Základní matematické metody ve fyzice 2

Téma 5: Řady funkcí, konvergence

Obsah tématu

1. Stručné opakování z analýzy – posloupnosti a řady čísel.
2. Posloupnosti a řady funkcí.
3. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi II/2, VUTIUM, Brno 2012 (strany 385-405).

V tomto a příštím tématu nepůjde ani tak o nějaké pečlivé studium posloupností a řad funkcí jako takových, jako o jejich využití k aplikacím – např. k přibližnému vyjádření složitějších funkcí pomocí jednodušších.

V pohybové rovnici matematického kyvadla jsme sinus výchylky nahrazovali výchylkou v obloukové míře za předpokladu, že výchylka byla „dostatečně malá". Rozdíl funkčních hodnot $\sin\varphi - \sin 0$ jsme nahradili diferenciálem funkce sinus v základním bodě $\varphi_0 = 0$. Diferenciál je lineární funkcí přírůstku proměnné,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq \mathrm{d}f(x_0, h), \;\; \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)\, h,$$

jestliže ovšem funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci. Pro funkci sinus a $\varphi_0 = 0$ je $(\sin\varphi)' = \cos\varphi$, $\cos\varphi_0 = 1$ a pak $\sin\varphi \doteq \varphi$.

Zpřesnit taková vyjádření a odhadnout jejich chybu můžeme pomocí řad funkcí.

Stručné opakování z analýzy – posloupnosti a řady čísel

Z analýzy víte, že posloupnost reálných čísel je reálná funkce definovaná na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$, tj.

$$f : \mathbb{N} \ni n \longrightarrow f(n) = a_n \in \mathbb{R}, \quad \text{značíme} \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Směřujeme k definici a vlastnostem posloupností funkcí, tj. zobrazení typu

$$\mathbb{N} \ni n \longrightarrow f_n(x) \in \mathcal{F}(D), \quad \text{značíme} \quad \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

kde $\mathcal{F}(D)$ je množina reálných funkcí jedné proměnné definovaných na specifikovaném definičním oboru $D \subset \mathbb{R}$ a majících případně specifikované vlastnosti (funkce spojité, diferencovatelné, ...). Funkce však nabývají svých funkčních hodnot, a to jsou čísla. Proto stručně shrneme to podstatné o posloupnostech čísel.

DEFINICE: Limita posloupnosti čísel

Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazývá vlastní limita posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ je $|a_n - a| < \varepsilon$.

Řekneme, že posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$, jestliže pro libovolné číslo $M \in \mathbb{R}$ existuje index N tak, že pro všechna $n > N$ je $a_n > M$, resp. $a_n < M$.

Posloupnost, která má vlastní limitu, se nazývá konvergentní (konverguje k číslu a), posloupnost s nevlastní limitou je divergentní, ostatní posloupnosti jsou oscilující.

PŘÍKLADY: Konvergentní, divergentní a oscilující posloupnost

- $\{1 - n^{-2}\} \to 1$, vlastní limitou posloupnosti je $a = 1$
- $\{n\} \to +\infty$, limita posloupnosti je nevlastní, $+\infty$
- $\{(-1)^n n\} = \{-1, 2, -3, \ldots\}$, posloupnost osciluje (hromadné body jsou $+\infty$ a $-\infty$.)

Nebudeme opakovat různá kritéria konvergence číselných posloupností, najdou se leckde v literatuře (např. MII/2, str. 344-356). Při zjišťování limity posloupnosti postupujeme prakticky – počítáme pomocí pravidel, která jsme používali při výpočtu limit typu $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Připomeňme jen to, že konvergentní a divergentní posloupnosti mají právě jeden tzv. hromadný bod, v případě konvergentní posloupnosti je to její limita, u posloupnosti divergentní je to nevlastní limita. Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod, oscilující posloupnosti jich mají více.

Vyjádříme-li podstatu hromadného bodu názorně, můžeme říci, že je to každý takový bod reálné osy, včetně $\pm\infty$, v jehož jakkoli zvoleném okolí se „shromažďuje" nekonečně mnoho členů posloupnosti. (V případě vlastní či nevlastní limity pak od jistého indexu počínaje všechny.)

DEFINICE: Číselná řada

Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, je číselná posloupnost. Označme

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
\dots &= \dots\dots\dots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
\dots &= \dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se nazývá číselná řada, čísla s_n její částečné součty. Značíme standardně

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{popřípadě} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \text{pro} \;\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Limitu s (pokud existuje) posloupnosti $\{s_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, resp. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazýváme součet řady.

Terminologie konverguje, diverguje, osciluje se vztahuje i na řady, konkrétně na posloupnosti částečných součtů. Důležitý je pojem tzv. absolutní konvergence řady.

DEFINICE: Absolutní konvergence řady

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá absolutně konvergentní, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Absolutní konvergence či nekonvergence má značný dopad na chování řady a praktické zacházení s ní:

- Konverguje-li řada absolutně, pak konverguje i „obyčejně“. Naopak věta neplatí.
- Při vytváření částečných součtů musíme obecně dodržovat pořadí členů. Konverguje-li však řada absolutně, můžeme „přeskládávat“ jak řadu z absolutních hodnot, tak řadu původní (a ona dokonverguje vždy je stejné limitě).

Nebudeme opakovat ani kritéria konvergence číselných řad – vše bylo probráno v analýze a je také v běžně dostupné literatuře. Jen jednu důležitou věc si uvědomme:

Poznáme předem alespoň v některých situacích, že číselná řada nekonverguje, a to jen podle jejích členů? Zde je kritérium:

VĚTA: Nutná podmínka konvergence řady

Jestliže číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k nule.

Znamená to, že řada tvořená členy, jejichž posloupnost nemá za limitu nulu, nemůže konvergovat. Opačná implikace neplatí. Tak třeba tzv. harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} + \cdots$ nekonverguje, přestože $\lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0$.

Posloupnosti a řady funkcí

DEFINICE: Posloupnost a řada funkcí

Zobrazení

$$\mathbb{N} \ni n \longrightarrow f_n(x) \in \mathcal{F}(D), \quad D \subset \mathbb{R} \text{ je definiční obor funkcí}$$

se nazývá posloupnost funkcí, posloupnost částečných součtů $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, je řada funkcí.

Zapisujeme standardně

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

U posloupností a řad funkcí se setkáváme hlavně s dvojím typem konvergence, bodovou a stejnoměrnou, které podrobněji vyložíme.

Formulujeme nyní definice obou typů konvergence posloupnosti a řady funkcí. Bude se vám možná zdát, že jde jen o jemný gramatický rozdíl, neřkuli „slovíčkaření“. Uvidíme však, že jde o rozdíl velmi podstatný. Stejnoměrná konvergence zaručuje, že s řadou funkcí můžeme provádět operace, které při pouhé bodové konvergenci nejsou dovoleny.

DEFINICE: Bodová konvergence posloupnosti funkcí I

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(x) \in \mathcal{F}(D)$, konverguje bodově na množině D k funkci $f(x)$, jestliže číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}$, $n \in \mathbb{N}$, konverguje v každém bodě $x_0 \in D$ k limitě $f(x_0)$.

Tato definice vypadá velmi jednoduše a pochopitelně. Tak ji trochu zkomplikujeme – vyslovíme ji jinak, pomocí samotné definice limity číselné posloupnosti. Čtěte pozorně:

DEFINICE: Bodová konvergence posloupnosti funkcí II

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(x) \in \mathcal{F}(D)$, konverguje bodově na množině D k funkci $f(x)$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ a každému bodu $x_0 \in D$ existuje index $N(x_0, \varepsilon)$ tak, že pro všechny indexy $n > N(x_0, \varepsilon)$ platí $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.

DEFINICE: Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(x) \in \mathcal{F}(D)$, konverguje stejnoměrně na množině D k funkci $f(x)$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $N(\varepsilon)$ tak, že pro všechny indexy $n > N(\varepsilon)$ a všechny body $x_0 \in D$ platí $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Nepochybně jste si v těchto formulacích všimli odlišného umístění slovního spojení pro všechny body $x_0 \in D$. A také zřetelného vyznačení, na čem závisí index N, od kterého počínaje pro všechny indexy vyšší platí určitá nerovnost. Rozebereme to na příkladu.

PŘÍKLAD: Bodová versus stejnoměrná konvergence

Zkoumejme posloupnost funkcí $\{x^n\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Je to geometrická posloupnost s prvním členem 1 a kvocientem x. Například pro různá x_0 máme co do činění s posloupnostmi

$$
\begin{array}{rl}
x_0 = 1 & \{1, 1, \ldots, 1 \ldots\} \longrightarrow 1 \\
x_0 = 2 & \{1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots\} \longrightarrow +\infty \\
x_0 = -2 & \{1, -2, 4, -8, \ldots, (-2)^n, \ldots\}, \quad \text{posloupnost osciluje} \\
x_0 = \frac{1}{2} & \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}\right\} \longrightarrow 0 \\
x_0 = -\frac{1}{2} & \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2^n}\right\} \longrightarrow 0 \\
x_0 = \frac{1}{5} & \left\{1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots, \frac{1}{5^n}, \ldots\right\} \longrightarrow 0
\end{array}
$$

Ze střední školy víte, že členy posloupnosti s kvocientem $|x_0| < 1$ klesají k nule, zatímco pro $|x_0| > 1$ posloupnost žádnou limitní hodnotu nemá.

Vypadá to tak, že pro $x_0 \in (-1, 1)$ konvergují číselné posloupnosti $\{x_0^n\}$ k nule, takže posloupnost funkcí $\{x^n\}$ konverguje bodově k nulové funkci, a to tím „rychleji“, čím je $|x_0|$ menší. Ale musíme to dokázat. Zvolme $\varepsilon > 0$ a hledejme, jak závisí index $N(x_0, \varepsilon)$ na x_0. Znamená to řešit nerovnost $|x_0^n - 0| < \varepsilon$:

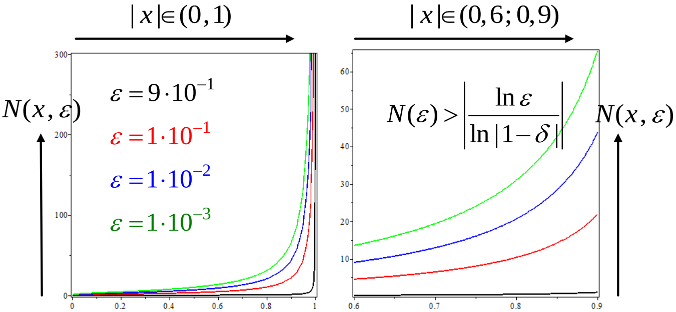
$$|x_0|^n < \varepsilon \implies n \ln |x_0| < \ln \varepsilon \implies |n| > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x_0|}.$$

Platí $\ln |x_0| < 0$, neboť $|x_0| < 1$. Je-li $\varepsilon > 1$, je nerovnost splněna pro všechny hodnoty indexu n, pro $\varepsilon < 1$ dostáváme nerovnost

$$N(x_0, \varepsilon) > \left| \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x_0|} \right|.$$

Skutečně – čím je $|x_0|$ bližší jedné, tím je index $N(x_0, \varepsilon)$ větší a nerovnost $|x_0^n - 0| < \varepsilon$ je s rostoucím indexem n splněna „později“, konvergence je „horší“. I když se konvergence posloupnosti $\{x^n\}$ zhoršuje, jak se x blíží hranici intervalu $(-1, 1)$, pořád je definice bodové konvergence splněna.

Máme-li prošetřit stejnoměrnou konvergenci, musíme zjistit, zda index N, od kterého výše (tj. pro $n > N$) platí nerovnost $|x^n - 0| < \varepsilon$, existuje univerzálně pro celý interval $(-1, 1)$, nezávisle na x_0. Obrázek ukazuje, že nikoli, neboť $\lim_{|x|\to 1} N(x, \varepsilon) = \infty$ pro libovolné ε. Na intervalu $D = (-1, 1)$ posloupnost konverguje bodově, ne však stejnoměrně. Pokud však interval o sebemenší $\delta > 0$ zmenšíme, např. na interval $(-1 + \delta, 1 - \delta)$, stejnoměrné konvergence dosáhneme.



Pojem bodové a stejnoměrné konvergence se vztahuje i na řady, konkrétně na posloupnosti jejich částečných součtů. Zavádíme rovněž pojem absolutní konvergence řady, jímž se rozumí konvergence (bodová, resp. stejnoměrná) řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Absolutní a stejnoměrná konvergence jsou důležité pro možnost provádět s řadou určité operace. Uvedeme nejpodstatnější tvrzení.

VĚTA: Srovnávací kritérium

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na D a $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje absolutně a stejnoměrně na D.

Tohle je moc dobrá věta. Řadu můžeme porovnat s vhodnou řadou (tzv. majorantou), třeba číselnou, nebo geometrickou, apod., o níž víme, že konverguje na D stejnoměrně, a mít tak jistotu, že stejnoměrně konverguje i naše řada.

PŘÍKLAD: Použití majoranty

Tak třeba o číselné geometrické řadě $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ pro pevně zvolené $|q| < 1$ víme, že konverguje. Na střední škole jste matematickou indukcí dokazovali, že její n-tý částečný součet je $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Platí $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$. Řada tedy konverguje. Tato konvergence je i stejnoměrná, protože řada vůbec proměnnou x neobsahuje, je tvořena ze samých konstantních fukcí. Zvolme pro jednoduchost $0 < q < 1 - \delta$, $0 < \delta < 1$. Pak pro libovolné $x \in (-1 + \delta, 1 - \delta)$ je $|x^n| < q^n$, $|x^n \sin nx| < q^n$, $|x^n \cos nx| < q^n$ (neboť $|\sin nx| \leq 1$, $|\cos nx| \leq 1$). Řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin nx, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos nx$$

tedy konvergují na intervalu $(-1 + \delta, 1 - \delta)$ stejnoměrně. A dokonce to platí i tehdy, když do argumentu sinu a kosinu dosadíme místo nx libovolnou funkci $h_n(x)$. Jednu nevýhodu to má: pomocí majoranty zjistíme, že třeba řada stejnoměrně konverguje, ale nezjistíme její součet.

VĚTA: O spojitosti součtu

Jsou-li všechny funkce řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ spojité na D a řada konverguje na D stejnoměrně k součtu $s(x)$, je funkce $s(x)$ spojitá na D.

VĚTA: O derivování „člen po členu“

Mají-li všechny funkce řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ derivaci na otevřené množině D a řada konverguje stejnoměrně na D k součtu $s(x)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje na D stejnoměrně k součtu $s'(x)$.

VĚTA: O integrování „člen po členu“

Jsou-li všechny funkce řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ integrabilní na $[a, b]$ a řada konverguje stejnoměrně na $[a, b]$ k součtu $s(x)$, pak $s(x)$ je integrabilní na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Všechny uvedené věty jsou velmi praktické, zejména ty o derivování a integrování člen po členu. Co to znamená? Máme-li třeba určit součet nekonečné řady derivovaných funkcí, nemusíme jej zjišťovat přímo z této řady. Stačí určit součet řady z funkcí nederivovaných a ten pak zderivovat. Nebo taky obráceně, někdy se snadněji zjistí součet řady derivovaných funkcí a jeho integrací pak dostaneme součet řady původní.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Záměnnost sčítání a derivování, resp. sčítání a integrování je samozřejmá u konečného počtu sčítanců. U nekonečných řad však nesmíme zapomínat na předpoklad stejnoměrné konvergence.

PŘÍKLAD: Sčítáme pomocí integrování

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ konverguje stejnoměrně na $D=(-1+\delta,\,1-\delta)$, $0<\delta<1$. Její majorantou je např. řada $\sum_{n=1}^{\infty}|x^n|$, neboť $\left|(-1)^n\frac{x^n}{n}\right|\leq|x^n|$ na D. Ale přímo by se asi sčítala těžko. Rozepíšeme-li si prvních několik členů,

$$s_n(x)=-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n},$$

vidíme, že bychom si s nalezením obecného vzorce pro n-tý částečný součet moc neporadili. Na první pohled je však patrné, že funkce $f_n(x)=(-1)^n\frac{x^n}{n}$ je primitivní funkcí (neurčitým integrálem) k funkci $F_n(x)=(-1)^nx^{n-1}$. A řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^{n-1}$ sečíst umíme – je to geometrická řada s prvním členem (-1) a kvocientem $(-x)$. Její součet je $\frac{-1}{1+x}$. Ten stačí zintegrovat a máme součet původní řady,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\xi^{n-1}\,\mathrm{d}\xi=\int_0^x-\frac{1}{1+\xi}\,\mathrm{d}\xi=-\ln(1+x)$$

PŘÍKLAD: Sčítáme pomocí derivování

Máme sečíst řadu

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}.$$

Řada konverguje stejnoměrně na $D=(-1+\delta,\,1-\delta)$, $0<\delta<1$, pro libovolné pevné k (ukážeme to v dalším tématu). Funkce $n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$ je k-tou derivací funkce x^n. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje na D stejnoměrně (je to opět geometrická řada, kterou jsme už pověřovali). Její součet je $\frac{1}{1-x}$. Když jej k-krát zderivujeme, dostaneme součet zadané řady:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2},\quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{1}{(1-x)^3},\quad \dots\quad \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Úlohy k procvičení

Prošetřete následující řady funkcí. Zjistěte, zda a na jakém oboru konvergují stejnoměrně, a je-li to možné, určete jejich součet. V některých případech se budete muset podívat na známá kritéria konvergence do analýzy.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{n}$, $a \in \mathbb{R}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$. (Návod: Prošetřete konvergenci číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pomocí vhodného z kritérií z analýzy, nebo vezměte jako fakt, že tato řada konverguje.)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n^2+3n+2)}$. (Návod: Rozložte jmenovatele na kořenové činitele a posuďte, zda funkce tvořící řadu nevznikly integrací nějakých jiných funkcí, jejichž řadu umíme sečíst.)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. (Návod: Nevznikly funkce tvořící řadu integrací funkcí, jejichž řadu umíme sečíst?)

Výsledky:

- Konverguje stejnoměrně na $D = (-a - 1 + \delta, -a + 1 - \delta)$, $0 < \delta < 1$, majoranta $\sum_{n=1}^{\infty}(x + a)^n$.
- Konverguje stejnoměrně v $D = \mathbb{R}$, (číselná) majoranta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje podle Raabeova i podle integrálního kritéria.
- Konverguje stejnoměrně na $D = (-1 + \delta, 1 - \delta)$, $0 < \delta < 1$, majoranta $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2}$, součet $s(x) = \int\limits_0^x \left[\int\limits_0^\xi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n \right) \mathrm{d}\zeta \right] \mathrm{d}\xi = \int\limits_0^x - \ln(1 - \xi)\,\mathrm{d}\xi = (1 - x)\ln(1 - x) + x$.
- Konverguje stejnoměrně v $D = (-1 + \delta, 1 - \delta)$, $0 < \delta < 1$, majoranta $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1}$, součet $s(x) = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \xi^{2n} \right) \mathrm{d}\xi = \int\limits_0^x \frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \operatorname{arctg} x$.