, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^m)$**, pak podél každé extremály Lagrangiánu** L **je impulz** $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ **konstantní.**

Popisuje-li Lagrangián L pohyb nějakého **mechanického systému**, lze toto tvrzení formulovat i takto: jestliže Lagrangián závisí pouze na „čase" a na „rychlostech" (nezávisí tedy na „polohách" uvažovaného mechanického systému), pak podél každé trajektorie je vektor impulzu konstantní.

Věta 2.5. Nechť Lagrangián L **splňuje podmínku**

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Je-li γ **extremála Lagrangiánu** L**, pak**

$$H \circ J^1\gamma = \text{ konst},$$

kde H **Hamiltonián Lagrangiánu** L**.**

Uvedené tvrzení lze formulovat také tak, že **nezávisí-li Lagrangián** L **explicitně na čase** (obecněji na **parametru** t)**, pak Hamiltonián je podél každé extremály Lagrangiánu** L **konstantní**.

Popisuje-li Lagrangián L pohyb **mechanického systému**, pak (jak víme z předchozího odstavce) jeho Hamiltonián má význam **energie**; proto se Větě 2.5 říká **zákon zachování energie**.

Důkaz. Je třeba ukázat, že nezávisí-li L na proměnné t, a je-li γ extremála Lagrangiánu L, tedy splňuje-li Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, pak

$$\frac{d}{dt}\left(H \circ J^1\gamma\right) = 0.$$

Počítejme tedy výraz na levé straně. Platí

$$\frac{d}{dt}\left(H \circ J^1\gamma\right) = \frac{dH}{dt} \circ J^2\gamma = \left(\frac{d}{dt}\left(-L + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\right) \circ J^2\gamma =$$
$$= -\left(\frac{dL}{dt} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i\right) \circ J^2\gamma =$$
$$= -\left(\frac{\partial L}{\partial t} + \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i\right) \circ J^2\gamma.$$

Uplatníme-li oba předpoklady, dostáváme výsledek, který jsme chtěli dokázat. ♦

Poznámka. Zákon zachování energie lze často s výhodou použít při hledání extremál pro variační úlohy, kde Lagrangián *L* nezávisí na parametru (čase) *t*. Je-li totiž γ extremála Lagrangiánu *L*, pak pro ni platí

$$H \circ J^1\gamma = \text{ konst.},$$

jinými slovy, křivka $\gamma(t) = (t, q^1(t), \ldots, q^m(t))$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$H\left(t, q^1(t), \ldots, q^m(t), \frac{dq^1}{dt}, \ldots, \frac{dq^m}{dt}\right) - c = 0,$$

kde c je konstanta. Je-li $m \geq 2$, pak tato rovnice samotná nestačí pro nalezení množiny extremál Lagrangiánu *L*, neboť její úplná množina řešení může obsahovat i křivky, které nesplňují Eulerovy-Lagrangeovy rovnice. **V případě *m*=1** je ovšem situace diametrálně odlišná: **pro regulární Lagrangián nezávislý na *t* je „rovnice energie"** $H \circ J^1\gamma = c$ **obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu, *ekvivalentní* s Eulerovou-Lagrangovou rovnicí** (která je, jak víme, rovněž jediná, ale řádu druhého). To ovšem znamená, že extremály lze místo řešení Eulerovy-Lagrangeovy rovnice nalézt (většinou podstatně snadněji) vyřešením „rovnice energie".

Příklad 2.8. Uvažujme Lagrangian $L(t, q, \dot{q}) = 4q^2 + 8q + \dot{q}^2$.

Tento Lagrangián nezávisí na parametru *t,* to znamená, že odpovídající Hamiltonián bude podél extremál Eulerových-Lagrangeových rovnic konstantní a bude představovat zákon zachování energie.

Hamiltonián tohoto Lagrangiánu má v kartézských souřadnicích $(t, q, \dot{q})$ na $R \times R \times R$ tvar $H = -4q^2 - 8q + \dot{q}^2$ a představuje první integrál

$$-4q^2 - 8q + \dot{q}^2 = C$$

Eulerovy-Lagrangeovy rovnice. Jedná se o diferenciální rovnice prvního řádu, ve které se dá použít metoda separace proměnných.

Nejdříve osamostatníme na levé straně $\dot{q}^2$ a pak obě strany rovnice odmocníme, čímž dostaneme

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \sqrt{C + 4q^2 + 8q}.$$

Po separaci máme

$$\frac{dq}{\sqrt{C + 4q^2 + 8q}} = dt\ ,$$

což vede na integraci iracionální funkce. V tomto případě lze integraci levé strany provést poměrně snadno úpravou trojčlenu pod odmocninou na úplný čtverec lineárního dvojčlenu, konkrétně

$$C + 4q^2 + 8q = 4[(q+2)^2 - A],$$

kde $A = 4 - \frac{C}{4}$. Poslední rovnici tedy přepíšeme na

$$\frac{dq}{2\sqrt{[(q+2)^2 - A]}} = dt,$$

což po substituci a integraci pro $A > 0$ dává

$$\frac{1}{2}\operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{q+2}{\sqrt{A}}\right) = t + C_2,$$

a odtud již snadno určíme řešení $q(t)$ Eulerovy-Lagrangeovy rovnice jako inverzní funkci k právě získané funkci $t = t(q)$. Toto je typický příklad na integraci Eulerovy-Lagrangeovy rovnice pomocí integrálu energie, kdy řešení dostáváme v **inverzním tvaru** $t = t(q)$. Tento integrál nám tedy redukuje řád Eulerovy-Lagrangeovy rovnice na první řád, ovšem tato redukce s sebou často přináší technické problémy spojené s **integrací iracionálních funkcí.** Poznamenejme, že ne vždy je takto jednoduché (jako v tomto příkladu) integrovat integrál energie. V některých případech je nutné nasadit speciální substituce, tzv. Eulerovy substituce, které integraci převedou na integraci z racionálních funkcí. Často se však stává, že integrál z iracionálních funkcí nedokážeme **elementárně integrovat.**

Na druhé straně, hledáme-li extremály Lagrangiánů řešením Eulerových-Lagrangeových rovnic, dostáváme se k diferenciálním rovnicím druhého řádu, které však umíme řešit jen v některých případech. V tomto případě například Eulerova-Lagrangeova rovnice je jednoduchá lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$-\ddot{q} + 8q + 8 = 0,$$

s konstantními koeficienty ovšem nehomogenní. Řešení homogenní určíme snadno z charakteristické rovnice. Avšak hledání partikulárního řešení nehomogenní rovnice metodou variace konstant nebo metodou neurčitých koeficientů může být zdlouhavé.

2.4. Hamiltonovy rovnice

Definice 2.4. Nechť $L : R \times R^m \times R^m \to R$ je **regulární** Lagrangián, H jeho Hamiltonián, $p_1, \ldots, p_m$ jeho impulzy. Rovnice pro řezy δ projekce $\pi_1 : R \times R^m \times R^m \to R$, $\delta(t) = (t, q^i(t), p_i(t))$, které v Legendreových souřadnicích Lagrangiánu L mají tvar

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad 1 \le i \le m,$$

se nazývají **Hamiltonovy rovnice**.

Všimněme si, že **Hamiltonovy rovnice** Lagrangiánu L představují **systém 2*m* obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro křivky v evolučním prostoru** $R\times R^m\times R^m$, zatímco Eulerovy-Lagrangeovy rovnice tvoří systém m obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro řezy z R do $R\times R^m$, tedy pro křivky v konfiguračním prostoru R^m.

Věta 2.6. Hamiltonovy rovnice regulárního Lagrangiánu jsou ekvivalentní s jeho Eulerovými-Lagrangeovými rovnicemi. Tedy, je-li γ extremála Lagrangiánu *L*, pak $J^1\gamma$ je řešením jeho Hamiltonových rovnic, a obráceně, je-li $\delta(t)=(t,q^i(t),p_i(t))$ řešením Hamiltonových rovnic, pak platí $\delta=J^1\gamma$, kde γ extremála Lagrangiánu *L*.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že řez $\gamma: R\to R\times R^m$, $\gamma(t)=(t,q^i(t))$, definovaný na otevřeném intervalu $I\subset R$, je extremála Lagrangiánu L. Máme dokázat, že její prodloužení $J^1\gamma: I\to R\times R^m\times R^m$, což je řez projekce π_1, který v kartézských souřadnicích má tvar $J^1\gamma(t)=(t,q^i(t),\dot q^i(t))$, splňuje Hamiltonovy rovnice. Podle předpokladu platí pro všechna $i=1,2,\dots,m$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)\circ J^2\gamma=0,$$

to je

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)\circ J^2\gamma=\frac{\partial L}{\partial q^i}\circ J^1\gamma,$$

kde zobrazení L a γ jsou uvažována v souřadnicích $(t,q^i,\dot q^i)$ na $R\times R^m\times R^m$. Díky regularitě Lagrangiánu můžeme tyto rovnice vyjádřit v Legendreových souřadnicích (t,q^i,p_i). Jak jsme spočítali v odstavci 2.2., platí

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(t,q^k,p_k)=-\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

proto výše uvedená rovnice má v Legendreových souřadnicích tvar

$$\frac{d}{dt}\left(p_i\circ J^1\gamma\right)=-\frac{\partial H}{\partial q^i}\circ J^1\gamma.$$

Zbývá ověřit, že $J^1\gamma$ splňuje i zbývající Hamiltonovy rovnice. V odstavci 2.2. jsme rovněž zjistili, že

$$\dot q^i(t,q^k,p_k)=\frac{\partial H}{\partial p_i}(t,q^k,p_k).$$

Proto také

$$\dot q^i\circ J^1\gamma=\frac{d}{dt}\left(q^i\circ\gamma\right)=\frac{\partial H}{\partial p_i}\circ J^1\gamma.$$

Obráceně předpokládejme, že řez $\delta: R\to R\times R^m\times R^m$ je řešením Hamiltonových rovnic, tedy, že pro $i=1,2,\dots,m$ je

$$\frac{d}{dt}(q^i \circ \delta) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \delta, \frac{d}{dt}(p_i \circ \delta) = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \circ \delta .$$

Vyjádříme tyto rovnice v souřadnicích $(t, q^i, \dot{q}^i)$: první sada Hamiltonových rovnic získá tvar

$$\frac{d}{dt}(q^i \circ \delta) = \dot{q}^i \circ \delta ,$$

který vyjadřuje, že složky $\dot{q}^i(t)$, $i = 1,2,\ldots,m$, řezu δ jsou derivacemi jeho složek $q^i(t)$. To ale znamená, že $\delta = J^1\gamma$ pro nějaký řez $\gamma : R \to R \times R^m$. Druhá sada Hamiltonových rovnic pak je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \circ J^1\gamma\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \circ J^2\gamma = \frac{\partial L}{dq^i} \circ J^1\gamma ,$$

neboli

$$\left(\frac{\partial L}{dq^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \circ J^2\gamma = 0 .$$

Odtud vidíme, že γ je extremála Lagrangiánu L. ♦

Poznámka. Osvětleme si význam Věty 2.6.

Především, tato věta představuje další **metodu pro hledání extremál variačního problému**: místo řešení Eulerových-Lagrangeových rovnic (regulárního Lagrangiánu) lze vyřešit odpovídající Hamiltonovy rovnice.

Tato věta má ovšem také hluboký význam z hlediska poznání **struktury množiny extremál regulárních** variačních problémů: z tvaru Hamiltonových rovnic je totiž zřejmé, že se jedná o systém obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu typu

$$\frac{df^\alpha}{dt} = F^\alpha(t, f^1(t), \ldots, f^{2m}(t)), \quad 1 \le \alpha \le 2m ,$$

pro zobrazení $f : R \to R^{2m}$, kde pravé strany $F^\alpha(t,x)$ jsou spojité funkce na otevřené množině W v $R \times R^{2m}$. Platí tedy pro ně **Picardova-Lindelöfova věta** o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyho počáteční úlohy, podle níž za předpokladu, že funkce F^α, $1 \le \alpha \le 2m$, splňují Lipschitzovu podmínku, existuje jednoznačně určené řešení těchto rovnic s maximálním definičním oborem, splňující počáteční podmínku $f(t_0) = x_0$, tj. jdoucí bodem $(t_0, x_0) \in W \subset R \times R^{2m}$. Odtud okamžitě vidíme, že **pokud funkce $\partial H / \partial p_i$ a $\partial H / \partial q^i$ splňují** na svém definičním oboru W **Lipschitzovu podmínku (což specielně nastává vždy, když** jsou tyto funkce diferencovatelné třídy C^1, tedy **Lagrangián L je třídy C^3), pak každým bodem** množiny W **v evolučním prostoru** $R \times R^m \times R^m$ **prochází jediná „maximální" prodloužená extremála Lagrangiánu L.**

Nepřehlédněte, že toto vše platí za předpokladu, že Lagrangián je regulární. **Pro Lagrangián, který není regulární, Hamiltonovy rovnice nemáme definovány** a množina (prodloužených) extremál v evolučním prostoru má podstatně složitější strukturu: rozhodně **obecně neplatí, že by každým bodem procházelo jediné řešení**, tedy, že by řešení bylo jednoznačně určeno zadáním počátečních podmínek.

Příklad 2.9. Uvažujme Lagrangián $L(t,q^1,q^2,\dot{q}^1,\dot{q}^2)=2q^2-4(q^1)^2+(\dot{q}^1)^2-(\dot{q}^2)^2$ z Příkladu 2.6. Určete Hamiltonovy rovnice tohoto Lagrangiánu a obecně je vyřešte.

Řešení: V příkladě 2.6. jsme ověřili, že tento Lagrangián je regulární na celém $R\times R^2\times R^2$, určili jsme jeho impulzy

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}=2\dot{q}^1,\qquad p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2}=-2\dot{q}^2$$

a Hamiltonián, který je v kartézských souřadnicích $(t,q^1,q^2,\dot{q}^1,\dot{q}^2)$ na $R\times R^2\times R^2$ tvaru

$$H=-L+p_i\dot{q}^i=-2q^2+4(q^1)^2+(\dot{q}^1)^2-(\dot{q}^2)^2.$$

V Legendreových souřadnicích (t,q^1,q^2,p_1,p_2) bude mít Hamiltonián vyjádření

$$H(t,q^1,q^2,p_1,p_2)=-2q^2+4(q^1)^2+{p_1}^2/4-{p_2}^2/4.$$

Hamiltonovy rovnice budou vypadat následovně

$$\frac{dq^1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_1}{2}\qquad \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^1}=-8q^1$$

$$\frac{dq^2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2}=-\frac{p_2}{2}\qquad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^2}=2.$$

Jedná se o čtyři obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu pro čtyři neznámé funkce $q^1(t),q^2(t)$ a $p_1(t),p_2(t)$.

Nejjednodušší je druhá rovnice ve druhém řádku, kterou lze přímo integrovat a dostáváme

$$p_2(t)=2t+C_2,$$

kde C_2 je integrační konstanta. Tento získaný výraz nyní dosadíme do první Hamiltonovy rovnice ve druhém řádku, takže dostáváme rovnici

$$\frac{dq^2}{dt}=-t-\frac{C_2}{2},$$

jejíž integrací získáme

$$q^2(t)=-\frac{t^2}{2}-\frac{C_2}{2}t+D_2,$$

kde D_2 je další integrační konstanta.

Jestliže první Hamiltonovu rovnici první série (prvního řádku) budeme derivovat podle parametru *t,* pak lze psát

$$\frac{d^2q^1}{dt^2}=\frac{1}{2}\frac{dp_1}{dt},$$

což po dosazení za $\dfrac{dp^1}{dt}$ do druhé rovnice v prvním řádku dává

$$2\frac{d^2q^1}{dt^2}=-8q^1\ \Rightarrow\ \frac{d^2q^1}{dt^2}+4q^1=0.$$

Posledně uvedená rovnice je lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty pro neznámou $q^1(t)$, jejíž obecné řešení je tvaru

$$q^1(t) = C_1 \cos 2t + D_1 \sin 2t.$$

Derivujeme-li nalezené řešení $q^1(t)$ a dosadíme do první rovnice první série $p_1 = 2\frac{dq^1}{dt}$, obdržíme

$$p_1(t) = -4C_1 \sin 2t + 4D_1 \cos 2t.$$

Celkově jsme tedy dostali řešení Hamiltonových rovnic v tomto příkladu ve tvaru

$$\begin{aligned} q^1(t) &= C_1 \cos 2t + D_1 \sin 2t & \qquad p_1(t) &= -4C_1 \sin 2t + 4D_1 \cos 2t \\ q^2(t) &= -t^2/2 - C_2 t/2 + D_2 & \qquad p_2(t) &= 2t + C_2. \end{aligned}$$

Pro určení integračních konstant C_1, C_2, D_1, D_2 jsou obvykle k dispozici čtyři počáteční podmínky $q^1(0) = q_0^1,\ q^2(0) = q_0^2,\quad p_1(0) = p_1^{\,0},\ p_2(0) = p_2^{\,0}$.

Příklad 2.10. Uvažujme Lagrangián $L(t, q^1, q^2, \dot q^1, \dot q^2) = 2tq^1 - (\dot q^1)^2 + \frac{(\dot q^2)^3}{3}$ z Příkladu 2.7. Určete Hamiltonovy rovnice tohoto Lagrangiánu a obecně je vyřešte.

Řešení: V příkladě 2.7. jsme ukázali, že tento Lagrangián je regulární na otevřené množině $\{x \in R \times R^2 \times R^2 \mid \dot q^2 \neq 0\}$ v R^5 a na množině $\{x \in R \times R^2 \times R^2 \mid \dot q^2 = 0\}$ je tento Lagrangián singulární.

Dále jsme určili impulzy tohoto Lagrangiánu L

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial q^1} = -2\dot q^1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial q^2} = (\dot q^2)^2$$

a jeho Hamiltonián v kartézských souřadnicích je tvaru

$$H = -L + p_i \dot q^i = -2tq^1 + (\dot q^1)^2 - \frac{(\dot q^2)^3}{3} - 2(\dot q^1)^2 + (\dot q^2)^3 =$$

$$= -2tq^1 - (\dot q^1)^2 + \frac{2(\dot q^2)^3}{3}.$$

Připomeňme zde znovu důležitý fakt, že na okolích bodů z množiny $\{x \in R \times R^2 \times R^2 \mid \dot q^2 = 0\}$, na které je Lagrangián singulární, není Legendreovo zobrazení Leg bijektivní , to znamená že zde neexistují Legendreovy souřadnice a tudíž zde ani neexistují Hamiltonovy rovnice.

Dále z Příkladu 2.7. víme, že aby bylo zobrazení Leg v tomto případě bijektivní musíme jej uvažovat pouze na otevřené podmnožině $R \times R^2 \times R \times R^+ = \{x \in R \times R^2 \times R^2 \mid \dot q^2 > 0\}$, nebo na otevřené podmnožině $R \times R^2 \times R \times R^- = \{x \in R \times R^2 \times R^2 \mid \dot q^2 < 0\}$.

V dalších výpočtech se omezíme na body z množiny $R \times R^2 \times R \times R^+$. V těchto bodech je tedy Lagrangián L regulární a na okolí těchto bodů platí inverzní Legendreova transformace Leg^{-1} ve tvaru

$$(\mathsf{Leg}^{-1})_1 : R\times R^2\times R\times R^+ \ni (t,q^1,q^2,p_1,p_2)\to(t,q^1,q^2,\dot q^1,\dot q^2)\in R\times R^2\times R\times R^+,$$

kde $\dot q^1 = -\,p_1/2$ a $\dot q^2=\sqrt{p_2}$.

V Legendreových souřadnicích (t,q^1,q^2,p_1,p_2) bude mít Hamiltonián vyjádření

$$H(t,q^1,q^2,p_1,p_2)=H(t,q^1,q^2,\dot q^1,\dot q^2)\circ(\mathsf{Leg}^{-1})_1=-2tq^1-p_1{}^2/4+\frac{2(p_2)^{3/2}}{3}.$$

Hamiltonovy rovnice zadaného Lagrangiánu na množině $R\times R^2\times R\times R^+$ budou mít tvar

$$\frac{dq^1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1}=-\frac{p_1}{2}\qquad \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^1}=2t$$

$$\frac{dq^2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\sqrt{p_2}\qquad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^2}=0.$$

Z druhé Hamiltonovy rovnice druhé série (druhého řádku) okamžitě dostáváme $p_2=C_2$, kde C_2 je integrační konstanta. Také druhou rovnici první série lze přímo integrovat a dostaneme, že

$$p_1(t)=t^2+C_1,$$

kde C_1 je další integrační konstanta. Dosazením funkce $p_1(t)$ do první rovnice první série obdržíme

$$\frac{dq^1}{dt}=-\frac{t^2}{2}-\frac{C_1}{2},$$

a po integraci

$$q^1(t)=-\frac{t^3}{6}-\frac{C_1}{2}t+D_1.$$

Konečně první rovnice druhé série $\dfrac{dq^2}{dt}=\sqrt{p_2}$ s přihlédnutím, že $p_2=C_2$, dává po integraci $q^2(t)=\sqrt{C_2}t+D_2$. Celkově jsme tedy dostali řešení Hamiltonových rovnic ve tvaru

$$q^1(t)=-t^3/6-C_1t/2+D_1\qquad p_1(t)=t^2+C_1$$

$$q^2(t)=\sqrt{C_2}t+D_2\qquad p_2(t)=C_2.$$

Kontrolní úkol 2.3. Uvažujte Lagrangián tvaru $L(t,q,\dot q)=\frac{1}{2}(\dot q)^2-\frac{1}{2}kq^2$ z Kontrolního úkolu 2.2. Určete Hamiltonovy rovnice tohoto Lagrangiánu a obecně je vyřešte.

Kontrolní úkol 2.4. Uvažujte Lagrangián $L(t,q,\dot q)=t\cdot q\cdot\sqrt{\dot q}$. Ověřte jeho regularitu. Určete s ním asociovaný impulz a Hamiltonián. Napište tvar Legendreovy transformace a inverzní Legendreovy transformace a pak určete Hamiltonián a Lagrangian v Legendreových souřadnicích (t, q, p). Určete Hamiltonovy rovnice tohoto Lagrangiánu.

?

Kontrolní úkol 2.5. Uvažujte Lagrangián $L(t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = t^2 + q^1(\dot{q}^1)^2 + q^2(\dot{q}^2)^2$ z Kontrolního úkolu 2.2. Určete Hamiltonovy rovnice tohoto Lagrangiánu.

2.5. Variační princip pro Hamiltonovy rovnice

V předchozím odstavci jsme zavedli Hamiltonovy rovnice jako diferenciální rovnice pro řezy $\delta: R \to R \times R^m \times R^m = R \times R^{2m}$. Nyní ukážeme, že tyto rovnice jsou **variační**, tedy, že to jsou **rovnice pro extremály jistého variačního problému**.

Nejprve se podrobněji podívejme, o jaký variační problém jde. Jelikož extremály zde budou řezy z R do $R \times R^{2m}$, jedná se zřejmě o variační problém, kde konfigurační prostor je R^{2m}, rozšířený konfigurační prostor (prostor událostí) je $R \times R^{2m}$ a evoluční prostor je $R \times R^{2m} \times R^{2m}$. **Lagrangián musí být tedy funkce definovaná na otevřené množině v $R \times R^{2m} \times R^{2m}$.** Dále víme (viz Příklad 2.4), že **Eulerovy-Lagrangeovy rovnice tohoto Lagrangiánu jsou prvního řádu** (neboť Hamiltonovy rovnice jsou prvního řádu). To ovšem znamená, že tento Lagrangián musí být nutně **afinní funkce v prvních derivacích** (odtud mimo jiné okamžitě plyne, že je to singulární Lagrangián a jeho Hamiltonián a impulzy budou funkce definované na rozšířeném konfiguračním prostoru $R \times R^{2m}$ (srov. poslední diskutovaný Lagrangián z Příkladu 2.5)).

Označme hledaný Lagrangián $\tilde{L}$. Jelikož Eulerovy-Lagrangeovy rovnice tohoto Lagrangiánu mají být totožné s Hamiltonovými rovnicemi nějakého (regulárního) variačního problému pro křivky v R^m definovaného Lagrangiánem L, bude výhodné zvolit na $R \times R^{2m}$ souřadnice tak, aby to byly Legendreovy souřadnice Lagrangiánu L, tedy (t, q^i, p_i). Na evolučním prostoru $R \times R^{2m} \times R^{2m}$ pak vznikají souřadnice, které v souladu s dříve zavedeným označením budeme označovat $(t, q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_i)$. Prodloužením řezu $\delta: R \to R \times R^{2m}$, $\delta(t) = (t, q^i(t), p_i(t))$, do definičního oboru Lagrangiánu $\tilde{L}$ tedy bude řez $J^1\delta: R \to R \times R^{2m} \times R^{2m}$, $J^1\delta(t) = (t, q^i(t), p_i(t), \dot{q}^i(t), \dot{p}_i(t))$. Podmínka, že $\tilde{L}$ je afinní v proměnných $\dot{q}^i, \dot{p}_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, m$, znamená, že $\tilde{L}(t, q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_i)$ má tvar

$$\tilde{L} = a_j \dot{q}^j + b^j \dot{p}_j + c,$$

kde a_j, b^j, $j = 1, 2, \ldots, m$, a c jsou nějaké funkce proměnných (t, q^i, p_i).

Zkusíme tyto funkce najít. Nejprve spočítáme Eulerovy-Lagrangeovy výrazy Lagrangiánu $\tilde{L} = a_j \dot{q}^j + b^j \dot{p}_j + c$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i} &= \frac{\partial a_j}{\partial q^i}\dot{q}^j + \frac{\partial b^j}{\partial q^i}\dot{p}_j + \frac{\partial c}{\partial q^i} - \frac{da_i}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial a_j}{\partial q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j + \left(\frac{\partial b^j}{\partial q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right)\dot{p}_j + \frac{\partial c}{\partial q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial p_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{p}_i} = \frac{\partial a_j}{\partial p_i}\dot{q}^j + \frac{\partial b^j}{\partial p_i}\dot{p}_j + \frac{\partial c}{\partial p_i} - \frac{db^i}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial a_j}{\partial p_i} - \frac{\partial b^i}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j + \left(\frac{\partial b^j}{\partial p_i} - \frac{\partial b^i}{\partial p_j}\right)\dot{p}_j + \frac{\partial c}{\partial p_i} - \frac{\partial b^i}{\partial t}.$$

Eulerovy-Lagrangeovy rovnice proto můžeme napsat ve tvaru

$$\left(\frac{\partial a_j}{\partial q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial q^j}\right)\frac{dq^j}{dt} + \left(\frac{\partial b^j}{\partial q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right)\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial q^i},$$

$$\left(\frac{\partial a_j}{\partial p_i} - \frac{\partial b^i}{\partial q^j}\right)\frac{dq^j}{dt} + \left(\frac{\partial b^j}{\partial p_i} - \frac{\partial b^i}{\partial p_j}\right)\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial b^i}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial p_i}.$$

Nyní je porovnáme je s Hamiltonovými rovnicemi Lagrangiánu L, které, jak víme, mají tvar

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

a vidíme, že oba systémy rovnic jistě budou identické, položíme-li např.

$$c = -H, \quad a_j = p_j, \quad b^j = 0, \quad 1 \le j \le m\,.$$

To znamená, že jsme nalezli Lagrangián $\tilde{L}$ tvaru

$$\tilde{L} = -H + p_j\dot{q}^j\,,$$

který má požadované vlastnosti.

Výsledek, který jsme takto obdrželi shrnuje následující věta.

Věta 2.7. Nechť L je regulární Lagrangián definovaný na otevřené množině v $R \times R^m \times R^m$, H jeho Hamiltonián a p_i, $1 \le i \le m$, impulzy. Pak Hamiltonovy rovnice Lagrangiánu L jsou Eulerovy-Lagrangeovy rovnice Lagrangiánu

$$\tilde{L} = -H + p_j\dot{q}^j\,,$$

který je definovaný na otevřené množině v $R \times R^{2m} \times R^{2m}$.

Definice 2.5. Lagrangián $\tilde{L}$ se nazývá **rozšířený Lagrangián** asociovaný s Lagrangiánem L.

Podle Věty 1.4. mají všechny Lagrangiány ekvivalentní s Lagrangiánem $\tilde{L}$ tvar

$$\tilde{L}' = \tilde{L} + \frac{dF}{dt}\,,$$

kde F je libovolná funkce proměnných (t, q^i, p_i), tedy

$$\tilde{L}' = -H + p_j \dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial p_j}\dot{p}_j = -H + \frac{\partial F}{\partial t} + \left(p_j + \frac{\partial F}{\partial q^j} \right)\dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial p_j}\dot{p}_j .$$

Všimněte si, že z tohoto vztahu plyne, že Lagrangián, který je ekvivalentní s rozšířeným Lagrangiánem sám **nemusí být rozšířením** nějakého Lagrangiánu (tedy nemusí existovat Lagrangián $\bar{L}$ na $V \subset R \times R^m \times R^m$, pro nějž by platilo $\tilde{\bar{L}} = \tilde{L}'$).

2.6. Kanonické transformace

Uvažujme hladký lokální difeomorfismus $\alpha : R \times R^{2m} \to R \times R^{2m}$, který je **identitou na prvním faktoru**, tj. má tvar $\alpha(t,x) = (t, \alpha^1(t,x), \ldots, \alpha^{2m}(t,x))$, pro všechna $t \in R$ a $x \in R^{2m}$. Toto zobrazení indukuje lokální difeomorfismus prostoru $R \times R^{2m} \times R^{2m}$ na sebe, označovaný $J^1\alpha$ a definovaný vztahem

$$J^1\alpha(t,x,y) = (t, \alpha^1(t,x), \ldots, \alpha^{2m}(t,x), \dot{\alpha}^1(t,x,y), \ldots, \dot{\alpha}^{2m}(t,x,y)) ,$$

kde

$$\dot{\alpha}^p = \frac{d\alpha^p}{dt}, \quad 1 \le p \le 2m .$$

$J^1\alpha$ se nazývá (první) **prodloužení difeomorfismu** α.

Definice 2.6. Nechť L je regulární Lagrangián, (t, q^i, p_i) jeho Legendreovy souřadnice na otevřené množině $V \subset R \times R^m \times R^m$. Hladký difeomorfismus

$$\alpha : R \times R^m \times R^m \ni (t, q^i, p_i) \to (\bar{t}, \bar{q}^i, \bar{p}_i) \in R \times R^m \times R^m$$

fázového prostoru V na sebe takový, že $\bar{t} = t$, a rozšířené Lagrangiány $\tilde{L}$ a $\tilde{L} \circ J^1\alpha$ jsou ekvivalentní, se nazývá **kanonická transformace**.

Z definice vyplývá, že je-li α kanonická transformace, pak na V existuje inverzní zobrazení α^{-1}, které je také diferencovatelné třídy C^∞. **Složky zobrazení** α, tedy funkce $(t, \bar{q}^i, \bar{p}_i)$, můžeme proto vzít za **souřadnice na V**. Derivace zobrazení α i α^{-1} jsou dány jejich Jacobiho maticemi a ty jsou navzájem inverzní.

Jelikož $\tilde{L}$ je rozšířený Lagrangián k Lagrangiánu L, jsou jeho Eulerovy-Lagrangeovy rovnice identické s **Hamiltonovými rovnicemi Lagrangiánu L; v Legendreových souřadnicích** Lagrangiánu L mají tedy tvar

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} ,$$

kde H je Hamiltonián Lagrangiánu L. Je-li α kanonická transformace, pak podle definice **jsou tyto rovnice také rovnice pro extremály složeného Lagrangiánu** $\tilde{L} \circ J^1\alpha$. **Určíme**

nyní tyto rovnice (tj. Eulerovy-Lagrangeovy rovnice Lagrangiánu $\tilde{L} \circ J^1\alpha$) **v souřadnicích** $(t, \bar{q}^i, \bar{p}_i)$**:** Zaveďme označení

$$\bar{\tilde{L}} = \tilde{L} \circ J^1\alpha \quad \text{a} \quad \bar{H} = H \circ \alpha .$$

Pak, s využitím definice složek prodlouženého zobrazení $J^1\alpha$, můžeme psát

$$\bar{\tilde{L}} = \tilde{L} \circ J^1\alpha = (-H + p_i \dot{q}^i) \circ J^1\alpha = -(H \circ \alpha) + (p_i \circ \alpha)(\dot{q}^i \circ J^1\alpha) = -\bar{H} + \bar{p}_i \dot{\bar{q}}^i .$$

Odtud již snadno dostáváme Eulerovy-Lagrangeovy výrazy Lagrangiánu $\bar{\tilde{L}}$ v uvažovaných souřadnicích ve tvaru

$$\frac{\partial \bar{\tilde{L}}}{\partial \bar{q}^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{\tilde{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}^i} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}^i} - \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}^i} - \dot{\bar{p}}_i ,$$

$$\frac{\partial \bar{\tilde{L}}}{\partial \bar{p}^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{\tilde{L}}}{\partial \dot{\bar{p}}^i} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}^i} + \dot{\bar{q}}^i .$$

Dosazením řezů δ projekce $\pi_1 : R \times R^{2m} \to R$ dostaneme rovnice

$$\frac{d\bar{q}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \quad \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}^i} ,$$

což podle konstrukce jsou Hamiltonovy rovnice Lagrangiánu L zapsané v souřadnicích $(t, \bar{q}^i, \bar{p}_i)$.

Shrneme-li předchozí úvahy, můžeme (poněkud méně přesně) říci, že **kanonická transformace je difeomorfismus fázového prostoru na sebe, který zachovává tvar Hamiltonových rovnic**.

Z definice také plyne, že existuje funkce F na $V \subset R \times R^m \times R^m$ taková, že

$$\bar{\tilde{L}} = \tilde{L} + \frac{dF}{dt} .$$

F se nazývá **vytvořující funkce kanonické transformace** α.

Ve zbytku tohoto odstavce se budeme zabývat otázkou, **jak kanonické transformace hledat**.

Uvažujme zobrazení

$$\alpha : R \times R^m \times R^m \ni (t, q^i, p_i) \to (\bar{t}, \bar{q}^i, \bar{p}_i) \in R \times R^m \times R^m .$$

Je-li α kanonická transformace, existuje funkce F, definovaná na otevřené množině V v $R \times R^m \times R^m$, pro kterou platí

$$\bar{\tilde{L}}(t, \bar{q}^i, \bar{p}_i) - \tilde{L}(t, q^i, p_i) = \frac{dF}{dt} .$$

F lze tedy chápat jako funkci závislou na $4m+1$ „proměnných" $(t, q^i, p_i, \bar{q}^i, \bar{p}_i)$, které ovšem nejsou nezávislé: **pouze** $2m+1$ **z nich může být nezávislých, ty pak tvoří souřadnice na množině** V**. V těchto souřadnicích pak můžeme vyjádřit definiční podmínku pro kanonickou transformaci, ze které již bude možno určit rovnice zobrazení** α**.**

Z řady možností, které se takto nabízejí, vyšetříme dva významné případy, a to případ, kdy nové souřadnice budou mít tvar $(t,q^i,\bar{q}^i)$ a případ $(t,\bar{q}^i,p_i)$.

• (1) **Nechť** $(t,q^i,\bar{q}^i)$ **jsou souřadnice na** $V\subset R\times R^m\times R^m$. Znamená to, že zobrazení

$$\phi_1:(t,q^i,p_i)\to(t,q^i,\bar{q}^i)$$

je difeomorfismus, splňuje tedy podmínku

$$\det D\phi_1=\det\left(\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial p_j}\right)\neq 0.$$

Podmínka, aby zobrazení $\alpha:(t,q^i,p_i)\to(t,\bar{q}^i,\bar{p}_i)$ převádělo daný rozšířený Lagrangián na ekvivalentní, má v souřadnicích $(t,q^i,\bar{q}^i)$ tvar

$$-\bar{H}+\bar{p}_j\dot{\bar{q}}^j+H-p_j\dot{q}^j=\frac{dF}{dt},$$

kde všechny uvažované funkce závisí na proměnných $(t,q^i,\bar{q}^i)$. Můžeme tedy psát

$$\left(H-\bar{H}-\frac{\partial F}{\partial t}\right)-\left(p_j+\frac{\partial F}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j+\left(\bar{p}_j-\frac{\partial F}{\partial\bar{q}^j}\right)\dot{\bar{q}}^j=0,$$

Výraz na levé straně je funkce na *V*, která je afinní v proměnných $\dot{q}^i,\dot{\bar{q}}^i$, tj. polynom prvního stupně. Je proto roven nule právě když všechny jeho koeficienty jsou rovny nule. Dostáváme tak následující vztahy pro parciální derivace vytvořující funkce *F*:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=H-\bar{H},$$
$$\frac{\partial F}{\partial q^j}=-p_j,$$
$$\frac{\partial F}{\partial\bar{q}^j}=\bar{p}_j,$$

kde $1\le j\le m$. Odtud je vidět, že **je-li dána funkce** $F(t,q^i,\bar{q}^i)$, pak

- **druhá sada** těchto vztahů představuje vyjádření funkcí p_j, $1\le j\le m$, jako funkcí proměnných $(t,q^i,\bar{q}^i)$, tedy **implicitní rovnice pro** $\bar{q}^j(t,q^i,p_i)$, $1\le j\le m$. Jelikož podle předpokladu platí $\det\left(\partial\bar{q}^i/\partial p_j\right)\neq 0$, tyto rovnice jsou **řešitelné** podle Věty o implicitním zobrazení, a funkce $\bar{q}^j(t,q^i,p_i)$, $1\le j\le m$, to znamená „**první část" hledaných složek zobrazení** $\alpha:(t,q^i,p_i)\to\left(t,\bar{q}^i(t,q^j,p_j),\bar{p}_i(t,q^j,p_j)\right)$, **z nich lze explicitně určit**.

- **Třetí sada** těchto vztahů představuje **vyjádření funkcí** $\bar{p}_i$, $1\le i\le m$, které tvoří „**druhou část" hledaných složek zobrazení** $\alpha:(t,q^i,p_i)\to\left(t,\bar{q}^i(t,q^j,p_j),\bar{p}_i(t,q^j,p_j)\right)$, jako funkcí proměnných $(t,q^j,\bar{q}^j)$. Dosadíme-li do nich výše obdržené vyjádření funkcí $\bar{q}^i$ jako funkcí proměnných (t,q^j,p_j), dostaneme $\bar{p}_i$ jako funkce proměnných (t,q^j,p_j).

To ovšem znamená, že **zobrazení** α **je plně určeno (funkcionálními) rovnicemi**

$$p_i(t,q^j,\bar{q}^j)=-\frac{\partial F}{\partial q^i},\quad \bar{p}_i(t,q^j,\bar{q}^j)=\frac{\partial F}{\partial\bar{q}^i},\quad 1\le i\le m,$$

kde F může být zcela libovolná diferencovatelná funkce proměnných $(t, q^j, \bar{q}^j)$. Rovnice $H - \bar{H} = \partial F / \partial t$ pak vyjadřuje **vztah mezi původním a transformovaným Hamiltoniánem**.

Zbývá ještě určit, za jakých podmínek (tj. **pro jaká F) je α hladký difeomorfismus**. Podle Věty o inverzním zobrazení stačí, aby zobrazení α bylo hladké a jeho Jacobiho matice byla regulární (v každém bodě definičního oboru). Platí ovšem $\alpha = \beta \circ \phi_1$, kde $\phi_1 : (t, q^i, p_i) \to (t, q^i, \bar{q}^i)$ je uvažovaná transformace a $\beta : (t, q^i, \bar{q}^i) \to (t, \bar{q}^i, \bar{p}_i)$. Je-li zobrazení ϕ_1 hladké a je-li funkce F hladká, je také zobrazení α hladké, neboť vzniká složením dvou hladkých zobrazení. K tomu, aby Jacobiho matice zobrazení $\alpha = \beta \circ \phi_1$ byla regulární, stačí, aby Jacobiho matice zobrazení $\beta : (t, q^i, \bar{q}^i) \to (t, \bar{q}^i, \bar{p}_i)$ byla regulární; pro determinant této Jacobiho matice ovšem platí

$$\det D\beta = \det\left(\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^j}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{q}^i \partial q^j}\right).$$

Uvedené výsledky shrnuje následující věta.

Věta 2.8. Nechť L je regulární Lagrangián, (t, q^j, p_j) jeho Legendreovy souřadnice na otevřené množině $V \subset R \times R^m \times R^m$, a nechť $\bar{q}^i$, $1 \le i \le m$, jsou hladké funkce na V, splňující podmínku

$$\det\left(\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial p_j}\right) \neq 0.$$

Pak pro libovolnou hladkou funkci $F(t, q^j, \bar{q}^j)$ na V, splňující podmínku

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{q}^i \partial q^j}\right) \neq 0,$$

je zobrazení

$$\alpha : (t, q^i, p_i) \to (t, \bar{q}^i, \bar{p}_i)$$

definované vztahy

$$p_i(t, q^j, \bar{q}^j) = -\frac{\partial F}{\partial q^i}, \quad \bar{p}_i(t, q^j, \bar{q}^j) = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}^i}, \quad 1 \le i \le m$$

kanonická transformace na V. Pro Hamiltoniány H a $\bar{H} = H \circ \alpha$ pak platí

$$\bar{H}(t, q^i, \bar{q}^i) = H(t, q^i, \bar{q}^i) - \frac{\partial F}{\partial t}(t, q^i, \bar{q}^i).$$

- (2) **Nechť $(t, \bar{q}^i, p_i)$ jsou souřadnice na** $V \subset R \times R^m \times R^m$. Znamená to, že zobrazení

$$\phi_2 : (t, q^i, p_i) \to (t, \bar{q}^i, p_i)$$

je difeomorfismus, splňuje tedy podmínku

$$\det D\phi_2 = \det\left(\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j}\right) \neq 0 .$$

Podmínka, aby zobrazení $\alpha:(t,q^i,p_i)\to(\bar{t},\bar{q}^i,\bar{p}_i)$ převádělo daný rozšířený Lagrangián na ekvivalentní, má v souřadnicích $(t,\bar{q}^i,p_i)$ tvar

$$-\bar{H} + \bar{p}_j\dot{\bar{q}}^j + H - p_j\dot{q}^j = \frac{dF}{dt},$$

kde všechny uvažované funkce závisí na proměnných $(t,\bar{q}^i,p_i)$. Tento vztah upravíme do tvaru polynomu prvního stupně v proměnných $\dot{\bar{q}}^i$, $\dot{p}_i$: Všimněme si, že

$$H - \bar{H} + \bar{p}_j\dot{\bar{q}}^j = \frac{dF}{dt} + p_j\dot{q}^j = \frac{d}{dt}\left(F + p_j q^j\right) - \dot{p}_j q^j .$$

Zavedeme-li tedy funkci $\tilde{F}(t,\bar{q}^i,p_i) = F + p_j q^j(t,\bar{q}^i,p_i)$, můžeme psát

$$H - \bar{H} + \bar{p}_j\dot{\bar{q}}^j + q^j\dot{p}_j = \frac{d\tilde{F}}{dt},$$

tj.

$$\left(H - \bar{H} - \frac{\partial\tilde{F}}{\partial t}\right) + \left(\bar{p}_j - \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\bar{q}^j}\right)\dot{\bar{q}}^j + \left(q^j - \frac{\partial\tilde{F}}{\partial p_j}\right)\dot{p}_j = 0 .$$

Opět vidíme, že všechny koeficienty musí být rovny nule, tedy platí

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial t} = H - \bar{H},$$
$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\bar{q}^j} = \bar{p}_j,$$
$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial p_j} = q^j,$$

pro $1 \le j \le m$. Význam těchto vztahů je analogický jako v bodě (1) výše: **je-li dána funkce** $\tilde{F}(t,\bar{q}^i,p_i)$, pak

- **třetí sada** těchto vztahů představuje vyjádření funkcí q^j, $1 \le j \le m$, jako funkcí proměnných $(t,\bar{q}^i,p_i)$, tedy **implicitní rovnice pro** $\bar{q}^j(t,q^i,p_i)$, $1 \le j \le m$, což je „**první část**" **složek zobrazení** α. Jelikož podle předpokladu platí $\det\left(\partial\bar{q}^i/\partial q^j\right) \neq 0$, tyto rovnice jsou **řešitelné** podle Věty o implicitním zobrazení, a funkce $\bar{q}^j(t,q^i,p_i)$, $1 \le j \le m$, **z nich lze explicitně určit**.

- **Druhá sada** těchto vztahů představuje **vyjádření funkcí** $\bar{p}_j$, $1 \le j \le m$, které tvoří „**druhou část**" **složek zobrazení** α, jako funkcí proměnných $(t,\bar{q}^i,p_i)$. Dosadíme-li do nich výše obdržené vyjádření funkcí $\bar{q}^j$ jako funkcí proměnných (t,q^i,p_i), dostaneme $\bar{p}_j$ jako funkce Legendreových proměnných (t,q^i,p_i).

Nepřehlédněme, že funkce $\tilde{F}(t,\bar{q}^i,p_i)$ může být volena **zcela libovolně**, přičemž každá její konkrétní volba dává nějaké zobrazení α. To ovšem znamená, že α **je plně určeno (funkcionálními) rovnicemi**

$$q^i(t,\bar{q}^j,p_j)=\frac{\partial F}{\partial p_i},\quad \bar{p}_i(t,\bar{q}^j,p_j)=\frac{\partial F}{\partial \bar{q}^i},\quad 1\le i\le m\,,$$

kde $F(t,\bar{q}^i,p_i)$ je libovolná pevně zvolená funkce. Rovnice $H-\bar{H}=\partial F/\partial t$ pak opět vyjadřuje **vztah mezi původním a transformovaným Hamiltoniánem**.

Zbývá ještě vyšetřit podmínky, kdy je α hladký difeomorfismus. Úvaha je zcela analogická argumentaci v bodě (1) výše; provedeme-li ji, zjistíme, že stačí aby transformace ϕ_2 a funkce F byly hladké, a aby platilo

$$\det\left(\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_j}\right)=\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{q}^i\partial p_j}\right)\neq 0\,.$$

Uvedené výsledky můžeme nyní zformulovat takto:

Věta 2.9. Nechť L je regulární Lagrangián, (t,q^j,p_j) jeho Legendreovy souřadnice na otevřené množině $V\subset R\times R^m\times R^m$, a nechť $\bar{q}^i$, $1\le i\le m$, jsou hladké funkce na V, splňující podmínku

$$\det\left(\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j}\right)\neq 0\,.$$

Pak pro libovolnou hladkou funkci $F(t,\bar{q}^i,p_i)$ na V, splňující podmínku

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{q}^i\partial p_j}\right)\neq 0\,,$$

je zobrazení

$$\alpha:(t,q^i,p_i)\to(t,\bar{q}^i,\bar{p}_i)$$

definované vztahy

$$q^i(t,\bar{q}^j,p_j)=\frac{\partial F}{\partial p_i},\quad \bar{p}_i(t,\bar{q}^j,p_j)=\frac{\partial F}{\partial \bar{q}^i},\quad 1\le i\le m$$

kanonická transformace na V. Pro Hamiltoniány H a $\bar{H}=H\circ\alpha$ pak platí

$$\bar{H}(t,\bar{q}^i,p_i)=H(t,\bar{q}^i,p_i)-\frac{\partial F}{\partial t}(t,\bar{q}^i,p_i)\,.$$

Úkol : Vyšetřete podrobně případy $F(t,q^i,\bar{p}_i)$ a $F(t,p_i,\bar{p}_i)$.

Příklad 2.11. Určíme kanonickou transformaci definovanou vytvořující funkcí

$$F=\sum_{i=1}^{m}q^i\bar{q}^i\,.$$

Jde o kanonickou transformaci charakterizovanou ve Větě 2.8. Uvažovaná vytvořující funkce je hladká funkce typu $F(t,q^j,\bar{q}^j)$ a platí pro ni

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\bar{q}^i\partial q^j}\right) = \det(\delta_{ij}) = \det E = 1 \neq 0 .$$

Proto kanonická transformace vytvořená funkcí F existuje a je to zobrazení

$$\alpha : (t, q^i, p_i) \to (t, \bar{q}^i, \bar{p}_i)$$

definované vztahy

$$p_i(t,q^j,\bar{q}^j) = -\frac{\partial F}{\partial q^i} = -\bar{q}^i, \quad \bar{p}_i(t,q^j,\bar{q}^j) = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}^i} = q^i, \quad 1 \le i \le m .$$

Rovnice zobrazení α mají proto tvar

$$\bar{q}^i = -p_i, \quad \bar{p}_i = q^i, \quad 1 \le i \le m ,$$

neboli, α je zobrazení

$$\alpha : (t, q^i, p_i) \to (t, -p_i, q^i) .$$

Protože $\partial F/\partial t = 0$, platí pro odpovídající Hamiltoniány H a $\bar{H} = H \circ \alpha$ jednoduchý vztah

$$\bar{H} = H .$$

Přesvědčíme se, že Hamiltonovy rovnice mají v obou případech skutečně stejný tvar. V souřadnicích (t,q^i,p_i), jak víme, platí

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} .$$

Jelikož

$$\frac{d\bar{q}^i}{dt} = \frac{\partial\bar{q}^i}{\partial t} + \frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial\bar{q}^i}{\partial p_j}\dot{p}_j = -\dot{p}_i = -\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_i} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i},$$

$$\frac{d\bar{p}_i}{dt} = \frac{\partial\bar{p}_i}{\partial t} + \frac{\partial\bar{p}_i}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial\bar{p}_i}{\partial p_j}\dot{p}_j = \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}^i} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}^i},$$

přejdou po transformaci tyto rovnice na tvar

$$\frac{d\bar{q}^i}{dt} = \frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{p}_i}, \quad \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{q}^i} .$$

2.7. Hamiltonova-Jacobiho rovnice

Teorii kanonických transformací lze využít jako **integrační metodu** pro Hamiltonovy rovnice, a tedy jako integrační metodu pro hledání extremál regulárních variačních problémů.

Je totiž zřejmé, že je-li $\alpha:(t,q^i,p_i)\to(t,\bar{q}^i,\bar{p}_i)$ kanonická transformace, pro niž transformované Hamiltonovy rovnice mají tvar

$$\frac{d\bar{q}^i}{dt}=0,\quad \frac{d\bar{p}_i}{dt}=0,$$

pak jsou okamžitě řešitelné: jejich řešením jsou evidentně řezy $\delta(t,\bar{q}^i,\bar{p}_i)$,

$$\bar{q}^i(t,q^j,p_j)=a^i,\quad \bar{p}_i(t,q^j,p_j)=b_i,$$

kde a^i, b_i, $1\le i\le m$, jsou konstanty. Tyto křivky tedy představují **úplnou množinu řešení Hamiltonových rovnic Lagrangiánu** L, zapsanou v souřadnicích $(t,\bar{q}^i,\bar{p}_i)$. Jelikož vztahy $\bar{q}^i(t,q^j,p_j)=a^i$, $\bar{p}_i(t,q^j,p_j)=b_i$ jsou implicitní rovnice pro funkce q^i, p_i, lze z nich vyjádřit řešení Hamiltonových rovnic Lagrangiánu L **v Legendreových souřadnicích**: dostaneme

$$\delta(t,q^i(t,a^j,b_j),p_i(t,a^j,b_j)),$$

tedy řešení závislé na parametru (čase) t a $2m$ konstantách a^i, b_i, $1\le i\le m$ (integrační konstanty). Odtud lze přímo určit **úplnou množinu extremál** daného Lagrangiánu ve tvaru

$$\gamma(t,q^i(t,a^j,b_j)),\quad \text{kde}\quad a^j,b_j\in R,\ 1\le j\le m.$$

Z uvedené analýzy vyplývá, že je třeba se zaměřit na hledání **vytvořujících funkcí kanonických transformací**, které transformují Hamiltonovy rovnice (v Legendreových souřadnicích) na tvar

$$\frac{d\bar{q}^i}{dt}=0,\quad \frac{d\bar{p}_i}{dt}=0.$$

Této podmínce jistě vyhovují kanonické transformace, pro něž

$$\bar{H}=0.$$

Označme vytvořující funkce takových kanonických transformací $-S$. Podle Věty 2.8 je kanonická transformace $\alpha:(t,q^i,p_i)\to(t,\bar{q}^i,\bar{p}_i)$, určená vytvořující funkcí $-S(t,q^j,\bar{q}^j)$, daná implicitními rovnicemi

$$p_i(t,q^j,\bar{q}^j)=\frac{\partial S}{\partial q^i},\quad \bar{p}_i(t,q^j,\bar{q}^j)=-\frac{\partial S}{\partial \bar{q}^i},\quad 1\le i\le m,$$

a jelikož Hamiltonián $\bar{H}=H\circ\alpha$ má splňovat podmínku $\bar{H}=0$, musí také platit

$$H(t,q^j,\bar{q}^j)+\frac{\partial S}{\partial t}(t,q^j,\bar{q}^j)=0.$$

Funkce $\bar{q}^j$ lze ovšem vyjádřit pomocí Legendreových souřadnic a Hamiltonián H ve výše uvedeném vztahu uvažovat jako funkci $H(t,q^j,p_j)$. Za impulzy pak můžeme dosadit příslušné derivace vytvořující funkce. Podmínka $\bar{H}=0$ tak získá tvar

$$H\left(t,q^j,\frac{\partial S}{\partial q^j}\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0,$$

což je **parciální diferenciální rovnice prvního řádu pro funkci *S***; nazývá se **Hamiltonova-Jacobiho rovnice**.

Kanonická transformace, pro kterou $\overline{H}=0$, ovšem vede na Hamiltonovy rovnice, jejichž řešením jsou funkce $\overline{q}^i = a^i$ =konst. Stačí proto nalézt takové **řešení *S* Hamiltonovy-Jacobiho rovnice, které závisí na proměnných** (t, q^j) **a *m* parametrech** a^j, $1 \le j \le m$. Z Věty 2.8 dále plyne, že **toto řešení** $S(t, q^j, a^j)$ **musí splňovat podmínku**

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial a^i}\right) \neq 0 .$$

V teorii parciálních diferenciálních rovnic se takové řešení nazývá **úplný integrál**.

Nyní již můžeme zformulovat základní tvrzení, které shrnuje uvedenou integrační metodu.

Věta 2.10 (Jacobiho teorém). Nechť L **je regulární Lagrangián,** H, p_j **jeho Hamiltonián a impulzy. Nechť** $S(t, q^j, a^j)$ **je úplný integrál Hamiltonovy-Jacobiho rovnice**

$$H\left(t, q^j, \frac{\partial S}{\partial q^j}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 ,$$

tj. funkce splňující podmínku

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^j}\right) \neq 0 .$$

Pak úplný systém extremál Lagrangiánu L **je dán systémem implicitních rovnic**

$$\frac{\partial S}{\partial a^i} = \text{konst.} = -b^i, \quad 1 \le i \le m .$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že každé řešení $q^i(t, a^j, b_j)$ implicitních rovnic

$$\frac{\partial S}{\partial a^i}(t, q^j, a^i) = \text{konst.} = -b^i, \quad 1 \le i \le m$$

je extremála Lagrangiánu L. Především se ujistíme, že tyto rovnice jsou skutečně řešitelné: podmínka jejich řešitelnosti má podle **Věty o implicitním zobrazení** tvar

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^j}\right) \neq 0$$

a je splněna díky tomu, že S je úplný integrál. Nechť tedy řez $\delta : R \to R \times R^m \times R^m$ je řešením uvedených rovnic, tj. pro jeho složky $q^i(t)$, $1 \le i \le m$, platí

$$\frac{\partial S}{\partial a^i}(t, q^j, a^i) = -b^i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial a^i} = 0 .$$

Spočítáme-li uvedenou totální derivaci podél zvoleného řezu, dostaneme:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a^i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial a^i} \frac{dq^j}{dt} = 0 .$$

Funkce *S* je podle předpokladu řešením Hamiltonovy-Jacobiho rovnice. Proto pro ni platí

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a^i} = \frac{\partial}{\partial a^i} \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial a^i} = -\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial a^i} = -\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial a^i} .$$

Dosazení do předchozího vztahu dává

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial a^i} \left(\frac{dq^j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = 0 , \qquad 1 \le i \le m .$$

Matice $\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial a^i} \right)$ je podle předpokladu regulární; po vynásobení inverzní maticí vidíme, že δ splňuje první sadu Hamiltonových rovnic,

$$\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} .$$

Pro funkci *S* dále platí

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q^i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i} \dot{q}^j ,$$

a zároveň díky Hamiltonově-Jacobiho rovnici,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q^i} H(t, q^j, p_j) = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i} .$$

Odtud plyne, že δ splňuje také rovnice

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i} \left(\frac{dq^j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) - \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} ,$$

což je druhá sada Hamiltonových rovnic Lagrangiánu *L*. Celkově je proto $\delta = J^1\gamma$, kde γ je extremála, jinými slovy složky $q^i(t)$ řezu δ jsou řešením Eulerových Lagrangeových rovnic Lagrangiánu *L*.

Zbývá dokázat i obrácený vztah, tj. že každá extremála $\gamma(t) = (t, q^i(t))$ Lagrangiánu *L* vyhovuje implicitním rovnicím

$$\frac{\partial S}{\partial a^i}(t, q^j, a^j) = b_i .$$

Podle předpokladu $J^1\gamma$ splňuje Hamiltonovy rovnice

$$\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} .$$

Je-li *S* úplný integrál Hamiltonovy-Jacobiho rovnice, pak ovšem podél řezu γ dostáváme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial a^i}=\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial a^i}+\frac{\partial^2 S}{\partial q^j\partial a^i}\frac{dq^j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial a^i}+\frac{\partial^2 S}{\partial q^j\partial a^i}\frac{\partial H}{dp_j}=-\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial a^i}+\frac{\partial H}{dp_j}\frac{\partial^2 S}{\partial q^j\partial a^i}=0\,,$$

což jsme chtěli dokázat. ♦

Integrační metoda pro regulární variační rovnice, která je obsahem Jacobiho teorému, se nazývá Jacobiho integrační metoda. Používá se při hledání extremál jako alternativní metoda k řešení Eulerových-Lagrangeových rovnic. Někdy je totiž jednodušší vyřešit jednu parciální diferenciální rovnici 1. řádu, než systém obyčejných diferenciálních rovnic 2.řádu. Použití Jacobiho metody je výhodné zvláště v případě, kdy **Hamiltonián nezávisí na parametru** t (tj. je konstantní podél extremál). V tom případě získá Jacobiho rovnice jednodušší tvar

$$H\left(q^i,\frac{\partial S}{\partial q^i}\right)=\text{konst.}$$

a lze ji často řešit **metodou separace proměnných**.

Poznámka. V teorii diferenciálních rovnic se systému $2m$ obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu tvaru

$$\frac{dq^j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

říká **charakteristické rovnice** parciální diferenciální rovnice

$$H\left(t,q^j,\frac{\partial S}{\partial q^j}\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0\,.$$

Z důkazu Jacobiho teorému vidíme, že nalezením úplného integrálu této parciální diferenciální rovnice (Hamiltonovy-Jacobiho rovnice) lze určit úplný systém řešení charakteristických rovnic (Hamiltonových rovnic). Tímto řešením je množina křivek v R^{2m}, závislá na $2m$ parametrech (integračních konstantách) a^i, b_i, $1\le i\le m$. Křivky jsou určeny implicitně rovnicemi

$$\frac{\partial S}{\partial a^i}(t,q^j,a^j)=\text{konst.}=-b_i,\qquad p_i(t,q^j,a^j)=\frac{\partial S}{\partial q^i},\quad 1\le i\le m\,.$$

Příklad 2.12. Uvažujme Lagrangián tvaru $L(t,q,\dot q)=\sqrt{t^2+q^2}\sqrt{1+\dot q^2}$. Užitím Hamilton-Jacobiho rovnice nalezněte úplný systém extremál tohoto Lagrangiánu.

Řešení. Snadno ověříme, že tento Lagrangián je v bodech $x\in R\times R\times R$, pro které $\dot q\ne 0$, regulární. Hamiltonián má v Legendreových souřadnicích (t,q,p) vyjádření

$$H=-\sqrt{t^2+q^2-p^2}\,.$$

Hamilton Jacobiho rovnice tohoto Lagrangiánu je tvaru

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\sqrt{t^2+q^2-\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2}=0,$$

nebo po umocnění na druhou lze psát

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = t^2 + q^2.$$

Je vidět, že v poslední rovnici můžeme separovat proměnné

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - t^2 = q^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2.$$

Má li tato rovnice platit bez ohledu na to, jak se mění proměnné na levé a pravé straně, musí být jak levá tak pravá strana této rovnice rovny nějaké společné konstantě, kterou označíme $-C$. Takže dostáváme dvě rovnice

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - t^2 = -C, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - q^2 = C,$$

kde druhá rovnice je pravá strana výše uvedené rovnice ovšem se znaménkem mínus. Odsud snadno vyjádříme parciální derivace $\frac{\partial S}{\partial t}$ a $\frac{\partial S}{\partial q}$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) = \sqrt{t^2 - C}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right) = \sqrt{q^2 + C}.$$

Úplný integrál tedy dostáváme integrací totálního diferenciálu funkce $S(t,q)$

$$S = \int \sqrt{t^2 - C}\,dt + \int \sqrt{q^2 + C}\,dq =$$

$$= \frac{1}{2} t\sqrt{t^2 - C} - \frac{C}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 - C}\right| + \frac{1}{2} q\sqrt{q^2 + C} - \frac{C}{2}\ln\left|q + \sqrt{q^2 + C}\right| + C_0.$$

Ověřte si splnění podmínky $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^j}\right) \neq 0$, která pro tento případ zní $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial C}\right) = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial C}\right)$. Obecné řešení Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, tzn. úplný systém extremál tohoto Lagrangiánu lze tedy nalézt pomocí Jacobiho teorému ze vztahu

$$\frac{\partial S}{\partial C} = A,$$

kde A je libovolná konstanta. Po provedení parciální derivace $\frac{\partial S}{\partial C}$ a úpravě dostáváme

$$\ln\left|\frac{q + \sqrt{q^2 + C}}{t + \sqrt{t^2 - C}}\right| = 2A,$$

což po odlogaritmování dává

$$\frac{q + \sqrt{q^2 + C}}{t + \sqrt{t^2 - C}} = K,$$

kde $K = \pm e^{2A}$. Úpravami posledního vztahu dospějeme k úplnému systému extremál v implicitním tvaru

$$t^2 - \frac{1 - K^2}{K} t \cdot q - q^2 = C\left(\frac{K^2 + 1}{2K}\right)^2.$$

Kontrolní úkol 2.6. Uvažujte Lagrangián tvaru $L(t,q,\dot{q}) = t \cdot q \cdot \sqrt{\dot{q}}$. Sestavte Hamilton-Jacobiho rovnici, metodou separace proměnných nalezněte její úplný integrál a pak nalezněte úplný systém řešení Eulerovy-Lagrangeovy rovnice tohoto Lagrangiánu.

Kontrolní úkol 2.7. Uvažujte Lagrangián tvaru $L(t,q,\dot{q}) = t \cdot q \cdot \dot{q}^2$. Sestavte Hamilton-Jacobiho rovnici, metodou separace proměnných nalezněte její úplný integrál a pak nalezněte úplný systém řešení Eulerovy-Lagrangeovy rovnice tohoto Lagrangiánu. Nakonec určete tu extremálu, která splňuje podmínky $q(1) = 0$, $q(e) = 1$.

Korespondenční úkoly

Vyřešte následující korespondenční úkoly, vypracujte protokol s podrobným postupem řešení a výsledkem. Tento protokol pak zašlete ke kontrole vedoucímu kurzu v termínu stanoveném harmonogramem studia.

Korespondenční úkol 2

Uvažujte Lagrangián $L(t,q^1,q^2,\dot{q}^1,\dot{q}^2)=(\dot{q}^1)^2+(q^2)^2+(\dot{q}^2)^2$. Ověřte jeho regularitu, určete Hamiltonián a impulzy asociované s tímto Lagrangiánem. Sestavte Hamiltonovy rovnice a obecně je vyřešte.

Korespondenční úkol 3

Uvažujte Lagrangián tvaru $L(t,q,\dot{q})=\dfrac{1}{2m}(\dot{q}^2-m^2\omega^2q^2)$, kde m,ω jsou kladné konstanty. Ověřte regularitu Lagrangiánu, určete jeho impulzy a Hamiltonián. Napište tvar Legendreovy transformace a inverzní Legendreovy transformace a pak určete Hamiltonián a Lagrangián v Legendreových souřadnicích. Napište Hamiltonovy rovnice. Nakonec sestavte Hamilton-Jacobiho rovnici (využijte zákon zachování energie (Lagrangián nezávisí na t)), nalezněte její úplný integrál a pak nalezněte úplný systém řešení Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, resp. odpovídajících Hamiltonových rovnic tohoto Lagrangiánu.

Řešení kontrolních úkolů

Kontrolní úkol 1.2. : $\dfrac{\partial M}{\partial q} - \dfrac{\partial N}{\partial t} = 0,$ nejedná se o diferenciální rovnici, řešení neobsahuje integrační konstanty, proto nemůže obecně splnit zadané podmínky.

Kontrolní úkol 1.3. : $y(x) = \dfrac{x}{6}(1 - x^2).$

Kontrolní úkol 1.4. : $y(x) = \dfrac{1}{4}(x^2 + 3x).$

Kontrolní úkol 1.5. : $y(x) = \dfrac{1}{2}x.$

Kontrolní úkol 2.1. L je regulární na $R \times R \setminus \{0\} \times R \setminus \{0\} \times R^2$,
$p_1 = 2q^1\dot{q}^1, \quad p_1 = 2q^2\dot{q}^2, \quad H(t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = -t^2 + q^1(\dot{q}^1)^2 + q^2(\dot{q}^2)^2,$

$\mathsf{Leg} : R \times (R \setminus \{0\})^2 \times R^2 \ni (t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \to (t, q^1, q^2, 2q^1\dot{q}^1, 2q^2\dot{q}^2) \in R \times (R \setminus \{0\})^2 \times R^2,$

$\mathsf{Leg}^{-1} : R \times (R \setminus \{0\})^2 \times R^2 \ni (t, q^1, q^2, p_1, p_2) \to (t, q^1, q^2, p_1/2q_1, p_2/2q_2) \in R \times (R \setminus \{0\})^2 \times R^2,$

$$H(t, q^1, q^2, p_1, p_2) = -t^2 + \frac{p_1^2}{4q^1} + \frac{p_2^2}{4q^2}.$$

Kontrolní úkol 2.2. L je regulární na $R \times R \times R, \quad p = \dot{q}, \quad H(t, q, \dot{q}) = \dfrac{1}{2}(\dot{q})^2 + \dfrac{1}{2}k(q)^2,$

Leg a Leg^{-1} jsou identická zobrazení, $H(t, q, p) = \dfrac{1}{2}p^2 + \dfrac{1}{2}kq^2.$

Kontrolní úkol 2.3. $\dfrac{dq}{dt} = p, \quad \dfrac{dp}{dt} = -kq, \quad q(t) = C_1 \cos(\sqrt{k}t) + D_1 \sin(\sqrt{k}t),$
$p(t) = -C_1\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}t) + C_2\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}t).$

Kontrolní úkol 2.4. $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{t^2q^2}{4p^2}, \quad \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{t^2q}{2p}.$

Kontrolní úkol 2.5.

$$\frac{dq^1}{dt} = \frac{p_1}{2q^1} \qquad \frac{dp_1}{dt} = \frac{p_1^2}{4(q^1)^2}$$

$$\frac{dq^2}{dt} = \frac{p_2}{2q^2} \qquad \frac{dp_2}{dt} = \frac{p_1^2}{4(q^2)^2}.$$

Kontrolní úkol 2.6. $q^3 = C_1t^3 + C_2.$

Kontrolní úkol 2.7. $q^3 = \ln^2 t.$

LITERATURA

[1] I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, New Jersey,1963
[2] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I, II*, Springer, Berlin, 1996
[3] J. Jost, X. Li-Jost, *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998
[4] M.I. Krasnov, G.I. Makarenko, A.I. Kiselev, *Problems and Excercises in the Calculus of Variations*, Mir Publishers, Moscow, 1975, Second printing 1984
[5] O. Krupková, *Matematika 3*, distanční opora, Ostravská univerzita, Ostrava, 2004
[6] J. W. Leech, *Klasická mechanika*, SNTL Praha, 1970
[7] E.T. Whittaker, *A Treatise on Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, The University Press, Cambridge, 1917.