Radiologická fyzika

pravděpodobnost
měření a zpracování dat

podzim 2008, šestá přednáška

Měření tlaku – nejjednodušší úkon u lékaře
aneb
jak zacházet s měřenými hodnotami?

Běžná situace u lékaře: „Paní Nováková, když už tady jste, posaďte se, změřím vám tlak. .... Ale ale, sto šedesát na sto deset, hned vám musím předepsat léky!!"

„Ale pane doktore, já jsem trochu rozčílená, to není možné, změřte to znovu, prosím."

„No ano, máte pravdu, teď je to už jen sto třicet na devadesát – máte tlak jako mladice."

Změřte si tlak desetkrát.

Pokus s měřením tlaku

systola	diastola	tep
140	105	67
155	110	65
130	100	68
145	102	70
153	104	63
138	94	65
142	103	69
135	98	70
151	103	72
132	94	66

Jaké jsou jednotky?

1 mm Hg odpovídá tlaku
$\boldsymbol{p = h\rho g} = 10^{-3} \cdot 13\,500 \cdot 10 =$
$= 135$ Pa
100 mm Hg odpovídá 13,5 kPa

Která z hodnot je správná?

Nesprávně položená otázka.

S daty je třeba umět zacházet.

Pravděpodobnost

aneb

matematika náhody

Co je to pravděpodobnost
aneb
proč nesázet Sportku?

Víte například, že

- **pravděpodobnost hlavní výhry ve Sportce je sedm milióntin procenta, tj. ani ne jedna ku deseti miliónům?**
- **pravděpodobnost páté ceny je už skoro dvouprocentní?**
- **pravděpodobnost, že mezi 40 lidmi jsou alespoň dva, kteří mají narozeniny ve stejný den, je skoro devadesátiprocentní?**

A víte,

- **co to vůbec je pravděpodobnost?**
- **co je to medián, co průměr, a kolik typů průměrů existuje?**
- **co je správnost a co přesnost měření?**
- **co znamená zápis „hodnota veličiny *X* je (2,518 ± 0,007) m“ ?**

Náhodné jevy a jejich pravděpodobnost

Házení mincí – náhodný pokus

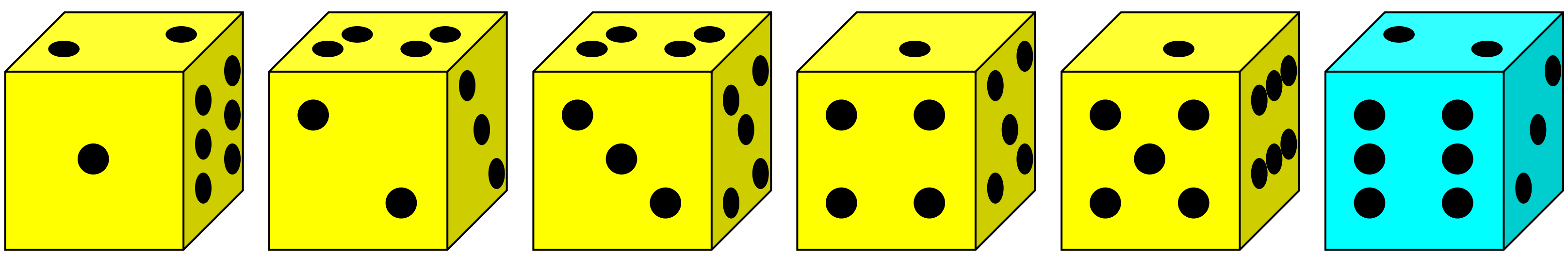
celkem dvě možnosti – náhodné jevy (orel, hlava)

sledujeme jev A: padne orel – jedna z možností je příznivá, **p = 1/2**

Házení kostkou – náhodný pokus

celkem šest možností – náhodných jevů (1, 2, 3, 4, 5, 6)

sledujeme jev A: padne šestka – jedna z možností je příznivá, **p = 1/6**



Definice pravděpodobnosti

Pravděpodobnost
nastoupení jevu A je podílem počtu případů ***M***, v nichž jev A nastal (čitatel), a počtu ***N*** všech možných případů (jmenovatel).

Úkol 1:

a) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne sudé číslo?
b) Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo dělitelné třemi?
c) Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo menší než 3?

Úkol 2:

a) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami (současně) padne součet sedm?
b) Jaká je pravděpodobnost, že součin padnuvších čísel bude lichý?

Jakých hodnot může pravděpodobnost v principu nabývat?

Řešení předchozích úkolů

Řešení úkolu 1b)

$N = 6$, $M = 2$ (příznivé jsou případy, kdy padne trojka nebo šestka)

$p = 2/6 = 1/3$

Řešení úkolu 2a)

$N = 36$ (každá ze 6 možností, které mohou padnout na první kostce, se nezávisle kombinuje s každou ze 6 možností na druhé kostce),

$M = 6$ (jednička na první a šestka na druhé kostce, nebo naopak, dvojka na první a pětka na druhé kostce, nebo naopak, trojka na první a čtyřka na druhé kostce, nebo naopak), $p = 6/36 = 1/6$

Řešení úkolu 2b)

$N = 36$, $M = 9$, $p = 9/36 = 1/4$

Řešení úkolu 2b sami zdůvodněte.

Ještě jeden úkol ryze praktický

V zásuvce jsou ponožky tří barev. Červené (Č), zelené (Z) a modré (M). Je jich tam od každé barvy hodně. Student jde na schůzku a chce si vzít čisté ponožky. Náhle zhasne světlo. Student vytáhne potmě dvě ponožky.

a) Jaká je pravděpodobnost, že budou mít stejnou barvu?

b) Jaká je pravděpodobnost, že nebudou mít stejnou barvu?

c) Jaká je pravděpodobnost, že ponožky budou mít stejnou barvu, ale ne červenou?

Všimněte si výsledků a) a b). Co pro ně platí? Co myslíte, je to náhoda, nebo to tak být musí?

Jev jistý – jev s jednotkovou pravděpodobností .

Jev nemožný – jev s nulovou pravděpodobností.

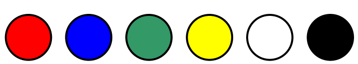
Cifry, kostky, karty
aneb
kombinatorická průprava

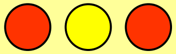
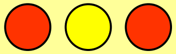
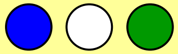
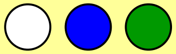
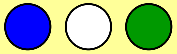
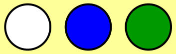
výběry *k*-té třídy prvků z *n* prvků

výběry *k* prvků z množiny obsahující *n* prvků podle jistých pravidel

	pořadí je podstatné	**pořadí je nepodstatné**
prvky lze opakovat	***variace s opakováním***	***kombinace a opakováním***
prvky nelze opakovat	***variace bez opakování***	***kombinace bez opakování***

Příklad: Barevné signály ***n*** = 6 barev, ***k*** = 3



	variace	**kombinace**
s opakováním	 $\neq$ 	 $\equiv$ 
bez opakování	 $\neq$ 	 $\equiv$ 

Jak určit počet možných výběrů

	variace	kombinace
s opakováním	$V_k^{/}(n) = n^k$	$C_k^{/}(n) = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$
bez opakování	$V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_k(n) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Zkusíme přijít na to, jak vzorce vznikly?

Vzorce pro variace

Určení vzorce pro variace opakováním

- Kolika způsoby lze z $\boldsymbol{n}$ prvků vybrat první? … $\boldsymbol{n}$ způsobů
- Kolika způsoby lze z $\boldsymbol{n}$ prvků vybrat druhý? … $\boldsymbol{n}$ způsobů
- Kolika způsoby lze vybrat první dva prvky? … $\boldsymbol{n \cdot n = n^2}$ způsobů
- **Kolika způsoby lze tedy vybrat *k* prvků? Doplňte sami.**

Určení vzorce pro variace bez opakování

- Kolika způsoby lze z $\boldsymbol{n}$ prvků vybrat první? … $\boldsymbol{n}$ způsobů
- Kolika způsoby lze ze zbývajících $\boldsymbol{n} - 1$ prvků vybrat druhý? … $\boldsymbol{n} - 1$ způsobů
- Kolika způsoby lze tedy vybrat první dva prvky? … $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} - 1)$
- Kolika způsoby lze nakonec ze zbývajících $\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{k} - 1)$ prvků vybrat k-tý? … $(\boldsymbol{n} - k + 1)$
- **Kolika způsoby lze tedy vybrat *k* prvků?** … $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} - 1)(\boldsymbol{n} - 2)\ldots(\boldsymbol{n} - k + 1)$

Vzorce pro kombinace

Určení vzorce pro kombinace bez opakování

- Kolika způsoby lze uspořádat ***k*** neopakujících se prvků? … ***k***!
  Tyto možnosti, lišící se pouze pořadím, jsou ekvivalentní.
- Proto je $C_k(n) = V_k(n) / \boldsymbol{k}! = \ldots$ **Výsledný vzorec zapište sami.**

Určení vzorce pro kombinace s opakováním

- Jak vypadají kombinace s opakováním ***k*** barevných kuliček při výběru z ***n*** možných barev? Zvolme např. $\boldsymbol{n} = 7$, $\boldsymbol{k} = 14$

modrá	**červená**	**černá**	**zelená**	**hnědá**	**fialová**	**oranžová**
●●	●●●	●●	●●●●		●	●●

n přihrádek, tj. ***n*** – 1 přepážek mez nimi, ***k*** kuliček, celkem tedy
n + ***k*** – 1 pozic; z nich vybíráme ***k*** pozic pro kuličky, tj.
$C'_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{n}) = C_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k} - 1)$

Příklady na pravděpodobnost - I

Příklad 1. Jaká je pravděpodobnost hlavní výhry ve Sportce? Tah sportky představuje výběr šesti ze čtyřiceti devíti čísel.

$$N = C_7(49) = \frac{49!}{6!43!}, \quad M = 1, \quad p = \frac{M}{N} \doteq 7 \cdot 10^{-8}$$

Příklad 2. Jaká je pravděpodobnost páté ceny ve Sportce? Ze šesti tažených je třeba uhodnout tři čísla.

$$N = C_6(49) = \frac{49!}{6!43!}, \quad M = C_3(6) \cdot C_3(43) = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{43!}{3!40!},$$

$$p = \frac{M}{N} \doteq 0,018$$

Příklady na pravděpodobnost - II

Příklad 3. Jaká je pravděpodobnost, že ve hře typu Šance milion uhodnete správně taženou skupinu cifer? (Z každého ze šesti bubnů obsahujících cifry 0, 1, 2, … , 9 se náhodně vybere jedna.)

$$N = V_6^{/}(10) = 10^6, \quad M = 1, \quad p = \frac{M}{N} \doteq 10^{-6}$$

Příklad 4. Jaká je pravděpodobnost v předchozí hře, bude-li k dispozici pouze jeden buben, který obsahuje každou z cifer právě jednou?

$$N = V_6(10) = \frac{10!}{4!}, \quad M = 1, \quad p = \frac{M}{N} \doteq 6,6 \cdot 10^{-6}$$

Jak s pravděpodobnostmi počítat
aneb
pravděpodobnosti „složených“ jevů

Někdy je třeba určit pravděpodobnosti jevů, které jsou nějakým způsobem „složeny“ z jevů jednodušších. Uvažujme o dvou jevech ***A*** a ***B***, jejichž pravděpodobnosti jsou známy, ***p***(***A***), ***p***(***B***). Definujme nové jevy ***C*** a ***D*** jako

C … jevy ***A*** a ***B*** nastanou současně

D … nastane jev ***A*** nebo ***B*** (v principu zahrnuje i možnost, že nastanou oba)

Za určitých podmínek lze pravděpodobnosti jevů ***C*** a ***D*** určit pomocí pravděpodobností ***p***(***A***) a ***p***(***B***).

Nezávislé jevy

Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu dvěma kostkami padne na obou šestka?

Uvědomte si:

To, co padne na jedné kostce, je nezávislé na výsledku druhé kostky.

Jev $\boldsymbol{A}$: Na první kostce padne šestka … $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}) = 1/6$

Jev $\boldsymbol{B}$: Na druhé kostce padne šestka … $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{B}) = 1/6$

Jev $\boldsymbol{C}$: Jevy $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ nastanou současně … $\boldsymbol{N} = 6 \cdot 6 = 36$ možností,

$\boldsymbol{M} = 1$, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{M} / \boldsymbol{N} = 1/36 = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{p}(\boldsymbol{B})$

Pravděpodobnost současného nástupu nezávislých jevů je rovna součinu pravděpodobností těchto jevů.

Neslučitelné jevy

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne některé ze dvou nejvyšších čísel, tj. padne šestka nebo pětka?

Uvědomte si:

Skutečnosti, že šestka i pětka padnou při stejném hodu, jsou neslučitelné.

Jev $\boldsymbol{A}$: Na kostce padne šestka … $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}) = 1/6$

Jev $\boldsymbol{B}$: Na kostce padne pětka … $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{B}) = 1/6$

Jev $\boldsymbol{C}$: Nastane buď jev $\boldsymbol{A}$ nebo jev $\boldsymbol{B}$ … $\boldsymbol{N} = 6$ možností,

$\boldsymbol{M} = 2$, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{M} / \boldsymbol{N} = 2/6 = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{B})$

Pravděpodobnost nástupu některého z jevů, z nichž každé dva jsou neslučitelné, je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů.

Dokážete vysvětlit, proč je součet pravděpodobností jevu *A* a jevu opačného, tj. že jev *A* nenastane, je rovna 1 ?

Příklady na pravděpodobnost - III

Příklad 5. Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině $\boldsymbol{k}$ osob mají alespoň dvě narozeniny ve stejný den?

Rok má $\boldsymbol{n} = 365$ dní. Určíme nejprve pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{A}$, že každá z osob má narozeniny ***v jiný den***. Počet případů možných pro tento jev je $\boldsymbol{N} = V'_k(\boldsymbol{n})$ (variace s opakováním – v principu může mít každá z osob narozeniny v kterýkoli den). Počet případů příznivých je $\boldsymbol{M} = V_k(\boldsymbol{n})$ (variace bez opakování – nechceme, aby se narozeninový den zopakoval u více osob).
Jev, který nás zajímá, je opačným jevem k jevu $\boldsymbol{A}$, jeho pravděpodobnost je tedy $\boldsymbol{p} = 1 - V_k(\boldsymbol{n}) \,/\, V'_k(\boldsymbol{n})$.

Vypočtěte si tuto pravděpodobnost pro 40 osob.

Důležitý příklad – Bernoulliův pokus - I

Provedení pokusu a označení

- Nastane-li předem definovaný jev *A* (například „padne šestka“), nazveme to ***zdarem***, v opačném případě ***nezdarem***.
- Pravděpodobnost zdaru označíme ***p*** (***p*** = 1/6), pravděpodobnost nezdaru je 1 – ***p*** (tedy 5/6).
- ***n***-krát nezávisle provedeme pokus (například hod kostkou).

Jaký jev nás zajímá

- Jev ***B*** … Právě při ***x*** provedeních z celkového počtu ***n*** provedení pokusu nastane zdar.

Důležitý příklad – Bernoulliův pokus - II

Které další jevy s tím souvisí

- Jevy $\boldsymbol{A}_\mathbf{j}$ pro j = 1, …, $\boldsymbol{x}$ ... při j-tém provedení pokusu nastane zdar.
- Jevy $\boldsymbol{B}_\mathbf{k}$ pro k = $\boldsymbol{x}$+1, …, $\boldsymbol{n}$ ... při k-tém provedení pokusu nezdar.
- Jev $\boldsymbol{C}$ ... Jevy $\boldsymbol{A}_\mathbf{1}$ až $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}}$ a $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}$ až $\boldsymbol{B}_\mathbf{n}$ nastoupí současně, tj. právě při prvních $\boldsymbol{x}$ opakováních pokusu nastane zdar, při zbývajících nezdar.

$$p(C) = p(A_1)\cdots p(A_x)\cdot p(B_{x+1})\cdots p(B_\mathrm{n}) = p^x(1-p)^{n-x}$$

- Nezáleží nám ale na tom, při ***kterých x*** ze všech $\boldsymbol{n}$ opakování pokusu nastal zdar. Možností, kdy zdar nastal **právě při *x*** ze všech opakování pokusu, je $C_x(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}!/[\boldsymbol{x}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{x})!]$.
- **Výsledná pravděpodobnost jevu *B***

$$p(B) = C_x(n)\cdot p(C) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\,p^x(1-p)^{n-x}$$

- **Úkol:** Vypočtěte pravděpodobnost Bernoulliova pokusu pro 5 opakování hodu kostkou a dva zdary, a pro 5 opakování hodu mincí a žádný zdar. Pro jaké $\boldsymbol{x}$ je při $\boldsymbol{n}$ hodech mincí pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{B}$ největší?

Úlohy na pravděpodobnost

Úloha 1.

Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu 6 kostkami padne

a) na každé kostce jiné číslo,

b) samé jedničky,

c) alespoň tři dvojky,

e) více než tři dvojky,

f) právě ti dvojky,

g) všechna čísla stejná.

Úloha 2.

Pravděpodobnost, že student ***A*** složí úspěšně zkoušku z Radiologické fyziky, je ***p***, pravděpodobnost, že zkoušku složí student B, je ***q***. Jaká je pravděpodobnost, že zkoušku složí

a) právě jeden ze studentů,

b) alespoň jeden ze studentů,

c) oba studenti

d) žádný ze studentů.

Jednotlivé situace je třeba „šikovně“ vytvořit pomocí jevů nezávislých, resp. neslučitelných, resp. jevů obojího typu.

Měření a zpracování dat

aneb

jak souvisí pravděpodobnost s měřením

Měřené hodnoty veličin jsou „náhodné“

Vzpomeňme si na měření krevního tlaku – co znamená fakt, že při různých opakováních měření naměříme jiné hodnoty?

Mění se tlak tak rychle, že jej fakticky nemůžeme určit, nebo lze z různých naměřených hodnot zjistit relevantní informaci?

Je správné, že lékař měří pacientovi při dané návštěvě tlak pouze jednou?

Řada veličin se řídí náhodnými vlivy, takže i za stejných podmínek mohou nabývat různých hodnot, popř. při jejich opakovaném měření můžeme dostat různé hodnoty.

Náhodná veličina s diskrétním rozdělením

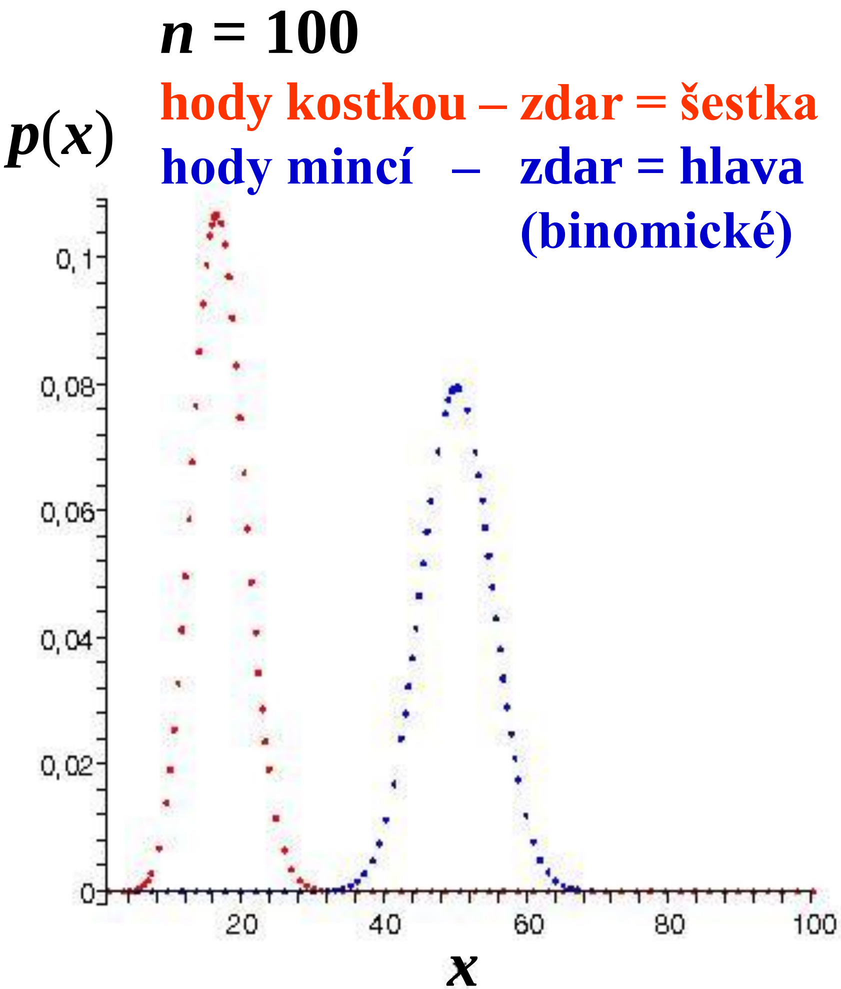
Náhodná veličina *X* a její (diskrétní) rozdělení

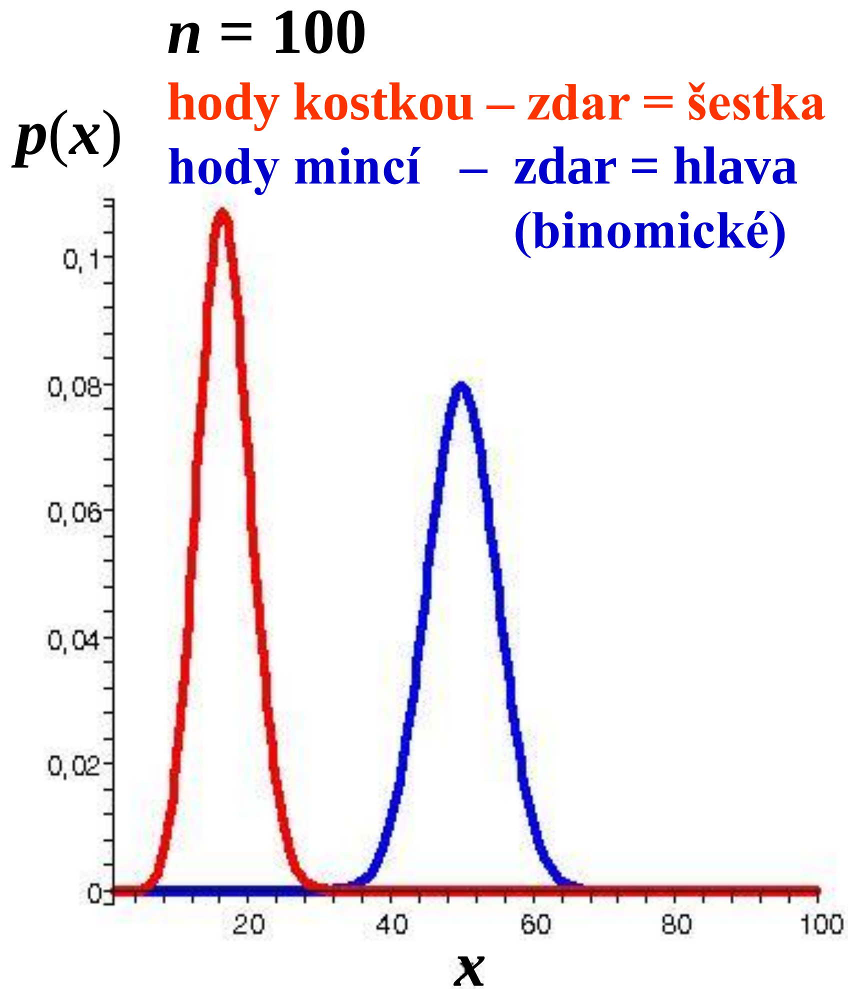
Veličina, která nabývá hodnot ($\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_N$) s pravděpodobnostmi ($\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_N$), kde $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_N = 1$

Víte proč ?? Uvědomte si neslučitelnost jevů, že veličina nabude dvou různých hodnot současně.

Rozdělením náhodné veličiny rozumíme soubor všech dvojic (x_j, p_j), pro j = 1, …, *n*.

Bernoulliovo rozdělení - I





Úkol: Dokážete z grafů určit „nejpravděpodobnější hodnotu“ ? Co znamená ?

Binomické a Poissonovo rozdělení – I

Poissonovo rozdělení

Limitní případ binomického rozdělení (Bernoulliova pro $\boldsymbol{p} = 1/2$) pro velký počet pokusů, zajímáme-li se o velmi malý počet zdarů ve srovnání s počtem pokusů.

Praktický případ

Registrace radioaktivních částic v Geigerově-Millerově trubici.

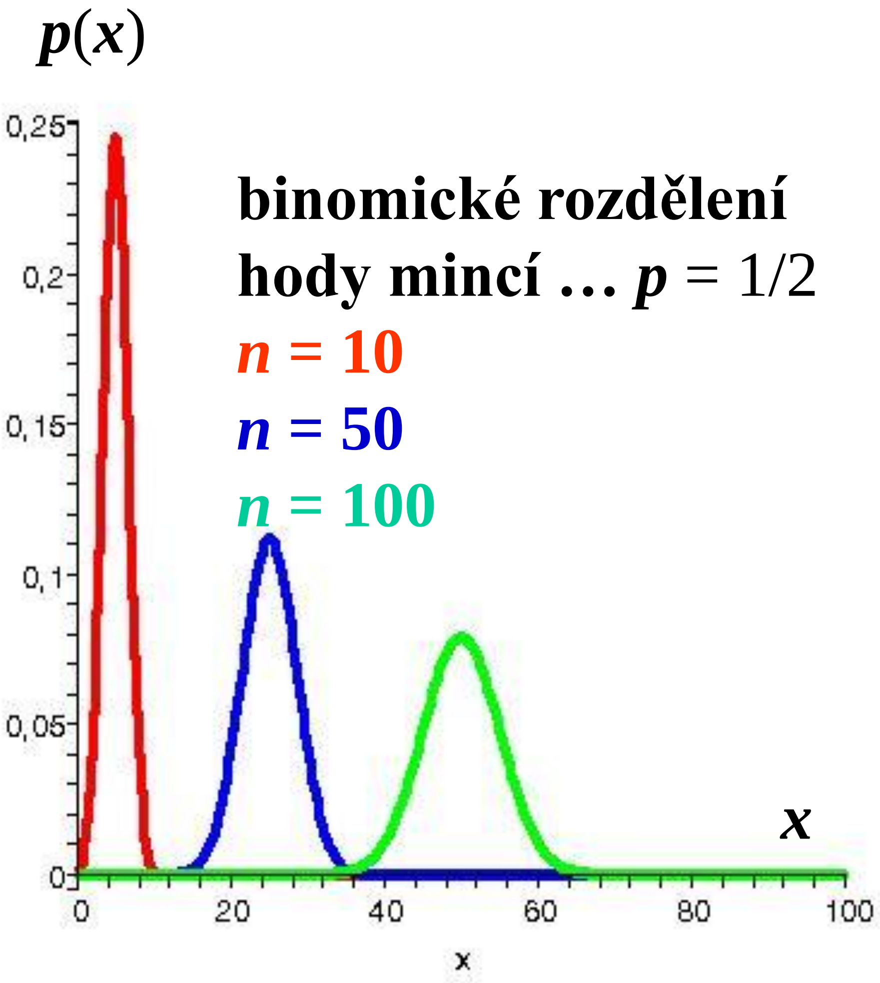
$Cs^{137} \rightarrow Ba^{137}$ + elektron + neutrino … asi 8% všech rozpadů

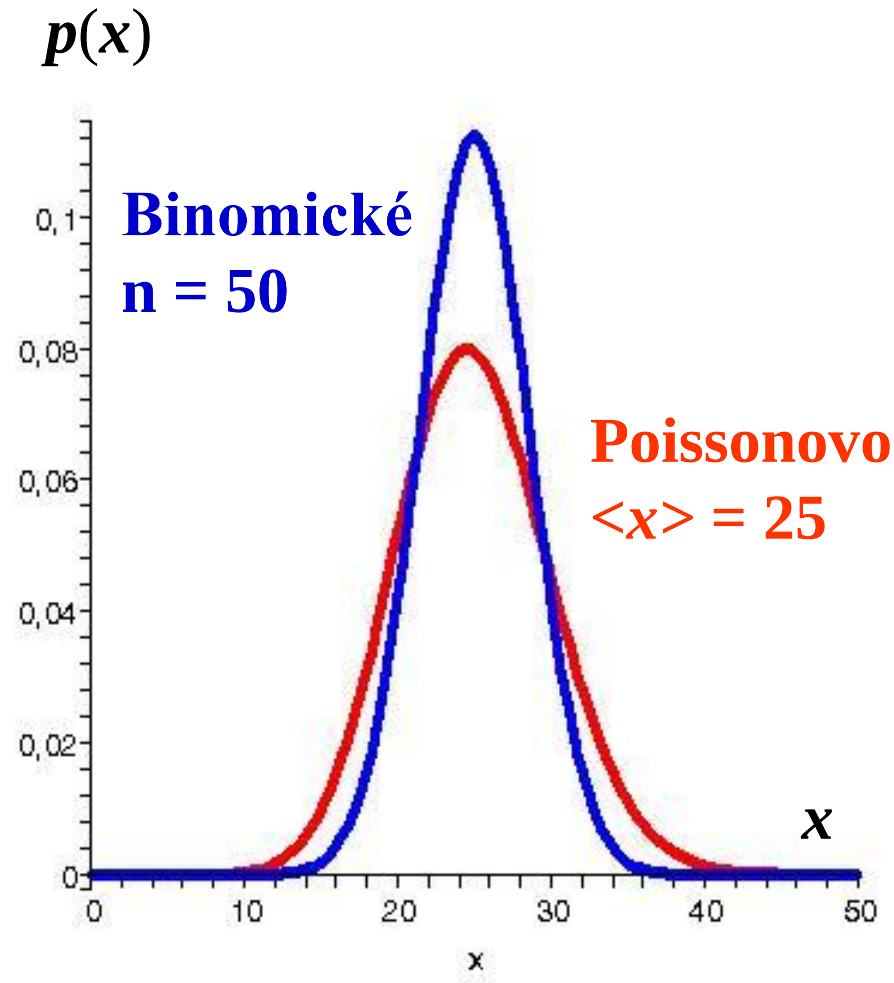
$Cs^{137} \rightarrow Ba^{137*}$ + elektron + neutrino … asi 92% všech rozpadů

Cs zdroj s aktivitou 10 μC (1 Curie … za 1 s rozpad 3,7 . 10^{10} jader, v našem vzorku to znamená $\boldsymbol{n}$ = 3 700 000 pokusů za 10 sekund).

V experimentu při počítání pulsů je nastaveno na cca 1 puls (zdar) za 1 s, počet zdarů v intervalu 10 s je tedy velmi malý proti $\boldsymbol{n}$.

Binomické a Poissonovo rozdělení – II





Jak zjistit rozdělení experimentálně?

Příklad se střelcem

Střelec vystřelí ***n***-krát na terč. Dosažené počty bodů při jednotlivých výstřelech představují hodnoty náhodné veličiny. Jaké jsou pravděpodobnosti jednotlivých hodnot? Pro ***n*** = 50 například:

hodnoty	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
četnosti	0	0	1	1	2	2	3	3	8	20	10
pravděp	**0,00**	**0,00**	**0,02**	**0,02**	**0,04**	**0,04**	**0,06**	**0,06**	**0,16**	**0,40**	**0,20**

Při různých počtech výstřelů ***n*** se pravděpodobnosti budou obecně měnit. Pro rostoucí ***n*** budeme pozorovat jejich „ustalování“.

Která hodnota nejlépe reprezentuje rozdělení?

Jak máme zadávat náhodnou veličinu

Náhodnou veličinu nejdokonaleji reprezentuje zadání jejího rozdělení. To je ovšem poněkud nepraktické. U střelce jsme viděli, že jeho kvalita je reprezentována hodnotou blízkou devítce. Realizovala se nejčastěji, má největší váhu.

Reprezentativní hodnota

(aritmetický průměr všech hodnot včetně „násobnosti“)

$$\langle x \rangle = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_N x_N}{n_1 + n_2 + \cdots + n_N} = \sum_{j=1}^{N} \frac{n_j}{n} x_j = \sum_{j=1}^{N} p_j x_j$$

Uvedená hodnota je váženým průměrem hodnot a nazývá se střední hodnotou náhodné veličiny.

Úkol: Určete střední hodnotu dosažených bodů v příkladu se střelcem.

Další charakteristiky rozdělení

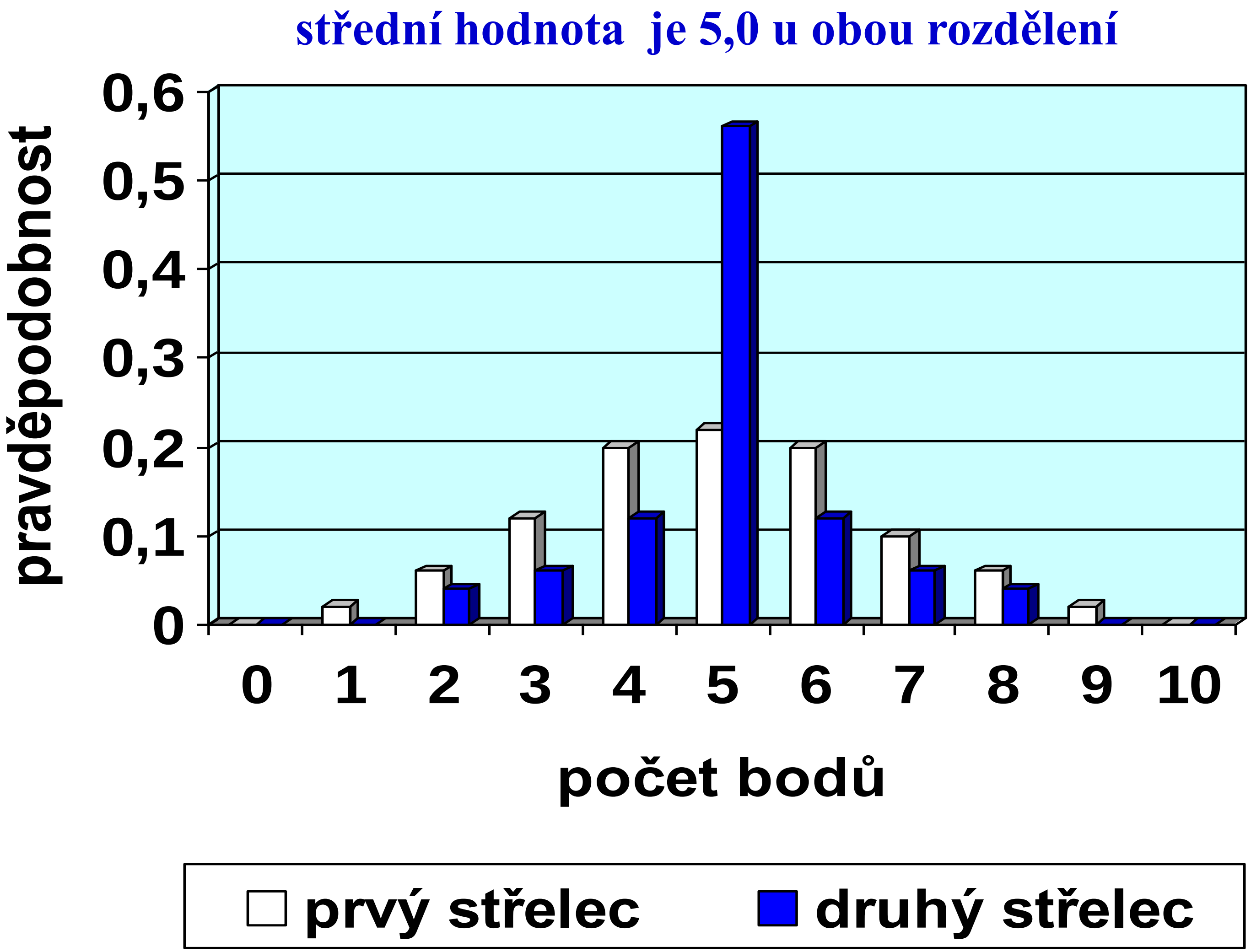
Který střelec je lepší?

Dva střelci vystřelí ***n***-krát na terč. Pro ***n*** = 50 máme jejich tabulky.

hodnoty	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
četnosti	0	1	3	6	10	11	10	5	3	1	0
pravděp	**0,00**	**0,02**	**0,06**	**0,12**	**0,20**	**0,22**	**0,20**	**0,10**	**0,06**	**0,02**	**0,00**

hodnoty	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
četnosti	0	0	2	3	6	28	6	3	2	0	0
pravděp	**0,00**	**0,00**	**0,04**	**0,06**	**0,12**	**0,56**	**0,12**	**0,06**	**0,04**	**0,00**	**0,00**

Rozdělení pro oba střelce



Rozptyl rozdělení

Odvozené náhodné veličiny

Y* = *f* (*X*)** náhodná veličina s rozdělením $(\boldsymbol{y_j}, \boldsymbol{p_j}) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_j}), \boldsymbol{p_j})$, má-li veličina ***X rozdělení $(\boldsymbol{x_j}, \boldsymbol{p_j})$

Která veličina charakterizuje „odchýlení“ hodnot od střední hodnoty?

Určete střední hodnotu veličiny *X* - <*x*>. Čekali jste tento výsledek?

Rozptylem náhodné veličiny *X* rozumíme střední hodnotu náhodné veličiny *Y* = [*X* - <*x*>]^2. Její odmocnina je tzv. směrodatná odchylka.

$$D(X) = \left\langle \left(X - \langle x \rangle \right)^2 \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \left(x - \langle x \rangle \right)^2 p_j = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2$$

Úkol: Vypočtěte hodnotu rozptylu a směrodatné odchylky u obou střelců. Jak byste interpretovali výsledek? Směrodatná odchylka vyjde 1,7 pro prvého a 1,2 pro druhého střelce.

Medián rozdělení

Distribuční funkce

Funkce definovaná na **R** součtem pravděpodobností

$\boldsymbol{p_1} + \ldots + \boldsymbol{p_s}$ odpovídajících hodnotám menším než $\boldsymbol{x_{s+1}}$.

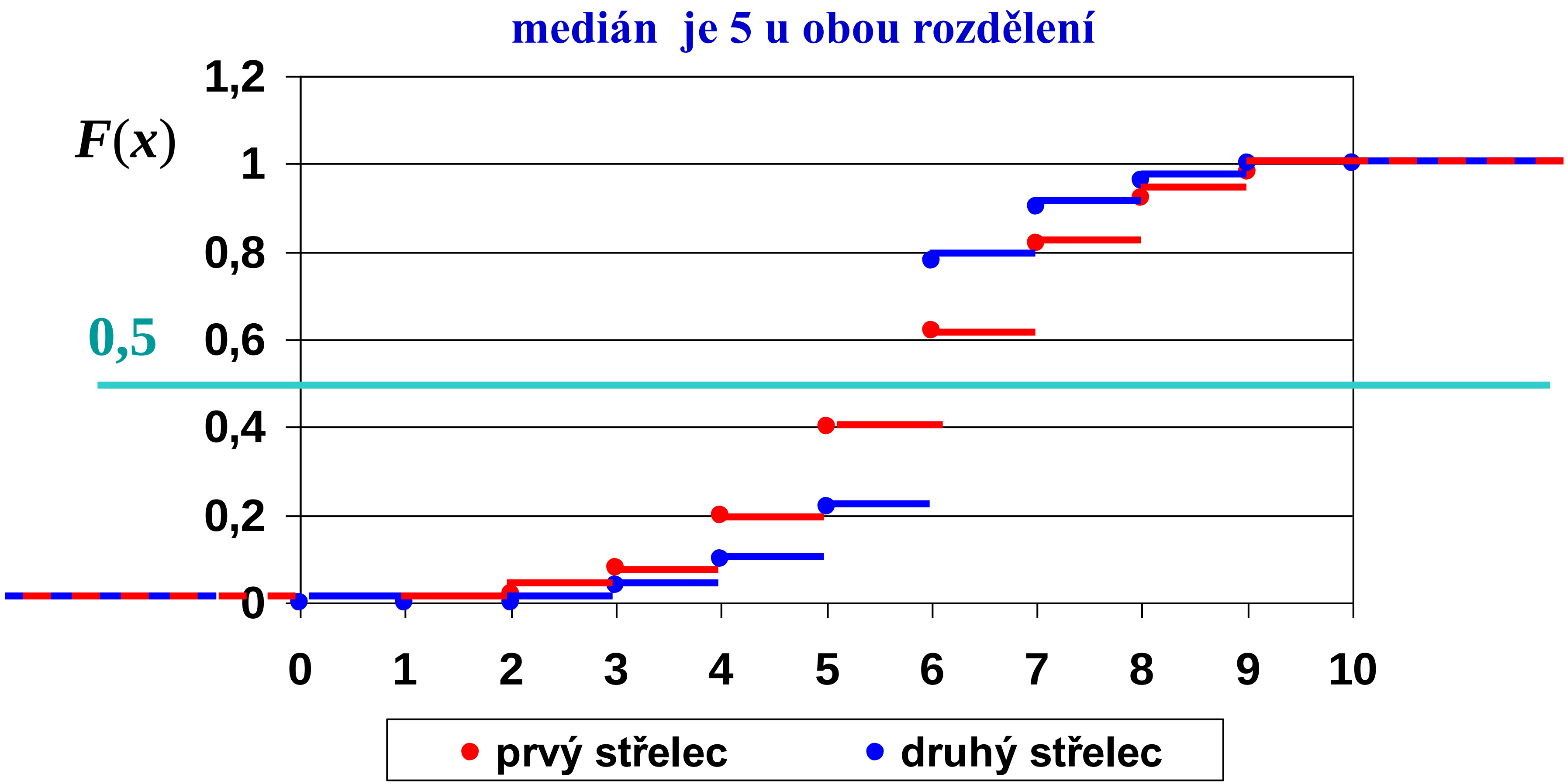
$$F: \quad x \to F(x) = \sum_{j=1, x_s \le x < x_{s+1}}^{s} p_j, \quad \text{tedy}$$

$$p_j = F(x_j) - F(x_{j-1}), \; 2 \le j \le N, \quad p_1 = F(x_1)$$

Medián je hodnota x_s, pro kterou $F(x_s) < 0{,}5$ a $F(x_{s+1}) \ge 0{,}5$.

Úkol: Určete mediány rozdělení pro oba porovnávané střelce. Je výsledek očekávaný?

Distribuční funkce pro střelce



Náhodná veličina se spojitým rozdělením

Náhodná veličina *X* a její (spojité) rozdělení

Veličina, která nabývá všech reálných hodnot $\boldsymbol{x}$ z intervalu $[\boldsymbol{x}_{\mathrm{m}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{M}}]$ s elementárními pravděpodobnostmi $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}\,(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

Rozdělením náhodné veličiny rozumíme funkci *w*(*x*) na intervalu [x_{m}, x_{M}]. Též hustota pravděpodobnosti.

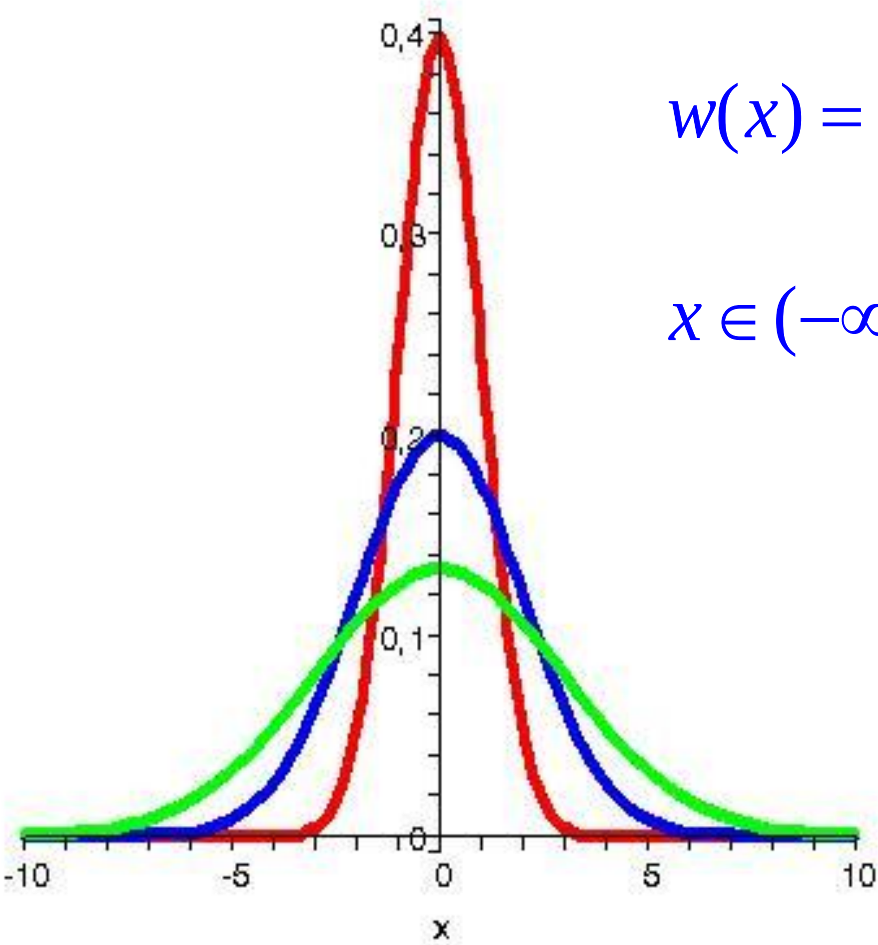
Střední hodnota, rozptyl, distribuční funkce

$$\langle x \rangle = \int_{x_m}^{x_M} x\, w(x)\, \mathrm{d}x, \quad D(x) = \int_{x_m}^{x_M} \left(x - \langle x \rangle \right)^2 w(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$F(x) = \int_{x_m}^{x} w(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad \text{medián } \cdots F(x_{MED}) = 0{,}5$$

Úkol: Čemu je roven integrál z hustoty pravděpodobnosti (plocha pod grafem)?

Důležitý příklad – normální rozdělení



$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$x \in (-\infty, \infty), \quad \langle x \rangle = 0, \quad \sqrt{D(x)} = \sigma$$

červená … $\sigma = 1$
modrá … $\sigma = 2$
zelená … $\sigma = 3$

nazývá se též rozdělení Gaussovo

Fyzikální veličina a její chyba

aneb

co znamená zápis typu $X = (2{,}518 \pm 0{,}007)$ m

Který výsledek je ten pravý?

Měření délky ukazovátka

- Předpokládejme, že všech ***n*** studentů v posluchárně bude měřit délku téhož ukazovátka, nebo ji bude jeden student měřit ***N***-krát.
- Budou všechny získané hodnoty stejné?
- Proč se budou obecně lišit?
- Která z naměřených hodnot je skutečnou délkou ukazovátka?

Délka ukazovátka se při měření „chová“ jako náhodná veličina.

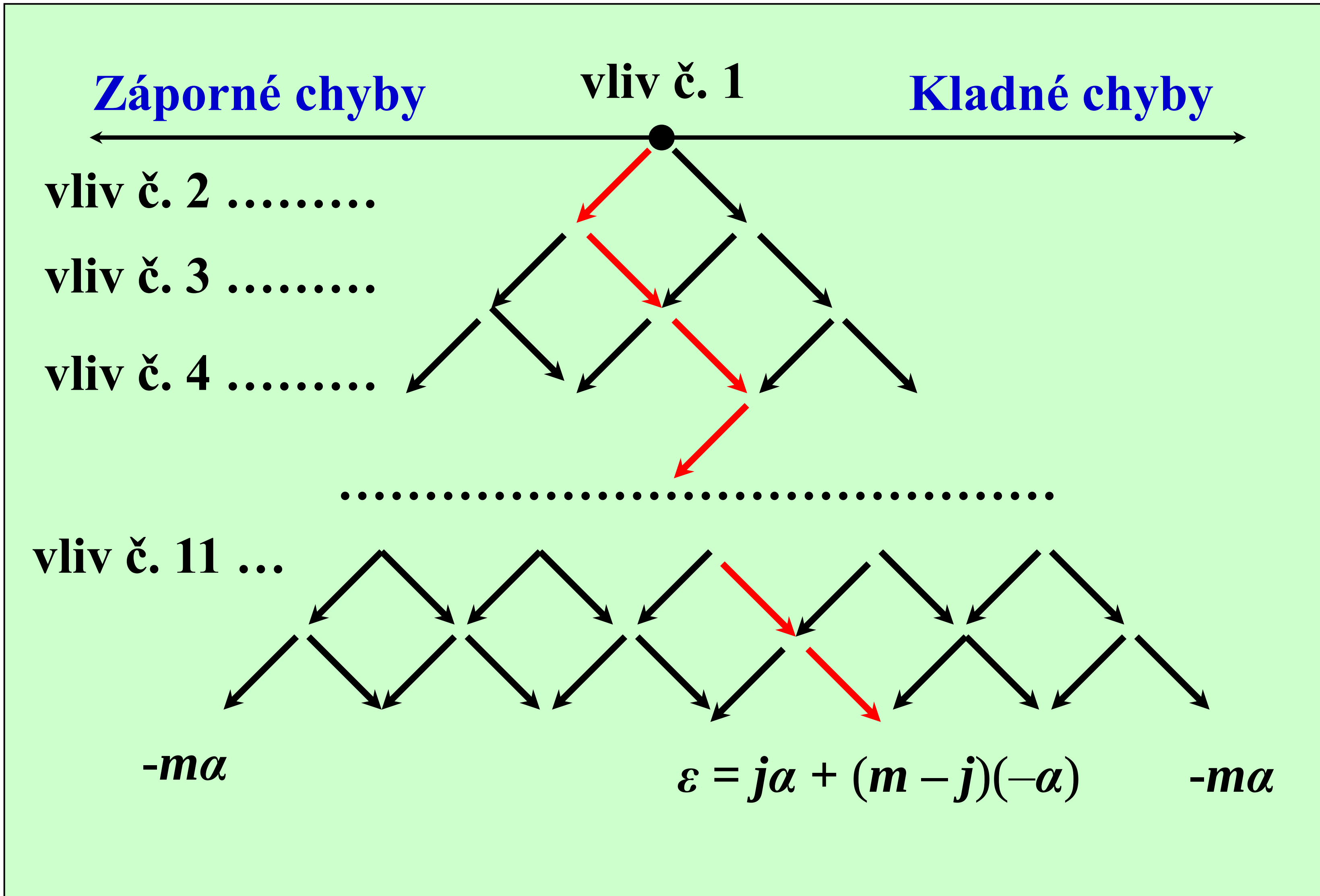
Chyby, kterých se při měření dopouštíme

- **hrubé a systematické chyby (předpokládejme, že jsme je eliminovali)**
- **náhodné chyby (jejich vlivem se budeme zabývat)**

Normální rozložení chyb

- Předpokládejme, že existuje nějaká „správná“ hodnota délky ukazovátka $\boldsymbol{x}$ a že student naměřil hodnoty ($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N$), některé mohou být i stejné.
- Odchylky od (zatím neznámé) správné hodnoty označme ($\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_N$). Tyto hodnoty jsou hodnotami náhodné veličiny $\boldsymbol{E}$.
- Její hustotu pravděpodobnosti označme $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{E})$. Za jistých podmínek je rozdělením normálním.
- Předpokládejme, že odchylky jsou způsobeny $\boldsymbol{m}$ nezávislými vlivy, každý z nich odchýlí měřenou hodnotu od $\boldsymbol{x}$ o stejnou hodnotu $\boldsymbol{\alpha}$, kladnou nebo zápornou, s pravděpodobností 0,5.
- Kladnou odchylku $+\boldsymbol{\alpha}$ nazveme zdarem, zápornou ($-\boldsymbol{\alpha}$) nezdarem. Výsledná odchylka naměřené hodnoty $\boldsymbol{x}_i$ od $\boldsymbol{x}$ leží v intervalu ($-\boldsymbol{m\alpha}$, $\boldsymbol{m\alpha}$) a může nabývat pouze celých násobků $\boldsymbol{\alpha}$.

Vliv chybových vlivů – I



Vliv chybových vlivů – II

Pravděpodobnost odchýlení o $\boldsymbol{j}$ kladných a $\boldsymbol{m - j}$ záporných vlivů ($\boldsymbol{j}$ kladných a $\boldsymbol{m - j}$ nezdarů), tj. pravděpodobnost vzniku odchylky $\boldsymbol{\varepsilon = j\alpha + (m - j)(-\alpha) = \varepsilon} = (2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{m})\boldsymbol{\alpha}$ je dána binomickým rozdělením (Bernoulliovým pro $\boldsymbol{p} = 1/2$).

$$p_j = \frac{m!}{j!(m-j)!}\left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{m-j} = \frac{2^{-m} \cdot m!}{j!(m-j)!}$$

Pro velká $\boldsymbol{m}$ je lze nahradit rozdělením normálním (Gaussovým). To umožňuje následující zpracování výsledků.

Aritmetický průměr a jeho chyba

Reprezentativní hodnota měření

aritmetický průměr všech naměřených hodnot (střední hodnota veličiny)

$$\overline{x} = (x_1 + \cdots + x_N) / N$$

Směrodatná odchylka příslušná aritmetickému průměru

Správná hodnota veličiny nebude určena, ale s pravděpodobností 68,3 % leží v intervalu určeném aritmetickým průměrem a směrodatnou odchylkou takto:

$$x \in (\overline{x} - \overline{\sigma}, \overline{x} + \overline{\sigma}),\ \text{zapisujeme}\ \ x = (\overline{x} \pm \overline{\sigma})\ \mathrm{m}$$

$$\overline{\sigma} = [(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_N - \overline{x})^2 / N(N-1)]^{1/2}$$

Krajní chyba … trojnásobek směrodatné odchylky … odpovídá pravděpodobnostnímu intervalu 97 %

Různé typy průměrů

aneb

jen tak pro zajímavost

Aritmetický průměr - I

Příklad 1.

Student měl ze tří matematických písemek v semestru tři hodnocení B a jedno C. U dvou závěrečných písemek měl A a D, u ústní zkoušky E. Jaká je jeho průměrná známka, jestliže všechny známky mají stejnou váhu?

$$Z = \frac{1{,}5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2{,}5 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{3+1+1+1+1} = \frac{13}{7} = 1{,}86 \ldots \mathrm{C}$$

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{N} z_j n_j}{\sum_{j=1}^{N} n_j}, \quad z_j \ldots \text{hodnoty}, \; n_j \ldots \text{četnosti}$$

Aritmetický průměr - II

Příklad 2.

Řešte předchozí příklad za předpokladu, že závěrečná písemka má dvakrát větší váhu než průběžná a ústní zkouška má dvakrát větší váhu než závěrečná písemka.

$$Z = \frac{1,5\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 2 + 2,5\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 4}{3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 4} = \frac{25,5}{12} = 2,12 \ldots \mathrm{C}$$

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{N} z_j n_j w_j}{\sum_{j=1}^{N} n_j w_j}, \quad z_j \ \ldots \text{hodnoty},\ n_j \ \ldots \text{četnosti},\ w_j \ \ldots \text{váhy}$$

Průměrná rychlost – I

Příklad 3.

Automobil jel z A do B první úsek rychlostí 130 km/h stejnou dobu druhý úsek průměrnou rychlostí 70 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost na celé trase?

Je odpověď dána aritmetickým průměrem obou hodnot, tj. (130 + 70)/2 = 100 km / h?

Je to věc definice. Průměrná je definována jako podíl celkové dráhy a celkové doby jízdy. Dráhu ale neznáme. Víme však, že oba úseky trvaly stejně času.

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t + v_2 t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 100\ \text{km/h}$$

Takže přece jen aritmetický průměr? Zkusme úlohu obměnit.

Průměrná rychlost – II

Příklad 4.

Automobil jel z A do B první úsek rychlostí 130 km/h a druhý úsek rychlostí 70 km/h. Oba úseky byly stejně dlouhé. Jaká byla nyní průměrná rychlost?

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s + s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 91\,\mathrm{km/h}$$

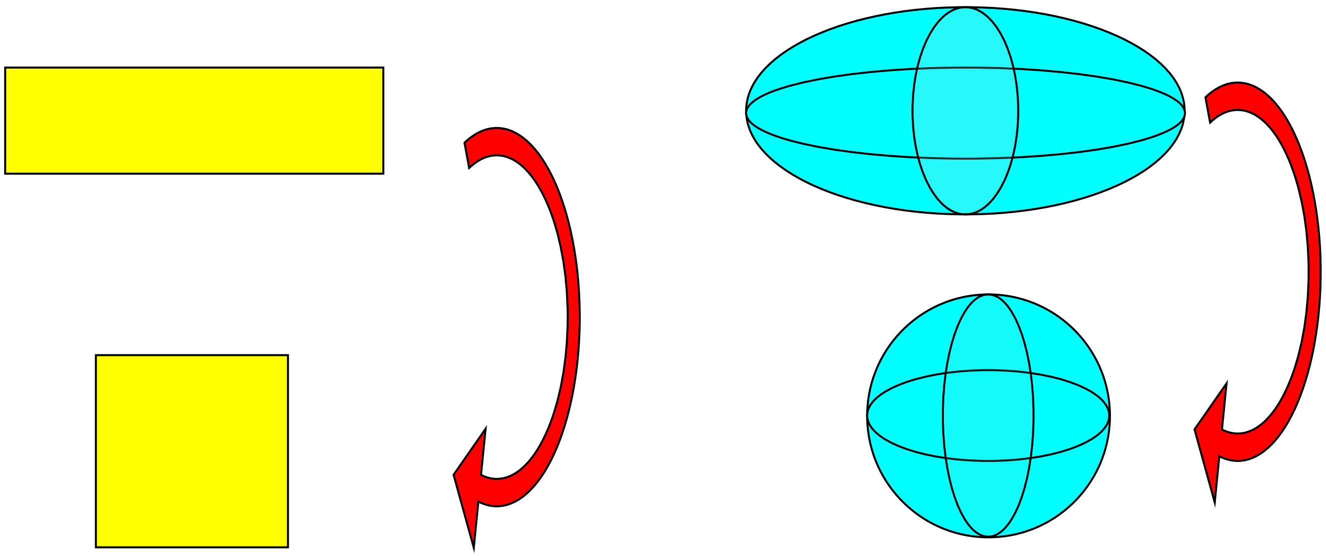
obecně … $$\frac{N}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_N}}$$

Jedná se o tzv. harmonický průměr.

„Průměrný“ obdélník je čtverec

Příklad 5.

Určete stranu čtverce, který má stejný obsah jako obdélník o stranách ***a*** a ***b***, nebo poloměr koule, která má stejný objem jako elipsoid o poloosách ***a*** , ***b*** , ***c***.



„Průměrný“ elipsoid je koule

Výpočet:

$$P = ab = x^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{4}{3}\pi x^3$$

$$x = \sqrt{ab}, \quad x = \sqrt[3]{abc}$$

$$\text{obecně } x = \sqrt[N]{a_1 a_2 \cdots a_N}$$

Jedná se o geometrický průměr.

harmonický p. $\leq$ geometrický p. $\leq$ aritmetický p.

A to ještě zdaleka nejsou všechny typy průměrů.

Příště:

Radiologická fyzika

Radioaktivita

podzim 2008, sedmá přednáška