Obsah

Kapitola 1

Úvod

V klasické analýze jsme se zabývali studiem funkcí. V analýze funkcí jedné reálné proměnné se jednalo o zobrazení typu $f:\, D_f \ni x \to y = f(x) \in \mathbf{R}$, kde $D_f \subset \mathbf{R}$ je *definiční obor funkce* f, množina $H_f = \{y \in \mathbf{R} \,|\, \text{existuje } x \in D_f:\, y = f(x)\}$ se nazývala *oborem hodnot* funkce f. V oboru funkcí jedné komplexní proměnné jsme *funkcí* rozuměli libovolnou relaci na množině $\mathbf{R}$, ne tedy nutně zobrazení. Relace, které byly zobrazením, se nazývaly *jednoznačné funkce*. Analogické byly definice u funkcí více proměnných. V každém případě však byla situace taková, že *nezávisle proměnná* i *závisle proměnná* veličina nabývaly číselných hodnot.

Typickým rysem variačního počtu je skutečnost, že nezávisle proměnná veličina "nabývá hodnot"nikoli z množiny čísel, nýbrž náleží například množině funkcí, křivek, ploch, apod. Zobrazení J přiřazující každému objektu z takové množiny D_J například reálné číslo nazýváme *funkcionálem*:

$$J:\, D_J \ni f \longrightarrow J[f] \in \mathbf{R}.$$

Uveďme typický příklad takového funkcionálu. Předpokládejme, že D_J je množina všech rektifikovatelných grafů hladkých funkcí $y = f(x)$ spojujících body $A = [x_A, y_A]$ a $B = [x_B, y_B]$, $x_A < x_B$, v rovině. Zobrazení přiřazující každé takové funkci délku jejího grafu je příkladem funkcionálu, konkrétně

$$J:\, D_J \ni f \longrightarrow J[f] = \int\limits_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

Okamžitě se nabízí jednoduchá geometrická otázka, který z grafů množiny D_J je nejkratší (viz obr. 1.1).

Obr. 1.1 Nejkratší spojnice.

Máme tak v podstatě formulován základní úkol varaičního počtu – hledat extrémy, nebo obecněji, stacionární body funkcionálů. Samozřejmě víme, že nejkratší spojnicí dvou pevných bodů je úsečka. Ale *jak* to víme? Jak z podmínky minima funkcionálu (1.3) dostaneme předem známý výsledek, že se jedná o funkci

$$y = f(x) = y_A + k(x - x_A), \quad \text{kde} \quad k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,?$$

K tomu přivede právě variační počet. Jak – to postupně odhalíme v této přednášce. V následujícím odstavci poznáme několik dalších typicky variačních úloh z oblasti geometrie a fyziky, které dokonce budeme umět vyřešit.

1.1 Klasické fyzikální a geometrické úlohy variačního typu

V tomto odstavci se budeme zabývat několika geometrickými a fyzikálními úlohami, jejich řešení umožňuje variační počet. Některé z nich snadno vyřešíme i bez znalosti vět variačního počtu, některé pouze formulujeme a jejich řešení ponecháme na pozdější dobu, kdy poznáme základy variačního počtu.

1.1.1 Izoperimetrický problém

Tato úloha pochází ze starověku a bývá připisována Archimédovi: Mezi uzavřenými jednoduchými rovinnými křivkami dané délky ℓ máme najít tu, která obepíná plochu s největším obsahem. Opět známe výsledek předem, jedná se o kružnici. Pokusme se však problém formulovat přesněji. Uvažujme o množině D_J jednoduchých, hladkých, uzavřených křivek v rovině, parametrizovaných délkou oblouku s, tj.

$$\mathcal{C}:\ [0,\ell] \ni s \to \mathcal{C}(s) = (x(s), y(s)) \in \mathbf{R}^2. \tag{1.2}$$

Pro takový případ platí

$$\ell = \int_0^\ell \sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)}\,\mathrm{d}s \;\Rightarrow\; \dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1, \tag{1.3}$$

kde $\dot{x}(s)$, $\dot{y}(s)$ značí derivace parametrického vyjádření podle parametru s. Obsah plochy S obepnuté křivkou pak je hodnotou funkcionálu

$$J[\mathcal{C}]:\ D_J \ni \mathcal{C} \longrightarrow \int_S \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y = \int_0^\ell x(s)\,\dot{y}(s)\,\mathrm{d}s \in \mathbf{R}.$$

Řešení této úlohy ukážeme v odstavci 2.4.

1.1.2 Úloha o minimální rotační ploše

Už na střední škole se v rámci procvičení aplikací určitého integrálu počítal povrch tělesa, které vzniklo rotací grafu funkce $y = f(x)$ definované na intervalu $[a, b]$ kolem osy x. Takový povrch je dán vztahem (viz například [5], str. 195, zde obr. 1.2).

Obr. 1.2 Rotační povrch.

$$S(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

Položíme-li si otázku, jak má vypadat funkční předpis f, aby povrch vzniklého rotačního tělesa byl minimální, máme variační úlohu. Definičním oborem D_J může být například množina všech funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$ spolu s prvními derivacemi, funkcionálem $J[f]$ je zobrazení přiřazující každé funkci $f \in D_J$ hodnotu $J[f] = S(f)$ podle vztahu (1.4).

1.1.3 Šíření světla

Svého času měli středoškoláci v soutěžním korespondenčním semináři řešit tuto úlohu:

Úloha 1.1 Hasičská. Sousedovi B hoří chata. Soused A má svou chatu na stejném břehu řeky. Vzdálenost $P_A P_B$, kde P_A a P_B jsou paty kolmic vedených z A a B na tok řeky, který je v těch místech přímým je d (viz obr. 1.3). Předpokládejme, že soused A, který chce pomoci hasit, běží s prázdným kbelíkem dvakrát rychleji, než s kbelíkem plným vody. V jakém místě M ve vzdálenosti x od bodu P_A má nabrat vodu, aby sousedovi přiběhl na pomoc co nejrychleji?

Obr. 1.3 Úloha hasičská.

Než začnete oponovat, že tato úloha nemá s šířením světla nic společného, pokusme se ji řešit.

Označme rychlost běhu s plným kbelíkem v, s prázdným kbelíkem se tedy běží rychlostí $2v$. Je zřejmé, že spojnice dvou bodů, mezi nimiž běží soused rychlostí o stálé velikosti, musí být přímá (požadavek nejkratšího času je při rovnoměrném pohybu ekvivalentní požadavku nejkratší dráhy). Doba, za kterou soused A uběhne úsek AM a MB je

$$t(x) = \frac{|AM|}{2v} + \frac{|MB|}{v} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{2v} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v}$$

Řešení úlohy se tedy redukuje na obvyklý postup při hledání minma funkce. Nutnou podmínkou extrému je v tomto případě

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2v\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} = \frac{1}{n},$$

kde jako n jsme označili poměr rychlostí. Hodnotu x v principu určíme řešením rovnice čtvrtého stupně, která vyplývá z nutné podmínky minima času t:

$$x^4 - 2d\,x^3 + \frac{n^2(a^2+d^2)-(b^2+d^2)}{n^2-1}\,x^2 - \frac{2n^2a^2d}{n^2-1}\,x + \frac{n^2a^2d^2}{n^2-1} = 0.$$

Na základě znalosti hodnoty x pak lze také určit hodnotu $t(x)$. Připomeňme ještě nutnost ověřit pomocí druhé derivace funkce $t(x)$, že se skutečně jedná o minimum:

$$t''(x) = \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{((d-x)^2+b^2)^{3/2}} > 0.$$

Úloha 1.2 Šíření světla. Předchozí výsledek již připomíná zákony týkající se šíření světla. Označíme-li poměr rychlostí běhu s prázdným a plným kbelíkem n, dostaneme minimalizací času t vztah

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n. \tag{1.5}$$

Intrepretujeme-li α jako ***úhel dopadu*** světla na rozhraní dvou prostředí, β jako úhel lomu a poměr n rychlostí šíření světla v obou prostředích jako *relativní index lomu*, představuje vztah (1.5) tzv. *Snelliův zákon lomu* [1] Ten je důsledkem *Fermatova principu* [2] , podle něhož se světlo šíří tak, aby čas, za který dorazí

[1] Willibrord Snell (podle různých pramenů 1591-1626, nebo1580-1626), holandský fyzik, jeden ze zakladatelů geometrické optiky. Podle Huygensova svědectví experimentálně objevil zákon lomu a uveřejnil jej v díle, které se ztratilo.

[2] Pierre Fermat (1601-1665), francouzský právník, stoupenec teleologického pojetí přírodních jevů. Zabýval se zejména optikou, nejvíce proslul formulací principu nejkratšího času při šíření světla, který byl po něm pojmenován.

světelný paprsek z bodu A do bodu B, byl minimální. Pro $n = 1$ dostaneme *zákon odrazu světla* na rozhraní dvou prostředí.

Opět se tedy jedná o úlohu variačního počtu – najít stacionární bod jistého funkcionálu. Tím je v tomto případě zobrazení přiřazující každé z křivek, po kterých se může šířit světelný paprsek v obecně nehomogenním prostředí z bodu A do bodu B, dobu, za kterou světlo dráhu z A do B urazí. Je-li prostředí opticky homogenní, tj. takové, že rychlost šíření světla je ve všech jeho bodech stejná, je požadavek nejkratšího času ekvivalentní požadavku nejkratší dráhy. Dostáváme tak *zákon přímočarého šíření světla* v opticky homogenním prostředí.

1.1.4 Úloha o brachistochroně

První úlohou cíleně formulovanou jako variační byla *úloha o brachistochroně* (z řečtiny: chronos = čas, brachys = krátký, brachistos = nejkratší, superlativ adjektiva "brachys"se skutečně píše s měkkým "i"). Tuto úlohu předložil v r. 1696 Johann Bernoulli [3] k řešení "všem matematikům". Této pomyslné soutěže se zúčatnili a problém správně vyřešili kromě samotného Johanna Bernoulliho také jeho bratr Jacob, Gottfried Wilhelm Leibniz, Isaac Newton (zprvu anonymně), Guillaume l'Hospital a Ehrenfried Tschirnhaus [4] Formulaci úlohy o brachistochroně se velmi přiblížil již v roce 1638 Galileo Galilei při experimentálním i teoretickém studiu pohybu těles po nakloněných rovinách. Podrobněji je možné se o historii i současnosti řešení problému brachistochrony dočíst v [6], zde pouze formulujeme příslušný variační problém a naznačíme jeho řešení.

Úloha 1.3 O brachistochroně. Ve svislé rovině v tíhovém poli Země (tíhové zrychlení $\vec{g} = (0, g)$, osa y je orientována svisle dolů) jsou dány dva pevné body $A = [0, 0]$ a $B = [d, h]$, $h > 0$, $d > 0$. (Speciální volba bodu A neubírá problému na obecnosti, souvisí pouze s volbou soustavy souřadnic. Body A a B jsou spojeny "skluzavkou"tvaru hladké funkce $y = f(x)$, po které může hmotný bod klouzat bez tření. Úkolem je najít funkci f tak, aby doba pohybu mezi body A a B byla minimální.

Označíme-li D_J třídu všech přípustných křivek $\mathcal{C}_f$ představujících grafy hladkých funkcí $y = f(x)$ na intervalu $[0, d]$, které procházejí body A a B), je doba

[3] Johann Bernoulli (1667-1748), švýcarský fyzik a matematik. Předkové rozvětvené rodiny Bernoulliů pochází z Holandska. Devět jejích členů vyniklo v exaktních vědách, přestože většinou byli původním povoláním lékaři nebo teologové.

[4] Jacob Bernoulli (1654-1705), švýcarský fyzik a matematik, bratr Johannův. Jako první soustavně zpracoval diferenciální a integrální počet a metody řešení diferenciálních rovnic.
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), německý matematik, jeden z největších konkurentů Isaaca Newtona. Nezávisle na poznatcích Newtonových formuloval diferenciální a integrální počet.
Sir Isaac Newton (1642-1727), anglický fyzik a matematik. Ve svém klíčovém díle Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, vydaném v roce 1687, předložil historicky první ucelenou teorii v oblasti mechaniky. Zabýval se řadou dalších fyzikálních disciplin, především optikou. Formuloval teorii fluxí, základ diferenciálního a integrálního počtu.

t_{AB} pro danou funkci f určena hodnotou funkcionálu (viz obr. 1.4)

$$J[f] : D_J \ni f \longrightarrow J(f) = t_{AB} = \int\limits_{\mathcal{C}_f} \frac{\mathrm{d}\ell}{v(x, f(x))} = \int\limits_0^d \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2gf(x)}}\,\mathrm{d}x, \quad (1.6)$$

kde $v(x, f(x))$ je velikost rychlost hmotného bodu v obecném bodě $X = [x, f(x)]$ křivky $\mathcal{C}$. Její hodnota je určena ze zákona zachování mechanické energie E_m (součet kinetické a tíhové potenciální energie hmotného bodu je stálý)

$$E_m(A) = E_m(X) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgf(x) + \frac{1}{2}mv^2(x, f(x)).$$

V úloze o brachistochroně se přitom předpokládá, že počáteční rychlost v bodě A je nulová, tj. $v_0 = 0$, odtud pak $v(x, f(x)) = \sqrt{2gf(x)}$.

Obr. 1.4 Úloha o brachistochroně.

Zjištění, která z funkcí $f(x) \in D_J$ vyhovuje podmínce minima funkcionálu $J[f]$ definovaného vztahem (1.6), je opět záležitostí variačního počtu. Uvědomíme-li si však analogii s Fermatovým principem, můžeme problém vyřešit i bez znalosti variačního počtu: Pohyb v tíhovém poli Země po skluzavce tvaru $y = f(x)$ lze interpretovat jako šíření světla v nehomogenním prostředí, v němž se světlo v daném bodě šíří rychlostí $v(x, f(x))$. Poměrem $c/v = N$, kde c je rychlost světla ve vakuu, je totiž definován absolutní index lomu optického prostředí, takže podmínka minima funkcionálu (1.6) představuje aplikaci Fermatova principu pro prostředí s absolutním indexem lomu $N = c/\sqrt{2gf(x)}$. Označíme-li $\alpha = \alpha(x, f(x))$ úhel "dopadu"v daném bodě $X = [x, f(x)]$, tj. úhel, který svírá skluzavka se svislou osou y, plyne z podmínky pro šíření světla vztah

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \text{konst} = K, \;\; \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\frac{\pi}{2} - \alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$$

Odtud

$$v(x, f(x))\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = K^{-1} \Rightarrow$$

$$y\left(1+y'^2\right) = (2gK^2)^{-1} = a, \quad a > 0. \tag{1.7}$$

Rovnice (1.7) je diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými a je to rovnice prosté cykloidy

$$x(t) = \frac{a}{2}\,(t - \sin t) + b, \quad y(t) = \frac{a}{2}\,(1 - \cos t)\,, \tag{1.8}$$

kde b je konstanta (konstanty a a b se určí z podmínky, že cykloida prochází body A a B). Tuto křivku opisuje bod na kružnici o poloměru $a/2$, která se valí po ose x.

Na základě znalosti Fermatova principu vyřešil úlohu o brachistochroně sám Johann Bernoulli.

Úlohu o brachistochroně lze rozšířit i na případy, kdy počáteční rychlost hmotného bodu v bodě A není nulová, tj. $v_0 > 0$. Zákon zachování mechnické energie pak dává

$$v(x, f(x)) = \sqrt{2g(f(x) + y_0)}, \quad \text{kde} \quad y_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Křivka, která minimalizuje funkcionál (1.6), v němž je však třeba zaměnit $y = f(x)$ za $y = f(x) + y_0$, je rovněž cykloida, kterou však opisuje bod na kružnici o poloměru $a/2$ valící se po přímce $y = -y_0$. Konstanty a a b se opět určí z podmínky, aby body A a B ležely na křivce.

1.1.5 Maupertuisův princip

Fermatův princip, který je typickým variačním principem v optice, má svou analogii v mechanice jako *Maupertuisův princip.*

Úloha 1.4 Maupertuisův princip. Uvažujme o pohybu hmotného bodu o hmotnosti m v rovinném potenciálovém poli $U = U(x, y)$. Ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv^2(x, y) + U(x, y) = E = \text{konst.}$$

vyplývá pro velikost rychosti $v = \sqrt{\frac{2(E-U)}{m}}$. Pro zrychlení bodu platí

$$\vec{a} = -\frac{\operatorname{grad} U}{m},$$

je tedy v každém bodě $X = [x, y]$ kolmé k ekvipotenciální křívce $U(x, y) = \text{konst.}$ Zachovává se tedy průmět vektoru rychlosti do ekvipotenciální křivky (viz obr. 1.5).

Obr. 1.5 Pohyb v potenciálovém poli.

Označme $\alpha(x,y)$ úhel mezi vektorem rychlosti a normálou k ekvipotenciální křivce v bodě $X = [x,y]$. Platí $v(x,y)\sin\alpha(x,y) = \text{konst.}$ V porovnání s výsledkem plynoucím z Fermatova principu pro světlo, $w^{-1}\sin\alpha = \text{konst.}$, kde jsme nyní označili rychlost šíření světla v prostředí jako w, vidíme, že rychlost hmotného bodu v "hraje roli"převrácené hodnoty rychlosti šíření světla. Pohyb hmotného bodu v potenciálovém poli lze tedy odvodit z podmínky minima funkcionálu

$$J : D_J \ni f \longrightarrow J[f] = \int_{\mathcal{C}} v(x,y)\,\mathrm{d}\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2(E-U)}{m}}\,\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x. \quad (1.9)$$

D_J je množina přípustných funkcí popisujících trajektorii hmotného bodu, $\mathcal{C}$: $x \to y = f(x) \in \mathbf{R}$. Hypotéza, že "správná"trajektorie hmotného bodu v potenciálovém poli je dána podmínkou minima funkcionálu (1.9) se nazývá *Maupertuisův princip*.

Kapitola 2

Variační úlohy a jejich řešení – funkce jedné poměnné

V předchozí kapitole jsme formulovali několik typických variačních úloh z oblasti geometrie a fyziky. Za variační úlohu označujeme takovou, jejímž řešením je funkce, křivka, plocha, atd. odpovídající stacionárnímu bodu (nejčastěji minimu) vhodného funkcionálu definovaného na množině funkcí, křivek, ploch, atd. Některé úlohy jsme vyřešili bez speciálních znalostí z oblasti variačního počtu (například úlohu o šíření světla, nebo i úlohu o brachistochroně), u některých bychom si rady hned tak nevěděli (izoperimetický problém). Cílem této kapitoly bude odvodit z podmínky stacionárního bodu funkcionálu diferenciální rovnice pro neznámou funkci, křívku, plochu, či jiný objekt. Budeme nejprve uvažovat o nejjednodušší možné situaci – že totiž zkoumaný funkcionál je definován na množině funkcí jedné proměnné, $y = f(x)$, splňujících samozřejmě určité předpoklady. Poznamenejme, že pro klasifikaci funkcí z hlediska nejdůležitějších z těchto předpokladů zavádíme *funkce třídy C_n* jako takové funkce na intervalu $[a, b]$, které jsou na něm spojité se svými derivacemi do řádu n včetně.

2.1 Funkcionál, podmínka stacionarity, Eulerova rovnice

Než se budeme konkrétně věnovat nejjednoduššímu variačnímu problému – hledání staconárních bodů funkcionálů definovaných na množině funkcí jedné proměnné (určitých vlastností potřebných z hlediska konkrétního typu funcionálu), všimněme si obecného pojmu *spojitosti funkcionálu.* O důležitosti tohoto pojmu jistě nelze pochybovat – situace je obdobná jako v "obyčejné"analýze, kde byla spojitost funkcí rovněž jednou z klíčových vlastností.

2.1.1 Spojitost funkcionálu

"Vzdálenost"dvou hodnot proměnné v případě klasické analýzy funkcí jsme vyjadřovali prostřednictvím absolutní hodnoty jejich rozdílu, například $|x_1 - x_2| < \delta$. V případě funcionálu jsou "hodnotami"nezávisle proměnné například funkce, křivky, plochy či jiné objekty. Vyjádření jejich "vzdálenosti"je možné pomocí *normy*. Obecně budeme o "hodnotách"nezávisle proměnné funkcionálu uvažovat jako o prvcích *lineárního* tj. vektorového prostoru, který je navíc *normován*. *Normou* na lineárním prostoru $\mathcal{R}$ rozumíme zobrazení

$$\mathcal{R} \ni f \longrightarrow ||f|| \in \mathbf{R}$$

s vlastnostmi (pro všechny prvky f, $g \in \mathcal{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}$)

$$\begin{aligned} ||f|| \geq 0, \quad ||f|| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f = 0 \\ ||\alpha f|| \quad &= \quad |\alpha| \, ||f|| \\ ||f + g|| \quad &\leq \quad ||f|| + ||g|| \end{aligned}$$

Následují typické příklady normovaných prostorů funkcí jedné proměnné ve formě úloh.

Úloha 2.1 Prověřte axiomy normy definované v prostoru $\mathcal{C}[a,b]$ funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a,b]$ takto:

$$||f||_0 = \max\{|f(x)| \, ; \, x \in [a,b]\}.$$

Zvolme například funkci $f_0 \in \mathcal{C}[a,b]$. Podmínku $||f - f_0||_0 < \delta$ si lze názorně představit tak, že část grafu každé funkce $f \in \mathcal{C}[a,b]$, která ji splňuje, na intervalu $[a,b]$ leží v δ-ovém pásu kolem grafu funkce f_0.

Úloha 2.2 Prověřte axiomy normy definované v prostoru $\mathcal{D}_1[a,b]$ funkcí spojitých a majících spojitou první derivaci na uzavřeném intervalu $[a,b]$ takto:

$$||f||_1 = \max\{|f(x)| \, ; \, x \in [a,b]\} + \max\{|f'(x)| \, ; \, x \in [a,b]\}.$$

Úloha 2.3 Prověřte axiomy normy definované v prostoru $\mathcal{D}_1[a,b]$ funkcí spojitých a majících spojité derivace do řádu n včetně na uzavřeném intervalu $[a,b]$ takto:

$$||f||_n = \sum_{j=0}^{n} \max\{|f^{(j)}(x)| \, ; \, x \in [a,b]\}.$$

Řekneme, že funkcionál $J[f]$ definovaný na $D_J \subset \mathcal{R}$ [1] je ***spojitý v bodě*** $f_0 \in D_J$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $f \in D_J$, pro která $||f - f_0|| < \delta$ je $|J[f] - J[f_0]| < \varepsilon$. Pojem spojitosti funkcionálu tedy souvisí

[1] Poznamenejme, že definiční obor funkcionálu $D_J \subset \mathcal{R}$ nemusí nutně být lineárním podprostorem prostoru $\mathcal{R}$. Uvažujeme-li například pouze funkce, jejichž grafy procházejí dvěma pevnými body $A = [a, y_A]$ a $B = [b, y_B]$, pak součet takových funkcí není obecně prvkem oboru D_J.

s volbou normy v prostoru funkcí, tj. s konkrétním normovaným prostorem. Například funkcionál tvaru

$$J[f] = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x, \tag{2.1}$$

kde $y = f(x)$ a $y' = f'(x)$, nemusí být (v daném bodě) spojitý, je-li jeho definičním oborem prostor $\mathcal{C}$, avšak může už být spojitý, pracujeme-li na prostoru funkcí $\mathcal{D}_1$. Proto je vhodné volit konkrétní normovaný prostor, i přes omezení kladená tím na definiční obor funkcionálu, tak, aby zadaný funkcionál byl spojitý.

2.1.2 Variace funkcionálu, podmínka stacionarity

Nechť $\mathcal{R}$ je normovaný prostor a nechť $J[f]$, $f \in \mathcal{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $J[f]$ je ***spojitý lineární funkcionál*** platí-li

(1) $J[\alpha f + \beta g] = \alpha J[f] + \beta J[g]$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\forall\, f,\, g \in \mathcal{R}$,

(2) $J[f]$ je spojitý v každém bodě $f \in \mathcal{R}$.

Příklad 2.1: Funkcionál definovaný na $D_J = \mathcal{D}_n[a, b]$ integrálem

$$J[f] = \int_a^b \Big[\alpha_0(x)f(x) + \alpha_1(x)f'(x) + \cdots + \alpha_n(x)f^{(n)}(x)\Big]\,\mathrm{d}x$$

je spojitým lineárním funkcionálem na $D_{J_n} = \mathcal{D}_n[a, b]$.

Úloha 2.4 Dokažte následující tvrzení: Nechť $\alpha(x)$ je spojitá funkce na [a,b]. Nechť pro funkcionál platí

$$J[f] = \int_a^b \alpha(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{C}$ takovou, že $f(a) = f(b) = 0$. Pak $\alpha(x) = 0$ na $[a, b]$.
Návod: Dokážeme tvrzení pro $\alpha(x) > 0$ v jistém bodě intervalu $[a, b]$, $f(x) = (x - x_1)(x_2 - x)$ pro $x \in [x_1, x_2] \subset [a, b]$, $f(x) = 0$ v ostatních případech. Je-li $\alpha(x) > 0$ v jistém bodě $x \in [a, b]$, pak existuje interval $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, na němž je $\alpha(x) > 0$ (plyne ze spojitosti). Vzhledem k volbě funkce $f(x)$ je $f(x_1) = f(x_2) > 0$. Ukažte, že integrál z funkce $\alpha(x)f(x)$ v mezích $[x_1, x_2]$ je kladný, s výjimkou případu $\alpha(x) \equiv 0$.

Úloha 2.5 Dokažte následující tvrzení: Nechť $\alpha(x)$ a $\beta(x)$ jsou spojité na $[a, b]$. Nechť pro funkcionál platí

$$J[f] = \int_a^b [\alpha(x)f(x) + \beta(x)f'(x)]\,\mathrm{d}x = 0$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{D}_\infty$ takovou, že $f(a) = f(b) = 0$. Pak $\beta(x)$ je diferencovatelná funkce a platí $\beta'(x) - \alpha(x) = 0$ na $[a, b]$.
Návod: Označte

$$A(x) = \int_a^x \alpha(t)\,\mathrm{d}t,$$

a integrací per partes dostaneme

$$\int_a^b \alpha(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x) \int_a^x \alpha(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right]_a^b - \int_a^b A(x) f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

dále platí

$$\int_a^b \alpha(x) f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \beta(x) f'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= [f(x)\beta(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\beta'(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b \alpha(x) f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b A(x) f'(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \int_a^b \left[-A(x) + \beta(x)\right] f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Dále dokažte, že pro spojitou funkci $\gamma(x)$ na $[a, b]$ a za podmínky, že pro každou funkci $f \in \mathcal{D}_1[a, b]$ takovou, že $f(a) = f(b) = 0$, je integrál

$$\int_a^b \gamma(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

platí $\gamma(x) = K$ na $[a, b]$, kde K je konstanta. Důkaz proveďte pro volbu

$$f'(x) = \int_a^x [\gamma(\xi) - C]\,\mathrm{d}\xi, \quad C = \int_a^b \gamma(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pak je zřejmé, že $A(x) - \beta(x) = \text{konst}$ a tedy $\alpha(x) = \beta'(x)$.

Motivační úvaha k zavedení variace funkcionálu

Uvažujme o funkcionálu tvaru

$$J : \mathcal{D}_1[a, b] \ni f = y(x) \longrightarrow J[f] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Uvažme funkci $y_0(x) \in \mathcal{D}_1[a, b]$ a funkci $y(\varepsilon, x) = y_0(x) + \varepsilon u(x)$, $u(x) \in \mathcal{D}_1[a, b]$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Označme $J_0 = J[y_0]$. Pak

$$y'(\varepsilon, x) = y_0'(x) + \varepsilon u'(x) \quad \text{a} \quad L(x, y, y') = L(x, y_0 + \varepsilon u, y' + \varepsilon u').$$

$$\Delta L = L(x, y, y') - L(x, y_0, y_0') =$$

$$= \left(\frac{\partial L}{\partial y} \varepsilon u + \frac{\partial L}{\partial y'} \varepsilon u' + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} (\varepsilon u)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} \varepsilon^2 u u' + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} (\varepsilon u')^2 + \cdots \right) |_{y_0, y_0'}.$$

$$\Delta J = \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \cdots,$$

$$J_1 = \int_a^b \left(u \frac{\partial L}{\partial y} |_{y_0, y_0'} + u' \frac{\partial L}{\partial y'} |_{y_0, y_0'} \right) \mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_a^b \left(u^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} |_{y_0, y_0'} + 2uu' \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} |_{y_0, y_0'} + u'^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} |_{y_0, y_0'} \right) \mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

"Opravu"J_1 podle (2.3) resp. J_2 podle (2.4), atd. nazýváme *první variací* resp. *druhou variací*, atd. funkcionálu $J[y]$. v bodě y_0. Nutnou podmínkou pro to, aby y_0 představovala stacionální bod funkcionálu, je $J_1 = 0$. O typu extrému, resp. stacionárního bodu, rozhodují vyšší variace. Pro extrémy má důležitý význam znaménko druhé variace J_2. Situace je poněkud konmplikovanější než u "obyčejných"extrémů funkcí. Budeme se jí podrobněji zabývat v odstavci 2.4, týkajícím se klasifikace stacionárních bodů.

Úpravou J_1 dostáváme

$$J_1 = \int_a^b \left(u \frac{\partial L}{\partial y} + u' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \mathrm{d}x = \int_a^b u \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \mathrm{d}x + \left(u \frac{\partial L}{\partial y'} \right)_{x=a}^{x=b}. \tag{2.5}$$

Při úpravě jsme rovněž použili Stokesova teorému. Předpokládejme $u(a) = u(b) = 0$. Vzhledem k podmínce $J_1 = 0$ a libovolnosti $u(x)$ dostáváme pak *Eulerovu=Lagrangeovu rovnici*:

Věta 2.1 *Je-li $y_0(x)$ stacionární bodem, tj. extremálou funcionálu $J[y(x)]$, pak $J_1 = 0$, nebo ekvivalentně, $y_0(x)$ je řešením Eulerovy-Lagrangeovy rovnice*

$$\mathcal{E}(L) = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0. \tag{2.6}$$

Poznamenejme, že vztah (2.5) je speciálním, velmi jednoduchým, případem tzv. *integrální první variační formule*, s níž se v obecnosti seznámíme později. Funkce $y = f(x)$, která představuje stacionární bod funkcionálu, se nazývá *extremálou* funkcionálu. Exteremály jsou tedy řešením Eulerových-Lagrangeových rovnic.

Příklad 2.2 Pokusme se na základě tohoto výsledku vyřešit třeba problém nejkratší spojnice dvou bodů. Délka spojnice je dána vztahem (1.3). V tomto funkcionálu je

$$L = \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow \mathcal{E}(L) = -\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow y = Px + Q.$$

Konstanty P a Q se určí z podmínky, že spojnice prochází body $A = [a, y(a)]$, $B = [b, y(b)]$, tj.

$$y(x) = y(a) + \frac{y(b) - y(a)}{b - a}(x - a).$$

Délka spojnice se pak určí výpočtem integrálu, vychází

$$\ell = \sqrt{1 + P^2}(b - a) = \sqrt{(b - a)^2 + (y(b) - y(a))^2}.$$

Opravdu jde o minimum? Dejte si práci a spočtěte druhou variaci funkcionálu, která je k rozhodnutí potřebná. Jak rozhodovat, uvidíme v odstavci 2.4.

Později odvodíme Eulerovu rovnici korektně pomocí variací.

2.1.3 Speciální případy

Vyšetřovali jsme funkcionál (2.1), kde je závislost integrandu obecná, tj. $F(x, y, y')$. Zajímavé jsou případy, kdy explicitní závislost na některé z proměnných vymizí.

Příklad 2.3 F nezávisí na y. V tomto případě platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = K = \mathrm{konst.}$$

Poslední vztah představuje pro danou hodnotu K implicitní rovnici pro derivaci funkce $y = f(x)$. K výsledku, tj. k hledané funkci, která představuje stacionární bod funkcionálu, již přejdeme jen integrací.

Praktickou úlohou uvedeného typu je problém nalezení nejkratší spojnice dvou bodů na kulové ploše, tzv. *geodetiky.* Označme φ resp. θ zeměpisnou délku resp. šířku bodu na kulové ploše. (Zeměpisná délka a doplněk zeměpisné šířky do pravého úhlu jsou standardně zaváděné sférické souřadnice.) Nechť $\mathcal{C}$ je oblouk na kulové ploše. Předpokládejme jeho vyjádření ve tvaru $\theta = \theta(\varphi)$. Pro kulovou plochu o poloměru R platí (viz obr. 2.1)

Obr. 2.1 Délka oblouku na kulové ploše.

$$\ell = \int\limits_C \sqrt{R^2(\mathrm{d}\theta)^2 + R^2\cos^2\theta\,(\mathrm{d}\varphi)^2} = R\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{(1+\varphi'^2\,\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

$$(x,y,y') = (\theta,\varphi,\varphi'),\quad F(\theta,\varphi,\varphi') = F(\theta,\varphi') \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial\varphi'} = K.$$

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi'} = \frac{\varphi'\,\cos^2\theta}{\sqrt{1+\varphi'^2\,\cos^2\theta}} = K.$$

Dostáváme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými (pro jednoduchost jsme položili $R = 1$):

$$\varphi' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = \frac{K}{\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta - K^2}}.$$

Úpravou dostaneme (proveďte):

$$\varphi' = \frac{K}{\cos^2\theta\sqrt{1-\frac{K^2}{\cos^2\theta}}} = \frac{K\,\mathrm{tg}'\theta}{\sqrt{1-K^2}\sqrt{1-\frac{K^2\,\mathrm{tg}^2\theta}{1-K^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi + B = \arcsin\left(\frac{K\,\mathrm{tg}\,\theta}{1-K^2}\right) = \arcsin\,(A\mathrm{tg}\,\theta),\quad A = \frac{K}{\sqrt{1-K^2}}.$$

$$\sin\,(\varphi + B) = A\,\mathrm{tg}\,\theta \Rightarrow A\,\mathrm{tg}\,\theta = \cos B\,\sin\varphi + \sin B\,\cos\varphi.$$

Konstanty A a B jsou určeny okrajovými podmínkami danými úhlovými ("zeměpisnými") souřadnicemi bodů, jimiž oblouk prochází. Představu o řešení získáme převodem do kartézských souřadnic (x, y, z):

$$x = \cos\varphi\cos\theta,\quad y = \sin\varphi\cos\theta,\quad z = \sin\theta,$$

Dosazením do řešení dostáváme

$$x\,\sin B + y\cos B - Az = 0,$$

hledaný oblouk tedy leží v rovině procházející středem kulové plochy. Taková rovina protíná kulovou plochu v hlavní kružnici, nejkratší spojnicí dvou bodů na kulové ploše je tedy oblouk hlavní kružnice.

Příklad 2.4 F nezávisí na x. Takovou úlohou je například úloha o minimální rotační ploše (1.4) nebo úloha o brachistochroně (1.7). Obecně je $F = F(y, y')$. Namísto řešení jednotlivého problému pomocí Eulerovy rovnice lze vyřešit problém obecně použitím "triku"– záměny proměnných. Budeme považovat y za nezávisle proměnnou, $x = x(y)$ za hledanou funkci. Tato substituce vede k následujícímu variačnímu problému:

$$J[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(y,y')\,\mathrm{d}x = \int\limits_{y(x_1)}^{y(x_2)} F\left(y, \frac{1}{x'}\right)\,x'\,\mathrm{d}y,$$

tj. k variačnímu problému s funkcionálem

$$I[x] = \int_{y_1}^{y_2} G(y, x')\,\mathrm{d}y, \quad y_1 = y(x_1),\ y_2 = y(x_2), \quad G(y, x') = x'\,F\left(y,\ \frac{1}{x'}\right).$$

Situace je tím převedena na předchozí případ, s řešením

$$\frac{\partial G}{\partial x'} = K = \text{konst.}$$

Jako příklad vyřešíme problém minimální rotační plochy. Podle (1.4) je

$$F(y, y') = 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}, \Rightarrow G(y, x') = 2\pi y x'\sqrt{1 + (x')^{-2}} = 2\pi y\sqrt{1 + (x')^2}.$$

Pak

$$\frac{\partial G}{\partial x'} = 2\pi y \frac{x'}{\sqrt{1 + (x')^2}} = K \Rightarrow x' = \frac{K}{\sqrt{4\pi^2 y^2 - K^2}}.$$

Integrací pak

$$x = \frac{K}{2\pi}\,\mathrm{arch}\left(\frac{2\pi y}{K}\right) + B \Rightarrow y = A\cosh\left(\frac{x - B}{A}\right),\ \text{kde } A = \frac{K}{2\pi}.$$

Tato křivka je ***řetězovka*** o rovnici $Y = \cosh X$, kde $y = YA$, $x = AX + B$. Vypočeme ještě hledanou minimální rotační plochu (pro zjištění, zda se opravdu jedná o minimum, je třeba spočítat druhou variaci funkcionálu J_2 – viz (2.4)). Pro jednoduchost položme $A = 1$, $B = 0$.

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \cosh x\sqrt{1 + \sinh^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \cosh^2 x\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{1 + \cosh(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \pi\left[x + \frac{1}{2}\sinh(2x)\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Příklad 2.5 Singulární případ. Rozepišme výrazy v Eulerově rovnici:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\,y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,y'' = 0.$$

Obecně je tedy tato rovnice druhého řádu. Je-li však $\partial^2 F/\partial y'^2 = 0$, jedná se o ***singulární případ***, rovnice je pouze prvního řádu. Tato situace nastává pro $F = M(x, y) + y' N(x, y)$. Eulerova rovnice má tvar

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

V případě, že tento vztah platí identicky, je výraz $F(x, y, y')\,\mathrm{d}x = M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y$ úplným diferenciálem a integrál závisí pouze na koncovém a počátečním bodu křivky $y = y(x)$, nikoli na jejím tvaru. V případě, že rovnost parciálních derivací funkcí M a N není identicky splněna, definuje v rovině xy určitou křivku, která však obecně nemusí procházet zadanými dvěma body. Úloha tak nemusí mít řešení.

2.1.4 Nejjednodušší problém s pohyblivými konci

Vraťme se ještě ke vztahu (2.5) a uvažujme o možnosti tzv. *pohyblivých konců*, tj. situaci, kdy obecně neplatí $u(a) = 0$, $u(b) = 0$ (viz obr. 2.2).

Obr. 2.2 Problém s pohyblivými konci.

V takovém případě se druhý sčítanec ve výrazu pro první variaci neanuluje. Dostáváme pak nutnou podmínku pro stacionární bod funkcionálu $J[y]$ ve tvaru

$$I_1 = \int_a^b u\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x + u(b)\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x=b} - u(a)\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x=a} = 0. \tag{2.7}$$

Protože variace $u(x)$ může být volena libovolně, musí být přechozí podmínka splněna i pro $u(a) = u(b) = 0$. Extremála funkcionálu tedy musí v každém případě splňovat Eulerovu-Lagrangeovu rovnici. Navíc musí platit

$$u(b)\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x=b} - u(a)\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x=a} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x=a} = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x=b} = 0,$$

opět vzhledem k tomu, že variace $u(x)$ je libovolná. Předchozí výsledek představuje *přirozené okrajové podmínky*. Některé variační úlohy představují smíšený případ, kdy jeden konec je pevný a druhý pohyblivý (volný).

2.1.5 Invariance Eulerovy rovnice

Uvažujme, jak se změní Eulerova rovnice, přejdeme-li od proměnných x, y k novým proměnným u a v (křivočaré souřadnice), pomocí transformace

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v), \quad \mathcal{J} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2.8}$$

Hledáme pak například funkci $v = v(u)$. Transformovaný funkcionál je

$$J_1[v] = \int_{a_1}^{b_1} F_1(u,v,v')\,\mathrm{d}u, \quad F_1(u,v,v') = F\left[x(u,v), y(u,v), \frac{y_u + y_v v'}{x_u + x_v v'}\right](x_u + x_v v'),$$

kde jsme dosadili

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y_u\,\mathrm{d}u + y_v\,\mathrm{d}v}{x_u\,\mathrm{d}u + x_v\,\mathrm{d}v}.$$

Dokažte přímým výpočtem, že Eulerova rovnice má tvar

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial F_1}{\partial v'} = 0.$$

Řešením Eulerovy rovnice je funkce $v = v(u)$. Předpokládejme, že řešením původní variační úlohy s funkcionálem $J[y]$ je křivka určená funkcí $y(x)$. Dokážeme, že táž křivka (přetransformovaná do souřadnic (u, v) je řešením problému s funkcionálem $J_1[v]$. (Při označení $y = \psi(u, v)$ a $x = \varphi(u, v)$ to znamená, že funkce $v(u)$ určená implicitně rovnicí $\psi(u, v) = y[\varphi(u, v)]$ je řešením problému s funkcionálem $J_1[v]$. Označme $\delta\sigma$ plochu obepnutou křivkami $y(x)$ a $y(x) + \delta y(x)$, podobně $\delta\sigma_1$ plochu obepnutou křivkami $v(u)$ a $v(u) + \delta v(u)$. Platí (význam jakobiánu) $\sigma = \mathcal{J}\sigma_1$. Platí dále (vzhledem k tomu, že Jakobián transformace je nenulový) Použijeme obr. 2.3, v němž $\delta\sigma_1 \cdot \mathcal{J} = \delta\sigma$.

Obr. 2.3 K transformaci souřadnic.

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{J[y+\delta y] - J[y]}{\delta\sigma} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\sigma\to 0}\frac{J_1[v+\delta v] - J_1[v]}{\delta\sigma_1} = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Příklad 2.6 Hledejme extremálu funkcionálu

$$J[r] = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r^2 + (r')^2}\,\mathrm{d}\varphi, \quad r = r(\varphi).$$

Eulerova rovnice:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{r'}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} = 0.$$

Transformace proměnných:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi\ \Rightarrow\ J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

tento funkcionál má Eulerovu rovnici $y'' = 0$. Její řešení

$$y = Ax + B\ \Rightarrow\ r\sin\varphi = Ar\cos\varphi + B.$$

2.2 Aplikace – geometrické a fyzikální úlohy

V tomto odstavci si všimneme řešení některých dalších geometrických a fyzikálních úloh. Začneme úlohou o brachistochroně.

2.2.1 Úloha o brachistochroně

Úlohu o brachistochroně (zadání viz úlohu 1.3) vyřešíme nyní jako ukázku "se vším všudy". Integrand funkcionálu (1.6) nezávisí explicitně na proměnné x. Tato úloha byla obecně řešena v příkladu 2.4:

$$F(x,y,y') = F(y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\ \Rightarrow G(y,x') = \sqrt{\frac{1+(x')^2}{2gy}}$$

odtud použitím obecného výsledku z příkladu 2.4 dostáváme diferenciální rovnici:

$$\frac{x'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(x')^2}} = K = \text{konst.}\ \Rightarrow\ x' = \sqrt{\frac{2gK^2\,y}{1-2gK^2y}}.$$

Jedná se se sice o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, její integrace by však byla pracná. Použijeme proto malého "triku", který nám umožní dospět přímo k parametrickéhmu vyjádření řešení. Platí

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = K\ \Rightarrow\ \sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2} = K^{-1}\ \Rightarrow\ y = \frac{A}{1+(y')^2},\ A = \frac{1}{2gK^2}.$$

Substitucí $y' = \operatorname{tg} u$ zavedeme parametr u a dostaneme

$$y = \frac{A}{1+\operatorname{tg}^2 u} = A\,\cos^2 u = \frac{A}{2}(1+\cos 2u)\ \Rightarrow\ y' = \operatorname{tg} u = -Au'\,\sin 2u\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ u'\,\cos^2 u = -\frac{1}{2A}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right) = -\frac{x}{2A}.$$

Označíme-li ještě $2u = \pi - \varphi$, $A = 2R$, dostaneme již standardní zápis řešení, v němž rozpoznáme parametrické vyjádření prosté cykloidy.

$$x = R\,(\varphi - \sin\varphi) + C, \quad y = R\,(1-\cos\varphi)\,,$$

kde R a C jsou integrační konstanty. Z podmínky průchodu křivky bodem $A = [0, 0]$ vychází $C = 0$, konstanta R (poloměr kružnice, jejímž valením po ose x cykloida vzniká), se dostane z podmínky průchodu bodem $B = [d, h]$. Hodnota R hraje roli parametru jednoparametrické soustavy cykloid, které procházejí bodem A (viz obr. 2.2). Je určení hodnoty R jednoznačné?

Obr. 2.2 Soustava cykloid procházejících bodem A.

Tímto výsledkem řešení variační úlohy nekončí. Nalezli jsme stacionární bod funkcionálu, je však třeba zjistit jeho typ. Vypočteme druhou variaci J_2 podle (2.4). Je to kvadratická forma v proměnných (u, u'), její matice je tvořena druhými parciálními derivacemi integrandu funkcionálu podle y a y'. Platí

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{3}{4\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y^{5/2}}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = -\frac{1}{2\sqrt{2g}} \frac{y'}{y^{3/2}\sqrt{1+(y')^2}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{y^{1/2}(\sqrt{1+(y')^2})^3}.$$

K tomuto příkladu se vrátíme po přečtení odstavce 2.4 o klasifikaci extrémů. Vypočteme ještě nakonec dobu, za kterou dorazí hmotný bod po cykloidě z místa A do místa B,

$$t_{AB} = \int_0^d \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{2gy}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\varphi_0} \frac{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2(\varphi/2)}}{\sqrt{2gR(1-\cos\varphi)}}\, R(1-\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \varphi_0\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

hodnota φ_0 je určena souřadnicemi bodu $B = [d, h]$.

V předchozí diskusi jsme se zabývali problémem brachistochrony s pevnými konci. Uvažme situaci, kdy bod A je pevný a bod B leží na přímce o rovnici $x = d$. Platí pak (odst. 2.1.4)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x=d} = \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = 0 \;\Rightarrow\; y'(b) = 0.$$

Tečna ke křivce $y = y(x)$ v bodě $x = b$ je tedy rovnoběžná s osou x. To odpovídá situaci $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$. Pro tuto hodnotu platí $x(\pi) = \pi R = d$, $y(\pi) = 2R$. Poloměr kružnice generující cykloidu je tedy $R = d/\pi$.

2.2.2 Úlohy klasické mechaniky

Variační teorie klasické mechaniky jsou založeny na *principu nejmenší akce*. Akcí rozumíme funkcionál

$$S : D_S \ni \mathcal{C} \to S[\mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} L\,\mathrm{d}t \in \mathbf{R}, \tag{2.9}$$

jehož oborem D_S jsou například všechna parametrická vyjádření hladkých rektifikovatelných křivek

$$\mathcal{C} : [t_1, t_2] \ni t \longrightarrow \mathcal{C}(t) = (q^1(t), \dots q^m(t)) \in \mathbf{R}^3.$$

Parametrem t je obvykle čas, m je počet stupňů volnosti mechanické soustavy,(q^σ) jsou zobecněné souřadnice a $(\dot{q}^\sigma)$ zobecněné rychlosti soustavy, kde $1 \leq \sigma \leq m$. Diferenciální 1-forma $\lambda = L\,\mathrm{d}t$ je *Lagrangiánem* soustavy, $L = L(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)$ je *Lagrangeova funkce*. V mechanice je definována jako rozdíl kinetické a potenciální energie soustavy. Je tedy zřejmé, že variační teorii vyhovují pouze soustavy, u nichž lze definovat potenciální energii, tedy soustavy bez disipativních sil (tření, odpor prostředí, apod.).

Příklad 2.7 Sférické kyvadlo. Sférickým kyvadlem rozumíme hmotný bod m zavěšený v homogenním tíhovém poli $\vec{g}$ na vlákně neproměnné délky ℓ a zanedbatelné hmotnosti. Systém má dva stupně volnosti, které lze popsat dvojicí $(q^1, q^2) = (\theta, \phi)$, kde θ je sférický úhel, měřený od svislého směru orietovaného souhlasně s tíhovým zrychlením (osa z), ϕ je azimutální úhel. Při volbě nulové hladiny potenciální energie ve vodorovné rovině obsahující bod závěsu O (ztozožněné rovněž se souřadnicovou rovinou $(O; x, y)$) platí

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz = \frac{1}{2} m\ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + mg\ell\cos\theta.$$

Poněkud předcházíme událostem, můžeme však již v tuto chvíli sdělit jako fakt, že v případě závislosti funkcionálu na více neznámých funkcích platí Eulerovy-Lagrangeovy rovnice pro každou z nich. Pro náš případ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \sin\theta\left(\dot{\phi}^2\cos\theta - \frac{g}{\ell}\right), \quad \ddot{\phi} = 0.$$

Řešením dostáváme

$$\phi = \phi_0 + \omega t, \quad \ddot{\theta} = \sin\theta\left(\omega^2\cos\theta - \frac{g}{\ell}\right),$$

kde ϕ_0 a ω jsou integrační konstanty určené počátečními podmínkami pro $\phi(0)$ a $\dot{\phi}(0)$. Pro malé kmity je $\theta \approx \sin\theta$ a druhou rovnici lze snadno řešit, příčemž typ řešení závisí na azimutální úhlové rychlosti ω a kruhové frekvenci odpovídajícího rovinného kyvadla ω_0:

$$\ddot{\theta} \pm |\omega_0^2 - \omega^2|\,\theta = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Pro $\omega = 0$ dostáváme pohybovou rovnici malých kmitů matematického kyvadla.

Příklad 2.8 Bikvadratický oscilátor. Jedná se o jednorozměrný pohyb hmotného bodu s potenciální energií úměrnou čtvrté mocnině výchylky.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{4}Cx^4.$$

$L = L(x, \dot{x})$ nezávisí na časové proměnné. Úlohu lze tedy řešit podle příkladu 2.4, kde

$$G = L\left(x, \frac{1}{t'}\right)t' = \frac{m}{2t'} - \frac{1}{4}Cx^4 t'.$$

$$\frac{\partial G}{\partial t'} = K = \text{konst.} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}Cx^4\right) = K.$$

2.2.3 Pohyb v centrálním poli – Keplerova úloha

Metodami variačního počtu lze řešit i problém pohybu v centrálním poli. Označme r_0 počáteční polohu a v_0 počáteční rychlost bodu pohybujícího se v centrálním poli. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{K}{r} - \frac{K}{r_0} \Rightarrow v^2 = K\left(\frac{2}{r} + h\right), \quad h = \frac{v_0^2}{K} - \frac{2}{r_0}.$$

Podle Maupertuisova principu je trajektorií bodu extremála funkcinálu (hledáme funkci $r = r(\varphi)$ – polární souřadnice):

$$J[r(\varphi)] = \int \sqrt{\frac{2}{r} + h}\,\mathrm{d}s = \int \sqrt{\frac{2}{r} + h}\sqrt{r^2 + (r')^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Jde o speciální případ, kdy integrand nezávisí explicitně na φ, máme tedy řešení

$$\frac{r^2\sqrt{\frac{2}{r} + h}}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} = C \Rightarrow \varphi + B = C\int \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{2r + hr^2 - C^2}} = \arccos\frac{C^2 - r}{r\sqrt{1 + hC^2}}.$$

Odtud již snadno získáme polární rovnici trajektorie - kuželosečky.

2.3 Přibližné řešení variačních úloh

V tomto odstavci si všimneme metod umožňujících přibližné řešení variační úlohy, aniž bychom použili Eulerovy-Lagrangeovy rovnice.

2.3.1 Metoda nekonečného počtu proměnných

Následující metoda sama o sobě není přibližná, představuje však obecný základ pro formulaci některých přibližných metod. Pro její použití je vhodné omezit obor funcionálu na třídu funkcí, které lze vyjádřit trigonometrickou řadou. Uvažujme o funkcionálu (2.1) na intervalu $[0, \pi]$, nechť D_J obsahuje všechny spojité funkce $y = y(x)$, které maji spojitou první derivaci, a pro které $y(0) = y(\pi) = 0$. Rozložíme hledanou funkci v trigonometrickou řadu

$$y(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots$$

(Vysvětlete, proč není nutno uvažovat absolutní člen ani kosíny.) Platí

$$y'(x) = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \cdots + na_n \cos nx + \cdots$$

Výraz $J[y]$ můžeme tedy interpretovat jako funkci (nekonečně mnoha) proměnných $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$. Nutnou podmínku pro stacionární bod funkcionálu je

$$\frac{\partial J}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,.$$

V některých případech lze takovou úlohu s nekonečným počtem proměnných vyřešit snadno, obecně je však třeba přikročit k řešení přibližnému.

Příklad 2.9 Izoperimetrický problém (viz odst. 1.1.1) Mezi hladkými jednoduchými rektifikovatelnými rovinnými uzavřenými křivkami dané délky, parametrizovanými podle vztahu (1.2), hledáme tu, která obepíná největší plošný obsah. Délka křivky je dána vztahem (1.3). Vezmeme-li za parametr délku oblouku s, pak

$$\int_0^{\ell} \sqrt{(x')^2 + (y')^2)}\, \mathrm{d}s = \ell \;\Rightarrow\; \sqrt{(x')^2 + (y')^2)} = 1. \tag{2.10}$$

Obsah oblasti ohraničené touto křivkou je

$$S = \int_{\mathcal{C}} x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\ell} x(s) y'(s)\, \mathrm{d}s.$$

Nová úloha: Mezi parametrickými vyjádřeními $x(s)$, $y(s)$, periodickými s periodou ℓ (periodičnost je důsledkem uzavřenosti křivky) a splňujícími podmínku (2.10) hledáme ta, pro která je intergál vyjadřjící plochu S maximální. Fourierovy řady funkcí $x(s)$ a $y(s)$:

$$x(s) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi ns}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi ns}{\ell}\right)\right),$$

$$y(s) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos\left(\frac{2\pi ns}{\ell}\right) + d_n \sin\left(\frac{2\pi ns}{\ell}\right)\right)$$

Platí: Nechť $f(x)$, resp. $g(x)$ jsou periodické funkce s periodou ℓ, a nechť splňují podmínky pro rozvoj ve *Fourierovu řadu.* Koeficienty označme α_n, β_n, resp. γ_n, δ_n. Pak (viz Dodatek)

$$\frac{2}{\ell}\int_0^\ell [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right),$$

$$\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha_0\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\gamma_n+\beta_n\delta_n\right),$$

Dosadíme-li do vztahů pro obsah S Fourierovy rozvoje, dostaneme

$$S = \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n d_n - b_n c_n), \qquad \ell = \frac{2\pi^2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2\right).$$

Rozdíl mezi obsahem kruhu omezeného kružnicí délky ℓ a obecnou hodnotou S je

$$\frac{\ell^2}{4\pi} - S = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(na_n-d_n)^2+(nb_n+c_n)^2+(n^2-1)(c_n^2+d_n^2)] \geq 0.$$

Rovnost přitom nastává právě tehdy, jsou-li všechny sčítance nulové, tj. $a_1 - d_1 = 0$, $b_1 + c_1 = 0$, $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ pro $n = 2, 3, \ldots$, tj.

$$x = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\frac{2\pi ns}{\ell} + b_1\sin\frac{2\pi ns}{\ell}, \quad y = \frac{1}{2}c_0 - b_1\cos\frac{2\pi ns}{\ell} + a_1\sin\frac{2\pi ns}{\ell}.$$

Hledanou křivkou je kružnice (určete její kartézskou rovnici).

2.3.2 Ritzova přímá metoda

Pro přibližné řešení omezíme vyjádření funkce řadou na konečný počet členů, tedy n-tá aproximace metody má tvar

$$y_{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(x), \quad a_j \in \mathbf{R}, \quad \varphi_j(x)\ \text{jsou funkce.}$$

Často se volí posloupnost ortogonálních funkcí, například trigonometrických, 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, ... Odpovídající funkcionál je pak funkcí konečného počtu proměnných a_1, a_2, ..., a_n,

$$J[y_{(n)}] = J(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Hledáme čísla a_j z nutné podmínky stacionárního bodu $\partial J/\partial a_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Pro $n \to \infty$ může posloupnost funkcí $\{y_{(n)}(x)\}$ konvergovat k funkci

$y(x)$, která realizuje extrém funkcionálu. Je tedy třeba vyšetřit konvergenci posloupnosti funkcí $\{y_{(n)}(x)\}$, najít limitní fuckci a prošetřit, zda realizuje extrém (jaký typ stacionárního bodu realizuje). Další možností je vzít jako hledanou funkci některou z funkcí posloupnosti. Je pak také třeba odhadnout chybu aproximace $|y(x) - y_{(n)}(x)|$.

Příklad 2.10 Pomocí Ritzovy metody najdeme minimum integrálu

$$J[y] = \int_{-1}^{1} (y')^2 \, dx, \quad y(-1) = y(1) = 0, \quad \int_{-1}^{1} y^2 \, dx = 1.$$

Později ukážeme, že tento funkcionál je minimalizován funkcí $y(x) = \cos(\pi x/2)$, miminum je rovno $\pi^2/4$. nyní využijeme Ritzovy metody v následující aproximaci

$$y(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3, \quad y(-1) = y(1) = 0 \Rightarrow y = (1 - x^2)(a + bx).$$

$$\int_{-1}^{1} y^2(x) \, dx = \frac{16}{15}a^2 + \frac{16}{105}b^2 = 1, \quad \int_{-1}^{2} (y')^2 \, dx = \frac{8}{3}a^2 + \frac{18}{5}b^2.$$

minimum tohoto výrazu za přdchozí vazební podmínky nastane pro $b = 0$, $a = \sqrt{15}/4$ a jeho hodnota je $5/2$.

Problény konvergence vyřešil pro řadu případů N. M. Krylov a uvedl řadu aproximací nižšího řádu.

2.4 Klasifikace stacionárních bodů

Doposud jsme se zabývali nutnou podmínkou stacionárního bodu funkcionálu, jímž bylo řešení Eulerovy rovnice. V tomto odstavci si všimneme podrobněji klasifikace stacionárních bodů funkcionálu, specielně extrémů. Obdobně jako v teorii funkcí rozlišujeme mezi extrémem absolutním a lokálním (relativním), je tomu u funkcionálů. U relativních extrémů dále zavádíme silný a slabý extrém.

2.4.1 Absolutní a relativní extrém

Řekneme, že funkcionál $J[\mathcal{C}]$, kde $\mathcal{C} \in D_J$, nabývá na křivce (extremále) $\mathcal{C}_0$ *absolutního minima*, resp. *absolutního maxima*, jestliže pro libovolnou křivku $\mathcal{C} \in D_J$ platí

$$J[\mathcal{C}] \geq \mathcal{J}[\mathcal{C}_0], \text{ resp. } J[\mathcal{C}] \leq \mathcal{J}[\mathcal{C}_0].$$

Příkladem absolutního minima funkcionálu je úloha s nejkratší spojnicí dvou daných bodů (viz Příklad 2.2).

Pro formulaci definice relativního extrému funkcionálu potřebujeme pojem normy, zavedený v odst. 2.1.1. Nazveme *δ-okolím n-tého řádu* křivky $\mathcal{C}_0 : x \to y_0(x)$, $a \leq x \leq b$, soustavu křivek $\mathcal{C} : x \to y(x)$, $a \leq x \leq b$, pro něž je $||y(x) - y_0(x)||_n <$

δ. Křivky například okolí nultého řádu tedy leží v pásu šířky 2δ kolem křivky $\mathcal{C}_0$.

Řekneme, že funkcionál $J[\mathcal{C}]$ nabývá na křivce $\mathcal{C}_0 \in D_J$ *silného relativního minima*, resp. *silného relativního maxima*, jestliže existuje takové δ-okolí nultého řádu křivky $\mathcal{C}_0$, že pro všechny křivky $\mathcal{C}$ z tohoto okolí platí $J[\mathcal{C}] \geq J[\mathcal{C}_0]$, resp. $J[\mathcal{C}] \leq J[\mathcal{C}_0]$.

Řekneme, že funkcionál $J[\mathcal{C}]$ nabývá na křivce $\mathcal{C}_0 \in D_J$ *slabého relativního minima*, resp. *slabého relativního maxima*, jestliže existuje takové δ-okolí prvního řádu křivky $\mathcal{C}_0$, že pro všechny křivky $\mathcal{C}$ z tohoto okolí platí $J[\mathcal{C}] \geq J[\mathcal{C}_0]$, resp. $J[\mathcal{C}] \leq J[\mathcal{C}_0]$.

Je zřejmé, že každý absolutní extrém je současně slabým i silným extrémem relativním. Každý silný extrém je současně extrémem slabým, obrácené tvrzení neplatí.

Příklad 2.11 Uvažujme o funkcionálu

$$J[y] = \int_0^\pi y^2 \left(1 - (y')^2\right) \, \mathrm{d}x.$$

Jeho Eulerova rovnice má tvar

$$y\left(1 - (y')^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\, y'\right) = 0 \;\Rightarrow\; y\left[1 + (y')^2 + yy''\right] = 0.$$

Jejím řešením je mj. funkce $y(x) = 0$. Pro ni je $J = 0$. Nechť $0 < \delta < 1$. Pro funkce $y = y(x)$, které leží v δ-okolí prvního řádu úsečky $y = 0$ je

$$||y(x)||_1 = \max\{|y(x) - 0|; x \in [0,\pi]\} + \max\{|y'(x) - 0|; x \in [0,\pi]\} < 1 \;\Rightarrow\; |y'(x)| < 1.$$

Pro takové funkce $y(x)$, $y(x) \neq 0$, je $J[y] > 0$, nuly nabývá pouze pro $y \equiv 0$. Pro funkci $y(x) = 0$ tedy funkcionál nabývá slabého minima. Silného minima nenabývá. Skutečně, položme

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx \;\Rightarrow\; J = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx \left(1 - n\cos^2 nx\right) = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}.$$

Pro $n > 4$ je pro funkce zvoleného typu $J < 0$. Zvolme dále $\delta > 0$ libovolně. Pro funkce zvoleného typu platí

$$|y(x) - 0| = |\frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx| < \delta \quad \text{pro} \quad n > \frac{1}{\delta^2}.$$

Všechny takové funkce zvoleného typu, pro jejichž n je $n > \max\{4, \delta^{-2}\}$ tedy leží v δ-okolí nultého řádu pro libovolné předem zvolené $\delta > 0$. Minimum, jehož nabývá funkcionál na funkci $y(x) = 0$ tedy není silným extrémem.

Zabývejme se nyní podrobněji studiem druhé variace funkcionálu, která rozhodne o typu stacionárního bodu. Druhá variace funkcionálu

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

má tvar (2.4), tj.

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_a^b \left(u^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}|_{y_0, y_0'} + 2uu' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}|_{y_0, y_0'} + u'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}|_{y_0, y_0'} \right) \mathrm{d}x.$$

$J_2[y(x)]$ je tedy ***kvadratický funkcionál***. Připomeňme, že funkcionál $I[u(x), v(x)]$, závislý na dvou funkcích $u(x)$ a $v(x)$ se nazývá ***bilineární***, jestliže pro libovolné funkce $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ a libovolné číslo $\alpha \in \mathbf{R}$ platí

$$I[\alpha u + \beta v, w] = \alpha I[u, w] + \beta I[v, w], \quad I[u, \alpha v + \beta w] = \alpha I[u, v] + \beta I[u, w]. \tag{2.11}$$

Pro $u(x) = v(x)$ nazýváme funkcionál $J_2[u(x)] = I[u(x), u(x)]$ kvadratický. Kvadratický funkcionál $J_2[u(x)]$ se nazývá ***pozitivně definitní***, neboli ***ostře pozitivní***, jestliže existuje kladné číslo k tak, že $J_2[u(x)] \geq k\,||u(x)||$ pro libovolné $u(x)$.

Požadavek diferencovatelnosti funkcionálu a současně nutná podmínka stacionárního bodu $J_1 = 0$ pro libovolné $u(x)$ dávají

$$J[y_0(x) + u(x)] - J[y_0(x)] = J_2 + \tau(y_0(x), u(x))||u(x)||^2, \quad \text{kde}$$
$$\lim_{||u(x)|| \to 0} \tau(y_0(x), u(x)) = 0.$$

Věta 2.2 *Nechť $y_0(x)$ je funkce třídy C_1. Má-li funkcionál $J[y(x)]$ v bodě $y_0(x)$ minimum, resp. maximum, platí $J_2[y_0(x)] \geq 0$, resp. $J_2[y_0(x)] \leq 0$ pro libovolné $u(x)$.*

Důkaz: Předpokládejme například, že v bodě $y_0(x)$ je minimum funkcionálu. Vzhledem k diferencovatelnosti je pro dostatečně malé hodnoty normy $||u(x)||$ znaménko levé strany předchozí rovnice a druhé variace J_2 shodné. Předpokládejme (sporem), že pro nějaké $u_0(x)$ je $J_2 < 0$. Pak pro libovolné číslo $\alpha \neq 0$ je

$$J_2[\alpha u_0(x)] = \alpha^2 J_2[u_0(x)] < 0.$$

Pak $J_2[u(x)] < 0$ pro libovolně malé $u(x)$ (tvaru $\alpha u_0(x)$). Pak ale $J[y_0(x) + \alpha u_0(x)] - J_2[y_0(x)] < 0$, což je spor s předpokladem, že je stacionární bod $y_0(x)$ je minimem.

Uvažujme dále o problému s pevnými konci, kdy $u(a) = u(b)$ pro všechny přípustné variace $u(x)$ funkce $y(x)$. Pak je (per partes)

$$2\int_a^b F_{yy'}\,u(x)u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F_{yy'}\,\mathrm{d}(u(x))^2 = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(F_{yy'})\;u(x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$J_2 = \int_a^b \left[P(u(x))^2 + R(u'(x))^2\right] \,\mathrm{d}x, \tag{2.12}$$

$$P = \frac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}\right), \quad R = \frac{1}{2}F_{y'y'}.$$

Následující tvrzení budeme formulovat pro minimum funkcionálu, analogická tvrzení se záměnou příslušných znamének platí pro maximum. Nutná podmínka pro nezápornost kvadratického funkcionálu (2.12) je vyládřena v následující větě:

Věta 2.3 *Je-li kvadratický funkcionál (2.12) nezáporný pro libovolnou funkci $u(x)$ třídy C_1, pro kterou je $u(a) = u(b) = 0$, pak na intervalu $[a, b]$ platí $R(x) \geq 0$.*

Důkaz: Předpokládejme, že pro bod $x_0 \in [a, b]$ je $R(x_0) = -2p$, $p > 0$. Pak, vzhledem ke spojitosti funkce $R(x)$, existuje interval $[c, d] \subset [a, b]$ obsahující bod x_0, takový, že $R(x) < -p$ na $[c, d]$. Označme $d - c = h$ a M maximum hodnot funkce $P(x)$ na $[a, b]$. Definujme

$$u(x) = \sin^2\left(\pi\frac{x-c}{h}\right) \quad \text{pro} \quad c \leq x \leq d.$$

V ostatních případech položme $u(x) = 0$. Jde o funkci třídy C_1. Platí

$$\int_1^b \left(P(x)[u(x)]^2 + R(x)[u'(x)]^2\right) \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_c^d P(x)\sin^4\left(\pi\frac{x-c}{h}\right)\mathrm{d}x + \int_c^d R(x)\,\frac{\pi^2}{h^2}\sin^2\left(2\pi\frac{x-c}{h}\right)\mathrm{d}x \; < \; \frac{Mh^2 - p\pi^2}{h}.$$

Zdůvodnění předchozí nerovnosti:

$$P(x)\sin^4\left(\pi\frac{x-c}{h}\right) \leq P(x) \leq M \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; R(x)\sin^2\left(2\pi\frac{x-c}{h}\right) < -p\sin^2\left(2\pi\frac{x-c}{h}\right) < -p.$$

Pro dostatečně malé hodnoty h je výraz $Mh^2 - p\pi^2 < 0$. Funkce $u(x)$ pro taková h dává záporné hodnoty funkcionálu (2.12).

Z věty 2.3 plyne následující věta 2.4, která uvádí nutnou podmínku minima funkcionálu $J[y]$.

Věta 2.4 Legendreova podmínka. *Je-li extremála $y_0(x) \in D_J$ minimem funkcionálu $J[y]$, pak $F_{y'y'} \geq 0$ podél extremály $y_0(x)$.*

Stále ještě nemáme postačující podmínku pro minimum, resp. maximum. Je obsažena v následující větě.

Věta 2.5 *Je-li pro první variaci funkcionálu*$J_1[y_0(x)] = 0$ *a druhá variace je ostře pozitivní, je stacionární bod* $y_0(x)$ *minimem.*

Důkaz: Nechť je J_2 ostře pozitivní. Pak

$$J[y_0(x) + u(x)] - J[y_0(x)] = J_2[u(x)] + \tau||u(x)||^2 \geq k||u(x)||^2 + \tau||u(x)||^2.$$

Pro dostatečně malé ε_1 je $|\tau| < k/2$ jestliže $||u(x)|| < \varepsilon_1$ (neboť pro $||u(x)|| \to 0$ je $\tau \to 0$, tj. $|\tau| \to 0$, k číslu $k/2$ existuje $\varepsilon_1 > 0$ tak, že pro $||u(x) - 0|| < \varepsilon_1$ je $|tau - 0| < k/2$).

$$J[y_0(x) + u(x)] - J[y_0(x)] =$$

$$= J_2[u(x)] + \tau||u(x)||^2 > k||u(x)||^2 \pm \frac{1}{2}k||u(x)||^2 > \frac{1}{2}k||u(x)||^2 > 0.$$

Předchozí věta je dokázána bez ohledu na konkrétní normu v normovaném prostoru funkcí. Není proto vázána na typ extrému. Věta je navíc nepraktická – neumožňuje snadné ověření postačující podmínky pomocí koeficientů kvadratického funkcionálu představujícího druhou variaci původního funkcionálu. K formulaci praktického kritéria jsou potřebné další pojmy, které nyní stručně zavedeme. Tvrzení nebudeme dokazovat – jde v tuto chvíli o ilustraci ne zcela jednoduchého problému klasifikace extrémů.

Budeme se zabývat kvadratickým funkcionálem (2.12) pro funkce $u(x)$, pro které $u(a) = u(b) = 0$.

Se znalostí tvrzení klasifikujících extrémy, se vraťme k úloze o brachistochroně (odst. 2.2.1), kde jsme vypočetli koeficienty druhé variace. Z výsledku je zřejmé, že $F_{y'y'} > 0$ pro jakoukoli volbu funkce $y(x)$, pro kterou je výraz $F_{y'y'}$ definován.

Kapitola 3

Zobecnění teorie – prostorová úloha

V této kapitole zobecníme základní variační úlohu na funkcionály definované na více funkcích jedné proměnné. Odvodíme příslušnou soustavu Eulerových rovnic a jejich první integrály. S nimi souvisí Hamiltonův formalismus variačních rovnic a převod Eulerových rovnic na tzv. kanonický tvar, zvláště vhodný pro fyzikální aplikace a studium zákonů zachování. Závěr kapitoly je věnován Hamiltonově-Jacobiho teorii a aplikacím.

3.1 Funkcionál závislý na více funkcích

Typickým fyzikálním příkladem vedoucím k variační úloze s více neznámými funkcemi je pohyb mechnického systému s větším počtem m stupňů volnosti. Systém je popsán zobecněnými souřadnicemi $\{q_i\}$, $1 \leq i \leq m$, které jsou funkcemi času. Extremálou vhodně formulovaného funkcionálu je pak parametrické vyjádření trajektorie systému.

3.1.1 Úloha s pevnými konci

Označme $D_J^m = D_J \times \cdots \times D_J$,kde D_J je množina přípustných křivek pro funkcionál. Funkcionálem rozumíme zobrazení

$$J:\, D_J \ni (y_1(x), \ldots y_m(x)) \longrightarrow J[y_1(x), \ldots, y_m(x)] =$$

$$= \int\limits_a^b F(x, y_1, \ldots y_m, y_1', \ldots y_m')\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}.$$

Úloha s pevnými konci je dána podmínkami $y_i(a) = A_i$, $y_i(b) = B_i$. Variace funkcí $y_i(x)$ označme $\varepsilon u_i(x)$. Vyjádříme variaci funkcionálu:

$$\Delta J = \int_a^b [F(x, y_1 + \varepsilon u_1, \dots, y_m + \varepsilon u_m, y_1' + \varepsilon u_1', \dots, y_m' + \varepsilon u_m') -$$

$$-F(x, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m')]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \varepsilon \int_a^b \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} u_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} u_i' \right) \mathrm{d}x + \varepsilon^2 J_2 + \cdots .$$

První člen εJ_1 obsahuje první variaci J_1. Nutnou podmínkou extremály je $J_1 = 0$. Vzhledem k nezávislosti funkcí $u_i(x)$ je tato podmínka ekvivalentní soustavě

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} u_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} u_i' \right) \mathrm{d}x = 0.$$

Vzhledem k pevným koncům je $u_i(a) = u_i(b) = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, m$. V další úvaze můžebe buď přímo vvyužít tvrzení úlohy 2.2, nebo vyjádřit integrál metodou per partes:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} u_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} u_i' \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) u_i(x)\,\mathrm{d}x + \tag{3.1}$$

$$+u_i(b) \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right)_{x=b} - u_i(a) \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right)_{x=a} .$$

Vzhledem k pevným koncům, tj. $u(b) = u_i(a) = 0$ a vzhledem k libovolnosti $u_i(x)$ dostáváme soustavu *Eulerových rovnic*

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0. \tag{3.2}$$

Položme si otázku, zda jiný integrand tvaru $F + \Phi$ může vést ke stejným Eulerovým rovnicím. Znamená to, že Eulerovy rovnice pro Φ mají identicky nulové levé strany. Uvažujme pro jednoduchost o případu jedné neznámé funkce, $F = F(x, y, y')$, tj. $\Phi(x, y, y')$. Platí

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial y'}\, y' - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2}\, y'' = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} = 0 \Rightarrow \Phi = A(x, y) + B(x, y) y'.$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0, \Rightarrow A = \frac{\partial \Psi}{\partial x},\ B = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

pro jistou funkci $\Psi = \Psi(x, y)$. Pak

$$\Phi(x, y, y') = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x},$$

Je tedy úplnou derivací podle proměnné x (libovolné) funkce proměnných x a y. Φ se nazývá *triviální Lagrangeova funkce*. Pro obecnější případ prostorové úlohy je obdobně

$$\Psi(x, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m') = \frac{\mathrm{d}\Psi(x, y_1, \dots, y_m)}{\mathrm{d}x}. \tag{3.3}$$

Příklad 3.1 Geodetiky na ploše. Předpokládejme, že plocha je parametrizována rovnicemi $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Parametrické rovnice geodetiky (nejkratší spojnice dvou zadaných bodů na ploše) hledáme ve tvaru $u = u(t)$, $v = v(t)$. Délka elementu oblouku mezi dvěma body na ploše, jejichž parametry jsou a a b, je

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}.$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v,\ \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v,\ \mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v.$$

Nalezení nejkratší spojnice znamená určení minima funkcionálu

$$J[u(t), v(t)] = \int_a^b \sqrt{E(u, v)(u')^2 + 2F(u, v)u'v' + G(u, v)(v')^2}\,\mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

kde výraz pod odmocninou se nazývá *první fundamentální kvadratická forma*. Pro funkce $E(u, v)$, $F(u, v)$ a $G(u, v)$ platí

$$E = \vec{r}_u\vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u\vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v\vec{r}_v,$$

$$\vec{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \vec{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Vyjádřete Eulerovy rovnice obecně, pomocí funkcí E, F, G. Vyřešíme problém pro jednouchý případ - rotační válcovou plochu o poloměru R s osou symetrie v ose z. Plocha má ve vácových souřadnicích rovnice $\vec{r} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$. Polární souřadnice φ a z hrají roli parametrů u a v. Pro tento případ dostáváme

$$\vec{r}_\varphi = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)\,, \quad \vec{r}_z = (0, 0, 1),$$

$$E(\varphi, z) = R^2,\ F(\varphi, z) = 0,\ G(\varphi, z) = 1,\ \ J[\varphi(t), z(t)] = \int_a^b \sqrt{R^2(u')^2 + (v')^2}\,\mathrm{d}t.$$

Eulerovy rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{R^2\varphi'(t)}{\sqrt{R^2(\varphi'(t))^2 + (z'(t))^2}} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{z'(t)}{\sqrt{R^2(\varphi'(t))^2 + (z'(t))^2}} = 0.$$

$$\frac{R^2\varphi'(t)}{\sqrt{R^2(\varphi'(t))^2+(z'(t))^2}} = P = \text{konst}, \quad \frac{z'(t)}{\sqrt{R^2(\varphi'(t))^2+(z'(t))^2}} = Q = \text{konst}.$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = K \Rightarrow z(\varphi) = K\varphi + L.$$

3.1.2 Obecný případ a kanonické proměnné

V tomto odstavci se budeme zabývat zcela obecným případem, kdy jsou povoleny i variace koncových bodů křivek, včetně možné změny jejich x-ové souřadnice. Označme variaci funkce $y_i(x)$

$$y_i(x) - y_i^{(0)}(x) = u(x),$$

kde

$$A_0 = (a, y_1^{(0)}(a), \dots y_m^{(0)}(a)), \ B_0 = (b, y_1^{(0)}(b), \dots y_m^{(0)}(b))$$

jsou koncové body variační úlohy pro soubor funkcí $(y_1^{(0)}(x), \dots y_m^{(0)}(x))$. Koncové body souboru křivek změněných variací označme

$$A = (a+\delta a, y_1(a), \dots y_m(a)), \ B = (b+\delta b, y_1(b), \dots y_m(b)).$$

Obr. 3.1 znázorňuje situaci pro $m = 1$.

Obr. 3.1 Obecná variace křivky.

K obrázku:

$$\delta y = y(a+\delta a) - y^{(0)}(a), \quad u(a) = \delta y - y^{(0)\prime}(a)\delta a, \quad u(b) = \delta y - y^{(0)\prime}(b)\delta b$$

Dále definujeme *vzdálenost křivek*

$$\varrho(y_i(x), y_i^{(0)}(x)) = \max|y_i(x) - y_i^{(0)}(x)| + \max|y_i'(x) - {y_i^{(0)}}'(x)| + \varrho(A_0, A) + \varrho(B_0, B),$$

pro body se jedná o euklidovskou vzálenost. Variace funkcionálu je pak

$$\Delta J = \int\limits_{a+\delta a}^{b+\delta b} F(x, y_1+u_1, \dots, y_m+u_m, y_1'+u_1', \dots, y_m'+u_m')\,\mathrm{d}x -$$

$$-\int_a^b F(x, y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m')\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b [F(x, y_1{+}u_1, \ldots, y_m{+}u_m, y_1'{+}u_1', \ldots, y_m'{+}u_m') - F(x, y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m')]\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_b^{b+\delta b} F(x, y_1 + u_1, \ldots, y_m + u_m, y_1' + u_1', \ldots, y_m' + u_m')\,\mathrm{d}x -$$

$$- \int_a^{a+\delta a} F(x, y_1 + u_1, \ldots, y_m + u_m, y_1' + u_1', \ldots, y_m' + u_m')\,\mathrm{d}x.$$

První variace má tvar

$$J_1 = \int_a^b \sum_{i=1}^m \left(F_{y_i} u_i + F_{y_i'} u_i'\right)\mathrm{d}x + F|_{x=b}\delta b - F|_{x=a}\delta a =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^m \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right) u_i(x)\,\mathrm{d}x + +F|_{x=b}\delta b - F|_{x=a}\delta a +$$

$$+ \sum_{i=1}^m F_{y_i'}|_{x=b} u_i(b) - \sum_{i=1}^m F_{y_i'}|_{x=a} u_i(a).$$

Pro vyjádření variací $u_i(x)$ v bodech a a b použijeme lineární extrapolace (obr. 3.1):

$$u_i(a) = y_i(a+\delta a) - y_i^{(0)}(a) - y_i^{(0)\prime}(a)\delta a, \quad u_i(b) = y_i(b+\delta b) - y_i^{(0)}(b) - y_i^{(0)\prime}(b)\delta b$$

Po úpravách

$$J_1 = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}\right) u_i(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^m F_{y_i'} \delta y_i|_a^b + \left(F - \sum_{i=1}^m y_i' F_{y_i'}\right) \delta x|_a^b = 0, \tag{3.5}$$

kde $\delta x|_a = \delta a$, $\delta x|_b = \delta b$, $\delta y_i|_a = y_i(a+\delta a) - y_i^{(0)}(a)$, $\delta y_i|_b = y_i(b+\delta b) - y_i^{(0)}(b)$. Vztah (3.5) je známá první variační formule v integrálním tvaru.

Označme $p_i = F_{y_i'}$. Předpokládejme, že jakobián

$$\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial y_k'}\right) = \det\left(F_{y_i' y_k'}\right) \neq 0.$$

Pak z transformačních rovnic $p_i = F_{y_i'}$ lze vyjádřit y_i', $i = 1, 2, \ldots, m$, jako funkce

$$y_i' = y_i'(x, y_1, \ldots, y_m, p_1, \ldots, p_m). \tag{3.6}$$

Označíme

$$H = -F + \sum_{i=1}^{m} y_i' p_i. \tag{3.7}$$

Výraz pro první variaci má v novém označení tvar

$$J_1 = \int_a^b \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x + \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \delta y_i - H \delta x \right) |_{x=1}^{x=b} \tag{3.8}$$

Předpokládejme, že funkcionál J má pro $(y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ extrém. Variace jsou zcela obecné, takže speciálním případem je případ s pevnými konci. Pro něj $\delta x = 0$, $\delta y_i = 0$. Pro tento případ platí

$$\int_1^b \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} \right) = 0.$$

Požadujeme-li, aby $y^{(0)}(x)$ byla extremála funkcionálu J na množině **všech** přípustných křivek, je zřejmé, že bude extremálou i na množině všech křivek s pevnými konci. Bude tedy vždy splňovat Eulerovy rovnice (podmínku nutnou). V takovém případě je pro extremály, na jejichž konce se nekladou podmínky, navíc plněno

$$J_1 = \sum_{i=1}^{m} F_{y_i'} \delta y_i |_a^b + \left(F - \sum_{i=1}^{m} y_i' F_{y_i'} \right) \delta x |_a^b = 0,$$

nebo ekvivalentně

$$\left(\sum_{i=1}^{m} p_i \delta y_i - H \delta x \right) |_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Součadnice $(y_1, \dots, y_n, p_1, \dots p_n)$ se nazývají *kanonické*.

Příklad 3.2 Koncové body ležící na plochách nebo křivkách. Předpokládejme, že koncové body přípustných křivek A_0 a B_0 leží na grafech $y = \varphi(x)$ a $y = \psi(x)$. Hledáme extrém obvyklého funkcionálu. Uvažme například problém nalezení vzdálenosti mezi takovými grafy, tj. $F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$. Extremála musí být především řešením Eulerovy rovnice. Další podmínkou pro to, aby $J_1 = 0$ je

$$F_{y'}|_{x=b} \delta y_b + (F - y' F_{y'})|_{x=b} \delta b -$$

$$- F_{y'}|_{x=a} \delta y_a - (F - y' F_{y'})|_{x=a} \delta a = 0.$$

Podle obr. 3.2 je

Obr. 3.1 Koncové body přípustných křivek na daných křivkách.

$$\delta y_b = \delta y|_b = \delta y(b + \delta b) - y(b), \quad \delta y_a = \delta y|_a = \delta y(a + \delta a) - y(a)$$
$$\delta y_a = [\varphi'(x) + \varepsilon_0]\delta a, \quad \delta y_b = [\psi'(x) + \varepsilon_1]\delta b,$$

kde $\varepsilon_0 \to 0$ pro $\delta a \to 0$ a $\varepsilon_1 \to 0$ pro $\delta b \to 0$. Podmínka nulovosti první variace pak dává

$$(\psi' F_{y'} + F - y' F_{y'})\,|_{x=b}\delta b - (\varphi' F_{y'} + F - y' F_{y'})\,|_{x=a}\delta a = 0.$$

Vzhledem k nezávislosti volby δa a δb dostaneme tzv. *podmínky transverzality.*

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'}]|_{x=a} = 0, [F + (\varphi' - y')F_{y'}]|_{x=a} = 0.$$

Uvažme nyní funkcionál

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x, y)\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; F_{y'} = f\,\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y' F}{1 + (y')^2}.$$

Z podmínek transverzality pak výpočtem dostaneme

$$y' = -\frac{1}{\varphi'}, \quad \text{resp.} \quad y' = -\frac{1}{\psi'}$$

pro levý, resp. pravý koncový bod. eqnarray

3.2 Kanonický tvar Eulerových rovnic a důsledky

V tomto odstavci se budeme podrobněji věnovat vyjádření Eulerových rovnic v kanonických souřanicích, které jsme zavedli při úvahách o obecné úloze s volnými konci. Všimneme si důležitých důsledků vyplývajících jednoduše z tohoto vyjádření, zejména zákonů zachování.

3.2.1 Kanonický tvar Eulerových rovnic a první integrál pohybu

Eulerovy rovnice představují soustavu n rovnic druhého řádu o n neznámých funkcích $y_i(x)$ (hovoříme stále o funkcionálu prvního řádu). Převedeme je na soustavu $2n$ rovnic prvního řádu pro $2n$ funkcí – převodem do kanonických proměnných.

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0, \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial y_i'}, \quad H = -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' p_i,$$

$$\mathrm{d}H = -\mathrm{d}F + \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}y_i' + \sum_{i=1}^{n} y_i' \mathrm{d}p_i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}H = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i'\mathrm{d}p_i.$$

$\mathrm{d}H$ je úplný diferenciál, tedy

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}, \frac{\partial H}{\partial p_i} = y_i'.$$

Eulerovy rovnice proto lze psát ve tvaru *kanonických Eulerových rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \tag{3.9}$$

Předpokládejme nyní, že F nezávisí explicitně na x. Pak

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}\right) = 0$$

Předchozí rovnost platí podél každé extremály. Funkce H má podél extremály konstatní hodnotu, nazývá se *první integrál pohybu Eulerových rovnic.* Obecně

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(y_i,p_i)}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}\right) = [\Phi, H].$$

Předchozí výraz se nazývá *Poissonova závorka* funkcí Φ a H.

Na konec odstavce formulujeme jeho závěry ve větách:

Věta 3.1 *Funkce $H(x,y_i,p_i) = -F + \sum_{i=1}^{n} p_i y_i'$ nabývá podél extremál funkcionálu*

$$J[y_1(x),\dots,y_n(x)] = \int\limits_a^b F(x,y_i,y_i')\,\mathrm{d}x$$

konstantní hodnoty právě když F nezávisí explicitně na proměnné x.

Důkaz: Předchozími úvahami jsme dokázali, že nezávislost funkce H na proměnné x je podmínkou postačující pro to, aby funkce H byla integrálem pohybu. Je třeba ještě dokázat, že je i podmínkou nutnou. Předpokládejme, že $H = \text{konst.}$ podél extremály. Platí

$$0 = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}|_{y_0(x)} = \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial y_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}p_i'\right)\right]|_{y_0(x)} = 0,$$

neboť platí Eulerovy kanonické rovnice (viz předchozí výpočty). Pak $\partial H/\partial x = 0, \Rightarrow \partial F/\partial x = 0$.

Věta 3.2 *Nechť funkce $\Phi = \Phi(y_i, p_i)$ nezávisí explicitně na proměnné x. Funkce Φ je prvním integrálem pohybu Eulerových rovnic, je-li její Poissonova závorka s funkcí H nulová, tj. $[\Phi, H] = 0$.*

3.2.2 Legendreova transformace

Užití tzv. Legendreovy transformace představuje ekvivalentní přístup k získání kanonických Eulerových rovnic, který spočívá v náhradě původního variačního problému problémem ekvivalentním, jehož Eulerovy rovnice jsou přímo kanonickými rovnicemi původního problému. Najdeme tedy (za jistých podmínek) funkcionál s integrandem závislým na kanonických proměnných (x, y_i, p_i), jehož Eulerovy rovnice budou tvaru (3.9).

Ukážeme si podstatu problému na případu hledání extrému (například minima) funkce jedné proměnné $f(\xi)$ a teprve pak přejdeme k funkcionálu. Dejme tomu, že $f(\xi)$ je ryze konvexní, tj. $f''(\xi) > 0$ na svém definičním oboru (analogické úvahy budou platit pro funkci ryze konkávní). Zavedeme novou proměnnou $p = f'(\xi)$, zvanou ***tečná souřadnice***. Vzhledem k předpokladu o konvexnosti funkce $f(\xi)$ je $p'(\xi) = f''(\xi) > 0$, lze tedy ξ explicitně vyjádřit pomocí p (existence inverzní funkce). Definujme $H(p) = -f(\xi) + p\xi$, kde $\xi = \xi(p)$. Přechod

$$(\xi, f(\xi)) \longrightarrow (p, H(p))$$

je vzájemně jednoznačný a nazývá se *Legendreova transformace*. Funkce $f(\xi)$ a $H(p)$ se nazývají ***kanonicky sdružené***.

Úloha 3.1 Ukažte, že funkce $H(p)$ je (v případě ryze konvexní $f(\xi)$) rovněž ryze konvexní.

Vypočteme $\mathrm{d}H$ a vyjádříme $H''(p)$.

$$\mathrm{d}H = -f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi + p\,\mathrm{d}\xi + \xi\,\mathrm{d}p, \text{ ale } \mathrm{d}H = H'(p)\,\mathrm{d}p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p} = \xi, \quad \frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}p^2} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{p'(\xi)} = \frac{1}{f''(\xi)} > 0.$$

Platí

$$-H(p) + p\,H'(p) = f(\xi) - p\,H'(p) + p\,H'(p) = f(\xi). \tag{3.10}$$

Legendreova transformace je tedy ***involucí***, tj. je sama k sobě inverzní.

Úloha 3.2 Pro $a > 1$ je $f(\xi) = a^{-1}\xi^a$. Vyjádřete Legendreovu transformaci.

Uvažujme nyní o funkci $-H(p) + p\xi$ jako o funkci dvou proměnných p a ξ. Nutnou podmínkou jejího extrému vzhledem k proměnné p je

$$\frac{\partial(-H(p) + p\xi)}{\partial p} = -H'(p) + \xi = 0 \Rightarrow H'(p) = \xi.$$

Vzhledem k (3.10) je pak $-H(p) + \xi p = f(\xi)$. Hodnota $f(\xi)$ tedy představuje extrém funkce $-H(p) + \xi p$ vzhledem k p. Tento extrém je maximem, neboť

$$\frac{\partial^2(-H(p) + \xi p)}{\partial p^2} = -H''(p) < 0.$$

Pak pro minimum funkce $f(\xi)$ (vzhledem k jediné proměnné ξ) je

$$\min_\xi f(\xi) = \min_\xi \max_p \left[-H(p) + \xi p\right],$$

funkce $-H(p) + \xi p$ je nyní chápána jako funkce dvou proměnných.

Aplikujme nyní předchozí úvahy na funkcionál (2.1). Předpokládejme $F_{y'y'} \neq 0$ a položme

$$p = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad H(x, y, p) = -F(x, y, y') + y'\, p,$$

$$\bar{J}(y(x), p(x)) = \int_a^b \left[-H(x, y, p) + y'\, p\right] \mathrm{d}x,$$

kde y a p jsou chápány jako dvě nezávislé funkce, $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Nový funkcionál je závislý na dvou funkcích $y(x)$ a $p(x)$. Obecně je nutno chápat jej jako funkcionál prvního řádu, přičemž obsahuje explicitně y', neobsahuje však p'. Integrand je tedy

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, p, y', p') = -H(x, y, p) + y'p.$$

Eulerovy rovnice nového funcionálu jsou

$$-\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

mají tedy tvar kanonických rovnic původního funkcionálu. Ještě je třeba dokázat ekvivalenci obou variačních problémů, tj. že funkcionály $J[y(x)]$ a $\bar{J}[y(x), p(x)]$ mají extrém na stejných křivkách. To znamená, že kanonické rovnice mají stejné řešení jako původní Eulerova rovnice.

$$\mathrm{d}H(x, y, p) = -\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x - \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y + y'\,\mathrm{d}p \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p} = y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -H + p\,\frac{\partial H}{\partial p} = F - y'p + y'p = F.$$

Ukážeme,že pro danou křivku $y(x)$ představuje hodnota původního funkcionálu $J[y(x)]$ extrém hodnot nového funkcionálu $J[y(x), p(x)]$, když $p(x)$ probíhá přípustné možnosti, tj.

$$J[y(x)] = \min_p J[y(x), p(x)], \quad \text{resp.} \quad J[y(x)] = \max_p J[y(x), p(x)].$$

Pak totiž extrém funkcionálu $J[y(x), p(x)]$ (obecně proměnné jak $y(x)$ tak $p(x)$) je extrémem funkcionálu $J[y(x)]$. Protože $J[y(x), p(x)]$ neobsahuje $p'(x)$, má Eulerova rovnice pro $J[y(x), p(x)]$ tvar

$$\frac{\partial[-H + y'p]}{\partial y} = 0 \Rightarrow y' = \frac{\partial H}{\partial p},$$

pak

$$-H + y'p = -H + p\frac{\partial H}{\partial p} = F.$$

Příklad 3.3 Pro funkcionál

$$J[y(x)] = \int\limits_a^b \left(Py'^2 + Qy'^2\right)\,\mathrm{d}x$$

napište standardní Eulerovu rovnici i kanonické rovnice.

Situace je zcela analogická v případě funkcionálu závislého na více funkcích jedné proměnné

3.2.3 Kanonické transformace, transformace invariance, teorém Noetherové

V tomto odstavci si všimneme, jaké podmínky musí splňovat transformace kanonických proměnných, aby vůči nim byly invariantní Eulerovy kanonické rovnice. Uvažujme o transformaci

$$(x, y_1, \dots y_n, p_1, \dots p_n) \longrightarrow (x, Y_1, \dots Y_n, P_1, \dots P_n)$$

a novou funkci $\tilde{H} = \tilde{H}(x, Y_1, \dots Y_n, P_1, \dots P_n)$. Transformaci nazveme *kanonickou*, jestliže

$$\frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial Y_i}.$$

Původní kanonické rovnice jsou Eulerovými rovnicemi funkcionálu (2.1). Funkcionál v nových proměnných bude

$$\tilde{J}[Y_1, \dots, Y_n, P_1, \dots, P_n] = \int\limits_a^b \left(-\tilde{H} + \sum_{i=1}^n Y_i' P_i\right)\mathrm{d}x \tag{3.11}$$

Požadujeme, aby variační problémy s funkcionály $\bar{J}[y_i(x), p_i(x)]$ a $\tilde{J}[Y_i(x), P_i(x)]$ byly ekvivalentní, tj, měly stejné Eulerovy rovnice. Jejich integrandy se tedy liší o integrand, který vede k triviálnímu variačnímu problému, tj. identicky nulovým levým stranám Eulerových rovnic. Tedy

$$-H(x, y_j, p_j) + \sum_{i=1}^n p_i y' = -\tilde{H}(x, Y_j, P_j) + \sum_{i=1}^n P_i Y' + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x},$$

kde Φ je funkce libovolných proměnných, které generují stejný prostor, jako proměnné (x, y_i, p_i). Předpokládejme $\Phi = \Phi(x, y_i, Y_i)$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i' - \sum_{i=1}^{n} P_i Y_i' + (\tilde{H} - H).$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} y_i' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial Y_i} Y_i' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial Y_i}. \tag{3.12}$$

Uvažme ještě další možnost, funkci $\Psi = \Psi(x, y_i, P_i)$. Platí

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{i=1}^{n} P_i Y_i + \sum_{i=1}^{n} p_i y_i' + \sum_{i=1}^{n} Y_i P_i' + (\tilde{H} - H).$$

Současně, při označení $\Psi(x, y_i, P_i) = \Phi + \sum P_i Y_i$ je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Phi + \sum_{i=1}^{n} P_i Y_i\right) = (\tilde{H} - H) + \sum_{i=1}^{n} p_i y_i' + \sum_{i=1}^{n} Y_i P_i' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{H} = H + \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}, \quad Y_i = \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}. \tag{3.13}$$

Nyní si všimneme dalšího typu transformací variační úlohy – transformací invariance. (Nejde nyní o problém invariance *tvaru* Eulerových rovnic při přechodu k jiným proměnným, který jsme řešili v odstavci 2.1.5).V odstavci 3.2.1 jsme odvodili tzv. první integrál pohybu variační úlohy – hodnoty funkce H podél extremál se zachovávají právě když integrand $F(x, y, y')$, resp.$F(x, y_i, y_i')$ funkcionálu nezávisí na proměnné x. Je tedy *invariantní* vzhledem k záměně $x \to x + x_0$, kde $x_0 = \text{konst}$.

Úloha 3.3 Ukažte, že podmínka explicitní nezávislosti funkce H resp. F na proměnné x je ekvivalentní invarianci funkce H resp. F vzhledem k záměně $x \to x + x_0$, kde $x_0 = \text{konst}$.

Úvahy nyní zobecníme a ukážeme, že integrály pohybu jsou spojeny s transformacemi invariance funkcionálu. Uvažujme o transformaci dané $(n+1)$ rovnicemi

$$\bar{x} = A(x, y_i, y_i', \varepsilon), \quad \bar{y}_j = B_j(x, y_i, y_i', \varepsilon), \tag{3.14}$$

$$1 \le i, j \le n, \quad a \le x \le b, \quad \bar{a} \le \bar{x} \le \bar{b},$$

kde transformační funkce se předpokládají diferencovatelné vzhledem je všem proměnným (včetně ε) a pro $\varepsilon = 0$ jsou to identity. Řekneme, že funkcionál $J[y_i(x)]$ je *invariantní vzhledem transformacím* daným předchozími rovnicemi, jestliže platí

$$\int_a^b F(x, y_i, y_i')\,\mathrm{d}x = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} F(\bar{x}, \bar{y}_i, \bar{y}_i')\,\mathrm{d}\bar{x} \tag{3.15}$$

Úloha 3.4 Dokažte, že funkcionál $J[y(x)]$ pro $F(x,y,y') = (y')^2$ je invariantní vzhledem k transformacím $\bar{x} = x + x_0$, $\bar{y} = y$, kde $x_0 =$ konst., zatímco pro a $F(x,y,y') = x(y')^2$ vůči těmto transformacím invariantní není.

Věta 3.3 Teorém Emmy Noetherové. Nechť funkcionál $J[y_1(x),\dots,y_n(x)]$ je invariantní vzhledem k transformacím (3.14) pro libovolné meze a a b. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i'}\beta_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' \frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\alpha = \text{konst.} \tag{3.16}$$

$$\alpha(x,y_i,y_i') = \frac{\partial A(x,y_i,y_i',\varepsilon)}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}, \quad \beta_j = \frac{B_j(x,y_i,y_i',\varepsilon)}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}.$$

Důkaz: Vzhledem k diferencovatelnosti přechodových funkcí platí

$$\bar{x} - x = A(x,y_i,y_i',\varepsilon) - A(x,y_i,y_i',0) = \varepsilon\frac{\partial A(x,y_i,y_i',\varepsilon)}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0} + |\varepsilon|\tau(x,y_i,y_i',\varepsilon),$$

$$\bar{y}_j - y_j = B_j(x,y_i,y_i',\varepsilon) - B_j(x,y_i,y_i',0) = \varepsilon\frac{\partial B_j(x,y_i,y_i',\varepsilon)}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0} + |\varepsilon|\sigma_j(x,y_i,y_i',\varepsilon),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tau(x,y_i,y_i',\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_j(x,y_i,y_i',\varepsilon) = 0.$$

Změna funkcionálu je pak

$$\Delta J = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} F(\bar{x},\bar{y}_i,\bar{y}_i')\,\mathrm{d}\bar{x} - \int_a^b F(x,y_i,y_i')\,\mathrm{d}x,$$

$$\Delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^{n}\left(F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}F_{y_i'}}{\mathrm{d}x}\right)u_i(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\,\delta y_i|_a^b +$$

$$+\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right)\delta x|_a^b, \quad \delta x|_a^b = \bar{x} - x = \alpha\varepsilon,\ \delta y_i = \bar{y}_i - y_i|_a^b = \beta_i\varepsilon.$$

Výpočet takového rozdílu jsme již prováděli v úvahách o variačním problému se zcela volnými konci. Výsledek je dán vztahem (3.5). Použijeme jej s tím, že dosadíme $\delta x|_a^b = \bar{x} - x = \alpha\varepsilon$ a $\delta y_i = \bar{y}_i - y_i = \beta_i\varepsilon$. Pak za předpokladu, že $y_i^{(0)}$ je extremála, je

$$\Delta J = \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\frac{\partial F}{\partial y_i'} + \alpha\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right]_{x=a}^{x=b}.$$

Transformace (3.14) však nemění funkcionál, tj. $\Delta J = 0$, a tedy

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\frac{\partial F}{\partial y_i'} + \alpha\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right]_{x=a} = \left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\frac{\partial F}{\partial y_i'} + \alpha\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right]_{x=b}.$$

Uvedená rovnost platí pro libovolnou volbu mezí a a b, odtud je zřejmé, že hodnota výrazu se podél extremály nemění. V kanonických proměnných dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \beta_i - H\alpha = \text{konst.} \tag{3.17}$$

Úloha 3.5 Integrand funkcionálu $J[y(x)]$ nezávisí explicitně na proměnné x, tj. $F = F(y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$. Přechod $\bar{x} = x + \varepsilon$, $\bar{y}_i = y_i$ (tj. $\alpha = 1$, $\beta_i = 0$) je tedy transformací invariance. Ukažte, že důsledkem obecného vztahu (3.17) je skutečnost, že H je integrál pohybu.

Příklad 3.4 Predpokládejme, že integrand funkcionálu nezávisí na některé z proměnných y_i, například na y_1. Předpokládejme, že přechod $\bar{x} = x$ (tj. $A = 1 \Rightarrow \alpha = 0$), $\bar{y}_j = B_j(x, y_i, y_j')$ je transformací invariance funkcionálu. Odvodíme integrály Eulerových rovnic pomocí teorému Noetherové: Vzhledem k tomu, že $\alpha = 0$, je podle (3.17)

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0.$$

Nezávislost F na y_1 znamená, že $B_i(x, y_i, y_i') = y_i + \varepsilon\delta_{1i}$. Transformace invariance jsou tedy

$$\bar{x} = x, \;\; \bar{y}_1 = y_1 + \varepsilon, \;\; \bar{y}_i = y_i, \;\; 2 \le i \le n.$$

Pak

$$\frac{\partial F}{\partial y_1'} = p_1 = \text{konst.}$$

Zachovává se tedy hodnota kanonické proměnné p_1 *impuls*. Souřadnice y_1 se nazývá *cyklická*.

Úloha 3.6 Uvažujte o funkcionálu

$$J[x(t), y(t), z(t)] = \int_{t=a}^{t=b} F(x, y, z, x', y', y')\,\mathrm{d}t$$

a předpokládejte, že přechod (rotace kolem osy z)

$$\bar{x} = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon, \quad \bar{y} = -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon, \quad \bar{z} = z$$

je jeho transformací invariance. Odvoďte pomocí teorému Noetherové příslušný integrál Eulerových rovnic.

3.2.4 Hamiltonova-Jacobiho rovnice

Dosud jsme se zabývali pouze problémem nalezení a jemnější charakterizace (klasifikace typů extrémů) extremál funkcionálu. V tomto odstavci odvodíme, za jistých předpokladů, parciální diferenciální rovnici pro stacionární hodnotu samotnou (aniž bychom explicitně nalezli extremálu). Základním předpokladem je, že dané dva body, pevný bod A a "pohyblivý"bod B,

$$A = (a, y_1^{(A)}, \dots, y_n^{(A)}), \quad B = (x, y_1, \dots, y_n),$$

spojuje pouze jedna extremála $(y_1^{(0)}(x), \dots, y_n^{(0)}(x))$. Označme hodnotu funkcionálu vypočtenou podél extremály jako

$$S = J[y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')\,\mathrm{d}x. \tag{3.18}$$

Tato hodnota se nazývá *geodetická vzdálenost bodů A a B.* (Například pro funkcionál vyjadřující délku křivky v euklidovském protoru je S euklidovská vzdálenost dvou bodů.) Na základě znalosti extremály můžeme vypočítat konkrétní hodnotu S. Hamiltonova-Jacobiho teorie je založena na "opačném"postupu. Umožňuje získat parciální diferenciální rovnici pro funkci $S = S(x, y_1, \dots, y_n, u_1 \dots, u_m)$, $m \le n$, jako obecné řešení jisté parciální diferenciální rovnice a z ní přímo určit rovnice extremál (řešení Eulerových resp. Eulerových kanonických rovnic).

Uvažujme o extremálách $(y_1(x), \dots, y_n(x))$ a $(\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x))$ pro dva blízké body $B = (x, y_1, \dots, y_n)$ a $\bar{B} = (x + \mathrm{d}x, y_1 + \mathrm{d}y_1, \dots, y_n + \mathrm{d}y_n)$. Pak (s využitím (3.8) a předpokladu, že jde o extremály) dostaneme

$$\Delta S = S(x + \mathrm{d}x, y_1 + \mathrm{d}y_1, \dots, y_n + \mathrm{d}y_n) - S(x, y_1, \dots, y_n) =$$

$$= J[\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)] - J[y_1(x), \dots, y_n x] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}S(x, y_1, \dots, y_n) = J_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i\,\mathrm{d}y_i - H\,\mathrm{d}x,$$

kde výraz je vypočten v bodě B. Odtud

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial y_i} = p_i = \frac{\partial F}{\partial y_i'} \;\Rightarrow$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H\left(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial y_n}\right) = 0. \tag{3.19}$$

Tato parciální diferenciální rovnice se nazývá *Hamiltonova-Jacobiho rovnice.* Podle teorie parciálních diferenciálních rovnic (např. [1]) představují kanonické rovnice tzv. *charakteristicý systém* asociovaný s rovnicí (3.19).

Věta 3.4 *Nechť*

$$S = S(x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_m)$$

je řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice, závislé na m parametrech $(u_1, \dots, u_m)$. Pak každý z výrazů $(\partial S/\partial u_i)$ je prvním integrálem pohybu Eulerových kanonických rovnic, je tedy konstatní podél extremály.

Vypočteme úplnou derivaci podle proměnné x studovaného výrazu.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial S}{\partial u_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial u_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial u_i}\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}x}.$$

Dosazením tohoto výrazu do (3.19) a derivováním podle u_i dostaneme

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u_i \partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial y_k \partial u_i}\left(\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial S}{\partial u_i}\right) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme o situaci podél extremál, je závorka nulová (jsou splněny Eulerovy kanonické rovnice). Odtud

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial S}{\partial u_i}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial u_i} = \text{konst.}$$

Věta 3.5 *Nechť* $S = S(x, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_n)$ *je úplný integrál Hamiltonovy-Jacobiho rovnice, tj. její obecné řešení, závislé na parametrech* $(u_1, \ldots, u_n)$*. Dále nechť* $\det\left(\partial^2 S/\partial u_i \partial y_k\right) \neq 0$*, a nechť* $(v_1, \ldots . v_n)$ *jsou libovolné konstanty. Pak funkce* $y_i = y_i(x, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m)$ *a* p_i *definované vztahy*

$$\frac{\partial}{\partial u_i} S(x, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_n) = v_i, \quad p_i = \frac{\partial}{\partial y_i} S(x, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_n)$$

tvoří obecné řešení soustavy rovnic

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Důkaz: Z výrazu pro v_i lze vypočítat n funkcí y_i, neboť determinant je nenulový. Pak můžeme definovat p_i. Dále je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial S}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial u_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial y_k \partial u_i}\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}.$$

Ale z Hamiltonovy-Jacobiho rovnice plyne, že

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial u_i} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial u_i}$$

Odtud

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial S}{\partial u_i}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial y_k \partial u_i}\left(\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial y_k \partial u_i}\left(\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right).$$

Tento výsledek můžeme chávat jako soustavu rovnic pro neznámé dané závorkami, s maticí danou druhými parciálními derivacemi funkce S. Determinant této matice je však podle předpokladu věty nulový a soustava má pouze triviální řešení. Dostáváme tak první sadu kanonických rovnic. Dále vypočteme

$$\mathrm{d}p_i = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial y_k \partial y_i} \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial y_k \partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

kde jsme využili první sadu kanonických rovnic. Pak, vezmeme-li v úvahu, že $p_i = (\partial S/\partial y_i)$ a diferencováním Hamiltonovy-Jacobiho rovnice dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial H}{\partial y_i},$$

cože je druhá sada kanonických rovnic.

Příklad 3.5 Nechť

$$J[y(x)] = \int_a^b f(y)\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že Hamiltonova-Jacobiho rovnice má tvar

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = f^2(y).$$

Její řešení a extremály mají tvar

$$S = ux + \int_{y(a)}^{y(b)} \sqrt{f^2(z) - u^2}\mathrm{d}z + v,$$

$$x - u \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{f^2(z) - u^2}} = \text{konst.}$$

Úloha 3.7 Zapište a řešte Hamiltonovu-Jacobiho rovnici pro funkcionál s integrandem $F = (y')^2$.

Kapitola 4

Obecnější variační úlohy

V této kapitole si všimneme obecnějších situací. Půjde jednak o situace, kdy hledáme extremálu funkcionálu nikoli mezi všemi křivkami jeho definičního oboru, ale pouze ve třídě křivek specifikovaných dodatečnou podmínkou – *vazební podmínkou.* Typickou úlohou tohoto typu je izoperimetrický problém, kdy hledáme křivku obepínající rovinnou plochu maximálního obsahu ve třídě křivek *dané délky.* Vazební podmínkou je v tomto případě zadaná délka křivky.

Další zobecnění bude spočívat v diskusi o funkcionálech vyšších řádů, tj, takových, jejichž integrandy závisí na vyšších derivacích hledaných funkcí $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ reprezentujících parametrické vyjádření prostorové křivky v n-rozměrném euklidovském prostoru.

4.1 Vázané stacionární úlohy

Tento odstavec se týká hledání extremál za určitých vazebních podmínek na ně kladených. Analogií pro případ funkcí je úloha o nalezení vázaných extrémů: Uvažujme například o funkci dvou proměnných $F = F(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)$. Nutné podmínky jejího extrému bez dodatečných požadavků (bez vazebních podmínek) jsou

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0.$$

Těmito podmínkami je určen bod $(x_0, y_0) = (0, 0)$, v němž má funkce maximum $F(0, 0) = 4$. Pokud požadujeme, aby souřadnice x a y nebyly nezávislé, ale splňovaly určitou vazební podmínku, například $x = 1$, jsou ve hře jen body, které tuto podmínku splňují, tj. body tvaru $(1, y)$. Platí $F(1, y) = 3 - y^2$. Tato funkce nabývá maximální hodnoty 3 pro $y = 0$. Bod $(1, 0)$ je tedy *vázaný extrém funkce* $F(x, y)$. V následujícím odstavci provedeme klasifikaci vazebních podmínek pro funkcionály.

4.1.1 Klasifikace vazebních podmínek

Uvažujme o funkcionálu $J[y_1(x), \dots, y_n(x)]$. Definiční obor tohoto funcionálu je tvořen parametrickými vyjádřeními křivek v n rozměrném prostoru, každý bod je tedy určen $n+1$ souřadnicemi $(x, y_1, \dots, y_n)$. Vazební podmínky mohou být obecně zadány k rovnicemi, $1 \leq k \leq n-1$.

$$f_1(x, y_1, \dots, y_n) = 0, \dots, f_k(x, y_1, \dots, y_n) = 0. \tag{4.1}$$

Vazba popsaná takovými podmínkami se nazývá *holonomní* (závisí pouze na souřadnicích y_1 až y_n a na proměnné x. V případě, že vazba na x explicitně nezávisí, jde o holonomní vazbu *skleronomní*. Jestliže na x explicitně závisí, je to holonomní vazba *rheonomní* (nezávisle proměnnou ve fyzice bývá často čas). Pokud je hodnost matice $(\partial f_\alpha / \partial y_j)$ maximální, tj. rovna k, lze k ze souřadnic vyjádřit jako explicitní funkce ostatních $(n-k)$:

$$y_{n-k+1} = g_1(x, y_1, \dots, y_{n-k}), \dots, y_n = g_k(x, y_1, \dots, y_{n-k}). \tag{4.2}$$

V případě, že vazební podmínky závisí také na derivacích parametrického vyjádřeni křivek, tj.

$$f_1(x, y_1, \dots, y_n, y_l' \dots, y_n') = 0, \dots, f_k(x, y_1, \dots, y_n, y_l' \dots, y_n') = 0, \tag{4.3}$$

$1 \leq k \leq n-1$, hovoříme o vazbě *neholonomní*. V tomto textu se budeme zabývat výhradně vazbami holonomními.

4.1.2 Izoperimetrický problém

Připomeňme formulaci izoperimetrického problému (viz Příklad 2.8): Úkolem je nalézt uzavřenou křivku $x = x(t)$, $y = y(t)$ dané délky, která obepíná maximální plochu. Plochu udává funkcionál

$$J[x(t), y(t)] = \int_{\mathcal{C}} x \, \mathrm{d}y = \int_a^b x y' \, \mathrm{d}t, \quad x(a) = x(b), \; y(a) = y(b)$$

délka křivky je určena integrálem

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t))^2}.$$

Řešíme tedy prostorovou úlohu (dvě neznámé funkce $x(t)$ a $y(t)$). Zobecníme tento problém na obecný funkcionál $J[y(x)]$, ale prozatím pro jednu neznámou funkci $y = y(x)$, vazební podmínka přitom bude dána rovněž obecným funkcionálem $K[y(x)]$.

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') \, \mathrm{d}x, \quad y(a) = A, \; y(b) = B \tag{4.4}$$

$$K[y(x)] = \int_a^b G(x, y, y')\,\mathrm{d}x = \ell. \tag{4.5}$$

Předpokládejme spojitost prvních a druhých derivací funkcí F a G pro libovolné hodnoty y a y'.

Věta 4.1 *Nechť je dán funkcionál (4.4) a nechť přípustné křivky splňují podmínky $y(a) = A$, $y(b) = B$ a (4.5). Nechť $J[y(x)]$ má extrém pro $y_0(x)$. Nechť $y_0(x)$ není extremála funkcionálu $K[y(x)]$. Pak existuje konstanta λ tak, že $y_0(x)$ je extremála funkcionálu*

$$\int_a^b (F + \lambda G)\,\mathrm{d}x,$$

tj. je řešením rovnice

$$\left(F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x}\right) + \lambda\left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right) = 0. \tag{4.6}$$

Důkaz: Nechť $y_0(x)$ je extremála funkcionálu $J[y(x)]$ za předpokladu splnění podmínky (4.5). Zvolme dva zatím libovolné body x_1 a x_2 v intervalu $[a, b]$. Zvolme funkci $y(x) = y_0(x) + \delta u_1(x) + \delta u_2(x)$, přičemž variace $\delta u_1(x)$ resp. $\delta u_2(x)$ jsou nenulové jen v jistém ε_1-okolí $\mathcal{O}_1$ bodu x_1 resp. ε_2-okolí $\mathcal{O}_2$ bodu x_2. Pak (viz úpravy per partes při odvození Eulerovy rovnice) užijeme věty o střední hodnotě:

$$\Delta J = \int_a^b \left(F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)(\delta u_1(x) + \delta u_2(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{\xi_1}\sigma_1 + \left(F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{\xi_2}\sigma_2,$$

kde $\xi_1 \in \mathcal{O}_1$, $\xi_2 \in \mathcal{O}_2$,

$$\sigma_1 = \int_a^b \delta u_1(x)\,\mathrm{d}x \quad \sigma_2 = \int_a^b \delta u_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

přičemž pro σ_1, $\sigma_2 \to 0$ je $\xi_1 \to x_1$, $\xi_2 \to x_2$. Vazební podmínka (4.5) znamená, že pro $y(x) = y_0(x) + \delta u_1(x) + \delta u_2(x)$ je $K[y_0(x)] = K[y(x)]$, tj.

$$\Delta K = \int_a^b \left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)(\delta u_1(x) + \delta u_2(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{\eta_1}\sigma_1 + \left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{\eta_2}\sigma_2 = 0,$$

kde obdobně pro σ_1, $\sigma_2 \to 0$ je $\eta_1 \to x_1$, $\eta_2 \to x_2$. Dosud byly body x_1 a x_2 libovolné. Nyní omezme možnost volby bodu x_2 tak, aby

$$\left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{x_2} \neq 0.$$

Tato volba je možná, protože podle předpokladu věty není $y_0(x)$ extremálou funkcionálu $K[y(x)]$. Ze spojitosti pak plyne, že tato hodnota bude nenulová i na jistém okolí bodu x_2. Pak z podmínky $\Delta K = 0$ plyne

$$\sigma_2 = -\sigma_1 \left[\frac{\left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{\eta_1}}{\left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{\eta_2}}\right] \Rightarrow \sigma_2 = -\sigma_1 \left[\frac{\left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{x_1}}{\left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{x_2}} + \varepsilon\right],$$

přičemž pro $\sigma_1 \to 0$ je $\varepsilon \to 0$. Položme

$$\lambda = -\frac{\left(F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{x_1}}{\left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{x_2}} \tag{4.7}$$

Pak

$$J_1 = \left[\left(F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{x_1} + \lambda\left(G_y - \frac{\mathrm{d}G_{y'}}{\mathrm{d}x}\right)|_{x_1}\right]\sigma_1.$$

Vzhledem k tomu, že x_1 je libovolné, je obecně $\sigma_1 \neq 0$, takže podmínka $J_1 = 0$ vede k Eulerově rovnici funkcionálu $F + \lambda G$, tj. platí vázaná rovnice (4.6).

Zobecnění na více neznámých funkcí a vazebních podmínek vede k rovnicím

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(F + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j G_j\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial}{\partial y_i'}\left(F + \sum_{j=1}^{k} G_j\right)\right] = 0, \quad j = 1, \dots, k. \tag{4.8}$$

Konstanty $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ se nazývají *Lagrangovy multiplikátory*.

Příklad 4.1 Dořešíme nyní izoperimetrický problém. V tomto případě je

$$F(t, x, y, x', y') = xy', \quad G(t, x, y, x', y') = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}.$$

Eulerovy rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial x}(F + \lambda G) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x'}(F + \lambda G) = y' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F + \lambda G) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y'}(F + \lambda G) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}\right] = 0,$$

Odtud integrací

$$y = \lambda\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + K_2, \quad x = -\lambda\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + K_1 \Rightarrow$$

$$(x-K_1)^2+(y-K_2)^2=\lambda^2 \;\Rightarrow\; x=K_1+\lambda\cos t,\;\; y=K_2+\lambda\sin t.$$

hledaná křivka je tedy kružnicí. Její poloměr λ je dán hodnotou funkcionálu

$$K[x(t),y(t)]=\int_a^b \lambda\,\mathrm{d}t=\lambda(b-a)=2\pi\lambda=\ell\Rightarrow\lambda=\frac{\ell}{2\pi}.$$

4.2 Variační úlohy vyššího řádu

O variační úloze vyššího řádu hovoříme v případě, že integrand funkcionálu závisí na vyšších derivacích neznámých funkcí $y_1(x)$ až $y_n(x)$. Typickými úlohami vyššího řádu jsou úlohy z oblasti teorií pole, například teorie pružnosti. V takových případech ovšem hledané funkce závisí na více proměnných (na časové proměnné a prostorových souřadnicích), v některých specálních případech je však lze převést na úlohy pro nalezení neznámých funkcí jedné proměnné. Takovými úlohami se budeme zabývat v tomto odstavci.

4.2.1 Funkcionál vyššího řádu a jeho Eulerova rovnice

Hledáme stacionární body funkcionálu

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',\dots,y^{(k)})\,\mathrm{d}x \tag{4.9}$$

za podmínek

$$y(a)=A_0,\;\; y'(a)=A_1,\dots,y^{(k-1)}(a)=A_{k-1},$$

$$y(b)=B_0,\;\; y'(b)=B_1,\dots,y^{(k-1)}(b)=B_{k-1}$$

a za předpokladu, že funkce $F(x,y,y',\dots,y^{(k)})$ je spojitá se všemi parciálními derivacemi až do řádu $k+1$ včetně podle všech argumentů. Nechť $k=2$ a uvažme případ s pevnými konci. Pak definice (4.9) má tvar

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',y'')\,\mathrm{d}x$$

Uvažujme o křivkách $y(x)$ a $\bar{y}(x)=y(x)+\varepsilon u(x)$, které spojují pevné konce $A(a,A_0)$ a $B(b,B_0)$ a mají v těchto bodech společné tečny, tj. $u(a)=u(b)=0$, $u'(a)=u'(b)=0$. Pracujeme s normou

$$||y(x)||_2=\max|y(x)|+\max|y'(x)|+\max|y''(x)|.$$

$$\Delta J = J[\bar{y}(x)]-J[y(x)] = \int\limits_a^b F(x,y(x)+\varepsilon u(x),y'(x)+\varepsilon u'(x),y''(x)+\varepsilon u''(x))\,\mathrm{d}x-$$

$$-\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x),y''(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \varepsilon \int\limits_a^b (F_y u(x) + F_{y'}u'(x) + F_{y''}u''(x))\,\mathrm{d}x + \varepsilon^2\,[\ldots]\,.$$

$$J_1 = \int\limits_a^b (F_y u(x) + F_{y'}u'(x) + F_{y''}u''(x))\,\mathrm{d}x = 0.$$

Integrací per partes dostáváme

$$\int\limits_a^b F_{y'}u'(x)\,\mathrm{d}x = F_{y'}u(x)|_a^b - \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x}u(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\limits_a^b F_{y''}u''(x)\,\mathrm{d}x = F_{y''}u'(x)|_a^b - \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}F_{y''}}{\mathrm{d}x}u'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{\mathrm{d}F_{y''}}{\mathrm{d}x}u(x)|_a^b + \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}^2F_{y''}}{\mathrm{d}x^2}u(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$J_1 = \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2F_{y''}}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Vzhledem k libovolnosti $u(x)$ je nutnou podmínkou stacionárnosti požadavek, aby funkce $y(x)$ byla řešením *Eulerovy rovnice*

$$F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2F_{y''}}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{4.10}$$

Předchozí výpočet lze zobecnit na libovolný řád k, platí tedy věta

Věta 4.2 Je-li funkce $y(x) \in \mathcal{D}_n[a,b]$, extremálou funkcionálu (4.9), pak

$$\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(\ell)}}\right) = 0 \tag{4.11}$$

Rovnice obsahuje derivace neznámé funkce do řádu $2k$, je tedy obecně $2k$-tého řádu.

4.2.2 Snížení řádu

V některých speciálních případech integrandu F se řád rovnice sníží.

(1) F nezávisí explicitně na y**.** Pak Eulerova rovnice má tvar

$$\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell}\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(\ell)}}\right)=0 \Rightarrow \sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^{\ell-1}\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(\ell+1)}}\right)=0$$

(2) F nezávisí explicitně na x**.** Provedeme záměnu proměnných tak, že y budeme považovat ze nezávisle proměnnou a x za závisle proměnnou. Pak

$$y'=\frac{1}{x'},\ y''=-\frac{x''}{(x')^3},\ y'''=\dots$$

$$J=\int\limits_{y(a)}^{y(b)} F\left(y,\frac{1}{x'},-\frac{x''}{(x')^3},\dots\right)x'\,\mathrm{d}y.$$

Situace je tedy převedena na případ funkcionálu s intergrandem nezávislým na hledané funkci $x(y)$. Problém se tak převádí na přechozí případ.

(3) F **závisí jen na** $y^{(k)}$**.** Eulerova rovnice má tvar

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)=0.$$

Pak

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}=P_{k-1}(x),$$

kde $P_{k-1}(x)$ je polynom k-tého stupně.

4.2.3 Ohyb nosníku

Do válcových otvorů A a B jsou vetknuty konce válcového homogenního nosníku. Chceme určit tvar osy prohnutého nosníku. Ve statické stabilní rovnováze je potenciální energie minimální. Potenciální energii vyjádříme funkcionálem

$$U=\frac{1}{2}\mu\int\limits_0^L\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2\mathrm{d}s+\int\limits_0^{\ell}\varrho yg\,\mathrm{d}s,$$

kde L je délka části nosníku mezi podpěrami, φ je úhel, který svírá tečna k ose nosníku v místě s (měřeno podél oblouku) s s osou x, μ je konstanta závislá na modulu pružnosti a momentu setrvačnosti příčného průřezu nosníku, ϱ je lineární hustota nosníku, g tíhové zrychlení. První člen představuje potenciální energii pružnosti, druhý potenciální energii tíhovou. Platí

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2},\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = y' \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = y'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = y''\cos^2\varphi = \frac{y''}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{y''}{1+(y')^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

Je tedy

$$U = \int\limits_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{2}\mu\frac{y''}{(1+(y')^2)^{5/2}} + \varrho g y\sqrt{1+(y')^2}\right)\mathrm{d}x,$$

kde 2ℓ je délka neprohnutého nosníku (vzdálenost podpěr). Integrand nezávisí na x. Při malých ohybech nosníku lze přibližně psát

$$U = \int\limits_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{2}\mu(y'')^2 + \varrho g y\right)\mathrm{d}x.$$

Eulerova rovnice je

$$\varrho g + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\mu y'') = 0 \Rightarrow y^{(4)} = -\frac{\varrho g}{\mu}.$$

$$y(x) = -\frac{\varrho g}{24\mu}x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Integrační konstanty se určí z podmínek symetrie ($\alpha = \gamma = 0$) a podmínek v koncových bodech $y(-\ell) = y(\ell)$, $y'(-\ell) = y'(\ell)$. Odtud

$$y = \frac{\varrho g}{24\mu}\left(-x^4 + 2\ell^2x^2 - \ell^4\right).$$

Kapitola 5

Úlohy k rozpravě

Kolokvium bude vedeno jako rozprava o problematice variačního počtu. Základem rozpravy budou náměty na postup řešení následujících úloh.

Kolokviální úloha 1.

Pro zadanou funkci $f(x)$ je definován funkcionál

$$J[y] = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Zapište jeho Eulerovu rovnici a řešte ji.

(b) Rozeberte speciální případy $f(x) = \sqrt{x}$ a $f(x) = x$.

(c) Jaký je geometrický význam funkcionálu pro případ, že $f(x)$ není funkce zadaná, ale hledaná, tj.

$$J[y(x)] = \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x?$$

(d) Řešte úlohu také pro tento případ.

Kolokviální úloha 2.

Uvažujme o funkcionálu

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x.$$

Hledejme řešení stacionární úlohy nikoli ve tvaru $y = y(x)$, ale v obecném parametrickém tvaru $x = x(t)$, $y = y(t)$.

(a) Přepište funkcionál $J[y]$ do tvaru tomu odpovídajícímu, tj.

$$\bar{J}[x(t), y(t)] = \int_{?}^{?} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, \mathrm{d}t,$$

kde $\dot{x}$ resp. $\dot{y}$ značí derivaci funkce $x(t)$ resp. $y(t)$ podle parametru t.

(b) Proč funkce Φ nezávisí explicitně na parametru?

(c) Dokažte, že funkce Φ je tzv. *pozitivně-homogenní stupně 1*, tj. pro libovolné $\lambda > 0$ je

$$\Phi(x, y, \lambda\dot{x}, \lambda\dot{y}) = \lambda\Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}).$$

Zdůvodněte požadavek $\lambda > 0$. Vymyslete nějaký příklad pozitivně-homogenní funkce stupně 1.

(d) Ukažte, že parametrizace nemá vliv na řešení úlohy. Přejděte k jiné parametrizaci pomocí prosté funkce $t = t(\tau)$ a vyjádřete odpovídající funkcionál v proměnné τ.

(e) Zapište Eulerovy rovnice funkcionálu $\bar{J}[x(t), y(t)]$. Jsou ekvivalentní jedné Eulerově rovnici původního funkcionálu. Ukažte, že platí

$$\dot{x}\left(\Phi_x - \frac{\mathrm{d}\Phi_{\dot{x}}}{\mathrm{d}t}\right) + \dot{y}\left(\Phi_y - \frac{\mathrm{d}\Phi_{\dot{y}}}{\mathrm{d}t}\right) = 0.$$

Kolokviální úloha 3.

Je zadán funkcionál

$$J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + (y')^2}\, \mathrm{d}x.$$

(a) Napište jeho Eulerovu rovnici a hledejte extremály.

(b) Napište odpovídající kanonické rovnice - nejprve dokažte, že

$$H(x, y, p) = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}.$$

(c) Najděte první integrál kanonických rovnic.

Kolokviální úloha 4.

Uvažujme o částici pohybující se v rovině (xy). Na částici působí centrální přitažlivá síla (směřuje k počátku soustavy souřadnic), jejíž velikost je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti částice od počátku. Princip nejmenší akce ve tvaru

$$J = \int_a^b L(t, x, y)\, \mathrm{d}t = \int_a^b (E_{\mathrm{kin}} - E_{\mathrm{pot}})\, \mathrm{d}t \quad \text{je stacionarni}$$

vede k pohybovým rovnicím.

(a) Zapište přílušný funkcionál $J[r, \theta]$ v polárních souřadnicích (r, θ).

(b) Zapište odpovídající Eulerovy rovnice.

(c) Vypočtěte Poissonovy závorky $[r, p_r]$, $[\theta, p_\theta]$, $[p_r, H]$, $[p_\theta, H]$.

(d) Zapište odpovídající kanonické rovnice.

(e) Dokažte, že funkcionál $J[r, \theta]$ je invariantní vzhledem k rotacím a pomocí teorému Noetherové nalezněte odpovídající zákon zachování.

Kolokviální úloha 5.

Pokuste se o zobecnění základní úlohy: Je dán funkcionál

$$J[z(x,y)] = \int\int_{\mathrm{R}} F(x, y, z, z_x, z_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde R je uzavřená oblast (uzavřená souvislá množina) a z_x a z_y jsou parciální derivace funkce $z(x,y)$ podle x a y. Označte $\bar{z}(x,y) = z(x,y) + \varepsilon u(x,y)$. V analogii s úlohou s pevnými konci předpokládejte, že funkce $u(x,y) = 0$ na hranici $\mathcal{C} = \partial\mathrm{R}$ oblasti R.

(a) Vyjádřete změnu funkcionálu $\Delta J = J[\bar{z}] - J[z]$ a ukažte, že první variace má tvar

$$J_1 = \int\int_{\mathrm{R}} \left(F_z\,u + F_{z_x}\,u_x + F_{z_y}\,u_z\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(b) Ukažte s použitím klasické Greenovy věty, že platí

$$\int\int_{\mathrm{R}} \left(F_{z_x}\,u_x + F_{z_y}\,u_y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int\int_{\mathrm{R}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{z_x}\,u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{z_y}\,u_y)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int\int_{\mathrm{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}\right) u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \left(F_{z_x}\,u\,\mathrm{d}y - F_{z_y}\,u\,\mathrm{d}x\right) - \int\int_{\mathrm{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}\right) u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Využijte předpokladu, že $u(x,y)|_{\mathcal{C}} = 0$, a dokažte Eulerovu rovnici

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y} = 0$$

jako nutnou podmínku extremály.

(b) Aplikujte předchozí výsledek na funkcionál

$$J[z] = \int\int_{\mathrm{R}} \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Jaký je geometrický význam přechozího funkcionálu?

Kolokviální úloha 6.

Mezi křivkami ležícími na sféře $x^2+y^2+z^2=a^2$ a spojujícími dva zadané body $A=(x_A,y_A,z_A)$ a $x_B,y_B,z_B)$ najděte tu, která má nejmenší délku.
(a) Ukažte, že funkcionál vyjadřující délku křivky má tvar

$$J[y(x),z(x)]=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Rovnice sféry představuje vazební podmínku. Zapište odpovídající Eulerovy rovnice pro extremály a Lagrangeův multiplikátor $\lambda(x)$.

Kolokviální úloha 7.

Stacionární body funkcionálu $J[y(x)]$ s integrandem

$$F(y,y')=\frac{1}{2}a(y)(y')^2-U(y)$$

vyhovují principu nejmenší akce pro jednorozměrný pohyb částice s "hmotností"$a(y)$. Všimněte si, že integrand F nezávisí na nezávisle proměnné x (v mechanice časová proměnná), převeďte jej na funkcionál s integrandem $G(y,x')$ a najděte integrál pohybu E. Dokažte, že

$$(x')^2=\frac{2}{a(y)}\left[E-U(y)\right].$$

Z předchozího plyne, že přípustné hodnoty funkce $y(x)$ musí za předpokladu, že $a(y)$ je kladná funkce, vyhovovat požadavku $E\geq U(y)$. Předpokládejte, že rovnost je splněna pro dvě mezní hodnoty y_m a y_M. Dokažte, že pohyb popsaný funkcí $y(x)$ je periodický a vyjádřete jeho periodu. Aplikujte výsledek na matematické kyvadlo o hmotnosti m a délce závěsu ℓ, při označení $x=t$ (čas), $y=\varphi$ (úhlová výchylka), $U(\varphi)=-mg\ell\cos\varphi$, $E=-mg\ell\cos\varphi_{\max}$. Výraz pro periodu vede na eliptický integrál. Dopočtěte jej pro malé úhlové výchylky v první aproximaci rozvoje podle úhlové výchylky.

Literatura

[1] Courant R., Hilbert D.: Methods of Mathematical Physics. Vol II, Interscience, Inc., New York, 1962.

[2] Gelfand I. M., Fomin S. V.: Calculus of Variations. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2000. (Překlad z ruského originálu, 1. vydání 1963.)

[3] Lavrentjev M. A., Ljusternik L. A.: Kurs variačního počtu. Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952. (Překlad z ruského originálu, 1. vydání 1950.)

[4] Krupková O.: The Geometry of Ordinary Variational Equations. Lecture Notes in Mathematical Physics 1678. Springer, 1997.

[5] Musilová J., Musilová P.: Matematika pro porozumění i praxi I. VUTIUM, Brno, 2006.

[6] Slavíček J., Musilová J.: Brachistochrona – problém stále živý. Čs. čas. fyz. A **xx** (2003), 5, 400-412.