„PRINCIP NEZÁVISLOSTI POHYBŮ“ A „SKLÁDÁNÍ RYCHLOSTÍ“ VE VÝUCE FYZIKY

Pavla MUSILOVÁ, Jana MUSILOVÁ

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Kotlářská 2, 611 37 Brno, pavla@physics.muni.cz, janam@physics.muni.cz

Abstrakt:
Při výuce středoškolské fyziky, v učebnicích a ve výukových textech obecně, se objevuje řada pojmů s názvem „princip“. Je otázkou, nakolik jsou tyto „principy“ skutečnými principy, tj. axiomy, resp. postuláty stojícími v základech klíčových fyzikálních teorií. Na učebnicových příkladech (nejen z *fyziky) lze často doložit (někdy až zavádějící) nadužívání slova „princip“. A to i tam, kde se z hlediska příslušné disciplíny* o princip *v pravém slova smyslu nejen nejedná, ale kde tvrzení takto nazývané nemá v jejím rámci ani zdaleka obecnou platnost. Příspěvek neřeší tuto otázku v obecné poloze ani v úplnosti. Jeho těžištěm, následujícím po úvodní poznámce k* pojmu *„princip“, je podrobnější rozbor ukázkového příkladu uvedeného typu, tzv. „principu nezávislosti pohybů“, jímž ve výukových fyzikálních textech často začíná výklad klasické mechaniky.*

1. Úvod: Princip a „princip“

V současných koncepcích vzdělávání dominuje cíl, aby žáci, resp. studenti získali řadu kompetencí, přičemž do pozadí oproti nim ustupuje požadavek znalostí (vědomostí s porozuměním) a dovedností (schopnosti praktického použití znalostí), často odsouzený k zavržení do kategorie rutinní praxe, resp. paměťového učení. Jednou z preferovaných kompetencí je schopnost získávání informací z různých zdrojů. Nejčastější a nejpohodlnější, ne však nejvhodnější pomůckou se žákům a studentům stala Wikipedie, kde žáci „snadno a rychle“ získají a nekriticky přebírají informace nejen fyzikální. Je tomu tak i s tzv. „principem nezávislosti pohybů“, k němuž lze na Wikipedii najít řadu odkazů. Obsah odkazovaných textů však bohužel nekoresponduje s požadavkem získávání *bezchybných* informací, natož kompetencí. (Odkazy neuvádíme, „vyskočí“ při zadání hesla „princip nezávislosti pohybů“ na Google.)

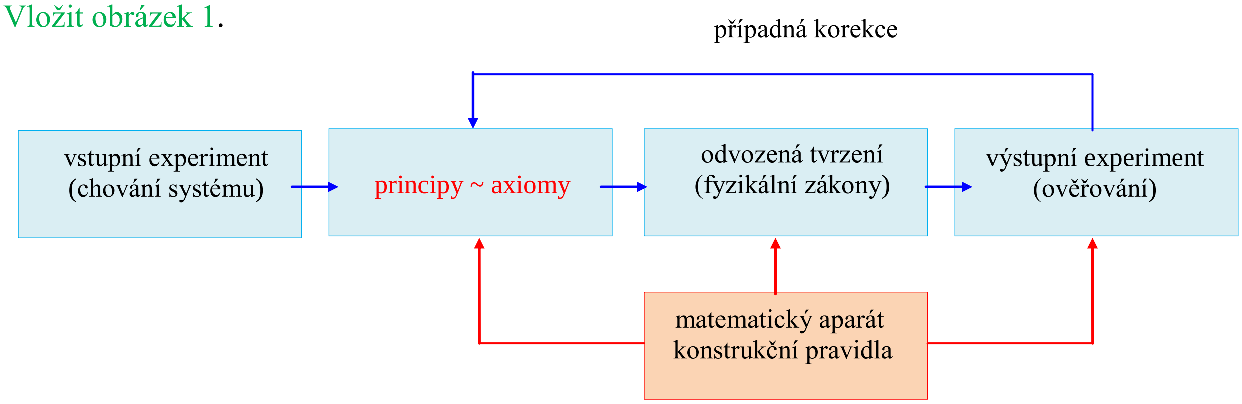
Výjimečně se však obraťme pro výklad slova „princip“ na tento nejčastější žákovský a studentský zdroj [1], dále pak na Slovník cizích slov [2] a Slovník českých synonym [3]:

> [1] Princip (z lat. principium, počátek) je základní a obecně uznávané myšlenkové východisko, zásada, pravidlo, zákon, které se nedokazuje, ale z něhož lze chápat nebo odvozovat další důsledky pro jednání nebo poznání.
>
> [2] V pořadí od nejobecnějšího pojetí: základní myšlenka, předpoklad, obecná zákonitost, výchozí zásada, pravidlo; morální, etická zásada; pravidlo či zákon týkající se podstaty nějakého přírodního jevu nebo fungování určitého přístroje; základní či vrozená kvalita,

tendence či vloha determinující vlastní podstatu či povahu určité bytosti nebo její přirozené chování.

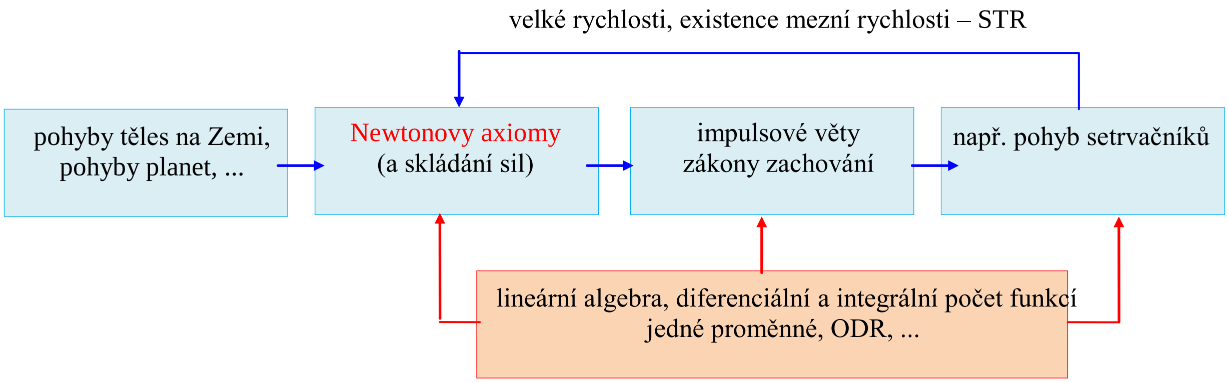
[3] Zásada, teze, zákonitost, východisko.

„Princip ve fyzice“ souzní s nejobecnějším, a ve výše uvedených zdrojích na prvním místě zmiňovaným významem. Jeho postavení v procesu fyzikálního zkoumání je zřejmé ze schématu na Obr. 1.
Vložit obrázek 1.



Obr. 1: Princip ve fyzikálním zkoumání[1].

Jako názornou ukázku uveďme příklad tohoto schématu pro klasickou newtonovskou mechaniku, která celá stojí na Newtonových axiomech jako skutečných principech, doplněných pravidlem pro skládání sil (Obr. 2):
Vložit obrázek 2.



Obr. 2: Principy v klasické newtonovské mechanice.

Ve výukových textech i při praktické výuce samotné se však slovo „princip“ nadužívá – objevuje se i tam, kde k jeho klíčovému postavení ve výše uvedených schématech mnoho chybí. Často jde o (s vhodným komentářem a časovým zařazením bezpochyby přijatelnou) zvyklost vyplývající z fyzikální historie, kdy principem bývá nazývána třeba aplikace skutečného (obecného)

[1] Na základě klíčových vstupních experimentů dochází k formulaci hypotéz, které mohou, jsou-li ověřeny, vyústit v principy.

fyzikálního principu; zásadní tvrzení o konkrétním jevu vyplývající ze zkušenosti; matematická vlastnost určitého objektu či jevu; popřípadě nějaké konstrukční pravidlo. Uveďme jen několik z dlouhé řady možných příkladů:

- **Fermatův princip**, též princip nejkratšího času (Pierre de Fermat, * pravděpodobně 1601 - †1665):

  Světelný paprsek v daném prostředí postupuje po takové dráze, aby doba, za kterou dospěje z bodu A do bodu B, byla co nejkratší.

  Ze současného hlediska se jedná o příklad obecného variačního principu týkající se šíření světla prostředím a objevený (ve snaze vysvětlit odraz a lom světla) před historicky první úlohou formulovanou jako variační (úloha o brachistochroně 1696)[2].

- **Huygensův princip** (Christian Huygens *1625 - †1695), z řady podobných, ne vždy zcela přesných, formulací uvádíme vcelku pochopitelnou formulaci dle [4]:

  Každý bod vlnoplochy (V_1), do něhož dospělo vlnění v určitém okamžiku, můžeme pokládat za zdroj elementárního vlnění, které se z něho šíří v elementárních vlnoplochách (EV). Vlnoplocha (V_2) v dalším časovém okamžiku je vnější obalová plocha všech elementárních vlnoploch. (V citovaném textu doprovázeno obrázkem a podrobnějším komentářem.)

  Jedná se tedy o jakési konstrukční pravidlo umožňující popsat postup vlnění. Vzniklo zřejmě, podobně jako Fermatův princip, opět na základě snahy vysvětlit experimentální závěry týkající se odrazu a lomu světla na rozhraní prostředí. Název „princip“ má tedy i zde historické pozadí.

- **Princip superpozice kmitů**, formulace dle [4]:

  Jestliže hmotný bod koná současně několik harmonických kmitavých pohybů téhož směru s okamžitými výchylkami y_1, y_2, ... , y_k, je okamžitá výchylka výsledného kmitání $y_1+y_2+ ... + y_k$. Okamžité výchylky mohou mít kladnou i zápornou hodnotu. Proto se při superpozici sčítají a odečítají.

  Ponechme stranou nejen otázku, jak by mohl hmotný bod „konat současně několik kmitavých pohybů téhož směru“, ale také problematičnost této formulace, je-li, jako zde, uváděna bez dalších předpokladů (je obdobná i v jiných textech). Vlastnost nazývaná principem superpozice kmitů, resp. vlnění (samozřejmě nikoli všech kmitů a všech typů vlnění), je prostým důsledkem skutečnosti, že pohybová rovnice harmonického oscilátoru, stejně jako vlnová rovnice, jsou lineárními diferenciálními rovnicemi. Jde tedy o matematický důsledek.

Principy bývají nazývána i další tvrzení, např.

- **Princip nezávislosti chodu světelných paprsků** (viz např. [5]):

[2] Dodejme, že tzv. variační princip je typickým principem ve smyslu schématu na obr. 1 a zahrnuje klíčové fyzikální teorie (klasickou nerelativistickou i relativistickou mechaniku, klasickou elektrodynamiku, či kvantovou mechaniku jako tzv. variační teorie). V klasické mechanice se nazývá principem nejmenší akce.

Šíření světla ze zdroje si zjednodušeně představujeme tak, že z každého bodu vycházejí všemi směry paprsky, které se navzájem protínají. Přitom se však neovlivňují a postupují prostředím nezávisle jeden na druhém.

V tomto případě byla zjevně povýšena na princip „zjednodušená představa“ vyplývající z dílčí zkušenosti s šířením světla ve speciálních případech nezahrnujících jevy jako ohyb světla, difrakci, či interferenci.

- **Princip nezávislosti pohybů** (řada odkazů na internetu, v učebnicích, často přímo s tímto názvem, viz např. [7, 15]):

Pokud koná hmotný bod více pohybů v různých směrech současně, vnímá pozorovatel tento pohyb jako jediný plynulý výsledný pohyb. Polohu hmotného bodu, který koná několik pohybů v různých směrech, lze určit podle principu nezávislosti pohybů (princip *superpozice pohybů)…*[3]

K této málo srozumitelné formulaci v tuto chvíli dodejme jen podiv nad deklarovanou souvislostí fyzikálního „principu“ s vnímáním pozorovatele. Podrobněji viz níže.

V následujícím textu si všimneme problematiky, která bývá spojována s „principem nezávislosti pohybů[4]“ zejména v učebnicích fyziky pro sekundární vzdělávání, jejichž oficiálními zástupci jsou [7, 8]. (V textech mladšího vydání se sice, naštěstí, od samotného názvu „princip nezávislosti pohybů“ postupně upustilo, související formulace však zůstávají, naneštěstí, prakticky beze změn.)

Aby byl čtenář od samého počátku informován o tom, co je věcnou podstatou kinematického problému označovaného nadnesenou charakteristikou „princip“, uveďme související aspekty (jsou právě dva, často se však bohužel prolínají pod jediným nadpisem typu „skládání pohybů“, bez ohledu na studenta-začátečníka, který si sám s jejich odlišením těžko poradí):

- vyjádření vektoru ve složkách, neboli vyjádření vektoru jako lineární kombinace vektorů báze (v našem případě trojrozměrného euklidovského prostoru),
- popis pohybu hmotného bodu či tělesa vzhledem k různým vztažným soustavám.

V dalším textu se k nim budeme vracet podrobnějším výkladem.

2. „Princip nezávislosti pohybů“ a „skládání rychlostí“ ve výukových textech

Učebnic a výukových textů obecné fyziky, popřípadě i samostatných textů z klasické mechaniky, je nepřeberné množství. Žák nebo student by měl před sebou takřka neřešitelný úkol, kdyby se, sám ještě s problematikou dostatečně neobeznámený a tedy neschopný posoudit jejich kvalitu, měl v nich zorientovat a k vlastnímu studiu si některé vybrat. Proto jsou mu na jednotlivých stupních fyzikálního vzdělávání konkrétní učebnice doporučovány, resp. předepisovány. V našich podmínkách středních škol je to sada Fyzika pro gymnázia, vydávaná od začátku devadesátých let minulého století nakladatelstvím Prometheus (zde citujeme díly Mechanické kmitání a vlnění [4], Optika [5] a Mechanika [7, 8]). Její předchůdkyní v oblasti mechaniky je učebnice [6]. K tzv. „srovnávací literatuře“ pro účely přípravy na státní závěrečnou zkoušku z obecné fyziky pro

[3] Citováno z [15]. O tom, jak “hmotný bod koná dva nebo více pohybů současně” hovoří ovšem i další (a oficiálně uznávané) texty, např. [7, 8].
[4] Prapůvodního autora tohoto názvu se nám nepodařilo vypátrat.

studenty fyziky na Masarykově univerzitě pak patří obsáhlá učebnice obecné fyziky D. Halidaye, J. Resnicka a J. Walkera, vydávaná v českém překladu nakladatelstvím VUTIUM Vysokého učení technického v Brně (viz [9, 10]). Vynikající je kniha Kvasnicova [11], jež je již určitým předstupněm ke studiu teoretické mechaniky. Z velkého množství méně známých textů vybíráme v souvislosti s naším tématem pro ukázku dva, konkrétně [12, 13]. Všimneme si, jak se s obsahem toho, čemu se v některých textech nepatřičně říká „princip nezávislosti pohybů", a se související problematikou tzv. „skládání pohybů" vyrovnávají citované texty, ať již vhodně či nevhodně, správně či nesprávně.

Učebnice [6]
Fyzika pro 1. ročník gymnázií, SPN, Praha 1984 (předchůdkyně dnešních učebnic [7, 8]).

Text se věnuje zmíněné problematice v následujících pasážích:

- Kapitola 1 „Kinematika hmotného bodu", odstavec 1/2 „Druhy pohybu, trajektorie".

> *Při pozorování mechanického pohybu sledujeme změnu polohy tělesa v čase vzhledem ke vztažnému tělesu. Za vztažné těleso však můžeme zvolit kterékoli těleso. Na obr. 1.4 je člověk stojící na Zemi – pozorovatel. Pozoruje automobil a letadlo. Letadlo i automobil jsou pro pozorovatele pohybující se tělesa. Pro pilota v letadle jsou však jak automobil, tak pozorovatel stojící na Zemi pohybujícími se tělesy. Klid nebo pohyb můžeme zjišťovat jen vzhledem ke vztažné soustavě. V tomto smyslu mluvíme o relativnosti klidu a pohybu. Relativnost mechanického pohybu znamená, že popis pohybu závisí na volbě vztažné soustavy.*
>
> *Tělesa se mohou pohybovat posuvným (translačním) pohybem, otáčivým (rotačním pohybem), nebo pohyby složenými z obou těchto pohybů.*

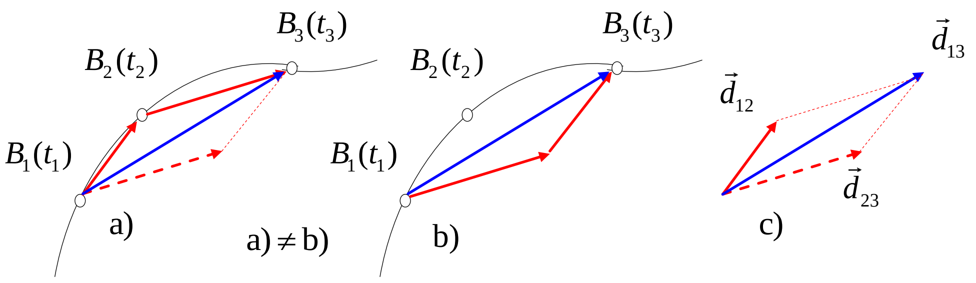
- Kapitola 1 „Kinematika hmotného bodu", odstavec 1/5: Skládání posunutí.

> *Výsledné posunutí nezávisí na tom, v jakém pořadí jednotlivá posunutí skládáme (skládání posunutí je komutativní).*

- Kapitola 7: „Pohyby těles v gravitačním poli", Cvičení 14, Příklad 3: formulace stejné jako později v [7].

Komentář: Text jasně, a pro začínajícího studenta gymnázia srozumitelně, odlišuje situaci, kdy jde o pohyb hmotného bodu, resp. tělesa, vzhledem k různým vztažným soustavám od situace, kdy těleso koná (vzhledem k zvolené vztažné soustavě) obecný pohyb, který lze rozložit na pohyb translační a pohyb rotační. Pro efektivní a myšlenkově logické vybudování pojmu *rychlost* (vektorová veličina) zavádí pojem *posunutí* jako vektor, následně pak pojmy *průměrná rychlost* opět jako vektor daný vektorem posunutí vztaženým na odpovídající časový interval, a nakonec *okamžitá rychlost* jako vektor získaný z průměrné rychlosti limitním snižováním délky časového intervalu. (Od tohoto postupu pozdější učebnice [7, 8] ke škodě věci upouštějí: posunutí se v nich neobjevuje vůbec, průměrná rychlost je skalár, okamžitá rychlost pak najednou vektor). Poněkud problematická a matoucí je v [6] v souvislosti s posunutím zmínka o komutativitě vektorového součtu (tj. součtu prvků daného, v našem případě trojrozměrného, vektorového prostoru) bez bližšího komentáře. Posunutí je

totiž vektor vázaný na určitý bod v podkladovém, rovněž trojrozměrném, euklidovském prostoru, přičemž vektory vázané v různých bodech nelze „rovnou“ sčítat. V souvislosti s budováním pojmů trajektorie hmotného bodu, rychlost a později zrychlení je „skládání posunutí“ zbytečné a zavádějící, bez podrobnějšího komentáře pak pro studenta málo pochopitelné, zatímco způsob, jak získat posunutí $\vec{d}_{13} = \overrightarrow{B_1B_3}$ pomocí posunutí $\vec{d}_{12} = \overrightarrow{B_1B_2}, \vec{d}_{23} = \overrightarrow{B_2B_3}$ je mu může být jasný již z definice posunutí a obrázku okamžitě. Z hlediska pojmu trajektorie je pořadí posunutí určeno pořadím časových údajů, $t_1 < t_2 < t_3$.
Vložit Obr. 3.



Obr. 3: Skládání posunutí

Podrobněji: V okamžicích t_1, t_2, t_3 je hmotný bod v bodech B_1, B_2, B_3 prostoru. Jeho posunutí v časových intervalech $[t_1, t_2], [t_2, t_3]$ jsou *vázané vektory* $\vec{d}_{12} = \overrightarrow{B_1B_2}, \vec{d}_{23} = \overrightarrow{B_2B_3}$, umístěné vždy v daném počátečním bodě, konkrétně B_1, resp. B_2. Posunutí v časovém intervalu $[t_1, t_3]$ je pak *vázaný vektor* $\vec{d}_{13} = \overrightarrow{B_1B_3}$, umístěný v bodě B_1 (viz obr. 3). Toto posunutí lze získat pomocí vektorového rovnoběžníka jako součet posunutí postupných, umístěných však pro tento účel do společného bodu. (Při posunutí vektorů do společného počátečního bodu pak samozřejmě komutativní je.

Učebnice [7] (o 10 let později)
První díl sady Fyzika pro gymnázia (Mechanika), 1. vydání, Prometheus, Praha 1993.

- Kapitola 2 „Kinematika“, odstavec 2.10 „Skládání pohybů a rychlostí“.

Často se stává, že hmotný bod koná dva nebo i více pohybů současně. Předmět ve vagónu jedoucího vlaku se může pohybovat vzhledem k vagónu a spolu s vagónem se pohybuje vzhledem k povrchu Země. Letadlo se pohybuje vzhledem k okolnímu vzduchu a současně je spolu se vzduchem unášeno větrem.

Při skládání pohybů platí princip nezávislosti pohybů: Koná-li hmotný bod současně dva nebo více pohybů, je jeho výsledná poloha taková, jako kdyby konal tyto pohyby po sobě, a to v libovolném pořadí.

- Kapitola 5 „Gravitační pole“, odstavec 5.5 „Pohyby v homogenním tíhovém poli Země“.

Udělíme-li tělesu počáteční rychlost $\mathbf{v}_0$ ve směru, který svírá s vodorovnou rovinou úhel α, koná šikmý vrh vzhůru. Úhel α se nazývá elevační úhel. I v tomto případě se skládá rovnoměrný přímočarý pohyb ve směru rychlosti $\mathbf{v}_0$ a volný pád ve směru zrychlení $\mathbf{g}$.

Komentář: Citované pasáže z jednoho a téhož odstavce učebnice, založené na myšlence, že „*hmotný bod koná dva nebo více pohybů současně*“ (sic!) se především týkají dvou zcela odlišných problémů: v první z nich jde o pohyb hmotného bodu vzhledem k různým vztažným soustavám, v druhé by pak (při značné míře dobré vůle věci znalého čtenáře) mohlo jít o rozklad polohového vektoru do směrů vektorů zvolené báze. Zatímco první formulace může být pro studenta ještě pochopitelná, s druhou si nebude vědět rady, pokud nad ní bude přemýšlet a nevezme ji za svou jako jednu z dalších bezobsažných pouček. V případě této poučky povýšené na „princip nezávislosti pohybů“ nedává smysl sdělení, že hmotný bod může konat „dva nebo více pohybů současně“, a to dokonce „nezávisle“, či „v libovolném pořadí“ (aniž by se toto „pravidlo“ pro získání výsledné polohy podrobněji rozebralo i s ohledem na časové údaje – stává se tak zcela nepochopitelným). Poučka je v přímém rozporu se skutečností, že okamžitá poloha hmotného bodu je určena polohovým vektorem $\vec{r}(t_0)$ s počátečním bodem v počátku zvolené soustavy souřadnic (spojené se zvoleným vztažným tělesem) a koncovým bodem v místě, kde se hmotný bod ocitl v okamžiku t_0. Vektorová funkce $\vec{r} = \vec{r}(t)$ pak jednoznačně určuje pohyb hmotného bodu. Formulace v kapitole 5 pak již jen využívá předchozích tvrzení.

Učebnice [8] (o dalších 20 let později)
První díl sady Fyzika pro gymnázia (Mechanika), dotisk 5. přepracovaného vydání, Prometheus, Praha 2013.

- Kapitola 2 „Kinematika hmotného bodu“, odstavec 2.9 „Skládání pohybů a rychlostí“.

Často se stává, že hmotný bod koná dva nebo i více pohybů současně. Např. cestující ve vagonu jedoucího vlaku se může pohybovat vzhledem k vagonu a spolu s vagónem se pohybuje vzhledem k povrchu Země. Letadlo se pohybuje vzhledem k okolnímu vzduchu a současně je spolu se vzduchem unášeno větrem.

Vystřelíme-li např. šikmo vzhůru z pušky, koná střela současně dva pohyby: rovnoměrný přímočarý pohyb ve směru, kterým byla vystřelena, a rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb ve svislém směru (volný pád). Trajektorií tohoto složeného pohybu je potom křivka (část paraboly).

- Kapitola 5 „Gravitační pole“, odstavec 5.5 „Pohyby v homogenním tíhovém poli u povrchu Země“.

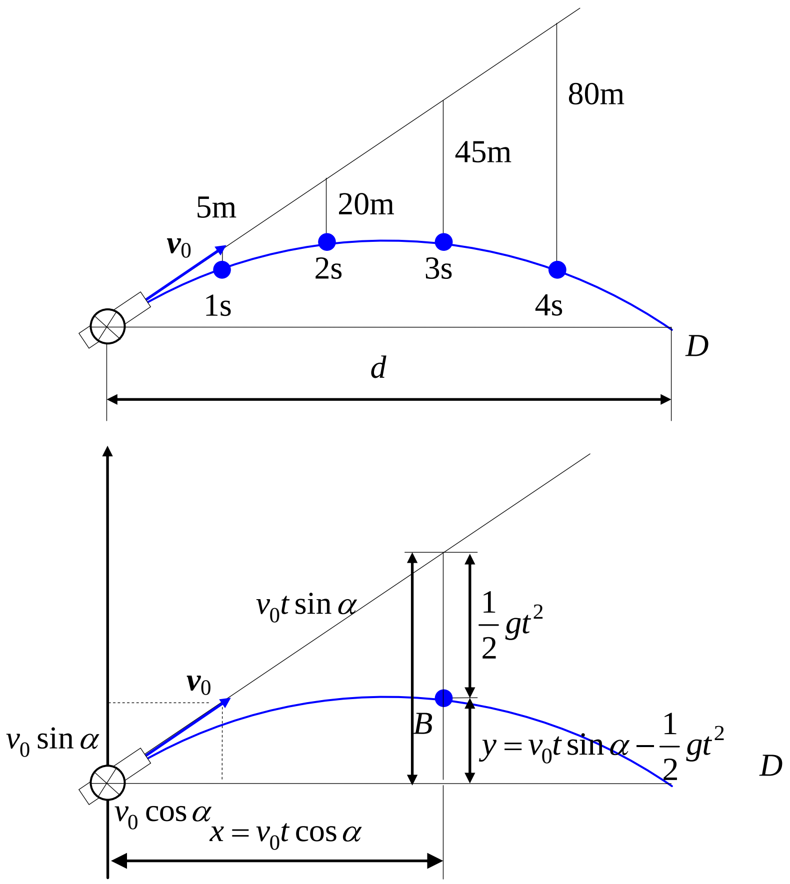
Složitější pohyby nastanou, udělíme-li tělesu v homogenním tíhovém poli určitou nenulovou počáteční rychlost $\mathbf{v}_0$. V tomto případě koná těleso současně dva pohyby:

1. *Rovnoměrný přímočarý pohyb ve směru rychlosti $\mathbf{v}_0$.*
2. *Volný pád ve směru zrychlení $\mathbf{g}$.*

Složením obou pohybů dostaneme výsledný pohyb, který nazýváme vrh tělesa.

Text je dokumentován obrázky 5.14 a 5.15 (zde reprodukovanými jako obr. 4).
Vložit Obr. 4.

Komentář: Platí totéž co v komentáři k [7], pozitivem je snad jen opuštění názvu „princip nezávislosti pohybů“. V porovnání s textem v učebnici [6] nelze na tomto místě nevzpomenout známého rčení typu Murphyho zákona, že „každá změna je k horšímu“.



Obr. 4: Schematické obrázky 5.14 a 5.15 (překresleno z [8]).

Srozumitelnost obrázků, které mají sloužit k vyjádření parametrických rovnic trajektorie (závislosti $\vec{r}(t) \sim (x(t), y(t)) = (v_0 t \cos\alpha, v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2)$) je ovšem sporná. Je otázkou, zda si student pomocí nich a na základě předchozích formulací o konání více pohybů jedním a týmž hmotným bodem uvědomí, že hmotný bod by musel po přímce o směrovém vektoru $\vec{v}_0$ urazit za čas t vzdálenost $v_0 t$ (promítnuto do směru osy *y*: $v_0 t \sin\alpha$) a pak za stejnou dobu „spadnout“ podél osy *y* o $\frac{1}{2}gt^2$, přičemž výsledný pohyb by samozřejmě trval jen dobu *t*.

Učebnice [9, 10] (anglický originál a české překlady)

Renomovaná učebnice obecné fyziky pro univerzitní studium fyziky a technických oborů.

- Chapter 4: „Motion in Two and Three Dimensions / Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb“, odstavec 4-5: „Projectile motion / Šikmý vrh”, odstavec 4-6: „Projectile motion analyzed / Šikmý vrh: matematický popis”.

  K výkladu šikmého vrhu:

  Projectile motion, like that in Figs. 4-7 to 4-9, looks complicated, but we have the following simplifying feature (known from experiment):
  In projectile motion, the horizontal motion and the vertical motion are independent of each other; that is, neither motion affects the other.

  I když pohyb těles na obr. 4.7 až 4.9 může někomu připadat docela složitý, bude jeho matematický popis velmi prostý. Zjednodušení je dáno jednak vektorovým charakterem veličin popisujících pohyb (poloha, rychlost a zrychlení), s nimiž tak lze nakládat podle pravidel vektorové algebry, jednak neměnností zrychlení při pohybu těles.
  Vodorovné a svislé složky veličin popisujících vrh jsou na sobě nezávislé. Neovlivňují se navzájem.
  Pohyb částice v rovině můžeme tedy získat složením dvou pohybů přímočarých, vodorovného a svislého.

  This feature allows us to break up a problem involving two-dimensional motion into to separated and easier one-dimensional problems, one for the horizontal motion and one for the vertical motion.

  ... můžeme využít zjednodušení spočívající v možnosti rozložení skutečného pohybu na dva nezávislé pohyby, ve vodorovném a svislém směru.

- Chapter 4: „Motion in Two and Three Dimensions / Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb“, odstavce 4-8, 4-9: Relative Motion in One Dimension. Relative Motion in Two Dimensions. / Vzájemný pohyb po přímce. Vzájemný pohyb v rovině.

Některým z těchto formulací už lze „dát zelenou“, neboť je zcela zřejmé jejich omezení na pohyby v tíhovém poli Země. V odstavci 4-5 je správně popsán rozklad vektorů (polohového vektoru, vektoru rychlosti) do vodorovného a svislého směru, nehovoří se o „konání více pohybů“. Je přitom jasné, že díky konstantnímu zrychlení hmotného bodu při vrhu v homogenním tíhovém poli se složky rychlosti i polohového vektoru vyvíjejí s časem nezávisle na sobě. Odstavce týkající se vzájemného pohybu, tj. pohybu hmotného bodu vzhledem k různým vztažným soustavám, jsou jasně odlišeny od problému rozkladu vektorů do báze v odstavcích 4-8 a 4-9.

Text ovšem hovoří o možnosti rozkladu „*skutečného pohybu na dva nezávislé pohyby, ve vodorovném a svislém směru*“ aniž vysvětluje, co se onou nezávislostí myslí. Navíc charakterizuje rozklad jako „zjednodušení“, neuvádí však, jak vypadá „nezjednodušená“ situace. Je téměř jisté, že student význam uvedené věty příliš nepochopí. Dále text sice správně konstatuje, že „pohyby ve svislém a vodorovném směru“ lze posuzovat nezávisle díky skutečnosti, že zrychlení je konstantní, zůstává však takříkajíc „na půli cesty“. Student si nejspíš sám neuvědomí obecnější kontext: konstantnost zrychlení je postačující podmínka pro to, aby průměty pohybu do vodorovného a svislého směru byly „nezávislé“, není to však podmínka nutná. Možnost rozkladu, tak jak jej má text na mysli (pravděpodobně, jistota z jeho dikce zřejmá není), zůstane zachována i pro daleko obecnější situace, o nichž se zmíníme v dalších odstavcích.

A navíc: fakt, že „výsledný pohyb“ (tedy polohový vektor v závislosti na čase) je „složením pohybů přímočarých“ (tedy průmětů polohového vektoru do dvou, resp. tří, nezávislých směrů v rovině, resp. v prostoru – ani nemusí být kolmé) je samozřejmá vlastnost pravidel vektorové algebry, jak text správně konstatuje, je však nezávislý na čemkoli dalším. Konstatovat jej jako „zjednodušení“ v důsledku konstantnosti zrychlení je přinejmenším zavádějící.

Učebnice [11]

Vynikající vysokoškolská učebnice autorského kolektivu z Karlovy univerzity pro studenty fyziky, vhodná i pro studenty technických oborů. S mechanickými pojmy a matematickým aparátem pracuje v některých situacích již na pomezí mezi obecnou a teoretickou fyzikou.

- Kapitola 1. „Kinematika hmotného bodu“, odstavec 1.1 „Prostor a čas“.

Pohyb každého tělesa vždy popisujeme vzhledem k jinému tělesu, které nazýváme vztažným neboli referenčním tělesem, vztažnou neboli referenční soustavou. Pohyb sledovaného tělesa se nám jeví různě (má např. jinou trajektorii a rychlost) podle toho, k jakému referenčnímu tělesu tento pohyb vztahujeme. Tuto závislost způsobu pohybu na volbě referenční soustavy nazýváme relativností pohybu.

- Kapitola 2. „Dynamika hmotného bodu“, odstavec 2.1 „Základní zákony klasické mechaniky“.

… Proto je třeba druhý Newtonův zákon doplnit tzv. principem superpozice sil, který vyplývá opět ze zkušenosti a tvrdí, že pohybové účinky několika současně působících sil jsou stejné jako účinek jediné síly dané jejich vektorovým součtem, $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$.

Z tohoto principu a druhého Newtonova zákona aplikovaného na působení jednotlivých dílčích sil pak plyne, že výsledná změna hybnosti či zrychlení je dána vektorovým součtem dílčích změn hybnosti či zrychlení, neboli

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}, \quad m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} m\vec{a}_i$$

… Pak druhý Newtonův zákon vyjadřuje i tzv. zákon skládání pohybů, podle kterého výsledný pohyb tělesa, vykonávaný pod vlivem síly F, je (v daném smyslu) součtem pohybů, které by vykonalo působením jednotlivých sil dílčích, bez ohledu na jejich pořadí (vektorový součet je komutativní).

Komentář: Problematika vztažných soustav je z didaktického hlediska naprosto správně vyčleněna hned v samotném začátku kapitoly o popisu pohybu. Citovaná formulace dává čtenáři jasně na srozuměnou důležitost volby vztažné soustavy a relativnost pohybu. Pojem „skládání pohybů“ zavádí autoři až v souvislosti s dynamikou, a to naprosto korektně, včetně upozornění na komutativnost vektorového součtu. Ta se zde totiž týká sčítání sil působících na hmotný bod, tj. vektorů vázaných v jednom společném bodě (působiště sil jsou v daném hmotném bodu). Samo skládání pohybů se (díky dovětku „v daném smyslu“) opět věcně správně, týká příspěvků jednotlivých sil k časové derivaci hybnosti hmotného bodu (podle Newtona: motus, tj. pohyb = součin hmotnosti a rychlosti), při konstantní hmotnosti pak k příspěvkům jednotlivých sil ke zrychlení hmotného bodu. „Skládají se“ tedy příspěvky k derivaci hybnosti, resp. ke zrychlení. Každá ze sil totiž může obecně záviset nejen explicitně na čase – což by samo o sobě problém nečinilo, ale také na poloze a rychlosti hmotného bodu. A tak toto „skládání“ již nelze použít pro rychlost a polohu. Navzdory věcné správnosti není ovšem formulace příliš didakticky vhodná, neboť student si podstatu věci pravděpodobně neuvědomí – pod pojmem „skládání pohybů“ si totiž zcela přirozeně pravděpodobně představí operace s polohovými vektory, nikoli se zrychleními, resp. časovými derivacemi hybnosti. Této otázky si všimneme podrobněji v následujícím odstavci.

Učebnice [12]
Často využívaný vysokoškolský text s názorným výkladem. Většina partií je vhodná i pro výuku na střední škole.

- Chapter 3 „Vectors and Two-dimensional Motion” odstavec 3.5 „Projectile motion”. Výklad je rovnou veden v souřadnicích.
- Chapter 3 „Vectors and Two-dimensional Motion” odstavec 3.6 „Relative velocity”.

Observers in different frames of reference may measure different displacements or velocities for an object in motion. That means, two observers moving with respect to each other would generally not agree on the outcome of a measurement.

Komentář: V odstavci o pohybu se rovnou pracuje v souřadnicích (rozklad vektorových veličin do složek), něco jako „princip nezávislosti pohybů“, resp. „skládání rychlostí“ v tomto kontextu se neobjevuje (není proč). V odstavci 3.6 je jasně formulován problém vztažné soustavy.

Učebnice [13]
Méně známý text s netradičním výkladem, některé kapitoly jsou na pomezí obecné a teoretické mechaniky.

- Chapter 4 „Three-dimensional Motion“, odstavec 4.1 „Separable three-dimensional motion”, odstavec 4.2 „General three-dimensional motion”.

The simplest and common type of three-dimensional motion is that of a particle moving under gravity near the earth´s surface.

*In many cases the motion is not separable. For example if a charge Q is fixe at the origin of the frame of reference, a particle with charge q, whose position is **x**, will experience a force*

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qQ}{|\vec{x}|^3}\vec{x} \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qQ}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}(x_1, x_2, x_3).$$

... More generally, when the force depends upon the (vector) position **x**, *of the particle, the equation of motion yields component equations of the form*

$$m\frac{\mathrm{d}x_1^2}{\mathrm{d}t^2}=F_1(x_1,x_2,x_3),\ m\frac{\mathrm{d}x_2^2}{\mathrm{d}t^2}=F_2(x_1,x_2,x_3),\ m\frac{\mathrm{d}x_3^2}{\mathrm{d}t^2}=F_3(x_1,x_2,x_3)\ .$$

Komentář: Klíčovou větou je zde konstatování „In many cases the motion is not separable“, které upozorňuje na obecnou situaci, na rozdíl od citovaných českých učebnic, které vyvolávají mylnou představu obecné „nezávislosti“ jednotlivých složek pohybových rovnic.

Text [15]

- Pasáž „Skládání rychlostí“:

Pokud koná hmotný bod více pohybů v různých směrech současně, vnímá pozorovatel tento pohyb jako jediný plynulý výsledný pohyb. Polohu hmotného bodu, který koná několik pohybů v různých směrech, lze určit podle principu nezávislosti pohybů (princip superpozice pohybů), který vyslovil již Galilei: Hmotný bod v libovolném časovém okamžiku zaujme takovou polohu, jako by vykonal všechny dílčí pohyby nezávisle na sobě postupně (a v libovolném pořadí). To znamená, že hmotný bod bude určitý čas konat jeden typ pohybu, potom stejný časový interval bude konat další typ pohybu, ...
Nejjednodušší příklad na skládání pohybů je skládání dvou pohybů, jejichž vektory leží na společné vektorové přímce (tj. mají stejný nebo opačný směr).

Komentář: Studentovi se musí představa, že hmotný bod koná současně více pohybů v různých směrech, jevit jako nesmyslná, nehledě k tomu, že „nezávislost“ a „superpozice“ pohybů, v textu hrající roli synonym, jsou dva odlišné pojmy. Galileiův (údajný) výrok není podepřen citací originálního autorského pramene. Nepochybně jde o jeho parafrázi založenou pravděpodobně na nepochopení, kterou bez nahlédnutí do originálního textu nelze komentovat. Mohli bychom namítnout, že jde o internetový text, jemuž nelze přisuzovat nějaký význam. Zdá se však pravděpodobné, že jeho autor nejspíše převzal představu více pohybů konaných jedním a tímtéž bodem, od autorů oficiálních učebnic [7, 8], než že by tomu bylo naopak. Význam (zejména chybných či přinejmenším zavádějících) internetových sdělení ovšem nelze podceňovat právě proto, že internet je pro studenty častým zdrojem informací. A ještě když se zavádějící formulaci dá název „princip“, je vzdělávací faux pas na světě.

3. Fyzika versus matematický aparát

Z hlediska logické stavby mechaniky je samozřejmě správné, či dokonce nutné začínat její výuku důsledným budováním kinematických pojmů, i když jejich hlubší význam se studentovi plně odhalí až při výkladu dynamiky. Zkušenost ukazuje, že při dobrém didaktickém přístupu dokáže student střední školy, nebo i žák druhého stupně školy základní, pochopit pojem přímočarého pohybu rovnoměrného, popřípadě i rovnoměrně zrychleného a pracovat s ním i při aplikacích (řešení úloh). Vztahy pro rychlost a polohu rovnoměrně zrychleného pohybu po přímce (poloha při vhodné volbě počátku na přímce, po níž se bod pohybuje, splývá až do bodu obratu s dráhou)

$$v(t) = v(0) \pm at\,, \quad s(t) = s(0) + v(0)t \pm \frac{1}{2}at^2 \text{ pro } v(0) \geq 0,\; s(0) \geq 0,\; a \geq 0\,,$$

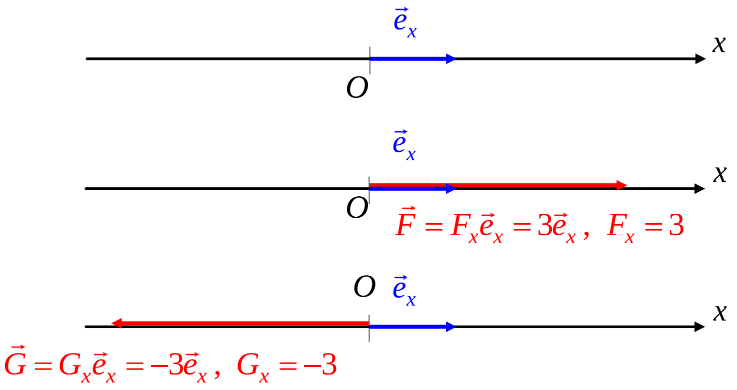
kde znaménko plus, resp. minus se týká pohybu rovnoměrně zrychleného, resp. rovnoměrně zpomaleného (zpožděného), vztahy pro časovou závislost rychlosti vyplývají z definice zrychlení, vztahy pro dráhu se „vysvětlí“ pomocí grafu funkce $v = v(t)$. Jak však vést výklad v situaci, kdy se hmotný bod pohybuje obecně v rovině či prostoru a pohyb je křivočarý a nerovnoměrný, dokonce i při konstantním zrychlení – to jsou oproti pohybu po přímce podstatně častější praktické situace (letící míč při kopané, pohyb aut v zatáčkách, apod.). Je nepochybné, že didaktické postupy založené na pojmu „nezávislost pohybů“ jsou vedeny v dobrém úmyslu umožnit žákům a studentům pochopení kinematických pojmů a vyhnout se při tom matematickému aparátu, který tvůrci těchto postupů považují za obtížný. Říká se, že cesta do pekla je dlážděna dobrými úmysly. Bohužel je tomu tak i v našem případě, jak je vidět z některých výše citovaných učebnic a vzdělávacích textů.

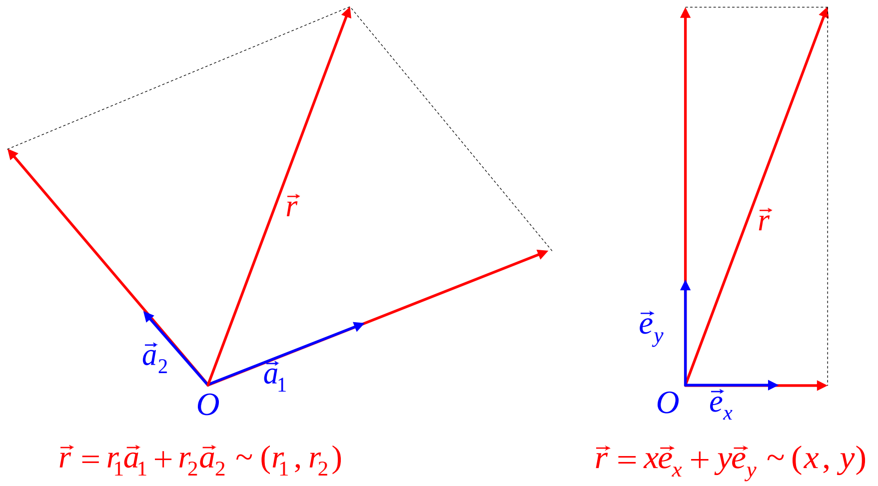
Jak tedy postupovat?
bez (chybných) berliček „nezávislosti pohybů“ či „skládání pohybů“?

Jednoduše: nebát se vektorů!

Učebnice [8] k tomu vytváří dobrý nástup už v úvodní části, pětistránkovém odstavci 1.5 „Skalární a vektorové veličiny“, v němž se zabývá základními operacemi s vektory a zápisem vektoru jako součtu jeho dvou průmětů do dokonce obecných nezávislých směrů v rovině. (Terminologicky nesprávně sice hovoří místo o průmětech o složkách, ale to je snadno napravitelné.) Vzhledem k tomu, že na druhém stupni základní školy či na střední škole se prostorové pohyby neprobírají, postačí pro pochopení popisu okamžité polohy hmotného bodu, a tedy i popisu jeho (jediného) pohybu pomocí polohového vektoru v závislosti na čase, jednoduché správně komentované obrázky a vysvětlení pojmů *průmět*, resp. *složka* vektoru (bez ohledu na jeho fyzikální význam) pro případ vektorů na přímce, resp. v rovině. Zobecnění na trojrozměrný prostor v případě potřeby je již snadným krokem.

Vložit Obr. 5.





Obr. 5: Vyjádření vektoru na přímce a v rovině v libovolně zvolené bázi.

Obrázek ukazuje vyjádření vektoru na přímce, resp. v rovině ve složkách v soustavách souřadnic s počátkem O a zvoleným bázovým vektorem, resp. vektory, $\langle O; \vec{e}_x \rangle$, $\langle O; \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle$, $\langle O; \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle$. V rovinném případě jde o vyjádření jednoho a téhož (polohového) vektoru $\vec{r}$ v bázi tvořené nezávislými vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ zvolenými obecně co do délek i úhlu mezi nimi, a v ortonormální bázi tvořené jednotkovými a kolmými vektory $\vec{e}_x, \vec{e}_y$, s nimiž jsou spojeny souřadnicové osy x a y kartézské soustavy souřadnic. Vektory $\vec{r}_1 = r_1\vec{a}_1$, $\vec{r}_2 = r_2\vec{a}_2$ jsou *průměty* vektoru $\vec{r}$ do směru vektorů báze $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, dvojice čísel $\vec{r} \sim (r_1, r_2)$ představuje *složky* vektoru $\vec{r}$ v této bázi. Obdobně $\vec{r}_x = x\vec{e}_x$, $\vec{r}_y = y\vec{e}_y$ jsou průměty vektoru $\vec{r}$ do směrů vektorů ortonormální báze a zápis $\vec{r} \sim (x, y)$ představuje fakt, že vektor $\vec{r}$ má v této bázi složky (x, y). Zkušenost ukazuje, že podstatu rozkladu vektoru do báze si již zainteresovaný student, který pochopil práci s vektory např. z odstavce 1.5 učebnice [8], dokáže osvojit. Je to „jenom“ jednoduchá geometrie, jak koneckonců konstatuje i výše uvedený komentář z učebnic [9,10].

Pak už lze velmi jednoduše popsat rovnoměrný, resp. rovnoměrně zrychlený či zpožděný pohyb po přímce rovnicemi

$\vec{v}(t) \sim (v_x)$, $v_x = \text{konst.}$, $\vec{r}(t) \sim (x(t))$, $x(t) = v_x t + x(0)$ pro rovnoměrný pohyb,

resp.

$$\vec{a}(t) \sim (a_x),\; a_x = \text{konst.},\; \vec{v}(t) \sim (v_x(t)),\; v_x(t) = a_x t + v_x(0), \tag{1}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_x(0)t + x(0), \text{ pro rovnoměrně zrychlený pohyb.}$$

Nejobecnější (a velmi užitečně) vyjádření, kdy známe rychlost a polohu v okamžiku t_0, je

$$\vec{v}(t) \sim (v_x),\ v_x = \text{konst.},\ \vec{r}(t) \sim (x(t)),\ x(t) = v_x(t - t_0) + x(t_0),$$

resp.

$$\vec{a}(t) \sim (a_x),\ a_x = \text{konst.},\ \vec{v}(t) \sim (v_x(t)),\ v_x(t) = a_x(t - t_0) + v_x(t_0)(t - t_0), \qquad (2)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 + v_x(t_0)(t - t_0) + x(t_0).$$

Směr pohybu, resp. zjištění, zda jde o pohyb rovnoměrně zrychlený či zpožděný, jsou dány znaménkem složky rychlosti, resp. zrychlení. Se zápornými čísly dokáží spolehlivě pracovat už žáci základní školy, na střední škole to tedy nemůže být problém. (Vztahy pro polohu hmotného bodu v případě rovnoměrně zrychleného pohybu lze vyložit standardně pomocí grafu rychlosti, jak je to provedeno např. v [8].)

Tento způsob práce se složkami vektorů v jednorozměrném prostoru (tj. „na přímce“) umožňuje formulovat řadu úloh pro ověření, jak žáci/studenti problematiku pochopili. Jedna z poněkud náročnějších úloh může být například:

Následující tabulka obsahuje údaje o přímočarém pohybu hmotného bodu po ose *x*. Poloha bodu v okamžiku 2,0 s je $x(2{,}0) = 0{,}0\,\text{m}$. Doplňte prázdná pole. (Předpokládejte, že ke změnám zrychlení dochází v zanedbatelně krátkých časových úsecích v okolí hraničních bodů zadaných intervalů, rychlost a poloha se samozřejmě mění spojitě.)

(t_i, t_{i+1})(s)	$a_x\,(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	rychlost $v_x\,(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	poloha $x\,(\text{m})$
(0,0; 2,0)	1,5	$1{,}5t + 0{,}2$	$0{,}75t^2 + 0{,}2t - 3{,}4$
(2,0; 3,0)	0,0	3,2	$3{,}2(t-2) + x(2{,}0) = 3{,}2t - 6{,}4$
(3,0; 6,0)	– 2,2	$-2{,}2(t-3) + v_x(3{,}0) =$ $= -2{,}2t + 9{,}8$	$-1{,}1(t-3)^2 + 3{,}2(t-3) + 3{,}2 =$ $= -1{,}1t^2 + 9{,}8t - 16{,}3$
(6,0; 9,0)	$0{,}60$	$0{,}60t + K,\ K = -7{,}0$	$0{,}3(t-6)^2 - 3{,}6(t-6) + 2{,}9 =$ $= 0{,}3t^2 - 7{,}0t + 34{,}1$
(9,0; 10,0)	0,0	– 1,6	$-1{,}6(t-9) - 4{,}6 = -1{,}6t + 9{,}8$

Údaje v tabulce zapsané černou barvou představují zadání, zeleně je zapsáno řešení.

Při bezpečném zacházení se složkami zrychlení, rychlosti a polohového vektoru pohybu hmotného bodu po přímce (ose *x*) nemůže být problémem přechod k dvojrozměrnému a trojrozměrnému pohybu.

Je však třeba přestat studentům předkládat zcestný (nepředstavitelný) popis, že

„Hmotný bod koná dva nebo i více pohybů a ty se skládají ve výsledný pohyb“

a nahradit jej správným popisem odpovídajícím skutečnosti, že

Hmotný bod koná (jeden) pohyb, popsaný polohovým vektorem.
Ten lze rozložit do složek v libovolně předem zvolené bázi.

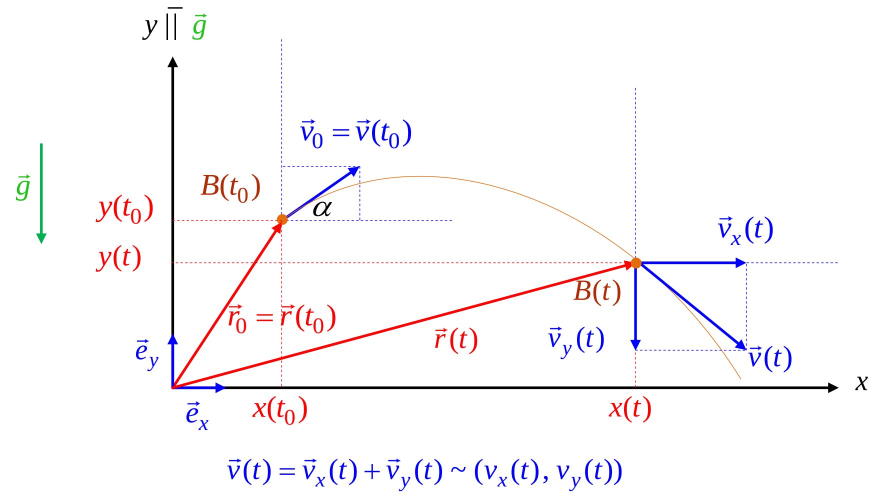
Rozklad je pak jen matematickou procedurou, s níž se studenti setkávají dokonce už na základní škole prostřednictvím rozkládání sil do předem zvolených dvou nezávislých směrů v rovině, v níž leží i dotyčná síla. Obdobně pohybu hmotného bodu přísluší v každém okamžiku rozklad rychlosti a zrychlení do zmíněné báze. Podrobněji:

Pohyb hmotného bodu na přímce, v rovině, či v prostoru je vzhledem k předem zvolené vztažné soustavě (reprezentované vztažným tělesem a soustavou souřadnic) jednoznačně charakterizován časovou závislostí polohového vektoru bodu, $\vec{r} = \vec{r}(t) \sim (x(t))$, $\vec{r} = \vec{r}(t) \sim (x(t), y(t))$, *resp.* $\vec{r} = \vec{r}(t) \sim (x(t), y(t), z(t))$.

Pojem „skládání pohybů“ často užívaný právě v učebnicích [7, 8], nemá z tohoto hlediska žádný smysl, i když polohový vektor, rychlost a zrychlení jsou součty svých průmětů do směrů zvolené báze. Připomeňme dále, že vektorové veličiny popisující pohyb hmotného bodu jsou *vázanými vektory*. Polohový vektor $\vec{r}(t)$ je vždy umístěn v počátku soustavy souřadnic, vektory rychlosti $\vec{v}(t)$ a zrychlení $\vec{a}(t)$ jsou umístěny v bodě přímky, roviny, prostoru, v němž se hmotný bod nachází v okamžiku *t* (viz schematický obr. 6).

Popsat rovinné pohyby s konstantním zrychlením (tj. například vrhy v tíhovém poli Země) pak lze snadno, zdůrazníme-li vhodnost volby soustavy souřadnic tak, aby jedna s os byla rovnoběžná (ať už souhlasně či nesouhlasně) se zrychlením. Zrychlení, rychlost a polohový vektor jsou už jen součty svých průmětů do směrů souřadnicových os (resp. vektorů báze):

Vložit Obr. 6.



Obr. 6: Rozklad vektorů zrychlení, rychlosti a polohového vektoru do složek.

Pokud si na základě analogie s přímočarým pohybem s konstantním zrychlením netroufneme rovnou zapsat vztahy

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_0)^2, \text{ resp. } \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \text{ pro } t_0 = 0,$$

a poté provést rozklad do složek, abychom v závislosti na velikost a směru počáteční rychlosti mohli sledovat různé typy tzv. „vrhů“, můžeme velmi jednoduše postupovat tak, že popíšeme časovou závislost polohy průmětů pohybujícího se bodu *B*, jehož rychlost a polohový vektor v okamžiku t_0 jsou $\vec{v}(t_0) \sim (v_x(t_0), v_y(t_0)) = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$, $\vec{r}(t_0) \sim (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ do souřadnicových os. Začít je tedy třeba od zrychlení $\vec{g} \sim (g_x, g_y) = (0, -g)$. Průmět bodu *B* do osy *x* se podél ní pohybuje s nulovým zrychlením a počáteční rychlostí $\vec{v}_x(t_0) \sim (v_0 \cos\alpha)$, jeho počáteční poloha je $\vec{r}_x(t_0) \sim (x(t_0)) = (x_0)$. Průmět bodu *B* do osy *y* se podél ní pohybuje s konstantním zrychlením $\vec{a}_y \sim (-g)$ a počáteční rychlostí $\vec{v}_y(t_0) \sim (v_0 \sin\alpha)$, jeho počáteční poloha je $\vec{r}_y(t_0) \sim (y(t_0)) = (y_0)$. Pro složky okamžité rychlosti průmětů bodu *B* a jejich polohových vektorů použijeme vztahy (2) pro rovnoměrný pohyb po přímce a rovnoměrně zrychlený pohyb po přímce:

$$\begin{aligned}
v_x(t) &= v_x(t_0) + a_x(t-t_0) = v_x(t_0) = v_0\cos\alpha,\\
v_y(t) &= v_y(t_0) + a_y(t-t_0) = v_y(t_0) - g(t-t_0) = v_0\sin\alpha - g(t-t_0),\\
x(t) &= x(t_0) + v_x(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}a_x(t-t_0)^2 = x_0 + v_0(t-t_0)\cos\alpha,\\
y(t) &= y(t_0) + v_y(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}a_y(t-t_0)^2 = y_0 + v_0(t-t_0)\sin\alpha - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Dosadit $t_0 = 0$ je již jednoduché, případně se s touto speciální volbou může pracovat od začátku. Diskusí o možnostech volby úhlu α a volby nenulové, resp. nulové počáteční rychlosti, dostaneme všechny možnosti pohyby hmotného bodu v (homogenním) tíhovém poli Země, popsané časovou závislostí polohového vektoru $\vec{r}(t) \sim (x(t),\, y(t))$, tedy všechny vrhy.

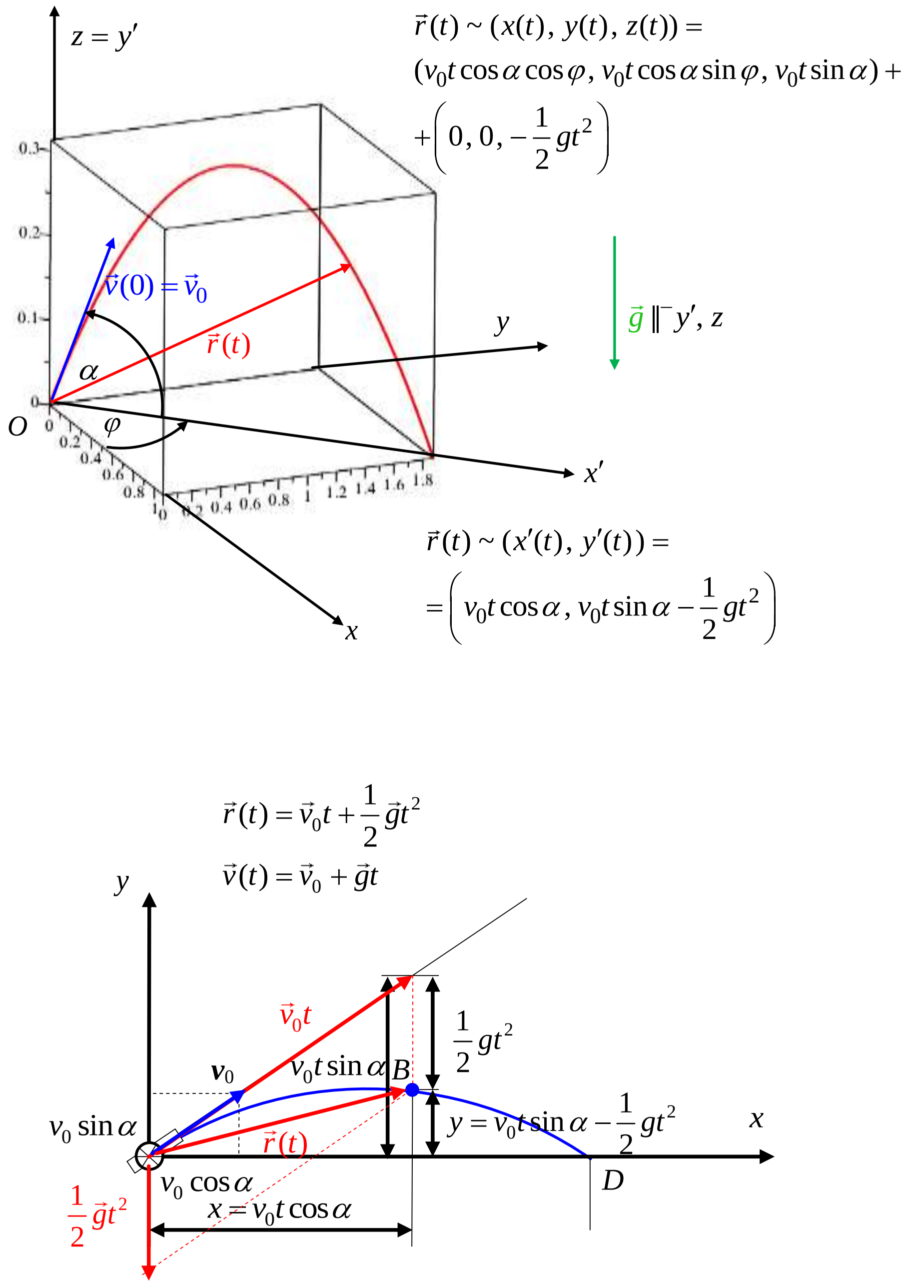
4. Kolik „pohybů“ koná hmotný bod?

Na obr. 7a je opět schematicky znázorněn šikmý vrh hmotného bodu v tíhovém poli Země. Polohový vektor je vyjádřen ve složkách ve dvou různých (pravotočivých) kartézských soustavách souřadnic se společnou svislou osou nesouhlasně rovnoběžnou s tíhovým zrychlením. Na obr. 7b je pak rozklad, který by odpovídal formulaci z učebnice [8], kapitola 2, odstavec 2.9, uvedené výše. Podle této formulace

„*koná střela současně dva pohyby: rovnoměrný přímočarý pohyb ve směru, kterým byla vystřelena, a rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb ve svislém směru (volný pád).*“

Mohli bychom ovšem také říci, že střela koná rovnoměrný přímočarý pohyb ve směru osy *x* rychlostí $\vec{v}_x \sim (v_0\cos\alpha)$ a rovnoměrně zrychlený pohyb podél osy *y* se zrychlením $\vec{g}$ s počáteční rychlostí $\vec{v}(0) \sim (v_0\sin\alpha)$. A taky třeba koná tři pohyby ve směru os *x*, *y* a z podle obr. 7a, a je zde dalších nekonečně mnoho možností.

Vložit obr. 7a a 7b.



Obr. 7a, b: Kolik „pohybů“ koná hmotný bod?

Nevhodnost výkladu obecného pohybu na základě představy hmotného bodu konajícího více pohybů současně je zde zjevná. Jde o to, že jeden a týž pohyb (polohový vektor) hmotného bodu v tíhovém poli Země lze vyjádřit nekonečně mnoha způsoby, například

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad \vec{r}(t) = (v_0 t \cos\alpha) \vec{e}_x + \left(v_0 t \cos\alpha - \frac{1}{2} g t^2\right) \vec{e}_y \,.$$

V schematickém obrázku 7b, převzatém z [8], jsme doplnili polohový vektor $\vec{r}(t)$ hmotného bodu (v učebnici jde o střelu) jako součet jeho rovnoběžných průmětů $\vec{r}_1(t) = \vec{v}_0 t$ a $\vec{r}_2(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ do směru rychlosti $\vec{v}_0$ a tíhového zrychlení $\vec{g}$. Tyto směry ovšem nejsou kolmé, báze tvořená jednotkovými vektory v těchto směrech není ortogonální. (Pomocí tohoto jednoduchého nákresu a komentáře si čtenář znalý věci, nikoli však student-začátečník, může vysvětlit, co mu asi chtěli sdělit autoři nerealistické situace, jak „hmotný bod koná dva pohyby, rovnoměrný pohyb ve směru počáteční rychlosti a volný pád“. Vztah autorských označení vzdáleností a jejich popisků v originálním obrázku k uvedené formulaci ovšem příliš zřejmý není.)

5. „Skládání“ zrychlení a „nezávislost pohybů“

Skutečný hmotný bod koná jeden pohyb po skutečné trajektorii, matematický aparát však umožňuje získat polohový vektor popisující tento pohyb v závislosti na čase jako součet polohových vektorů průmětů hmotného bodu (tedy v podstatě pomyslných *geometrických* objektů) do předem libovolně zvolených nezávislých směrů v prostoru, tedy polohových vektorů přímočarých pohybů. Takových možností rozkladu je ovšem nekonečně mnoho, s více či méně výstižnou volbou soustavy souřadnic, např. spojenou s fyzikálně či geometricky významnými směry (volba některé ze souřadnicových os ve směru tíhového zrychlení v případě vrhů, volba počátku soustavy souřadnic tak, aby se v něm hmotný bod nacházel v počátečním bodě časového intervalu, v němž pohyb sledujeme, apod.).

Fyzikální podstatou „skládání“ je operace prováděná se silami působícími na hmotný bod, při konstantní hmotnosti pak se zrychleními, jež by tento hmotný bod získal působením každé z těchto sil jednotlivě. Toto správné východisko uvádí již zmíněná kniha [11], ale také učebnice [9, 10]:

- Učebnice [9, 10], Kapitola 5: Force and Motion – I. / Síla a pohyb, odstavec 5-4: Force / Síla

> *... when two or more forces act on a body, we can find their* ***net force****, or* ***resultant force****, by adding the individual forces vectorially. A single force that has the magnitude and direction of the net force has the same effect on the body as all the individual forces together. This fact is called the* ***principle of superposition for forces****.*
>
> *Jestliže tedy na těleso působí dvě či více sil, můžeme najít* ***výslednou sílu*** *neboli* ***výslednici*** *jako jejich vektorový součet. Jediná síla, která má stejnou velikost a směr jako výslednice, má na těleso stejný účinek jako všechny síly dohromady. Tento výsledek nazýváme* ***princip superpozice sil.***

Komentář[5]: Princip superpozice sil je z hlediska klasické mechaniky, vedle Newtonových axiomů, skutečně fyzikálním principem v nejobecnějším smyslu tohoto slova, byť jde v podstatě o

[5] Formulace není zcela přesná. Hovoří o tělese, ale neomezuje se na jeho translační pohyb. V případě obecné soustavy sil (mohou působit v různých bodech tělesa) totiž nemusí existovat umístění výslednice (vypočtené z hlediska translačního pohybu správně jako součet volných vektorů) tak, aby měla stejný účinek i na rotační pohyb tělesa. Je-li formulace vztažena na hmotný bod, je bezchybná.

pravidlo, jak zacházet se silami, které jsou v duchu druhého Newtonova zákona vektorovými veličinami. Jedná se opět o vektory vázané, v každém okamžiku však s tímtéž působištěm, umístěným v daném hmotném bodě. I když s vektory vázanými v jednom v bodě (tedy prvky vektorového prostoru umístěného v daném bodě euklidovského prostoru stejné dimenze) lze samozřejmě pracovat podle pravidel vektorové algebry, princip superpozice sil vtiskuje těmto pravidlům fyzikální opodstatnění.

Jedině v případě, kdy z jednotlivých sil, jimiž okolí působí na daný hmotný bod, vytváříme výslednici (a tedy i výraz pro derivaci hybnosti, resp. při konstantní hmotnosti zrychlení), můžeme hovořit o „skládání“, neboli „superpozici“ a o nezávislosti výsledku na pořadí sčítanců v součtu. V případě rychlostí či polohových vektorů to již nelze (viz též [11]).

Působení jednotlivých okolních objektů na hmotný bod je kvantitativně popsáno silovými zákony (gravitační, elektrické, magnetické působení, odpor prostředí, působení pružných těles, dynamické tření, apod.), u některých typů sil známe jen jejich směr (tlakové a statické třecí síly). Vzájemné působení objektů závisí obecně nejen na jejich vlastních charakteristikách (hmotnost, náboj, tuhost, apod.), ale obecně i na vzájemné poloze a rychlosti, a také explicitně na čase. Na těchto parametrech závisí tedy i výslednice a podle druhého zákona také derivace hybnosti, resp. zrychlení hmotného bodu,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t), \text{ resp. } m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

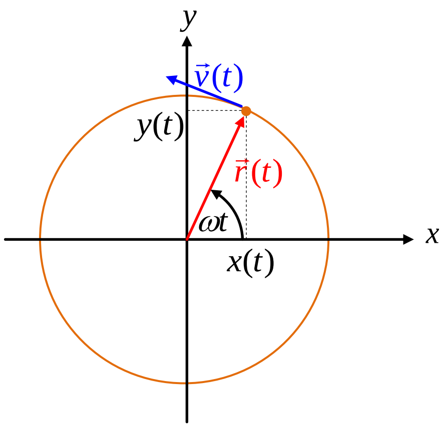
Každá složka derivace hybnosti, resp. zrychlení, závisí obecně nejen na čase, ale na všech souřadnicích polohového vektoru a složkách rychlosti hmotného bodu, tj. při rozepsání (pro konstantní hmotnost)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned}$$

V této soustavě obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (tzv. afinních ve zrychleních) jsou neznámé funkce $x(t), y(t), z(t)$ a jejich derivace „pomíchány“, jednotlivé rovnice nelze řešit odděleně (viz též např. text [13]). Tak jakápak „nezávislost“ pohybů? Pro ilustraci uveďme příklad:

Uvažujme o rovnoměrném pohybu po kružnici v souřadnicové rovině *xOy* kartézské soustavy souřadnic zadaném polohovým vektorem $\vec{r}(t) \sim (R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0)$ (viz obr. 8).

Vložit obr. 8.



$$x(t) = R\cos\omega t$$
$$y(t) = R\sin\omega t$$
$$r(0) \sim (R, 0, 0)$$
$$v(0) \sim (0, \omega R, 0)$$

Obr. 8: Jeden pohyb, dvojí pohybové rovnice.

Parametrické vyjádření této trajektorie je formálně shodným řešením např. dvou fyzikálně odlišných situací a tedy dvou odlišných soustav pohybových rovnic vyplývajících z druhého Newtonova zákona a spojených se stejnými počátečními podmínkami (uvedenými v obr. 8):

- Hmotný bod o hmotnosti *m* upevněný na pružině, popř. tyči o tuhosti *k*, vyhovující Hookeovu zákonu, která se může deformovat jen ve směru své délky. Druhý Newtonův zákona a pohybové rovnice v tomto případě mají tvar

  $$m\vec{a} = -k\vec{r} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx,\ \ m\ddot{y} = -ky,\ \ddot{z} = 0,\ \omega = \sqrt{k/m}\ .$$

  (Technickou realizaci ponechme stranou.) Proměnné jsou tedy separovány (každou z rovnic lze řešit zvlášť).
- Nabitá částice o hmotnosti *m* a záporným nábojem *q* v homogenním časově neproměnném magnetickém poli o indukci $\vec{B}$. Při volbě pravotočivé kartézské soustavy souřadnic, při níž je osa *z* souhlasně rovnoběžná s indukcí, mají druhý Newtonův zákon a pohybové rovnice tvar

  $$m\vec{a} = q(\vec{v}\times B) \Rightarrow m\ddot{x} - qB\dot{y} = 0,\ \ m\ddot{y} + qB\dot{x} = 0,\ \ddot{z} = 0,\ \omega = |q|B/m\ .$$

  a nelze je separovat, tj. řešit odděleně, na rozdíl od předchozího případu. Jsou-li zbývající osy v rovině kolmé k indukci orientovány tak, aby počáteční podmínky pro pohyb částice byly stejné jako v předchozím případě, je stejné i řešení[6].

Situace, kdy jednotlivé rovnice v soustavě dané druhým Newtonovým zákonem lze řešit odděleně, tj. rovnice typu $m\ddot{x} = F_x(x, \dot{x}, t),\ m\ddot{y} = F_y(y, \dot{y}, t),\ m\ddot{z} = F_z(z, \dot{z}, t)$ jsou velmi speciální. Patří k nim samozřejmě pohyby s konstantním zrychlením (v učebnicích nazývané „vrhy“ v případě, že tímto zrychlením je zrychlení tíhové). Tyto vysoce specifické, a obecně nepříliš realistické, situace nemohou být východiskem pro (ve skutečnosti chybné, resp.

[6] Případná námitka, že v praxi se uvedené situace při typických hodnotách hmotnosti, náboje, velikosti magnetické indukce a tuhosti pružiny kvantitativně podstatně liší hodnotou kruhové frekvence, nemá z didaktického hlediska opodstatnění, jakkoli může být relevantní.

přinejmenším zavádějící) formulace nějakého obecného „pravidla o skládání či nezávislosti pohybů“, notabene povýšeného na „princip“.

Dodejme, že ani slovní spojení „skládání pohybů“, resp. „skládání rychlostí“ ve smyslu posuzování pohybu v různých vztažných soustavách, jak je užívají a na praktických příkladech ukazují např. učebnice [6, 7, 8], částečně i [9, 10], nemá zcela obecnou platnost, neboť se (bez explicitního upozornění) týká pouze vzájemného translačního pohybu vztažných soustav. (Řešení zcela obecného případu vzájemného pohybu však není cílem tohoto příspěvku.)

6. Shrnutí

Je pochopitelné, že výuka mechaniky musí začínat popisem pohybu hmotného bodu, resp. tělesa, tedy kinematikou. Pochopitelná je i snaha autorů výukových textů předkládat je názorně a na příslušné vzdělávací úrovni (základní, středoškolské, vysokoškolské). Na základní škole je situace jednodušší v tom, že se jedná pouze o přímočaré pohyby. I zde by však poloha a rychlost (popřípadě zrychlení na druhém stupni ZŠ) měly být zaváděny jako „orientované veličiny“ pomocí složek. Na střední škole by už měla být samozřejmá práce s vektory a jejich průměty, resp. složkami v předem zvolené soustavě souřadnic či bázi. Za správný (matematicky, fyzikálně i didakticky) popis pohybu hmotného bodu považujeme (v zestručněné podobě) zhruba následující:

Poloha hmotného bodu v daném okamžiku $\vec{r}(t_0)$ je vzhledem k zvolené vztažné soustavě S (vztažné těleso spojené se soustavou souřadnic) jednoznačně určena *polohovým vektorem* $\vec{r}(t_0)$, v průběhu času v daném časovém intervalu např. $[\alpha, \beta]$ pak *vektorovou funkcí* $\vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$, definující *trajektorii* hmotného bodu. Vektor $\vec{r}$ s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic O lze rozložit na součet jeho průmětů do tří předem libovolně zvolených nezávislých směrů určených vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ soustavy souřadnic $\langle O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$ v prostoru (resp. $\langle O; \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle$ v rovině, jde-li o rovinný pohyb, resp. $\langle O; \vec{a}_1 \rangle$, jde-li o pohyb po přímce se směrovým vektorem $\vec{a}_1$. Volba kartézské soustavy souřadnic $\langle O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \rangle$ je samozřejmě nejjednodušší a nejobvyklejší. (Pohyb hmotného bodu je tedy jeden, určený vektorovou funkcí $\vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$, možných rozkladů do různých soustav souřadnic $\langle O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$, $\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{a}_1 + r_2(t)\vec{a}_2 + r_3(t)\vec{a}_3 +, t \in [\alpha, \beta]$, kde dokonce i poloha počátku a bázové vektory mohou záviset na čase, je nekonečně mnoho. Tyto rozklady navzájem jednoznačně souvisejí souřadnicovými přechody, tedy čistě matematicky, bez hlubšího fyzikálního významu, byť některé z možných rozkladů spojené s fyzikálně či geometricky význačnými směry mohou zjednodušit výpočty.)

Základ pro výše popsaný postup je např. v učebnicích [7, 8] dobře položen hned v úvodní kapitole o skládání sil. Snaha o „názornost“ při popisu pohybu v rovině či prostoru pomocí představy, že „hmotný bod koná dva i více pohybů současně“ se nutně musí minout účinkem. (Jediné příklady, kdy jde o „více typů pohybu“, se týkají tuhého tělesa, jehož obecný pohyb je složením pohybu translačního a pohybu rotačního – viz např. [6], či obecného kontinua, kdy se přidává ještě pohyb deformační. To však jsou zcela jiné situace.) Rozklad vektoru do průmětů či složek je ovšem ryze matematická záležitost, bez níž se sice fyzikální výklad nemůže obejít, neměla by však být vydávána za princip.

K pojmu „nezávislost pohybů“ pak uveďme:

O „nezávislosti“ lze hovořit nanejvýš v případě pohybových rovnic. To tehdy, kdy druhý Newtonův zákon, resp. jeho matematický zápis, lze vyjádřit v takové vztažné soustavě, v níž jeho jednotlivé složky obsahují, kromě časové proměnné, pouze odpovídající (stejnojmenné) složky polohy a rychlosti, tj.

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \Leftrightarrow m\ddot{r}_i = F_i(r_i, \dot{r}_i, t)$ pro $i = 1, 2, 3$, nebo v kartézské soustavě souřadnic při obvyklém značení: $m\ddot{x} = F_x(x, \dot{x}, t)$, $m\ddot{y} = F_y(y, \dot{y}, t)$, $m\ddot{z} = F_z(z, \dot{z}, t)$.

7. Závěr

Kritický postoj k užívání slova „princip“ se pochopitelně netýká běžné hovorové řeči. Například dotaz či vyjádření typu: „Na jakém principu funguje toto zařízení?“, nebo „Sluneční článek je založen na principu fotovoltaického jevu“, jsou zcela běžná a používají slova „princip“ zcela správně např. ve specifickém smyslu dle [2] – *podstata fungování určitého přístroje*.

V učebnicích, vzdělávacích a odborných textech by však neměl název „princip“ označovat kdejakou marginální poučku a vzbuzovat tak přesvědčení studenta či čtenáře, že fyzika je souhrnem množství často nesouvisejících tvrzení. Naopak, tyto texty mají zdůrazňovat logickou strukturu fyziky jako vědní oblasti, v níž nejzávažnější fyzikální disciplíny (např. mechanika, elektrodynamika, kvantová mechanika – ať již v relativistické či nerelativistické verzi), stojí na několika málo zásadních poznatcích, tedy „principech“, z nichž vychází i budování dalších pojmů dané disciplíny, přičemž další zákonitosti týkající se těchto pojmů vyplývají logickou úvahou podpořenou matematickým aparátem a jejich platnost či omezení jsou ověřovány promyšlenými experimenty. V případě klasické newtonovské mechaniky jsou oněmi „principy“ Newtonovy axiomy a silové zákony spolu s pravidlem superpozice sil – které si označení „princip superpozice sil“ zaslouží. Jen takový způsob výkladu může přispět k hlubšímu pochopení nejen dílčí fyzikální problematiky, ale především k poznání hierarchické stavby fyziky a k rozvoji fyzikálního myšlení.

Literatura

[1] Princip – Wikipedie (wikipedia.org)
[2] princip - ABZ.cz: slovník cizích slov
[3] K. Pala, J. Všianský: *Slovník českých synonym.* NLN, s.r.o Nakladatelství Lidové noviny, Praha 1994.
[4] O. Lepil: *Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění.* (5., přepracované vydání.) Prometheus, Praha 1994, 2001, 2017.
[5] O. Lepil: *Fyzika pro gymnázia. Optika.* (5., přepracované vydání.) Prometheus, Praha 1993, 2002, 2015.

[6] J. Vachek a kol.: *Fyzika pro I. ročník gymnázií.* SPN, Praha 1984.
[7] M. Bednařík, M. Široká, P. Bujok: *Fyzika pro gymnázia. Mechanika.* (1. vydání), Prometheus, Praha 1993.
[8] M. Bednařík, M. Široká: *Fyzika pro gymnázia. Mechanika.* (Dotisk 5., přepracovaného vydání.) Prometheus, Praha 1993, 2000, 2013.
[9] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika, Část 1, Mechanika.* VUTIUM, Brno 2000 (překlad z angličtiny).
[10] J. Walker: *Halliday/Resnick Fundamentals of Physics.* J. Wiley & Sons, Inc., 2008. (Překlad do češtiny: D. Halliday, J. Resnick, J. Walker: *Fyzika.* VUTIUM, VUT v Brně 2013.)
[11] K. Kvasnica: *Mechanika.* Academia, Praha 1988.
[12] R. A Servay, J. S. Faughn: College Physics. (5-th Edition.) Saunders College Publishing, Harcourt BraceCollege Publishers 1995.
[13] N. C. Barford: Mechanics. John Wiley & Sons, Inc., 1973.
[14] J. Musilová, P. Musilová: *Matematika pro porozumění i praxi II*. VUTIUM, Brno 2012.
[15] Skládání pohybů a rychlostí: MEF (jreichl.com) .