Základní matematické metody ve fyzice 2

Téma 1: Plošný integrál prvního druhu

Obsah tématu

1. Stručné opakování – dvojný Riemannův integrál
2. Plochy v $\mathbb{R}^3$ a jejich parametrizace.
3. Souřadnicové křivky na ploše.
4. Plošný element.
5. Plošný integrál z funkce v $\mathbb{R}^3$ (integrál prvního druhu).
6. Geometrické a fyzikální charakteristiky plošných útvarů.
7. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi III/1, VUTIUM, Brno 2018 (strany 59-74, 92-106, 118-131).

Stručné opakování – dvojný integrál

Dvojný a trojný integrál jsme důkladně probrali ještě na přednáškách. Abyste se po jisté přestávce snadněji vpravili do problematiky, zopakujeme dvě hlavní věty, které budeme dále potřebovat. Z praktických důvodu je uvedeme se silnějšími předpoklady, než které figurují v obecných verzích.

Ještě před tím si však zkuste vybavit základní pojmy, které jsme si v přednášce podrobně vyložili:

- dělení D obdélníka $K = [a, b] \times [c, d]$ a jeho zjemnění,
- Darbouxovy součty $L(f, D)$, $U(f, D)$ pro funkci $f(x, y)$ (definovanou a ohraničenou na K) a dělení D,
- integrabilita a Riemannův integrál z funkce f na K,
- první a druhé kritérium integrability.

Některé z dalších potřebných pojmů

- vnitřek, vnějšek, hranice množiny, zanedbatelná množina,
- charakteristická funkce množiny,
- jordanovsky měřitelná množina.

VĚTA: Fubiniova věta pro obdélník

Předpokládejme, že funkce
$f : K = [a, b] \times [c, d] \ni (x, y) \to f(x, y) \in \mathbb{R}$ je spojitá. Pak je integrace schopna a platí

$$\int_K f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

Pro formulaci obecnější verze Fubiniovy věty připomeňme pojem jordanovsky měřitelné množiny. Je to ohraničená množina (vejde se do obdélníku) se zanedbatelnou hranicí, tj. takovou, že ji lze pokrýt otevřenými kvádry o celkovém plošném obsahu menším než předem libovolně zvolené číslo. Dále připomeňme, že pro množinu $A \subset K$, $K = [a, b] \times [c, d]$, jsme definovali její charakteristickou funkci χ_A, pro niž je $\chi_A(x, y) = 1$, je-li $(x, y) \in A$, resp. $\chi_A(x, y) = 0$, je-li $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$.

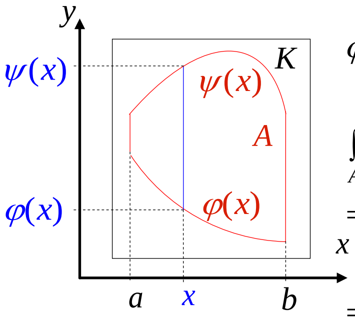
Zobecněním integrálu pak rozumíme integrál

$$\int\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_K f(x, y)\,\chi_A(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

při jehož výpočtu lze uplatnit Fubiniovu větu.

PŘÍKLAD: Aplikace Fubiniovy věty na obecnější jordanovsky měřitelnou množinu

Typická situace je na obrázku. Vzhledem k definici charakteristické funkce množiny A vede Fubiniova věta k násedujícímu výpočtu:



$$\varphi(x), \psi(x) \text{ spojité }, \varphi(x) \leq \psi(x)$$

$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_K f(x,y)\,\chi_A(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

VĚTA: Věta o transformaci integrálu

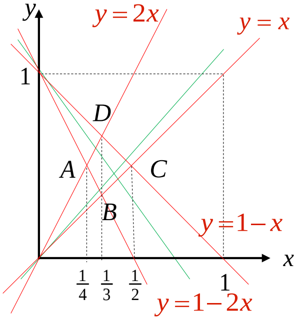
Předpokládejme, že $A \subset K \subset \mathbb{R}^2$ je jordanovsky měřitelná množina a zobrazení

$$\alpha : K \ni (u, v) \longrightarrow \alpha(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}$$

je na A vzájemně jednoznačné a spojitě diferencovatelné (parciální derivace prvního řádu jsou spojité). Dále nechť funkce $f : K \ni (x, y) \to f(x, y) \in \mathbb{R}$ je spojitá na množině $\alpha(A)$. Pak platí

$$\int\limits_{\alpha(A)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{A} (f \circ \alpha)(u, v) \det D\alpha(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

PŘÍKLAD: Aplikace Fubiniovy věty a věty o transformaci



$$A = \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right],\ B = \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right],$$
$$C = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right],\ D = \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right]$$

$$\int_{1/4}^{1/3} \left(\int_{1-2x}^{2x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{1/3}^{1/2} \left(\int_{x}^{1-x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$y = ux,\ \ y - vx$$

Určíme obsah čtyřúhelníka na obrázku pomocí Fubiniovy věty i věty o transformaci – počítejte společně na papír (integrovaná funkce je $f(x, y) = 1$):

Pomocí Fubiniovy věty: Nejprve je třeba vypočítat souřadnice průsečíků křivek, které ohraničují množinu A (jejich rovnice jsou v obrázku zapsány). Součástí obrázku je také začátek výpočtu Fubiniovou větou při vnitřní integraci podle y a vnější podle x. Dopočtěte. Provedeme integraci v opačném pořadí:

$$\int_{1/3}^{1/2} \left(\int_{(1-y)/2}^{y} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_{y/2}^{1-y} \left(\int_{y/2}^{1-y} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= y - \frac{1-y}{2} \Big|_{1/3}^{1/2} + 1 - y - \frac{y}{2} \Big|_{1/2}^{2/3} = \dots \text{dopočtěte} \dots = \frac{1}{24}$$

Pomocí věty o transformaci: Obecný bod množiny A lze popsat jako průsečík přímek o rovnicích $y = ux$, $u \in [1, 2]$, a $y = 1 - vx$, $v \in [1, 2]$ (v obrázku jsou vyznačeny zeleně). Vyřešením těchto rovnic dostaneme rovnice zobrazení α a určíme jeho Jacobiho matici $D\alpha(u, v)$ a jakobián $J(u, v) = \det D\alpha(u, v)$:

$$x(u, v) = \frac{1}{u + v}, \quad y(u, v) = \frac{u}{u + v},$$

$$D\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(u+v)^2} & -\frac{v}{(u+v)^2} \\ \\ -\frac{1}{(u+v)^2} & -\frac{u}{(u+v)^2} \end{pmatrix}, \quad J(u, v) = \frac{1}{(u + v)^3}$$

Výpočet již dokončete sami a porovnejte s výsledkem získaným pomocí Fubiniovy věty.

Plochy v $\mathbb{R}^3$ a jejich parametrizace

Pod pojmem „plocha“ má jistě každý uloženou určitou geometrickou představu (rovina, kulová plocha, sedlová plocha, ...). Jednoduše řečeno, jsou to dvojrozměrné útvary v trojrozměrném euklidovském prostoru, vyznačující se předepsanými vlastnostmi. Abychom tuto představu trochu formalizovali, použijeme pojmu *zobrazení*.

DEFINICE: Parametrizovaná plocha

Předpokládejme, že $A \subset \mathbb{R}^2$ je jordanovsky měřitelná množina (v nejjednodušším případě to bude obdélník $A = [a, b] \times [c, d]$) a zobrazení

$$S: A \ni (u, v) \longrightarrow S(u, v) \in \mathbb{R}^3$$

je vzájemně jednoznačné a vzájemně diferencovatelné. Toto zobrazení se nazývá parametrizovaný kousek plochy v $\mathbb{R}^3$. Je-li zobrazení S diferencovatelné a hodnost jeho Jacobiho matice je v každém bodě definičního oboru rovna 2, nazýváme je parametrizovaná plocha v $\mathbb{R}^3$.

Předpoklady můžeme ještě posílit tak, že budeme požadovat, aby zobrazení S bylo hladké, tj. tolikrát diferecovatelné, kolikrát potřebujeme.

PŘIPOMÍNKA: Vzpomenete si, co je to Jacobiho matice nějakého zobrazení? Připomeňme si to pro naše zobrazení S. Rovnice zobrazení S jsou

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

nebo puntičkářsky přesně, aby bylo vidět, o které zobrazení se jedná, pokud pracujeme i s jinými,

$$x = xS(u, v), \quad y = yS(u, v), \quad z = zS(u, v).$$

Jacobiho matice zobrazení S je matice tvořená parciálními derivacemi složek zobrazení S,

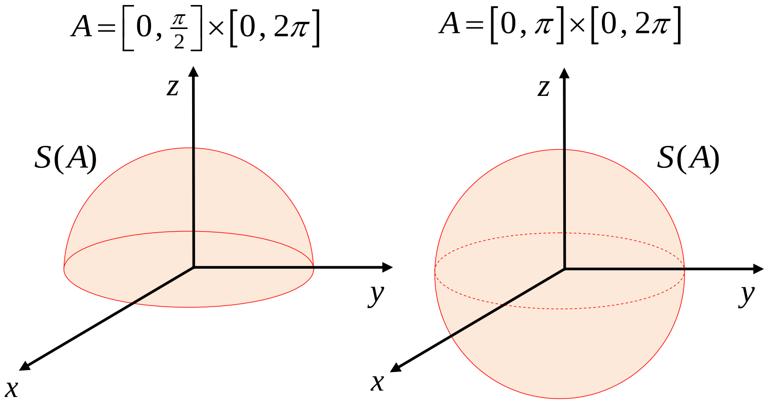
$$DS(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

TERMINOLOGIE: Přijdete na to, jaký je rozdíl mezi parametrizovaným kouskem plochy a parametrizovanou plochou? Tak třeba parametrizovaná plocha může sama sebe protnout, nebo typicky - může být uzavřená, parametrizovaný kousek plochy nikoli.

PŘÍKLAD: Uvažujme o zobrazení o rovnicích

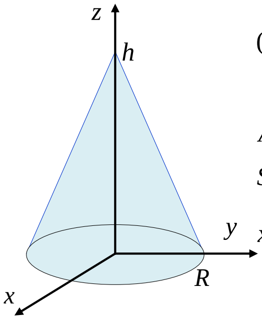
$$x = R\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = R\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = R\cos\vartheta.$$

ale o dvou jeho různých definičních oborech: a) $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$, b) $A = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Množinou $S(A)$ je v prvním případě polovina kulové plochy, v druhém případě celá kulová plocha o poloměru R – viz obrázek na dalším snímku.



Vlevo obraz parametrizovaného kousku kulové plochy, vpravo obraz celé kulové plochy

PŘÍKLAD: Zamysleme se, jak bychom mohli parametrizovat rotační kuželovou plochu, jejíž podstava (poloměr R) leží v souřadicové rovině xy, její osou je souřadnicová osa z a výška je h.



$$(z-h)^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2), \quad 0 \le z \le h$$

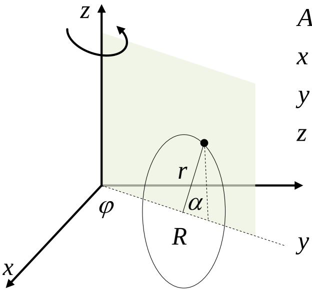
$$A = [0, R] \times [0, 2\pi]$$

$$S : A \ni (r, \varphi) \to (x, y) \in \mathrm{R}^3$$

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi, \;\; z = h\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Pro kuželovou plochu s eliptickou podstavou o poloosách a, b použijeme zobecněné polární souřadnice r a φ $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, $r \in [0, 1]$.

PŘÍKLAD: Poněkud méně tradiční příklad plochy vidíme na obrázku. Je to povrch anuloidu. Vzniká rotací svisle položené kružnice kolem osy z.



$$A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$
$$x = (R + r\cos\alpha)\cos\varphi$$
$$y = (R + r\cos\alpha)\sin\varphi$$
$$z = r\sin\alpha$$

Poloha středu kružnice a její poloměr jsou zřejmé z obrázku. Plochu parametrizujeme dvěma úhly, azimutálním úhlem φ a úhlem α určujícím polohu bodu na rotující kružnici.

CVIČENÍ: Pro parametrizované plochy z předchozích příkladů (kulová, kuželová, eliptická kuželová, anuloid) vypočtěte Jacobiho matice.

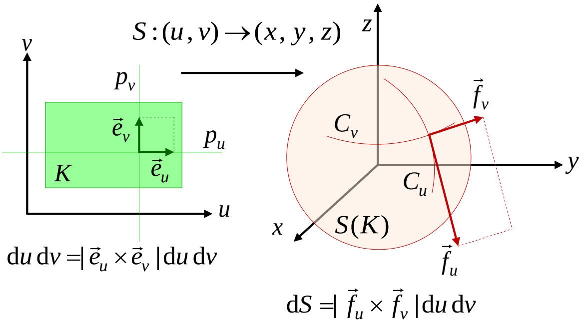
Výsledek pro anuloid a eliptickou kuželovou plochu (pro ni je třeba dopočítat $z = z(r, \varphi)$:)

$$DS(\varphi, \alpha) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\alpha)\sin\varphi & (R + r\cos\alpha)\cos\varphi & 0 \\ -r\sin\alpha\cos\varphi & -r\sin\alpha\sin\varphi & r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$DS(\varphi, \alpha) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi & -1 \\ -ar\sin\varphi & br\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Souřadnicové křivky na ploše

Uvažujme o parametrizovaném kousku plochy, resp. parametrizované ploše, jak jsme je zavedli v předchozím odstavci a sledujme obrázek.



Obecný bod definičního oboru parametrizace, (u, v) je průsečíkem souřadnicových přímek $p_u: \; v = \mathrm{konst}$ a $p_v: \; u = \mathrm{konst}$. Jejich obrazy zobrazením S jsou souřadnicové křivky C_u a C_v. Podél křivky C_u se mění parametr u a v zůstává konstantní, podél křivky C_v je tomu naopak.

PŘÍKLAD: Souřadnicové křivky na kulové ploše

Standardní parametrizace kulové plochy o poloměru R využívá sférických souřadnic:

$$S: \; [0, \pi] \times [0, 2\pi] \ni (\vartheta, \varphi) \longrightarrow (x(\vartheta, \varphi), y(\vartheta, \varphi), z(\vartheta, \varphi)) \in \mathbb{R}^3,$$

$$x = R \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = R \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = R \cos\vartheta.$$

Souřadnicové křivky procházející bodem (x_0, y_0, z_0), kde $(x_0, y_0, z_0) = S(\vartheta_0, \varphi_0)$, mají parametrické rovnice

$$C_\vartheta : [0, \pi] \longrightarrow (R \sin\vartheta \cos\varphi_0, R \sin\vartheta \sin\varphi_0, R \cos\vartheta),$$

$$C_\varphi : [0, \pi] \longrightarrow (R \sin\vartheta_0 \cos\varphi, R \sin\vartheta_0 \sin\varphi, R \cos\vartheta_0).$$

Každou z nich lze také zapsat pomocí dvojice kartézských rovnic:

$$C_\vartheta : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad y = x \tan\varphi_0,$$

$$C_\varphi : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,, \quad z = R \cos\vartheta_0.$$

Obě souřadnicové křivky jsou kružnice. Křivka C_ϑ je geografický poledník, je průsečnicí kulové plochy a roviny procházející osou z, která svírá s rovinou xz úhel φ_0. Křivka C_φ je geografická rovnoběžka, je průsečnicí kulové plochy a roviny $z = z_0$.

POZNÁMKA: Zamysleme se nad geometrickým významem Jacobiho matice zobrazení S, o níž jsme se již zmínili. Její řádky reprezentují vyjádření tečných vektorů k souřadnicovým křivkám, konkrétně

$$\vec{f}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \vec{f}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

kde $\vec{f}_u$, resp. $\vec{f}_v$ je tečný vektor ke křivce C_u, resp. C_v (viz předchozí obrázek.) Představě možná napomůže analogie s mechanikou: kdyby třeba u byl čas, představovala by křivka C_u trajektorii hmotného bodu a vektor $\vec{f}_u$ jeho rychlost.

Nezapomeňte si všimnout, že trojice složek tečných vektorů $\vec{f}_u$ a $\vec{f}_v$ tvoří řádky Jacobiho matice zobrazení S.

Plošný element

Z vektorové algebry známe geometrickou interpretaci vektorového součinu vektorů v trojrozměrném prostoru. Velikost vektoru $\vec{a} \times b$ je totiž číselně rovna plošnému obsahu rovnoběžníka, jehož orientovanými stranami jsou právě vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$. V souladu s touto představou vytvoříme plošný element na ploše S.

Plošný element v souřadnicích u a v je tvořen ortonormálními vektory $\vec{e}_u$ a $\vec{e}_v$ (viz obrázek výše), tj.

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = |\vec{e}_u \times \vec{e}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

neboť $|\vec{e}_u \times \vec{e}_v| = 1$. Plošný element na ploše S pak je

$$\mathrm{d}S = |\vec{f}_u \times \vec{f}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Pomůcka: Jiné vyjádření plošného elementu

Počítání složek vektorového součinu může být docela nepohodlné. Často je jednodušší využít součinu skalárního, zvlášť když jsou souřadnicové křivky kolmé. Ale jak? Počítejte (na papír):

$$|\vec{f}_u \times \vec{f}_v|^2 = |\vec{f}_u|^2 |\vec{f}_v|^2 \sin^2 \alpha = |\vec{f}_u|^2 |\vec{f}_v|^2 - |\vec{f}_u|^2 |\vec{f}_v|^2 \cos^2 \alpha =$$

$$\det G = \det \begin{pmatrix} \vec{f}_u \vec{f}_u & \vec{f}_u \vec{f}_v \\ \\ \vec{f}_u \vec{f}_v & \vec{f}_v \vec{f}_v \end{pmatrix} \implies \mathrm{d}S = \sqrt{\det G}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v,$$

kde symetrická a pozitivně definitní) matice G je tvořena skalárními součiny vektorů $\vec{f}_u$ a $\vec{f}_v$. Platí také $G = DS \cdot DS^T$.

DEFINICE: Plošný integrál prvního druhu

Předpokládejme, že

$$S: \; K \ni (u,\, v) \longrightarrow S(u,\, v) = (x(u,\, v),\, y(u,\, v),\, z(u,\, v))$$

je (hladký) parametrizovaný kousek plochy, resp. plocha, a

$$f: \; A \ni (x,\, y,\, z) \longrightarrow f(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}$$

funkce spojitá na otevřené množině A, kde $S(K) \subset A$. Integrál

$$\int_S f(x,\, y,\, z)\, \mathrm{d}S = \int_K (f \circ S) |\vec{f_u} \times \vec{f_v}|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \int_K (f \circ S) \sqrt{\det G}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

nazýváme plošný integrál prvního druhu z funkce f na ploše S.

TŘI POZNÁMKY: Vysvětleme si, jak je třeba takovou definici správně „číst."

- Je třeba si uvědomit, že jsme plošný element $\mathrm{d}S$ „definovali" pouze na základě geometrické představy. Jistotu, že je to tak v pořádku, budeme mít poté, co zjistíme, že definice intgrálu, kterou jsme na základě toho vyslovili, je rozumná a funguje.
- Výraz na levé straně definice pokládejme zatím za označení (proč zrovna takové, pochopíte v pokročilejších předmětech). Pravá strana představuje samotnou definici. Integrand je funkcí proměnných u a v a integračním oborem je množina K.
- Integračním oborem v rovině proměnných u a v nemusí být jen obdélník, který jsme použili v obrázku. Může to být obecně nějaká jordanovsky měřitelná množina.

PŘÍKLAD: Jak funguje definice můžeme snadno zjistit opět na základě geometrické představy. Když totiž „zintegrujeme plošný element" (přesněji řečeno, dle definice, identicky jednotkovou funkci), měli bychom dosta plošný obsah plochy S. zkusme to pro kulovou ploch o poloměru R, o níž víme, že má plošný obsah $4\pi R^2$. Parametrizaci kulové plochy už máme, pro $(\vartheta, \varphi) \in K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ je

$$x = R \sin\vartheta \cos\varphi, \ y = R \sin\vartheta \sin\varphi, \ z = R \cos\vartheta.$$

$$\vec{f}_\vartheta = (R\cos\vartheta\cos\varphi, \ R\cos\vartheta\sin\varphi, \ -R\sin\vartheta),$$

$$\vec{f}_\varphi = (-R\sin\vartheta\sin\varphi, \ R\sin\vartheta\cos\varphi, \ 0),$$

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}, \quad P(S) = \int_K R^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi = 4\pi R^2.$$

Geometrické a fyzikální charakteristiky plošných útvarů

Plošným útvarem rozumíme parametrizovanou plochu (resp. kousek plochy), přesněji řečeno obraz $S(K)$ definičního oboru parametrizace K.

Geometrické, resp. fyzikální charakteristiky plošných úvarů se spojitě rozloženou hmotností získáme jako integrály prvního druhu vždy z odpovídající funkce $f(x, y, z)$ spojité na otevřené množině $A \subset \mathbb{R}^3$ obsahující $S(K)$. Označme $\sigma = \sigma(x, y, z)$ plošnou hustotu útvaru. Základní charakteristtiky:

- $f \equiv 1$ plošný obsah $P(S)$, $f = \sigma$ hmotnost $m = m(S)$,
- $f_1 = \frac{x \cdot \sigma}{m}$, $f_2 = \frac{y \cdot \sigma}{m}$, $f_3 = \frac{z \cdot \sigma}{m}$ poloha středu hmotnosti
- $\sigma \cdot d$, kde d je vzdálenost bodu (x, y, z) od osy rotace o moment setrvačnosti vzhledem k ose o

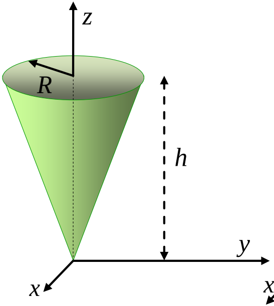
K fyzikálním charakteristikám útvaru patří také tenzor momentu setrvačnosti $\hat{J}$. Pomocí jeho složek lze vyjádřit moment setrvačnosti útvaru vzhledem k libovolné rotační ose. Tenzor $\hat{J}$ je symetrický,

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \sigma(x, y, z)$$

$$J_{xx} = \int_S \sigma(y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S, \;\; J_{xy} = -\int_S \sigma xy\,\mathrm{d}S \;\; J_{xz} = -\int_S \sigma xz\,\mathrm{d}S$$

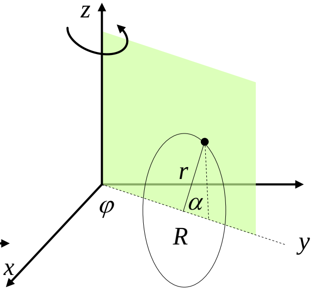
$$J_{yy} = \int_S \sigma(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}S, \;\; J_{yz} = -\int_S \sigma yz\,\mathrm{d}S \;\; J_{zz} = \int_S \sigma(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$$

PŘÍKLAD: Vypočteme na ukázku některé fyzikální charakteristiky části homogenní kuželové plochy ($\sigma = \mathrm{konst.}$) na obrázku vlevo a homogenního povrchu horní poloviny anuloidu (vpravo).



$$z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2},\ K = [0, R] \times [0, 2\pi]$$

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = \frac{hr}{R}$$



$$x = (R + r\cos\alpha)\cos\varphi$$

$$y = (R + r\cos\alpha)\sin\varphi$$

$$z = r\sin\alpha,\ K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

Parametrizace obou (již známých) ploch jsou uvedeny u obrázků.

Plošné elementy:

Pro kuželovou plochu platí

$$DS = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \frac{h}{R} \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1+\frac{h^2}{R^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}S = r\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Pro anuloid jsme Jacobiho matici sestavili v předchozích příkladech. Pro matici G a plošný element dostaneme

$$G = \begin{pmatrix} (R+r\cos\alpha)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}S = r(R+r\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\varphi$$

Vypočteme hmotnost kuželové plochy a z-ovou souřadnici jejího středu hmotnosti:

$$m = \int_S \sigma \, \mathrm{d}S = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma r \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \pi \sigma R^2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}}$$

$$z_{SH} = \frac{1}{m} \int z\sigma \, \mathrm{d}S = \frac{1}{m} \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma \frac{hr}{R} \cdot r \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$\frac{2\pi\sigma}{3m} hR^2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} = \frac{2}{3} h$$

Nyní určíme moment setrvačnosti hormí poloviny povrchu anuloidu vzhledem k ose z.

$$J_{zz} = \int_S \sigma(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma r (R + r\cos\alpha)^3\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi\sigma r \int_0^{\pi} (R^3 + 3R^2 r\cos\alpha + 3Rr^2\cos^2\alpha + r^3\cos^3\alpha)\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= 2\pi^2\sigma r R\left(R^2 + \frac{3}{2}r^2\right)$$

Úlohy k procvičení

- Vypočtěte ostatní fyzikální charakteristiky kuželové plochy z předchozího příkladu. Výsledky: $x_{SH} = 0$, $y_{SH} = 0$, $J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{4} mR^2 \left(1 + \frac{2h^2}{R^2}\right)$, $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$, $J_{zz} = \frac{1}{2} mR^2$
- Vypočtěte polohu středu hmotnosti horní poloviny homogenní kulové plochy o poloměru R a plošné hustotě σ. Výsledek: $x_{SH} = y_{SH} = 0$, $z_{SH} = R/2$
- Vypočtěte plošný obsah pláště části paraboloidu $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $0 \leq z \leq z_0$. Výsledek: $P(S) = \frac{2\pi}{3} \left[(1 + 2z_0)^{3/2} - 1\right]$
- Obsah části plochy $x^2 + y^2 - 2z = 0$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 = 3$. Výsledek: $\frac{14\pi}{3}$

Další vhodné úlohy najdete v učebnici MIII/1, str. 362, 363, úlohy 19a)-g), 20a)-l), 21.