Základní matematické metody ve fyzice 2

Téma 2: Plošný integrál druhého druhu

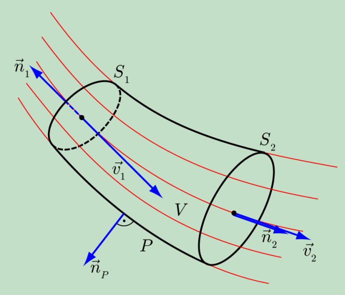
Obsah tématu

1. Něco z fyziky – tok kapaliny plochou
2. Orientovaná parametrizovaná plocha.
3. Toky – plošný integrál druhého druhu.
4. Toky prakticky.
5. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi II/2 (M II/2), VUTIUM, Brno 2012 (strany 564-608).

Něco z fyziky – tok kapaliny plochou

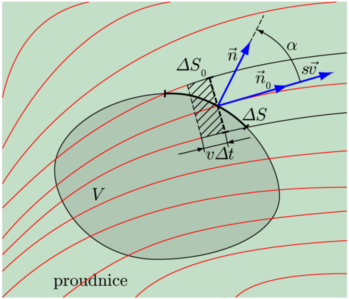
V mechanice jsme pro proudící kapalinu definovali její objemový tok Q plochou S. Je to objem kapaliny, který proteče plochou S za $1\,\mathrm{s}$. Nejjednodušší situace je na obrázku, jak jej znáte ze střední školy.



Kapalina, která projde kolmým průřezem S za dobu Δt, má objem válečku o podstavě S a výšce $\Delta\ell = v\Delta t$. Za $1\,\mathrm{s}$ je tedy $Q = Sv$.

POZNÁMKA: Rovnice kontinuity, $S_1 v_1 = S_2 v_2$, jiř ilustruje předchozí obrázek, představuje jakýsi „zákon zachování“ objemového toku (platí pro případ nestlačitelné kapaliny).

Jak určit tok, není-li plocha kolmá k rychlosti (viz obrázek)?



Elementární tok kapaliny obecnou ploškou ΔS je zjevně totéž jako tok ploškou ΔS_0, kolmou k proudnicím, tj. $\Delta Q = v\,\Delta S_0$. Potřebujeme však tok ΔQ vyjádřit pomocí plochy ΔS.

Vyjádření elementárního a celkového toku plochou

$$\Delta Q = v\,\Delta S_0 = v\,\Delta S\cos\alpha = v(\vec{n}_0\vec{n})\,\Delta S,$$

jde jsme jako $\vec{n}$, resp. $\vec{n}_0$ označili vektor jednotkové normály k ploše ΔS, resp. ΔS_0. Protože je $\vec{n}\vec{n}_0 = \cos\alpha$, dostaneme

$$\Delta Q = (v\vec{n}_0)\vec{n}\,\Delta S = (\vec{v}\vec{n})\,\Delta S \implies Q = \int_S (\vec{v}\vec{n})\,\mathrm{d}S.$$

Dostali jsme známý integrál prvního druhu z funkce $f(x, y, z) = \vec{v}(x, y, z)\vec{n}(x, y, z)$, který už umíme počítat (viz téma 1) za předpokladu, že má funkce $f(x, y, z)$ potřebné vlastnosti (přinejmenším spojitost na otevřené množině A obsahující plochu S).

Orientovaná parametrizovaná plocha

Pojem parametrizované plochy jsme zavedli již u integrálu prvního druhu. Tok kapaliny plochou je formálně vyjádřen jako integrál prvního druhu, kde integrovaná funkce závisí mj. na vektorovém poli jednotkové normály k ploše, která je integračním oborem. V každém bodě plochy však lze zvolit dvě možné orientace normály. V souvislosti s tím vzniká pojem orientované plochy.

DEFINICE: Orientovaná parametrizovaná plocha

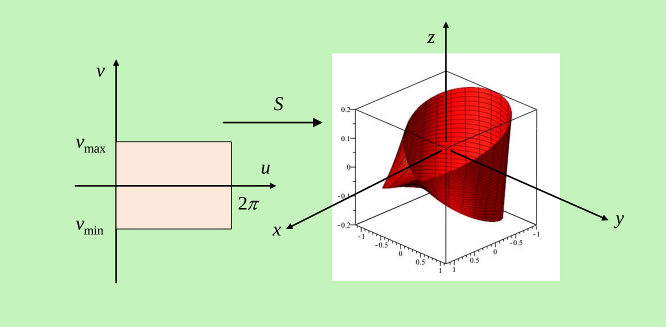
Parametrizovaná plocha $S: \; K \ni [u, v] \to S(u, v) \in \mathbb{R}^3$ se nazývá orientabilní, jestliže na ní lze zvolit spojité vektorové pole jednotkové normály

$$\vec{n}: \; S(K) \ni (x, y, z) \longrightarrow \vec{n}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad |n(x, y, z)| = 1.$$

Je-li vektorové pole $\vec{n}(x, y, z)$ zvoleno, je plocha orientovaná.

„PROTIPŘÍKLAD:“ Tuto plochu nelze orientovat

Příkladem plochy, kterou nelze (spojitě) orientovat, je Möbiova páska – obrázek. (Přijdete na to, proč?)



Její parametrizace je, pro $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [v_{min}, v_{max}]$,

$$x = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \quad y = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \quad z = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2}.$$

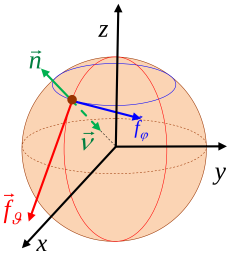
Parametrizovanou orientabilní plochu lze orientovat dvěma způsoby. Jak jdou parametrizace a orientace dohromady? V odstavci o plošném intergálu prvního druhu jsme pracovali s vektory $\vec{f}_u$ a $\vec{f}_v$, tečnými v daném bodě $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ plochy k souřadnicovým křivkám C_u, resp. C_v. Vektor $\vec{f}_u \times \vec{f}_v$ je k ploše kolmý a můžeme jej normovat na jednotkový. Vektorové pole jednotkové normály, kterým jsme plochu orientovali, označme $\vec{n}$. Jsou-li vektory

$$\frac{\vec{f}_u \times \vec{f}_v}{|\vec{f}_u \times \vec{f}_v|}, \quad \text{a} \quad \vec{n}$$

v každém bodě plochy souhlasně, resp. nesouhlasně rovnoběžné, nazývá se orientace plochy kompatibilní, neboli slučitelnou či souhlasnou, resp. nekompatibilní, (neslučitelnou, nesouhlasnou) se zvolenou orientací. (Dodržet pořadí vektorů dle pořadí parametrů!)

PŘÍKLAD: Jak poznat kompatibilní orientaci

K integraci budeme tak jako tak potřebovat plošný element, který určujeme pomocí parametrizace plochy, konkrétně pomocí Jacobiho matice zobrazení $S(u, v)$. Stačí ji doplnit o (třetí, nebo první) řádek obsahující složky normály $\vec{n}$ a určit determinant.



$$S(\vartheta, \varphi) = (R\sin\vartheta\cos\varphi,\, R\sin\vartheta\sin\varphi,\, R\cos\vartheta)$$

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin\vartheta\cos\varphi,\, \sin\vartheta\sin\varphi,\, \cos\vartheta)$$

$$M = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \\ \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det M = R^2 \sin\vartheta > 0$$

Kritériem kompatibilty orientace a parametrizace je znaménko determinantu matice M. Orientace vektorovým polem normály $\vec{n}$ je kompatibilní s parametrizací, orientace polem $\vec{\nu} = -\vec{n}$ je nekompatibilní.

Toky – plošný integrál druhého druhu

Integrand ve výrazu pro objemový tok kapaliny plochou orientovanou vektorovým polem jednotkové normály $\vec{n}(x, y, z)$ zapíšeme jako $(\vec{v}\vec{n})\,\mathrm{d}S = \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S}$, při označení $\vec{n}\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}\vec{S}$.

DEFINICE: Plošný integrál druhého druhu

Nechť $S: K \ni (u, v) \to S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ je parametrizovaná plocha orientovaná (spojitým) vektorovým polem jednotkové normály $\vec{n}(x, y, z)$ a $\vec{F}(x, y, z)$ je spojité vektorové pole definované na otevřené množině $A \subset \mathbb{R}^3$,přičemž $S(K) \subset A$. Integrálem druhého druhu z vektorového pole $\vec{F}$ na orientované ploše S rozumíme

$$\int_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S (\vec{F}\,\vec{n})\,\mathrm{d}S.$$

Pro výpočet právě definovaného integrálu používáme nejčastěji postup uvedený v odstavci o integrálu prvního druhu:

$$\int\limits_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_K (\vec{F}\vec{n}) \circ S \sqrt{\det G}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

POZNÁMKA: Integrál druhého druhu ještě jinak

Předpokládejme, že plocha S je orientovaná souhlasně s parametrizací. Zapíšeme integrál druhého druhu z vektorového pole $\vec{F}$ ještě jinak, s tím, že jednotkovou normálu $\vec{n}$ i plošný element vyjádříme pomocí vektorů $\vec{f}_u$ a $\vec{f}_v$,

$$\vec{n} = \frac{\vec{f}_u \times \vec{f}_v}{|\vec{f}_u \times \vec{f}_v|}, \quad \mathrm{d}S = |\vec{f}_u \times \vec{f}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \implies$$

$$\implies \int\limits_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_K (\vec{F}\circ S)\frac{\vec{f}_u \times \vec{f}_v}{|\vec{f}_u \times \vec{f}_v|}\,|\vec{f}_u\times\vec{f}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int\limits_K (\vec{F}\circ S)(\vec{f}_u\times\vec{f}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Na pravé straně vztahu v předchozí definici je formálně integrál prvního druhu z funkce $f = \vec{F}\,\vec{n}$. Je vidět, že znaménko výsledku závisí na orientaci plochy. Právě definovaný integrál se také nazývá tok vektorového pole $\vec{F}$ orientovanou plochou S. Tento název je motivován fyzikou.

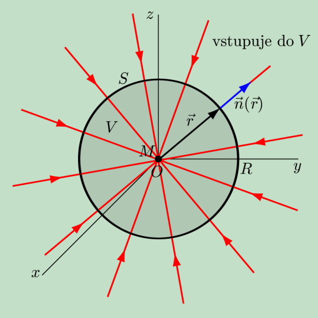
POZNÁMKA: Vrátíme-li se opět k objemovému toku kapaliny, tentokrát uzavřenou orintovanou plochou, snadno si uvědomíme, že při orientaci normálou směřující z obepnutého objemu ven – tzv. vnější normála kladné znaménko toku znamená, že z objemu více kapaliny vytéká než do něj vtéká, a naopak. Je-li však tok nenulový, je jasné, že v objemu obepnutém plochou S musí být nějaká zřídla ($Q > 0$), nebo místa, kudy kapalina někam uniká ($Q < 0$). Rovnice kontinutity ze střední školy tedy říká, že $Q = 0$, tj. „co vteče, to i vyteče“, nebo přesněji – vliv zřídel a míst úniku se kompenzuje.

Toky prakticky

Uvedeme několik příkladů na výpočet toků, zejména s fyzikálním významem.

PŘÍKLAD: Elektrostatika – bodový náboj

Sledujme obrázek, na němž je záporný bodový náboj umístěný v počátku soustavy souřadnic obklopený kulovou plochou.



Plocha na obrázku je orientována vnější jednotkovou normálou $\vec{n}$. Intenzita elektrického pole od bodového náboje q je dána Coulombovým zákonem. Platí (uvědomme si, že na ploše S je $|\vec{r}| = R$)

$$\vec{n}(x,\,y,\,z) = \frac{\vec{r}}{R} = \frac{1}{R}\,(x,\,y,\,z)\,,$$

$$\vec{E}(x,\,y,\,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{R^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^3}(x,\,y,\,z), \ \ \varepsilon \text{ je permitivita.}$$

Parametrizace plochy kompatibilní se zadanou orientací je obvyklá,

$$x = R\sin\vartheta\cos\varphi, \ \ y = R\sin\vartheta\sin\varphi, \ \ z = R\cos\vartheta,$$

$\vartheta \in [0,\,\pi]$, $\varphi \in [0,\,2\pi]$. Je však důležité, že parametr ϑ je první, takže vektorový součin vektorů tečných k souřadnicovým křivkám musí být vyjádřen v odpovídajícím pořadí, tj. $\vec{f}_\vartheta \times \vec{f}_\varphi$.

Výpočet je v tomto případě velmi jednoduchý, vyjádříme-li tok formálně jako integrál prvního druhu (integrand bude závislý na orientaci). Na kulové ploše platí (výpočet plošného elementu je v příslušném odstavci o integrálu prvního druhu)

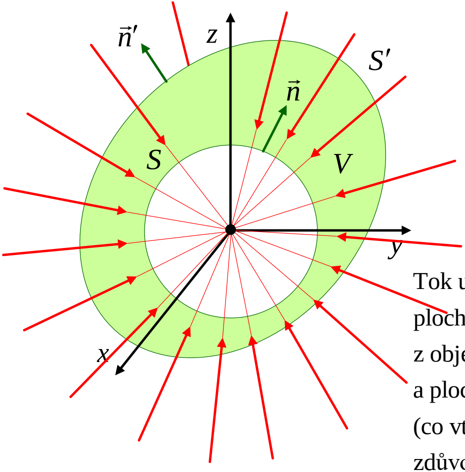
$$\vec{E}\vec{n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{R^3}\cdot\frac{\vec{r}}{R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2} = \mathrm{konst.}, \quad \mathrm{d}S = R^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v,$$

$$Q = \int_S (\vec{E}\vec{n})\,\mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{q}{\varepsilon}$$

Získaný výsledek je přímým důsledkem Coulombova zákona, často se však ve fyzice také označuje jako Gaussův zákon.

Všimněme si důležitého obecného důsledku. Uvažujme o libovolné jiné uzavřené ploše obepínající týž bodový náboj q, rovněž orientovaná vnější normálou. Tok vektorového pole $\vec{E}$ touto plochou je stejný jako tok kulovou plochou. Zdůvodníme to v dalším příkladu.

PŘÍKLAD: Tok intenzity elektrostatického pole bodového náboje libovolnou uzavřenou orientovanou plochou



$$Q = \int_{(-S+S')} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{S'} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}.$$

(V objemu V mezi plochami S a S' nejsou žádné zdroje ani místa zániku siločar.)

Tok uzavřenou plochou tvořenou plochami S a S' orientovanými "ven z objemu V, tj. plocha S' normálou $\vec{n}'$ a plocha S normálou $(-\vec{n})$, je nulový (co vteče, to vyteče).V tématu 3 to zdůvodníme podrobněji a korektněji.

POZNÁMKA: Přechozí stručné vyjádření celkového toku uzavřenými plochami obepínajícími objem přece jen vyžaduje podrobnější vysvětlení.

Představme si plochu Σ tvořenou několika (třeba dvěma) orientovanými plochami. Pak integrálem, jehož obor označujeme jako formální součet těchto ploch, $\Sigma = S_1 + S_2$, rozumíme součet příslušných integrálů,

$$\int_{\Sigma=S_1+S_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{\Sigma} = \int_{S_1} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S}.$$

Je-li plocha S orientována normálou $\vec{n}$, pak tutéž plochu, ale orientovanou opačně, tj. normálou $(-\vec{n})$, můžeme jako integrační obor značit $(-S)$,

$$\int_{-S} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S} \vec{F}\,(-\vec{n}\,\mathrm{d}S) = -\int_{S} (\vec{F}\vec{n})\,\mathrm{d}S = -\int_{S} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S}.$$

POZNÁMKA: Ještě trocha fyziky – zobecnění „Gaussova zákona“

Představou „vtékání a vytékání“ siločar intenzity elektrického pole $\vec{E}$ do a z objemu vymezeného dvěma uzavřenými stejně orientovanými plochami (kulovou S a obecnou S'), obepínajícími bodový náboj q umístěný v počátku soustavy souřadnic, jsme zdůvodnili, že tok pole $\vec{E}$ libovolnou uzavřenou plochou S', která je orientována vnější normálou, je vždy stejný a roven $\frac{q}{\varepsilon}$. Je zřejmé, že umístění náboje v počátku soustavy souřadnic není podstatné: počátek můžeme vždy zvolit v místě náboje a přizpůsobit tomu parametrizaci plochy.

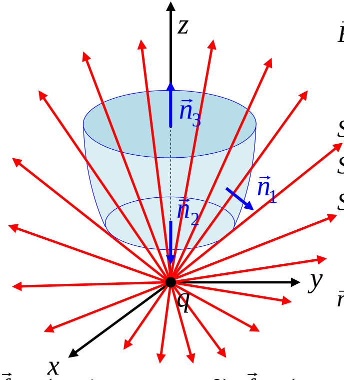
A co když bude náboj v objemu obepnutém plochou rozprostřen spojitě s hustotou $\varrho(x, y, z)$? Pak každý „nábojový element“ $\varrho \,\mathrm{d}V$ přispěje k toku hodnotou $\frac{\varrho}{\varepsilon}\,\mathrm{d}V$. Celkový tok pak bude

$$Q = \int_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \frac{\varrho}{\varepsilon}\,\mathrm{d}V.$$

Máme jednu ze základních rovnic elektrodynamiky – první Maxwellovu rovnici v integrálním tvaru. Fakticky je to však pořád „jen“ Coulombův zákon.

PŘÍKLAD: Tok teď už s pořádným výpočtem.

Uzavřená plocha S orientovaná vnější normálou je tvořena částmi $S_1: z = x^2 + y^2$, $S_2: z = 1$, $S_3: z = 4$. Očekáváme, že tok elektrické intenzity $\vec{E}$ od náboje $q > 0$ v počátku soustavy souřadnic touto plochou bude nulový (náboj leží vně plochy). Ověříme to pořádně výpočtem.



$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

$S_1: x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = r^2,\ r \in [1, 2]$

$S_2: x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = 1,\ \ r \in [0, 1]$

$S_3: x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = 4,\ \ r \in [0, 2]$

$$\vec{n}_3 = (0, 0, 1),\ \vec{n}_2 = (0, 0, -1),\ \vec{n}_1 = \frac{\vec{f}_\varphi \times \vec{f}_r}{|\vec{f}_\varphi \times \vec{f}_r|}$$

$$\vec{f}_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0),\ \ \vec{f}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r),\ \ \vec{f}_\varphi \times \vec{f}_r = (2r^2\cos\varphi, 2r^2\sin\varphi, -r)$$

Parametrizaci jednotlivých ploch, normály k plochám S_2 a S_3 a tečné vektory k souřadnicovým křivkám na ploše S_1 máme na předchozím obrázku. Vypočteme plošné elementy a integrand $\vec{E}\vec{n}$ na plochách (provádějte včetně vlastních mezivýpočtů na papír):

$$G_1 = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1+4r^2 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}S_1 = r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}S_2 = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}S_3 = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

$$(\vec{E}\circ S_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\cdot r^3(1+r^2)^{3/2}}\left(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ r^2\right),$$

$$(\vec{E}\circ S_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\cdot (1+r^2)^{3/2}}\left(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 1\right)$$

$$(\vec{E}\circ S_3) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\cdot (16+r^2)^{3/2}}\left(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 4\right).$$

Ve všech případech je $\varphi \in [0,\ 2\pi]$. Jaké pořadí parametrů je v jednotlivých případech souhlasné s orientací plochy vnější normálou?

$$Q_1 = \int\limits_{S_1} (\vec{E} \circ S_1)\, \vec{n}_1 \, \mathrm{d}S_1 = \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2\pi} (\vec{E} \circ S_1)(\vec{f}_\varphi \times \vec{f}_r) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \frac{q}{2\varepsilon} \int\limits_1^2 \frac{1}{(1+r^2)^{3/2}}$$

$$Q_2 = \int\limits_{S_2} (\vec{E} \circ S_2)\, \vec{n}_2 \, \mathrm{d}S_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 -\frac{r}{(1+r^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r =$$

$$= -\frac{q}{2\varepsilon} \int\limits_0^1 \frac{r}{(1+r^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}r,$$

$$Q_3 = \int\limits_{S_3} (\vec{E} \circ S_3)\, \vec{n}_3 \, \mathrm{d}S_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \frac{4r}{(16+r^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon} \int\limits_0^1 \frac{4r}{(16+r^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}r.$$

Zbývá integrály vypočítat. V prvním použijeme substituci $r = \sinh u$, v druhém $u = 1 + r^2$ a ve třetím $u = 16 + r^2$. Počítejte:

$$Q_1 = \frac{q}{2\varepsilon} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\cosh u}{(1 + \cosh^2 u)^{3/2}} \, \mathrm{d}u = \frac{q}{2\varepsilon} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}u}{\cosh^2 u} = \frac{q}{2\varepsilon} \operatorname{artgh} u \Big|_{u_1}^{u_2} =$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon} \left. \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}} \right|_1^2 = \frac{q}{2\varepsilon} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$Q_2 = \frac{q}{2\varepsilon} \int_1^2 - \frac{\mathrm{d}u}{2u^{3/2}} = \frac{q}{2\varepsilon} \left. \frac{1}{\sqrt{u}} \right|_1^2 = \frac{q}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right),$$

$$Q_3 = \frac{q}{2\varepsilon} \int_{16}^{20} \frac{2\mathrm{d}u}{u^{3/2}} = -\frac{q}{2\varepsilon} \left. \frac{4}{\sqrt{u}} \right|_{16}^{20} = -\frac{q}{2\varepsilon} \left(\frac{4}{\sqrt{20}} - \frac{4}{\sqrt{16}} \right) = \frac{q}{2\varepsilon} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} + 1 \right)$$

Celkový tok $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ je skutečně nulový, podle očekávání.

Úlohy k procvičení

- Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ částí kuželové plochy (pláště) o rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ orientované normálou směřující dovnitř kužele. Výsledek: $Q = 0$.
- Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ kulovou plochou o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ orientovanou vnější normálou. Výsledek: $Q = \frac{12}{5}\pi R^5$.
- Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ částí roviny o rovnici $x + y + z = a = \text{konst.}$, $a > 0$, v 1. oktantu soustavy souřadnic. Rovina je orientována normálou směřující do poloprostoru obsahujícího počátek soustavy souřadnic. Výsledek: $Q = -\frac{1}{2}a^3$.
- Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, xyz)$ povrchem krychle $[0, 1]^3 \in \mathbb{R}^3$ orientované vnější normálou. Návod: Sečtěte toky všemi šesti stěnami. Pozn.: Body nespojitosti pole normály na hranách krychle tvoří zanedbatelnou množinu, takže „nevadí“. Výsledek: $Q = \frac{9}{4}$.