Základní matematické metody ve fyzice 2

Téma 3 a 4: Integrální věty a jejich fyzikální aplikace

Obsah tématu

1. Co a k čemu jsou „integrální věty“.
2. Diferenciální operátory.
3. Gaussova-Ostrogradského věta.
4. Greenova věta.
5. Stokesova věta.
6. Příklady fyzikálních aplikací.
7. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi II/2 (M II/2), VUTIUM, Brno 2012 (strany 564-608).

Co a k čemu jsou „integrální věty“

Při zpracování předchozího tématu o plošném integrálu druhého druhu jsme v rámci jeho fyzikálních aplikací dospěli k tzv. Gaussovu zákonu elektrostatiky, který uvádí do souvislosti tok (matematicky plošný integrál druhého druhu) intenzity elektrostatického pole $\vec{E}(x, y, z)$ uzavřenou plochou S orientovanou vektorovým polem vnější jednotkové normály $\vec{n}(x, y, z)$, a hustotou $\varrho(x, y, z)$, s níž je náboj spojitě rozložen v objemu V obepnutém touto plochou:

$$Q = \int_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \frac{\varrho}{\varepsilon}\,\mathrm{d}V,$$

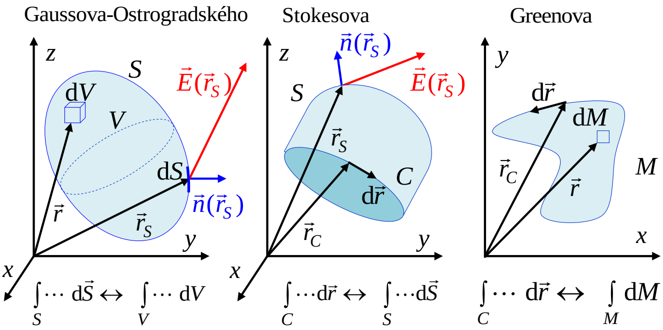
kde ε je dielektrická permitivita prostředí (v případě vakua je $\varepsilon \doteq 8,85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$).

Jaký význam má Gaussův zákon? Může posloužit k zjišťování intenzity elekrostatického pole v prostoru, známe-li rozložení nábojové hustoty? Není to tak jednoduché. Je-li funkce $\varrho(x, y, z)$ známá, můžeme vypočítat pravou stranu uvažované rovnosti integrací přes zvolený objem – to představuje jakousi globální informaci. Získáme tak hodnotu toku intenzity elektrostatického pole plochou, která obepíná objem, přes který jsme integrovali funkci $\varrho(x, y, z)$. Jenže získaný tok je zase jenom globální informace, a my bychom potřebovali znát vektorové pole $\vec{E}(x, y, z)$ v jednotlivých bodech prostoru (tj. informaci lokální), nebo nějaké diferenciální rovnice, jejichž řešením bychom rozložení intenzity $\vec{E}(x, y, z)$ v prostoru mohli v principu získat.

Tak co třeba zbavit se integrálů? Ale jak, když integrační obory levé i pravé strany Gaussova zákona jsou různé? Podstatný je fakt, že zákon platí pro libovolný objem a jeho hraniční plochu (splňující samozřejmě definiční požadavky příslušných integrálů). Umožňuje to převést integrál druhého druhu přes uzavřenou plochu S z vektorového pole $\vec{E}$ na integrál přes obepnutý objem z jisté skalární funkce, která s polem $\vec{E}$ souvisí prostřednictvím derivací. Matematická věta, která takový převod umožňuje, se nazývá věta Gaussova-Ostrogradského.

Věta Gaussova-Ostrogradského je jednou z tzv. klasických integrálních vět, které umožňují, zjednodušeně řečeno, převést integrál z daného integračního oboru na integrál přes jeho hranici a naopak.

Význam klasických integrálních vět znázorňuje obrázek.



Vedle věty Gaussovy-Ostrogradského, převádějící integrál přes objem na integrál přes plochu, která jej obepíná, se jedná ještě o větu Stokesovu – převod integrálu přes plochu v $\mathbb{R}^3$ na ohraničující křivku, a větu Greenovu, která provádí totéž, jenže v $\mathbb{R}^2$.

Diferenciální operátory

Než se budeme zabývat integrálními větami, připravíme se na to zavedením pojmů, které budeme potřebovat. Jsou to tzv. difereciální operátory. Nejjednodušší z nich už známe – derivace a parciální derivace funkcí jedné či více proměnných.

Operátor derivace, resp. operátory parciálních derivací můžeme chápat jako zobrazení přiřazující funkci $f : U \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}$, (kde $U \subset \mathbb{R}$ je např. otevřený, nebo uzavřený interval, popř. jiná vhodná množina), resp. funkci $f : U \ni (x, y, z) \to \mathbb{R}$, (kde $U \subset \mathbb{R}^3$ je např. otevřená množina) její derivaci, resp. parciální derivace, tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : f(x) \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

$$\frac{\partial}{\partial x} : f(x, y, z) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y, z)) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad \text{podobně } \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}.$$

Analogicky fungují operátory derivací vyšších řádů a v případě skalárních a vektorových funkcí více proměnných operátory z nich složené, důležitý je například Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Všechny diferenciální operátory, které jsme zmínili a ještě zmíníme, jsou a budou lineární, tj. takové, které lineární kombinaci funkcí jako vzoru přiřazují lineární kombinaci obrazů se stejnými koeficienty. Např. pro funkce $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ a čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\alpha f(x, y, z)+\beta g(x, y, z)) = \alpha \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial y}+\beta \frac{\partial^2 g(x, y, z)}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}(\alpha f(x, y, z)+\beta g(x, y, z)) = \alpha \frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2}+\beta \frac{\partial^3 g(x, y, z)}{\partial x \partial y^2}.$$

DEFINICE: Gradient

Nechť $f: U \ni (x, y, z) \to f(x, y, z) \in \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}^3$, je diferencovatelná funkce. Gradientem funkce f rozumíme vektorové pole (jinými slovy vektorovou funkci)

$$\vec{F}: U \ni (x, y, z) \longrightarrow \vec{F}(x, y, z) = \mathrm{grad}\, f(x, y, z) \in \mathcal{V}(U),$$

$$\mathrm{grad}\, f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right),$$

kde $\mathcal{V}(U)$ je množina vektorových polí na $U \subset \mathbb{R}^3$. „Vektor" $\vec{\nabla} = \mathrm{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je zobrazení přiřazující funkcím jejich gradienty. Nazývá se operátor gradientu.

S pojmem gradientu jsme se setkali už v ZMMF 1, kde jsme si vyložili i jeho geometrický význam – je to vektor, v jehož směru zaznamenáme největší změnu funkční hodnoty funkce $f(x, y, z)$.

DEFINICE: Divergence

Nechť $\vec{F}: U \ni (x, y, z) \to \vec{F}(x, y, z) \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^3)$, $U \in \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$ je diferencovatelné vektorové pole. Divergence vektorového pole $\vec{F}$ je skalární funkci (z množiny $\mathcal{G}(U)$ funkcí definovaných na U)

$$g: U \ni (x, y, z) \longrightarrow g(x, y, z) = \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) \in \mathcal{G}(U),$$

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial z}.$$

Operátor divergence přiřazuje vektorovým polím jejich divergence. Jeho „působení na vektorové pole $\vec{F}$" si můžeme formálně představit představit jako skalární součin $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \vec{F}$

S pojmem divergence jsme se setkali v Mechanice, když jsme se zabývali rovnicí kontinuity. Divergence určovala „množství" zdrojů, nebo míst zániku proudnic popisujících pohyb tekutiny.

DEFINICE: Rotace

Nechť $\vec{F}: U \ni (x, y, z) \to \vec{F}(x, y, z) \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^3)$, $U \in \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$ je diferencovatelné vektorové pole. Rotací vektorového pole $\vec{F}$ rozumíme vektorové pole

$$\vec{G}: U \ni (x, y, z) \longrightarrow \vec{G}(x, y, z) = \mathrm{rot}\, \vec{F}(x, y, z) \in \mathcal{V}(U),$$

kde $\mathcal{V}(U)$ je množina vektorových polí na $U \subset \mathbb{R}^3$, a

$$\vec{G}(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

Operátor rotace přiřazuje vektorovým polím jejich rotace. Jeho „působení na vektorové pole $\vec{F}$“ si můžeme formálně představit jako vektorový součin $\mathrm{rot}\, \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$.

PŘÍKLADY: Gradient, divergence, rotace

- $f(x, y, z) = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \frac{h}{R\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z).$$

- $\vec{F}(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$,

$$\operatorname{div} \vec{F} = 6xyz, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = (x(z^2 - y^2), y(x^2 - z^2), z(y^2 - x^2)).$$

Vše podrobně propočtěte podle definičních vzorců. Dále vypočtěte divergenci vektorového pole elektrostatické intenzity od bodového náboje q umístěného v počátku soustavy souřadnic

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

a ověřte, že $\vec{E} = -\operatorname{grad} U$, kde $U = -\frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ je potenciál.

Vztahy pro diferenciální operátory

Přímým výpočtem z definic diferenciálních operátorů lze dokázat pro libovolné funkce $f(x, y, z)$, resp. $\vec{F}(x, y, z)$ (pokuste se o to):

- $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \Delta f$ tj. $\vec{\nabla}\vec{\nabla} f = \Delta f$
- $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{F}) = 0$ tj. $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
- $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \vec{F}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \vec{F}) - \Delta \vec{F}$, tj. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{F}) - (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{F}$
- $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = \vec{0}$, tj. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$.

Všimněte si, že při formálním zacházení s operátorem $\vec{\nabla}$ jako s vektorem platí stejná pravidla jako pro skalární a vektorový součin. Při důkazu posledního vztahu si uvědomte záměnnost smíšených parciálních derivací druhého řádu.

Větu nejprve formulujeme a potom se pokusíme ji názorně vysvětlit (nikoli dokázat, to bude později věcí pokročilejších předmětů).

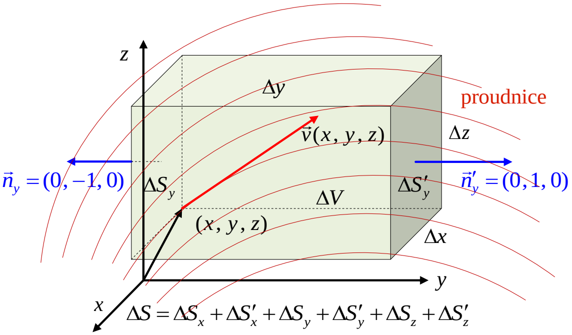
VĚTA: Gaussova-Ostrogradského

Nechť $V \subset \mathbb{R}^3$ je jordanovsky měřitelná množina (objem) a S její (hladká) hranice orientovaná vnější jednotkovou normálou. Nechť na otevřené množině obsahující V spolu s hranicí je definováno spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$. Platí

$$\int_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{F}(x, y, z)\,\mathrm{d}V.$$

Hladkou plochou rozumíme parametrizovanou plochu, jejíž parametrizace je přinejmenším spojitě diferencovatelné zobrazení.

Věta platí pro libovolný objem a jeho hraniční plochu, pokud integrály na obou stranách rovnosti existují. (Předpoklady ve větě jsou silnější proto, aby existence byla již předem zajištěna.)



Plocha ΔS je pouze po částech hladká (má hrany, ty však tvoří zanedbatelnou množinu). Stěny jsou hladké a celkový tok vektorového pole $\vec{v}$ je součtem toků jednotlivými stěnami.

Trocha fyziky a matematických prohřešků
(jestliže GO větě „věříte“, můžete přeskočit na snímek 23)

K názornému výklad GO věty použijeme představu proudící ideální kapaliny a budeme počítat její objemový tok uzavřenou plochou. Podstatné je, že GO věta platí, ať jsou V a S jakékoli (splňují-li základní předpoklady). Pro jednoduchost proto zvolíme ΔV ve tvaru kvádru o „dostatečně malých“ rozměrech na předchozím obrázku, objem kvádru označíme stejně, $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$. Tok kapaliny (vektorového pole rychlosti $\vec{v}(x, y, z)$) ohraničující plochou (povrchem kvádru) je součtem toků stěnami. Označíme je takto: stěny kolmé na osu y (v obrázku jsou označeny) ΔS_y (levá), $\Delta S'_y$ (pravá). Jejich plošný obsah je $\Delta x\, \Delta z$. Podobně další dvojice stěn: ΔS_x (zadní), $\Delta S'_x$ (přední), ΔS_z (dolní), $\Delta S'_z$ (horní).

Obrázek si teď třeba překreslete na papír a společně počítejte. Matematické prohřešky, jichž se dopustíme, okomentujeme nakonec.

Toky stěnami ΔS_y a $\Delta S'_y$

$$\Delta Q_y = \int\limits_{\Delta S_y} \vec{v}(x,\, y,\, z)\, \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\Delta S_y} (\vec{v}(x,\, y,\, z)\, \vec{n}_y)\, \mathrm{d}S = \int\limits_{\Delta S_y} -v_y(x,\, y,\, z)\, \mathrm{d}S$$

$$\Delta Q'_y = \int\limits_{\Delta S'_y} \vec{v}(x,\, y+\Delta y,\, z)\, \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\Delta S'_y} (\vec{v}(x,\, y+\Delta y,\, z)\, \vec{n}'_y)\, \mathrm{d}S =$$

$$= \int\limits_{\Delta S'_y} v_y(x,\, y+\Delta y,\, z)\, \mathrm{d}S$$

Plochy ΔS_y a $\Delta S'_y$ můžeme teď už parametrizovat stejně, neboť jejich opačnou orientaci jsme respektovali normálami $\vec{n}_y$ a $\vec{n}'_y$ a posun $\Delta S'_y$ oproti ΔS_y o Δy jsme respektovali ve vyjádření vektorového pole $\vec{v}$ záměnou $\vec{v}(x,\, y,\, z) \to \vec{v}(x,\, y+\Delta y,\, z)$. K parametrizaci použijeme přímo kartézské souřadnice x a z, tj. $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z$.

Celkový tok bočními stěnami ΔS_y a $\Delta S'_y$

$$\Delta Q_y + \Delta Q'_y = \int\limits_x^{x+\Delta x} \int\limits_z^{z+\Delta z} \left(v_y(x,\, y + \Delta y,\, z) - v_y(x,\, y,\, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z \right).$$

Teď provedeme jednu užitečnou formální úpravu:

$$\Delta Q_y + \Delta Q'_y = \Delta y \int\limits_x^{x+\Delta x} \int\limits_z^{z+\Delta z} \frac{v_y(x,\, y + \Delta y,\, z) - v_y(x,\, y,\, z)}{\Delta y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z.$$

Co vám připomíná integrand? Kdybychom provedli limitní přechod $\Delta y \to 0$, byla by to parciální derivace $\frac{\partial v_y(x,\, y,\, z)}{\partial y}$. Je-li objem ΔV „dostatečně malý“, můžeme napsat (když to matematikové neuvidí)

$$\Delta Q_y + \Delta Q'_y \doteq \int\limits_{\Delta V} \frac{\partial v_y(x,\, y,\, z)}{\partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Celkový tok povrchem kvádru

Obdobně vypočteme tok vektorového pole $\vec{v}$ dvojicemi stěn ΔS_x a $\Delta S_x'$, resp. ΔS_z a $\Delta S_z'$. Celkový tok je pak součet

$$\Delta Q = \Delta Q_x + \Delta Q_x' + \Delta Q_y + \Delta Q_y' + \Delta Q_z + \Delta Q_z' =$$

$$= \int\limits_{\Delta V} \left(\frac{\partial v_x(x,\, y,\, z)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,\, y,\, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,\, y,\, z)}{\partial z} \right) \mathrm{d}V$$

Poznáváte divergenci vektorového pole $\vec{v}$? Výsledek:

$$\int\limits_{\Delta S} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\Delta V} \mathrm{div}\,\vec{v}\,\mathrm{d}V.$$

A máme GO větu pro náš specifický případ.

„Matematické prohřešky“

Je třeba zdůraznit, že přechodzí výklad GO věty nebyl korektní důkaz, neboť jsme pro získání nakonec správného výsledku použili úvahy, jejichž oprávněnost jsme neprověřili.

- Použili jsme velmi speciální integrační obory (kvádr a jeho stěny). Výsledek pro kvádr ještě nedokazuje, že tvrzení platí pro obecný útvar V a jeho hraniční plochu.
- Neprovedli jsme řádně limitní přechody, např.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{v_y(x, y + \Delta y, z) - v_y(x, y, z)}{\Delta y},$$

  a operovali jsme „zdůvodněním“ pomocí „dostatečně malých integračních oborů.“

„Zádrhel“ Gaussovy-Ostrogradského věty

GO větě věříme, ale ... Vraťme se ke vztahu pro tok intenzity elektrostatického pole $\vec{E}$ od bodového náboje q umístěného v počátku soustavy souřadnic. Vypočítali jsme, že tok kulovou plochou je (viz Téma 2):

$$\int_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}.$$

Pokud jste splnili úkol zadaný na snímku 12 a vypočítali $\mathrm{div}\,\vec{E}$, zjistili jste, že je nulová. Pro tok by tedy mělo podle GO věty platit

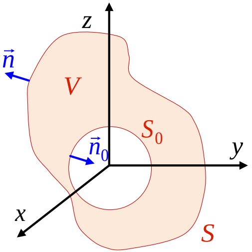
$$\int_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{E}\,\mathrm{d}V = 0.$$

GO věta tedy neplatí, nebo jsme tok vypočítali chybně? Nic z toho. Problém je v tom, že nejsou splněny předpoklady GO věty. Podívejte se na ně znovu. Už to vidíte? Jsou porušeny v jediném bodě, v počátku soustavy souřadnic, kde intenzita není definována. Ten jediný bod, jakási singularita, všechno pokazí. Nejsou-li splněny předpoklady věty, nelze ji použít.

Přesto můžeme GO větu i pro případ bodového náboje vhodně uplatnit. V tématu 2 jsme pořádně počítali tok intenzity od bodového náboje kulovou plochou S se středem v náboji a tak nějak „logicky“ jsme usoudili, že bude stejný pro libovolnou plochu obepínající náboj. Správně aplikovaná GO věta nám umožní to dokázat. Uvidíme to v následujícím příkladu.

PŘÍKLAD: Tok intenzity $\vec{E}$ od bodového náboje libovolnou uzavřenou plochou

Plochu S orientujme vnější normálou $\vec{n}$. Počátek soustavy souřadnic, který kazí GO větu, „vyjmeme ze hry“ pomocí kulové plochy S_0 se středem v počátku, orientované vnější normálou $\vec{n}_0$. GO větu aplikujeme na plochu $S + S_0$. Pro ni jsou předpoklady věty splněny – počátek soustavy souřadnic leží vně objemu obepnutého plochami S a S_0.



$$\int_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_0} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S+S_0} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\int_{S+S_0} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{E}\,\mathrm{d}V = 0$$

$$\int_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\int_{S_0} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

Zdůvodníte znaménko v poslední rovnosti? Správně – kulová plocha S_0 je nyní orientována opačně než při výpočtu toku v rámci tématu 2.

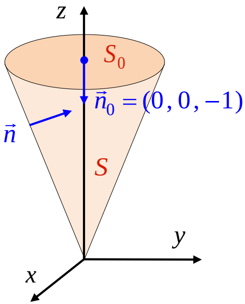
PŘÍKLAD: Užití Gaussovy-Ostrogradského věty

Na jednoduchém příkladu ukážeme praktické využití GO věty. Úkolem bude určit tok vektorového pole plochou S, která není uzavřená, takže se na ni GO věta nevztahuje. Může se však ukázat výhodným plochu „uzavřít“, použít GO větu a z výsledku pak „oddělit“ část toku odpovídajícího původní ploše S.

V rámci tématu 2 byla první úloha k procvičení zaměřena na výpočet toku vektorového pole $\vec{F} = (y - z,\, z - x,\, x - y)$ pláštěm kužele $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, s normálou orientovanou dovnitř kužele. Tok vyšel nulový. Postup zahrnuje parametrizaci, výpočet tečných vektorů k souřadnicovým křivkám a jejich vektorového součinu, integraci. Uvědomíme-li si, že $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, můžeme výpočet urychlit. Uzavřeme-li plášť S „deklíkem“ S_0 o rovnici $z = 1$ orientovaným normálou „dovnitř“ $\vec{n}_0 = (0,\, 0,\, -1)$, dostaneme uzavřenou plochu $S + S_0$ orientovanou vnitřní normálou. V GO větě musíme obrátit znaménko u jednoho z integrálů, tj.

$$\int_{S+S_0} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \operatorname{div} \vec{F}\,\mathrm{d}V = 0, \implies \int_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\int_{S_0} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S}.$$

Předem samozřejmě nevíme, jaký bude tok plochami S a S_0, víme jen, že oba toky budou shodné až na znaménko. Výpočet toku plochou S_0 je však o dost jednodušší.



$$S_0: \ x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi, \ z = 1$$

$$\vec{F} = (y - z, z - x, x - y)$$

$$\vec{F}\vec{n}_0 = -(x - y)$$

$$(\vec{F}\vec{n}_0)\circ S_0 = r(\sin\varphi - \cos\varphi)$$

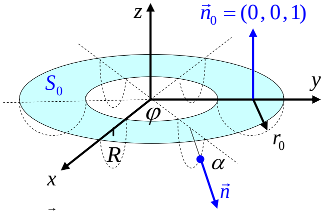
$$\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$Q = -\int_{S_0} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Získaný dvojný integrál krok za krokem propočtěte.

PŘÍKLAD: Ještě jeden a pořádně

Vypočteme tok vektorového pole $\vec{F} = (x,\, y,\, z)$ povrchem dolní poloviny anuloidu vzniklého rotací (kolem osy z) půlkružnice o poloměru r_0 se středem v bodě $(R,\, 0,\, 0)$, $r_0 \leq R$, a orientovaného ven z vnitřku anuloidu.



$$S: x = (R + r_0 \cos\alpha)\cos\varphi$$
$$y = (R + r_0 \cos\alpha)\sin\varphi$$
$$z = -r_0 \sin\alpha\,,\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \alpha \in [0, \pi]$$

(x, y, z)

$$\vec{f}_\alpha = (-r_0 \sin\alpha\cos\varphi,\ -r_0 \sin\alpha\sin\varphi,\ -r_0\cos\alpha)$$
$$\vec{f}_\varphi = (-(R + r_0\cos\alpha)\sin\varphi,\ (R + r_0\cos\alpha)\cos\varphi,\ 0)$$
$$\vec{f}_\alpha \times \vec{f}_\varphi = (r_0(R + r_0\cos\alpha)\cos\alpha\cos\varphi,\ r_0(R + r_0\cos\alpha)\cos\alpha\sin\varphi,\ -r_0(R + r_0\cos\alpha)\sin\alpha)$$

Výpočet provedeme jednak přímo, jednak pomocí GO věty doplněním na uzavřenou plochu. Počítejte spolu se mnou na papír.

Vedle obrázku vidíme parametrizaci plochy S (je jen naznačena – neumím ten obrázek udělat prostorový). Dále máme vypočteny tečné vektory k souřadnicovým křivkám a jejich vektorový součin (pořadí $\vec{f}_\alpha \times \vec{f}_\varphi$ odpovídá orientaci plochy S směrem „ven“). Pro tok dostaneme (pokud jste zapomněli, vraťte se k tématu 2)

$$Q = \int_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\vec{F}\circ S)(\vec{f}_\alpha \times \vec{f}_\varphi)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(r_0(R + r_0\cos\alpha)^2\cos\alpha + r_0^2(R + r_0\cos\alpha)\sin^2\alpha\right)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\varphi.$$

$=$ ... roznásobte a upravte, je to jen pracná rutina ... $=$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}\left(r_0R^2\cos\alpha + r_0^2R + r_0^2R\cos^2\alpha + r_0^3\cos\alpha\right)\,\mathrm{d}\alpha = 3\pi^2 r_0^2 R.$$

Nyní pomocí GO věty: uzavřeme plochu mezikružím S_0 se středem v počátku soustavy souřadnic, o poloměrech $R - r_0$ a $R + r_0$ a ležícím v rovině xy. Orientujeme je ve směru normály $\vec{n}_0 = (0,\, 0,\, 1)$, tj. „ven“. Parametrizace, tečné vektory, integrál:

$$S_0 :\; x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi,\;\; z = 0,\;\; r \in [R - r_0,\, R + r_0],\;\; \varphi \in [0,\, 2\pi]$$
$$\vec{f}_r = (\cos\varphi,\, \sin\varphi,\, 0),\;\; \vec{f}_\varphi = (-r\sin\varphi,\, r\cos\varphi,\, 0),\;\; \vec{f}_r \times \vec{f}_\varphi = (0,\, 0,\, r)$$

$$(\vec{F} \circ S_0)(\vec{f}_r \times \vec{f}_\varphi) = 0 \implies Q_0 = 0.$$

Divergence vektorového pole $\vec{F}$ je $\operatorname{div} \vec{F} = 3$. Objem anuloidu jsme počítali ještě v přednášce, jeho polovina je $V = \pi^2 r_0^2 R$. Pak

$$Q + Q_0 = Q = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{F}\, \mathrm{d}V = 3\pi^2 r_0^2 R \implies Q = 3\pi^2 r_0^2 R,$$

což je očekávaný výsledek, získaný podstatně méně pracně než přímým výpočtem. Ale pozor, postup je třeba volit podle konkrétní situace, GO věta nemusí vždy přinést zjednodušení.

Greenova věta

Greenova věta převádí křivkový integrál 2. druhu z vektorového pole $\vec{F}$ po rovinné uzavřené orientované křivce na integrál, jehož integračním oborem je rovinný útvar obepnutý touto křivkou.

VĚTA: Greenova

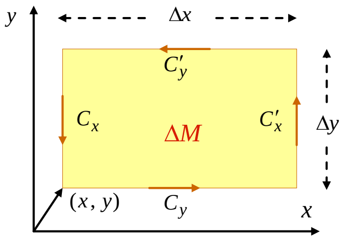
Nechť M je jordanovsky měřitelná množina v rovině a křivka C její hladká (resp. po částech hladká) hranice orientovaná v kladném geometrickém smyslu. Nechť $\vec{F}(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole definované na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^2$ obsahující množinu M i s hranicí C. Pak

$$\int_C \vec{F}(x, y)\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_M \left(\frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Zase fyzika – práce silového pole (můžete přeskočit na snímek 34)

Ani Greenovu větu nebudeme matematicky dokazovat. Použijeme jen názorného zdůvodnění, podobně jako u věty GO.

Práce silového pole $\vec{F}$ po křivce



$$C = C_y + C'_x + C'_y + C_x$$

$$\Delta W = \int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_C (F_x(x, y)\,\mathrm{d}x + F_y(x, y)\,\mathrm{d}y)$$

$$\Delta W_y + \Delta W'_y = \int_x^{x+\Delta x} F_x(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_{x+\Delta x}^{x} F_x(x, y+\Delta y)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_x^{x+\Delta x} [F_x(x, y+\Delta y) - F_x(x, y)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\Delta y \int_x^{x+\Delta x} \frac{F_x(x, y+\Delta y) - F_x(x, y)]}{\Delta y}\,\mathrm{d}x$$

Počítáme práci silového pole $\vec{F}$ po křivce $C = C_y + C'_x + C'_y + C_x$. Výpočet po úsečkách C_y a C'_y, podél nichž je $\mathrm{d}y = 0$, je v obrázku.

Všimněte si posledního integrandu. Kdybychom provedli limitní přechod $\Delta y \to 0$, dostaneme parciální derivaci x-ové složky síly podle proměnné y, tj.

$$\Delta W_y + \Delta W'_y \doteq \Delta y \int\limits_{x}^{x+\Delta x} -\frac{\partial F_x(x,\,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x \doteq \int\limits_{x}^{\Delta x}\int\limits_{y}^{y+\Delta y} -\frac{\partial F_x(x,\,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Podobně vypočteme práci $\Delta W_x + \Delta W'_x$ po úsečkách C_x a C'_x. Sečtením dostaneme celkovou práci silového pole po uzavřené křivce C obepínající rovinný útvar ΔM a orientované v kladném smyslu:

$$\Delta W = \int\limits_{C} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y) = \int\limits_{\Delta M} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

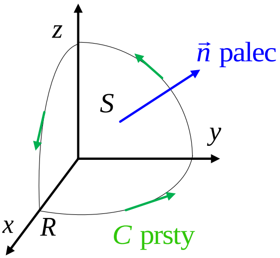
V tom už poznáváme Greenovu větu po náš speciální případ.

Stokesova věta

Stokesova věta je v podstatě zobecněním věty Greenovy na trojrozměrnou situaci – převádí křivkový integrál 2. druhu z vektorového pole $\vec{F}(x, y, z)$ po orientované uzavřené křivce C na integrál z rotace tohoto vektorového pole po orientované ploše S, jíž je křivka C hranicí. Než větu formulujeme, je třeba říct ještě něco k orientaci plochy a její hranice.

Představme si, že plocha S je orientována spojitým vektorovým polem jednotkové normály $\vec{n}$. Správnou orientaci hraniční křivky můžeme určit pomocí „pravidla pravé ruky“ (obrázek), nebo formálně, kdy parametrizaci plochy, kterou volíme souhlasně s orientací (viz téma 2), „přeneseme“ na hraniční křivku – to uvidíme později na příkladu.

Jak správně orientovat hranici plochy



plocha S je hladká

křivka C je po částech hladká

(je složená z konečně mnoha

hladkých částí - zde tří)

orientace C souhlasná s normálou:

pravidlo pravé ruky

POZNÁMKA: Co je hladká, resp. po částech hladká plocha, nebo křivka, víme z přednášky. Obrázek to rekapituluje názorně.

VĚTA: Stokesova

Nechť S je hladká (příp. po částech hladká) plocha orientovaná jednotkovou normálou v $\mathbb{R}^3$ a C její hladká (příp. po částech hladká) hranice orientovaná souhlasně s orientací plochy. Nechť $\vec{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole definované na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^3$ obsahující plochu S i s hranicí C. Pak

$$\int_C \vec{F}(x, y, z)\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}(x, y, z)\,\mathrm{d}\vec{S}$$

POZNÁMKA: Vypočtěte složky rotace vektorového pole $\vec{F}$, pro něž je $F_z = 0$ a F_x a F_y nezávisí na proměnné z. Počítali jste správně? Pak vidíte, že Greenova věta je jen speciálním případem věty Stokesovy.

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left(0,\, 0,\, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right).$$

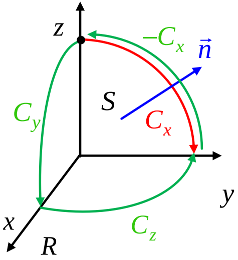
PŘÍKLAD: Použití Stokesovy věty

Zvolme silové pole $\vec{F} = \left(\frac{1}{2}z^2,\ \frac{1}{2}x^2,\ \frac{1}{2}y^2\right)$. Jeho rotace je (propočtěte) $\operatorname{rot} \vec{F} = (y,\ z,\ x)$. Vypočteme práci síly $\vec{F}$ po křivce C ohraničující plochu na předchozím obrázku. Jedná se o osminu kulové plochy v prvním oktantu. Je orientována jednotkovou normálou ve směru $\vec{r} = (x,\ y,\ z)$ (radiální směr). Parametrizujeme ji pomocí sférických úhlových souřadnic $\vartheta \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$ a $\varphi \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$. (Toto pořadí parametrů odpovídá volbě normály – ověřte, že vektor $\vec{f}_\vartheta \times \vec{f}_\varphi$ je v každém bodě plochy S souhlasně rovnoběžný s $\vec{n}$).

$$x = R \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = R \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = R \cos\vartheta.$$

Křivka C je tvořena třemi hladkými oblouky, integál vyjadřující práci bude součtem integrálů po jednotlivých z nich. Musíme je tedy také parametrizovat. Použijeme k tomu parametrizaci plochy, v níž vždy jednu proměnnou (buď ϑ, nebo φ) zafixujeme na krajní hodnotě definičního intervalu, tj. 0, resp. $\frac{\pi}{2}$.

Zopakujeme obrázek a doplníme jej.



$C_0 : \vartheta = 0, \varphi = t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (parametr)

$C_z : \vartheta = \frac{\pi}{2}, \varphi = t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (parametr)

$C_y : \varphi = 0, \vartheta = t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (parametr)

$C_x : \varphi = \frac{\pi}{2}, \vartheta = t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (parametr)

křivku C_x je třeba přeorientovat, nebo změnit znaménko integrálu:

$$\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_z} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_{C_y} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} - \int_{C_x} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} \quad (C_0 \text{ je zanedbatelná mn. (bod)})$$

Křivky parametrizujeme tak, že do parametrizace plochy dosadíme vždy pevnou hodnotu jedné z proměnných ϑ, φ, druhá bude parametrem t (obrázek).

Provedeme parametrizaci křivek (sami dosazujte, potom zkontrolujte):

$$
\begin{aligned}
S \quad &: \quad x = R\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = R\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = R\cos\vartheta \\
C_0 \quad &: \quad \vartheta = 0, \quad \varphi = t, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad \text{zanedbatelná množina} \\
C_z \quad &: \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = t, x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = 0 \\
C_y \quad &: \quad \vartheta = t, \quad \varphi = 0, \quad x = R\sin t, \quad y = 0, \quad z = R\cos t \\
C_x \quad &: \quad \vartheta = t, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad x = 0, \quad y = R\sin t, \quad z = R\cos t
\end{aligned}
$$

- C_0 je bod, do kterého na kouli ústí všechny poledníky. Do integrálu nepřispěje – je to zanedbatelná množina.
- Křivka C_z je správně orientovaná část rovníku. Její počáteční bod (pro $t = 0$) je $(R,\ 0,\ 0)$ koncový bod (pro $t = \frac{\pi}{2}$) je $(0,\ R,\ 0)$.
- Křivka C_y je část poledníku, rovněž správně orientovaná (určete počáteční a koncový bod).
- Parametrizace křivky C_x je nesouhlasná s orientací plochy. Její počáteční bod (pro $t = 0$) je $(0,\ 0,\ R)$, koncový (pro $t = \frac{\pi}{2}$) je $(0,\ R,\ 0)$.

A teď už konečně výpočet práce

Provedeme jej jednak přímo, jednak pomocí Stokesovy věty. Někeré výpočty ukážeme, zbylé podle předvedeného vzoru proveďte sami.

$$W = \int\limits_{C_z} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int\limits_{C_y} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} - \int\limits_{C_x} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

Práce po křivce C_z:

$$\vec{F} \circ C_z = (0,\, \frac{1}{2}R^2 \cos^2 t,\, \frac{1}{2}R^2 \sin^2 t), \quad \frac{\mathrm{d}(\vec{r} \circ C_z)}{\mathrm{d}t} = (-R\sin t,\, R\cos t,\, 0)$$

$$(\vec{F} \circ C_z)\frac{(\mathrm{d}\vec{r} \circ C_z)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}R^3 \cos^3 t \implies W(C_z) = \frac{1}{2}R^3 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}R^3$$

Křivkové integrály prvního i druhého druhu jsme již sice počítali dříve, přesto postup okomentujeme:

Postup při integraci po parametrizované křivce C

- Vektorové pole $\vec{F}$ vyjádříme v bodech křivky (do jeho složek se dosadí za x, y a z parametrizace křivky). Dostaneme složky vektoru $\vec{F} \circ C(t)$ jako funkce parametru t.
- Za složky vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$ rovněž dosadíme parametrizaci křivky C. Dostaneme $\vec{r} \circ C(t)$ jako vektorovou funkci t.
- Vektorovou funkci $\vec{r} \circ C(t)$ derivujeme po složkách, výsledkem je tečný vektor $\vec{\tau}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r} \circ C(t)}{\mathrm{d}t}$ ke křivce C v bodě, jehož parametr je t.
- Vypočteme skalární součin vektorů $\vec{F} \circ C(t)$ a $\vec{\tau}(t)$. Ten budeme integrovat v mezích parametru t.

Když si znovu projdete postup na předchozím snímku, uvidíte, že to právě takto bylo. A můžete sami počítat práci pole $\vec{F}$ po křivkách C_y a C_x. Vyjde $W_y = \frac{1}{3}R^3$, $W_x = -\frac{1}{3}R^3$. Celková práce je (pozor na orientaci křivky C_x!!) $W = W_z + W_y - W_x = R^3$.

Výpočet práce pomocí Stokesovy věty

Výpočet provedeme jako integrál prvního druhu ze skalární funkce $\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{F}$ (téma 2). Návod rovnou provádějte. Pište, upravujte a počítejte.

- Vypočtěte skalární součin vektorů $\vec{n} = \frac{1}{R}(x,\, y,\, z)$, $\mathrm{rot}\,\vec{F} = (y,\, z,\, x)$:

$$\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{R}(xy + yz + xz)$$

- Dosaďte do něj parametrizaci plochy S:

$$(\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{F})\circ S = R(\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi)$$

- Plošný element kulové plochy znáte, $\mathrm{d}S = R^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$.
- Počíteje a dopočítejte integrál: $\int\limits_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_S (\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{F})\,\mathrm{d}S =$

$$= R^3 \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} (\sin^3\vartheta\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\vartheta\cos\vartheta(\sin\varphi + \cos\varphi))\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \;\longrightarrow\; R^3$$

Příklady fyzikálních aplikací

O fyzikální motivaci k integrálním větám jsme hovořili v úvodu. Teď se budeme věnovat některým konkrétním fyzikálním aplikacím. Zásadní přírodní zákony bývají objeveny empiricky a jsou proto zákony integrálními. Uvádějí totiž většinou vztah mezi globálně (integrálně) definovanými veličinami, jejichž integrační obory jsou různé. Viděli jsme to u Gaussova zákona (který je matematicky formulovaným důsledkem empiricky zjištěného zákona Coulombova). Porovnává celkový náboj (integrál nábojové hustoty ϱ přes objem) a tok intenzity elektrostatického pole $\vec{E}$ plochou, která tento objem ohraničuje (integračním oborem je plocha). Integrální věty převádějí integrál z jistého oboru na integrál přes jeho hranici a umožňují tak porovnat příslušné integrandy. Ty již přinášejí lokální (diferenciální) informaci o porovnávaných veličinách v daném bodě prostoru, resp. v daném okamžiku.

Rovnice kontinuity

Jedná se v podstatě o zákon zachování hmotnosti. Hmotnostní tok je popsán vektorovým polem $\varrho\vec{v}$, kde ϱ je hustota kapaliny. Je-li hmotnostní tok uzavřenou plochou S orientovanou vnější normálou kladný, kapaliny uvnitř objemu V ubývá a naopak, tj.

$$\int_S \varrho\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho\,\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial\varrho}{\partial t}\,\mathrm{d}V.$$

To je rovnice kontinuity v integrálním tvaru. Věta GO umožňuje převést integrál na levé straně na integrál objemový:

$$\int_V \left(\mathrm{div}\,(\varrho\vec{v}) - \frac{\partial\varrho}{\partial t}\right)\mathrm{d}t = 0 \implies \mathrm{div}\,(\varrho\vec{v}) - \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$$

Protože je objem V libovolný, nelze předchozí rovnost splnit jinak, než je nulový integrand – to pak je rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru.

Gaussův zákon a Maxwellova rovnice

Ke Gaussovu zákonu elektrostatiky se vracíme už potřetí. Formulovali jsme si jej v integrálním tvaru pro spojitě rozložený náboj s hustotou $\varrho(x, y, z)$:

$$\int\limits_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_V \frac{\varrho}{\varepsilon}\,\mathrm{d}V.$$

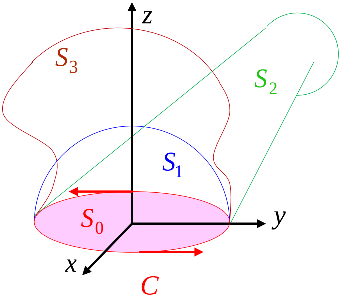
GO větou opět převedeme plošný integrál na objemový a uvážíme, že integrační obory jsou libovolné:

$$\int\limits_V \left(\operatorname{div}\vec{E} - \frac{\varrho}{\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}V = 0 \implies \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon}.$$

Získali jsme diferenciální tvar Gaussova zákona neboli první Maxwellovu rovnici. Znovu však připomeňme, že je to pořád jen matematicky zpracovaný Coulombův zákon.

Konzervativní silová pole

POZNÁMKA: Ještě ke Stokesově větě: Představme si, že jedna a táž křivka je orientovanou hranicí více ploch.



$$\int_{S_0} \mathrm{rot}\, \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \mathrm{rot}\, \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{S} =$$
$$= \int_{S_2} \mathrm{rot}\, \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_3} \mathrm{rot}\, \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{S} = \cdots =$$
$$= \cdots = \int_{C} \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r}$$

Co to podle Stokesovy věty znamená? Že tok rotace libovolného vektorového pole $\vec{F}$ každou z těchto ploch je stejný a roven křivkovému integrálu druhého druhu z vektorového pole $\vec{F}$. Stačí proto vypočítat tok jen jednou z nich, a třeba vybrat takovou, aby se integrál dobře počítal.

Konzervativní silová pole „se netočí“ (nemají víry)

Jako konzervativní silová pole jsme v mechanice definovali taková, jejichž práce pro každé uzavřené křivce je nulová (důsledkem byl zákon zachování mechanické energie).

POZNÁMKA: Pozor!! Z toho, že $\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0$ pro libovolnou uzavřenou křivku, nelze usuzovat, že by integrand, tj. $\vec{F}$ byl nulový!! Tím, že je křivka uzavřená, není už tak úplně libovolná.

Co z toho tedy usoudit lze? Podle Stokesovy věty to, že integrál z vektorového pole $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ po všech možných plochách, které mají za hranici libovolnou uzavřenou křivku (a to jsou všechny plochy, pokud samy nejsou uzavřené – hranice uzavřené plochy je prázdná množina). Z toho už usoudit na nulovost integrandu, tj. rotace pole $\vec{F}$, lze. Takže: Silové pole $\vec{F}$ je konzervativní právě když je jeho rotace nulová – tzv. nevírové pole.

Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Pamatujete? Na koncích smyčky v proměnném magnetickém poli vzniká indukované napětí. Matematicky to znamená, že záporně vzatá časová změna toku magnetické indukce $\vec{B}(x, y, z, t)$ (každou) plochou S, jejíž hranicí je právě uzavřená smyčka C, je rovna indukovanému napětí. Napětí na koncích smyčky je však práce intenzity $\vec{E}$ po uzavřené křivce C, tedy

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = \left(-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{S}\right) = \int_C \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

To je Faradayův zákon v integrálním tvaru. Pomocí Stokesovy věty:

$$\int_S \left(\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\,\mathrm{d}\vec{S} \Longrightarrow \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Výsledek je Maxwellova rovnice představující Faradayův zákon v diferenciálním tvaru.

Úlohy k procvičení

Pokud jste během studia tohoto tématu propočítali vše, co k tomu bylo určeno, nebudou vám následující úlohy dělat problém.

Dvakrát Gaussova-Ostrogradského věta

- Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ kulovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ orientovanou vnější normálou, jak přímo, tak pomocí GO věty. Přímý výpočet je dřina, GO větou je to hned. (Výsledek: $\frac{12}{5}\pi R^5$.)
- Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y, z)$ dolní polovinou kulové plochy o poloměru $R = 1$, jejíž střed je v bodě $(0, 0, 1)$. Plocha je orientována „ven“ z koule. Výpočet proveďte (a) přímo, (b) pomocí GO věty vhodným doplněním plochy na uzavřenou. (Výsledek: π, uzavření plochy kruhem $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$)

Greenova a Stokesova věta

- (a) Vypočtěte práci silového pole v $\mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ po kružnici $K: x^2 + y^2 = R^2$, obíhající počátek soustavy souřadnic jednou v kladném smyslu. (b) Vypočtěte $\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$. Můžeme použít Greenovu větu? Zdůvodněte. (c) Lze říci, čemu je rovna práce tohoto pole po libovolné uzavřené křivce C obíhající počátek rovněž jednou v kladném smyslu? Zdůvodněte.
  (Výsledek: (a) 2π, (b) Nemůžeme, nejsou splněny předpoklady. Pole $\vec{F}$ není definováno v bodě $(0, 0)$, který kružnice obíhá, (c) 2π (použijte Greenovu větu na křivku $C + (-K)$).)
- Vypočtěte práci silového pole $\vec{F} = (z - y, x - z, y - x)$ po kružnici $x^2 + y^2 = 1$ obíhající počátek soustavy souřadnic jednou v záporném smyslu přímým výpočtem i pomocí Stokesovy věty. Návod: při výpočtu pomocí Stokesovy věty zvolte plochu vhodně tak, aby se integrál dobře počítal.
  (Výsledek: -2π)