# Základní matematické metody ve fyzice 2

## Téma 6: Taylorova a Fourierova řada

# Obsah tématu

1. Mocninné řady.
2. Taylorova řada.
3. Fourierova řada.
4. Fourierova transformace.
5. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi II/2, VUTIUM, Brno 2012 (strany 405-433), MIII/2, VUTIUM, Brno 2018 (strany 519-521.)

V předchozím tématu jsme se zabývali posloupnostmi a řadami funkcí a jejich bodovou a zejména stejnoměrnou konvergencí, která umožnuje počítat s řadami s velkou výhodou – možnost derivování a integrování člen po členu.

Příklady, které jsme uváděli, se týkaly hlavně nejjednodušších mocninných posloupností typu $\{x^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, nebo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, resp. řad typu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. To proto, že právě mocninné řady jsou velmi užitečné pro aplikace ve fyzice. Umožňují přibližné vyjádření funkcí, používá se jich k nalezení řešení některých typů diferenciálních rovnic, apod. K velmi důležitým mocninným řadám patří řada Taylorova.

Fourierova řada zase umožňuje výhodně vyjádřit periodické funkce (i ty bývají často řešením fyzikálních problémů) pomocí funkcí harmonických, konkrétně $\sin nx$ a $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$, nebo i $n \in \mathbb{Z}$. To také skýtá možnost aproximací.

# Mocninné řady

**DEFINICE:** Mocninná řada

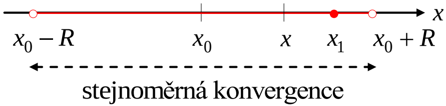
Mocninnou řadou se rozumí řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Bod $x_0$ je střed řady, čísla $c_n$ jsou její koeficienty.

Mocninná řada je obecnější pojem než geometrická řada. Zatímco geometrická řada má všechny koeficienty stejné, u mocninné řady mohou být zcela libovolné. Z hlediska konvergence jsou si však řady dost podobné. Hned to uvidíme.

Uvažujme o mocninné řadě z předchozí definice. Je zřejmé, že konverguje pro $x = x_0$, kdy je tvořena samými nulami. Předpokládejme, že konverguje ještě v některém jiném bodě, označme jej $x_1$.




Zvolme libovolný bod $x \in (2x_0 - x_1,\, x_1)$. Pro každé $n$ platí

$$|c_n(x - x_0)^n| = |c_n(x_1 - x_0)^n| \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n < Mq^n,$$

kde $M > 0$ je libovolná horní závora množiny čísel $\{|c_n(x_1 - x_0)^n|\}$ (zdůvodněte její existenci) a $q = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, $|q| < 1$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ je majorantou řady $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x - x_0)^n|$ pro $x \in (2x_0 - x_1,\, x_1)$.

Právě jsme dokázali následující větu:

**VĚTA:** Konvergence mocninné řady

Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ konverguje v bodě $x_1 \neq x_0$. Pak konverguje absolutně a stejnoměrně v intervalu $(2x_0 - x_1 + \delta, x_1 - \delta)$ (pro „libovolně malé“ $0 < \delta < |x_1 - x_0|$.)

To je dost silný výsledek. Rádi bychom však znali celý obor konvergence řady. O něm hovoří následující věta:

**VĚTA:** Poloměr konvergence

Předpokládejme, že existuje vlastní limita $L$ posloupnosti $\{|c_n|^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ konverguje absolutně a stejnoměrně v intervalu $D = (x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta)$ pro libovolně malé $\delta > 0$, kde $R = L^{-1}$ je tzv. poloměr konvergence.

Vně intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ řada diverguje. V krajních bodech tohoto intervalu je třeba konvergenci číselné řady prověřit samostatně.

**POZNÁMKA:** Třetí typ konvergence
Abychom se nemuseli starat o „malé delta“ v intervalu konvergence řady, zavádíme pojem tzv. lokální stejnoměrné konvergence: Řekneme, že řada funkcí konverguje na otevřené množině $D$ lokálně stejnoměrně, jestliže každý bod této množiny má jisté okolí, v němž řada konverguje stejnoměrně. Tato formulace respektuje ono „malé delta“. V předchozí větě bychom tak mohli stejnoměrnou konvergenci na intervalu $(x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta)$ nahradit lokální stejnoměrnou konvergencí na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$. Pojem lokální stejnoměrné konvergence je jen „o něco slabší“ než pojem stejnoměrné konvergence.

Dále už se budeme věnovat praktičtějším věcem.

## **PŘÍKLAD:** Určení poloměru konvergence

- Určíme pomoměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^k x^n$, $k \in (0, \infty)$.

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (n^k)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{k}{n}\ln n\right).$$

Počítejme limitu v exponentu L´Hospitalovým pravidlem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n}\ln n = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 0 \implies R^{-1} = \lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = \mathrm{e}^0 = 1, \quad R = 1.$$

Obor konvergence zadané řady je stejný jako poloměr konvergence geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

- Ještě jedna řada: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}(x - x_0)^n$,

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \implies R = \infty.$$

Oborem stejnoměrné konvergence této řady je celá reálná osa.

# Taylorova řada

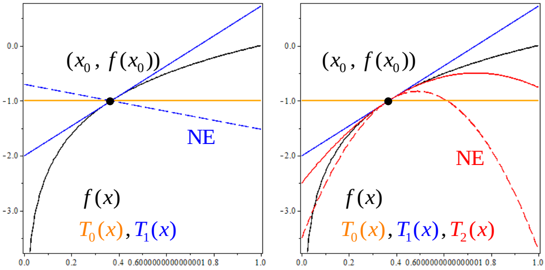
Začneme motivační úvahou. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má na nějaké otevřené množině $D \subset \mathbb{R}$ vlastní derivace tolika řádů, kolik potřebujeme, třeba všech. Naším cílem bude nahradit průběh této funkce v jistém okolí bodu $x_0 \in D$ funkcí podstatně jednodušší, konkrétně polynomem. Náhrada má být taková, aby polynom průběh funkce „dobře vystihoval", tj. aby se graf tohoto polynomu v daném okolí „přimykal" ke grafu funkce s předem danou přesností. Tím jsme zhruba formulovali problém aproximace funkcí řadami.

**POZNÁMKA:** Vlastní a nevlastní derivace

Pojem vlastní, resp. nevlastní derivace má stejný význam jako u limity. Například funkce $\operatorname{tg} x$ má derivaci $\frac{1}{\cos^2 x}$, která je v bodě $\frac{\pi}{2}$ nevlastní.

Jestliže chceme průběh funkce $f(x)$ vystihnout v okolí bodu $x_0$ polynomem stupně $n$, je výhodné vyjádřit jej ve tvaru

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$




Jak určíme koeficienty polynomu $T_n(x)$? Obrázky to názorně vystihují.

Koeficienty polynomu určíme v postupných krocích na základě určitých požadavků jeho shody se zadanou funkcí.

- Samozřejmým požadavkem je shoda funkční hodnoty, tj. $T_n(x_0) = f(x_0)$. Pro $x = x_0$ dostaneme $a_0 = f(x_0)$. Polynom $T_0(x)$ reprezentuje v obrázku oranžová čára.
- Polynomů 1. stupně, které mají s $f(x)$ společnou funkční hodnotu, je nekonečně mnoho. Pochopitelně vybereme ten, který má s $f(x)$ v bodě $x_0$ stejný sklon, $T_n'(x_0) = f'(x_0)$.

$$T_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + n(x - x_0)^{n-1},$$

$$T_n'(x_0) = a_1 \implies a_1 = f'(x_0).$$

Polynom $T_1(x)$ je v obrázcích vyznačen modrou plnou čarou.

Další kroky už jistě dovedete charakterizovat:

- V dalším kroku je třeba pomocí polynomu vystihnout křivost grafu funkce $f(x)$ v bodě $x_0$. V obrázku to splňuje plná červená čára. Požadavek shodné křivosti je splněn při rovnosti druhých derivací v bodě $x_0$, $T_n''(x_0) = f''(x_0)$, samozřejmě při zachování funkční hodnoty a rovnosti prvních derivací.

$$T_n''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$T_n''(x_0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

- V $k$-tém (obecném) kroku požadujeme rovnost $k$-té derivace v bodě $x_0$, $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$.

$$T_n^{(k)}(x) = [k(k-1)\cdots 2 \cdot 1]a_k + [(k+1)\cdots 2](x - x_0) + \cdots +$$

$$+[n(n-1)\cdots(n-k+1)](x - x_0)^{n-k}, \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

Nakonec dostaneme polynom $T_n(x)$:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Bude tento tzv. Taylorův polynom vystihovat průběh funkce $f(x)$ v okolí bodu $x_0$ tím lépe, čím vyšší bude jeho stupeň? A co kdybychom použili k vystižení funkce nekonečnou mocninnou řadu, tzv. Taylorovu řadu

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n?$$

To by ovšem mělo smysl jedině tehdy, kdyby tato řada stejnoměrně konvergovala (na jistém okolí bodu $x_0$) a jejím součtem by byla právě funkce $f(x)$.

**PŘÍKLAD:** Kdy Taylorova řada konverguje, resp. nekonverguje ke „své“ funkci

Uvažujme o funkci $f(x) = \ln x$. Má derivace všech řádů v $(0, \infty)$, takže můžeme sestavit odpovídající Taylorovu řadu se středem v bodě $x_0 > 0$ (dokažte, že $n$-tá derivace funkce v bodě $x_0$ je $f^{(n)}(x_0) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x_0^n}$, $n \in \mathbb{N}$).

$$T(x) = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n x_0^n} (x - x_0)^n.$$

Řada konverguje absolutně a (lokálně) stejnoměrně v intervalu $D = (x_0 - R,\, x_0 + R)$, kde $R = |x_0|$, tj. $D = (0,\, 2x_0)$. V tomto intervalu je součet řady skutečně roven funkci $\ln x$. Vně intervalu $D$ řada diverguje, její součet neexistuje a nemůže být proto roven hodnotě $\ln x$.

**DALŠÍ PŘÍKLADY:** Několik užitečných příkladů pro $x_0 = 0$ (odvoďte si je)

- Exponenciální funkce

$$f(x) = \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad R = \infty$$

- Harmonické funkce sinus a kosinus

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad R = \infty$$

- Logaritmus

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Taylorova řada se středem v $x_0 = 0$ se nazývá řada Maclaurinova.

**VĚTA:** Taylorova věta

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má na otevřeném intervalu $D$ vlastní derivace do řádu $n+1$ včetně, pro jisté $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro každý interval $[x_0, x] \subset D$ existuje bod $\xi \in (x_0, x)$ tak, že platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + Z_n(x),$$

$$Z_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

Výraz $Z_n(x)$ se nazývá Taylorův zbytek. Je to odchylka funkce $f(x)$ od Taylorova polynomu $T_n(x)$ (pro zvolené $n$). Představuje „chybu“, které bychom se dopustili nahrazením funkční hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_n(x)$. Ale pozor! Nemusí tomu být tak, že chyba je tím menší, čím větší je $n$. Věta totiž nic neříká o tom, zda (nekonečná) Taylorova řada skutečně konverguje k funkci $f(x)$.

**POZNÁMKA:** Co všechno lze z Taylorovy věty vyčíst?

- Taylorův polynom $T_n(x)$ je $n$-tý částečný součet Taylorovy řady.
- Taylorova řada konverguje k funkci $f(x)$ (bodově, resp. stejnoměrně) právě tehdy, konverguje-li posloupnost Taylorových zbytků $\{Z_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ (bodově, resp. stejnoměrně) k nulové funkci.
- Předchozí podmínka je ekvivalentní podmínce konvergence k nulové funkci posloupnosti $\{z_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde $z_n(x)$ je zbývající část řady,

$$z_n(x) = f(x) - T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.$$

- Může se zdát, že Taylorova věta není k ničemu, pokud jde o určení chyby přibližného vyjádření funkce $f(x)$ Taylorovým polynomem $T_n(x)$. Věta sice zaručuje existenci bodu $\xi \in (x_0, x)$ ale neříká, kde ten bod je. I když však není možné určit $Z_n(x)$ přesně, lze provést alespoň odhady.

**PŘÍKLAD:** Taylorův zbytek pro funkci $\ln(1+x)$ pro $x_0 = 0$

Jak už víme, Taylorova řada této funkce se středem $x_0 = 0$ konverguje k této funkci (lokálně) stejnoměrně v intervalu $(-1,\,1)$. Platí

$$Z_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)} \left( \frac{x}{1+\xi} \right)^{n+1},$$

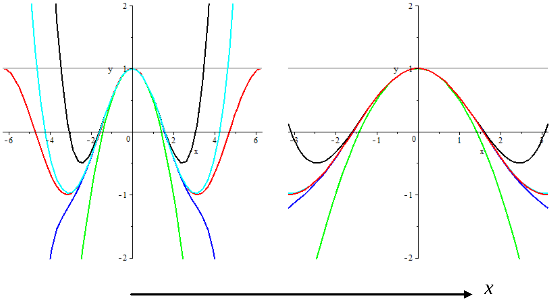
$$|Z_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}, \quad \text{neboť} \quad \left| \frac{x}{1+\xi} \right| \le 1 \ \text{ pro } \ \xi \in (0,\,x), \ \ |x| < 1.$$

Limita posloupnosti $\{Z_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ je nulová. Hodnota zbytku $|Z_n(x)|$ představuje tedy tzv. absolutní chybu odhadu funkční hodnoty $ln(x)$ hodnotou polynomu $T_n(x)$. Chybu však dokážeme pouze odhadnout (horní odhad), $|Z_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)}$. Např. pro $x = 0,5$ je $\ln 1,5 \doteq 0,405_5$, $T_5(x) = 0,407_3$, $|Z_5(x)| \le \frac{0,5^6}{6} \doteq 0,002_6$. Relativní chyba je $\frac{0,0026}{0,407} \doteq 0,006 \sim 0,6\%$.

## **POZNÁMKA:** Alternující Taylorova řada

Alternující řada je taková, jejíž členy střídají znaménka. Např. jsou to Maclaurinovy řady funkcí sinus (pro $x > 0$) a kosinus – viz výše. Horní odhad chyby, které se dopouštíme náhradou funkce $f(x)$ polynomem $T_n(x)$, je určen prvním zanedbaným členem Taylorovy řady. Např. pro $\sin x \doteq T_1(x) = x$ je horní odhad chyby $\left|\frac{x^3}{3!}\right|$. A ještě grafická ukázka:

$\cos x, T_2(x), T_4(x), T_6(x), T_8(x)$



**PŘÍKLAD:** Určení funkční hodnoty se zadanou přesností

Pomocí Taylorovy řady můžeme určit funkční hodnotu $f(x)$ v bodě $x$ blízkém k bodu $x_0$, v němž funkční hodnotu známe. Přesnost určení hodnoty $f(x)$ můžeme zadat předem.

Určíme $\cos 65^{\circ}$ s přesností na 4 desetinná místa; $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $x - x_0 = 5 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{180}$ (úhly musíme vyjádřit v obloukové míře).

$$\cos 65^{\circ} = \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{180}\right) - \frac{1}{2!}\cos\frac{\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{3!}\sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^3 + \cdots$$

Taylorův zbytek je $Z_n = \pm\frac{1}{(n+1)!}\sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^{n+1}$ pro sudé $n$, v případě lichého $n$ je třeba zaměnit $\sin\frac{\pi}{3}$ za $\cos\frac{\pi}{3}$. V každém případě je

$$|Z_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^{n+1},$$

neboť $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Určení hodnoty $\cos 65^{\circ}$ na čtyři desetinná místa je dáno podmínkou $|Z_n| < 0,00005$ (chyba nejvýše 5 na pátém desetinném místě). Vyčíslíme odhad Taylorových zbytků $|Z_n|$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
Z_1 &\leq \frac{1}{2!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^2 = 3,3\cdot 10^{-3}, \quad Z_2 \leq \frac{1}{3!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^3 = 9,6\cdot 10^{-5} \\
Z_3 &\leq \frac{1}{4!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^4 = 2,1\cdot 10^{-6}, \quad Z_4 \leq \frac{1}{5!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^5 = 3,7\cdot 10^{-8} \\
\ldots &\leq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Odhad zbytku $|Z_3|$ je již menší než přípustná chyba, proto k vyjádření hodnoty $\cos 65^{\circ}$ s požadovanou přesností stačí vyčíslit

$$\cos 65^{\circ} \doteq \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{180}\right) - \frac{1}{2!}\cos\frac{\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{3!}\sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{180}\right)^3 \doteq 0,4226.$$

## **PŘÍKLAD:** Aplikace – řešení diferenciálních rovnic

Rozvoj funkce v Taylorovu řadu je možné použít při hledání řešení diferenciálních rovnic. Ukážeme to na jednoduché rovnici, kterou samozřejmě umíme vyřešit podstatně snadněji. Ale ve složitějších případech je rozvoj v řadu velmi účinnou metodou. Rovnici $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ všichni znáte – je to pohybová rovnice pro výchylku lineárního harmonického oscilátoru. Pro počáteční podmínky $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$ je jejím řešením funkce $x(t) = A\cos\omega t$. Vyřešíme ji pomocí řady. Hledejme řešení ve tvaru $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, kde koeficienty $c_n$ stanovíme tak, aby tato řada vyhovovala dané rovnici (samozřejmě musíme předpokládat, že všechny požadavky týkající se stejnoměrné konvergence jsou splněny).

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad \ddot{x}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} t^n.$$

Ve výrazu pro $\ddot{x}$ jsme provedli přeindexování záměnou $n \to n+2$, aby obecná mocnina proměnné $t$ byla $n$. „Nové“ $n$ tedy začíná hodnotou nula.

Hledané řešení ve tvaru řady dosadíme do rovnice a sjednotíme členy se stejnou mocninou proměnné:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + \omega^2 c_n\right] t^n = 0.$$

Řada je rovna nulové funkci, její koeficienty jsou tedy nulové,

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+\omega^2 c_n = 0 \implies c_{n+2} = -\frac{\omega^2 c_n}{(n+2)(n+1)}, \; n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

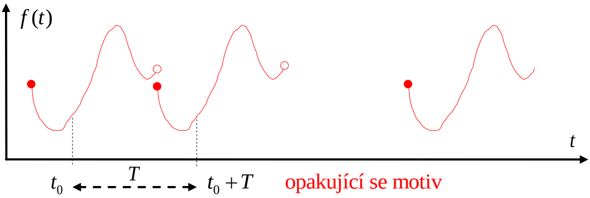
Dostali jsme rekurentní vzorec pro koeficienty řady. K tomu, abychom určili $c_0$ a $c_1$, máme počáteční podmínky. Dosaďte $t = 0$ do řad $x(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n + \cdots$ a $\dot{x}(t) = c_1 + 2c_2 t + \cdots + nc_{n-1} t^{n-1} + \cdots$

$$c_0 = A, \quad c_1 = 0 \implies c_{2k+1} = 0, \; c_{2k} = (-1)^k \frac{\omega^{2k} A}{(2k)!},$$

$$x(t) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\omega t)^{2k} = A \cos \omega t.$$

# Fourierova řada

Fourierovou řadou dokážeme vystihnout průběh periodické funkce, řekněme $f(t)$, tj. takové, jejíž hodnoty se opakují s určitou periodou $T$. Pro funkci definovanou na celé reálné ose má podmínka periodicity tvar $f(t+T) = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$.




Nejjednodušší periodické funkce jsou harmonické funkce typu $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Zahraje-li klavírista, houslista, hornista, ... jednočárkované „a“, bezpečně ty nástroje od sebe odlišíme. Jak je to možné? Nezní totiž „čistá“ sinusovka s frekvencí $440\,\mathrm{s}^{-1}$, ale superpozice tónů s kmitočty $1 \cdot 440\,\mathrm{s}^{-1}$, $2 \cdot 440\,\mathrm{s}^{-1}$, atd., s různými amplitudami. Tzv. vyšší harmonické frekvence vytváří odlišnou barvu tónu. Zobecníme tuto úvahu a pokusíme se periodickou funkci vyjádřit jako superpozici, tj. lineární kombinaci, harmonických funkcí ve tvaru tzv. Fourierovy řady

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right).$$

(Absolutní člen $\frac{a_0}{2}$ respektuje nějaké „pozadí“.) To bude možné, budou-li existovat koeficienty $a_0$, $a_n$, $b_n$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že řada bude (lokálně) stejnoměrně konvergovat k funkci $f(t)$ na nějakém oboru $D = (t_0,\, t_0 + T)$.

Nejprve v rámci cvičení dokažte (budeme potřebovat):

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega t \cos m\omega t \,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega t \sin m\omega t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} T \,\delta_{mn},$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega t \sin m\omega t \,\mathrm{d}t = 0, \quad m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Další kroky jsou korektní za předpokladu stejnoměrné konvergence řady: Vynásobíme vyjádření funkce $f(t)$ funkcí $\cos m\omega t$ a integrujeme člen po členu. Poté totéž s funkcí $\sin m\omega t$. Nakonec jen integrujeme. Dostaneme koeficienty $a_n$, $b_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $a_0$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t \,\mathrm{d}t,\ \ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t \,\mathrm{d}t,\ \ a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \,\mathrm{d}t.$$

Výše uvedeným způsobem sice můžeme pro každou funkci $f(t)$, která je integrabilní na $[t_0, t_0 + T]$, určit Fourierovy koeficienty $a_0$, $a_n$, $b_n$, $n \in \mathbb{N}$, ale není zaručeno, že Fourierova řada bude opravdu k funkci $f(t)$ konvergovat. Uvedeme postačující podmínku pro to, aby tomu tak bylo.

**VĚTA:** Dirichletova

Nechť funkce $f(t)$ je po částech spojitá a po částech monotónní na intervalu $[t_0, t_0 + T]$. Pak Fourierova řada funkce na tomto intervalu

- konverguje k součtu $f(t)$ pro $t \in (t_0, t_0 + T)$, je-li $f(t)$ v bodě $t$ spojitá,
- konverguje k součtu $\frac{1}{2}[f(t_+) + f(t_-)]$, je-li v bodě $t \in (t_0, t_0 + T)$ nespojitost,
- konverguje k součtu $\frac{1}{2}[f((t_0)_+) + f((t_0 + T)_-)]$ v krajních bodech intervalu $[t_0, t_0 + T]$.

**PŘÍKLAD:** Fourierova řada funkce $f(t) = t$ na $D = [t_0,\ t_0 + T]$

Funkce je spojitá a rostoucí na $[t_0,\ t_0 + T]$. Počítejte koeficienty $a_n$, $b_n$ metodou per partes, $a_0$ přímo, využijte rovnosti $\omega T = 2\pi$ a periodicity funkcí $\cos n\omega t$ a $\sin n\omega t$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} t \cos n\omega t \,\mathrm{d}t = \ \dots\ = \frac{2}{n\omega} \sin n\omega t_0,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} t \sin n\omega t \,\mathrm{d}t = \ \dots\ = -\frac{2}{n\omega} \cos n\omega t_0,$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} t \,\mathrm{d}t = (2t_0 + T).$$

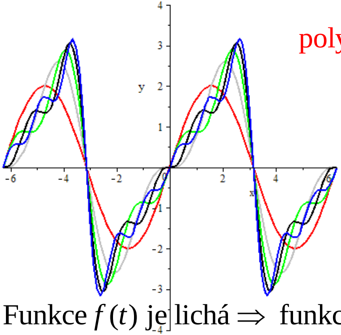
$$f(t) = \left(t_0 + \frac{T}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\omega} \left(\sin n\omega t_0 \cos n\omega t - \cos n\omega t_0 \sin n\omega t\right) =$$

$$= \left(t_0 + \frac{T}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\omega} \sin n\omega(t - t_0).$$

Pro interval $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, tj. $t_0 = -\frac{T}{2}$, je

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{n\omega} \sin n\omega t.$$

Aproximace funkce $f(t) = t$ trigonometrickým polynomem $\sum_{n=1}^{N} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{n} \sin nt$




$N = 1$

$N = 2$

$N = 3$

$N = 4$

$N = 5$

Funkce $f(t)$ je lichá $\Rightarrow$ funkce $\cos nt$ nejsou v polynomech obsaženy.

# Fourierova transformace

Fourierova transformace je dílčí částí obsáhlejší a obtížnější problematiky tzv. integrálních transformací. V tuto chvíli se o ní alespoň zmíníme proto, že ji budete používat ve fyzikálních předmětech, hlavně v optice. Dospějeme k ní úvahami vycházejícími z Fourierových řad. Fourierova řada periodické funkce $f(t)$ s periodou $T$ a základním motivem na intervalu $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right),$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Přejdeme k vyjádření funkcí sinus a kosinus pomocí Eulerova vzorce $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, tj.

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\right), \quad \sin n\omega t = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\right).$$

Dosadíme do řady a uspořádáme kladné a záporné mocniny

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - \mathrm{i}b_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} + (a_n + \mathrm{i}b_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t},$$

kde jsme označili $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ pro $n > 0$ a $c_n = a_{-n} - \mathrm{i}b_{-n}$ pro $n < 0$. Za předpokladu, že řada bude konvergovat stejnoměrně, můžeme získat její koeficienty podobně jako v předchozím. Vynásobíme vyjádření funkce $f(t)$ funkcí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega t}$ a zintegrujeme:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\omega t}\, \mathrm{d}t = c_n T \delta_{mn}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\, \mathrm{d}t.$$

Nyní si představme, že by perioda $T$ byla větší a větší, $T \to \infty$. Pak je $\omega \to 0$. Funkce přestává být periodická a z diskrétní proměnné $n\omega$ se stává proměnná spojitá $\xi$. Suma ve vyjádření funkce $f(t)$ přechází v integrál a Fourierova řada ve Fourierův integrál

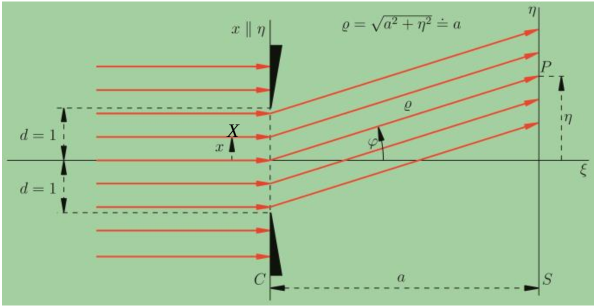
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t} \,\mathrm{d}t, \quad c(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t} \,\mathrm{d}t.$$

Zobrazení $\mathcal{F} : f(t) \longrightarrow c(\xi)$ je tzv. Fourierova transformace a $\mathcal{F}^{-1} : c(\xi) \longrightarrow f(t)$ je zpětná Fourierova transformace.

Jistě cítíte, že tohle není zcela korektní matematika. Zacházení s řadami, jak jsme je právě předvedli, vyžaduje splnění požadavků konvergence, které jsme pro daný případ neformulovali ani neprověřovali. To je ovšem záležitostí pokročilejších předmětů.

## **PŘÍKLAD:** Difrakce (můžete přeskočit)

Nakonec si ukažme, jak se Fourierova transformace objeví v optice.




$$XP = \sqrt{a^2+(\eta-x)^2} = \sqrt{a^2+\eta^2}\left(1-\frac{2\eta x}{a^2+\eta^2}+\frac{x^2}{a^2+\eta^2}\right)^{1/2} \approx \sqrt{a^2+\eta^2}-\frac{\eta x}{\sqrt{a^2+\eta^2}} = \sqrt{a^2+\eta^2}-x\sin\varphi$$

Světlo o amplitudě elektrické intenzity $E_0$, vlnové délce $\lambda$, $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, dopadá kolmo na clonu $C$ se štěrbinou o šířce $2d$, $d = 1$. Za štěrbinou pozorujeme rozptýlené světlo v obecném bodě $P$ na stínítku $S$.

Podle Huygensova principu je každý element $\mathrm{d}x$ štěrbiny zdrojem sekundární kulové vlny. Její elementární amplituda je $E_0 \frac{\mathrm{d}x}{(2d)}$. Elementární amplituda elektrické intenzity v bodě $P$ je (sledujte obrázek)

$$\mathrm{d}E = \frac{E_0}{2\varrho d}\,\mathrm{d}x \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k\cdot XP)} = \frac{E_0}{2\varrho d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k\sqrt{a^2+(\eta-x)^2})}\,\mathrm{d}x, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Provedeme aproximaci, která je vhodná za předpokladu, že stínítko je od clony „daleko“, takže vlnu, která na ně dopadá, lze považovat za rovinnou. Matematicky to znamená provést tyto aproximace (a teď se bude hodit Taylorova řada – podrobně pod obrázkem):

$$\varrho \doteq a, \quad \sqrt{a^2+(\eta-x)^2} \doteq \sqrt{a^2+\eta^2} - x\sin\varphi$$

$$\mathrm{d}E \doteq \frac{E_0}{2ad}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k\sqrt{a^2+\eta^2})}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\sin\varphi}\,\mathrm{d}x, \quad E \doteq \frac{E_0}{2ad}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k\sqrt{a^2+\eta^2})}\int_{-d}^{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x,$$

kde jsme označili $t = k\sin\varphi$.

Fyzikální podstatou se nemusíme zabývat, ale všimněme si integrálu

$$F(t) = \int_{-d}^{d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{\mathrm{i}t}\right|_{-d}^{d} = \frac{2\sin td}{t} = \frac{2d\sin(kd\sin\varphi)}{kd\sin\varphi}.$$

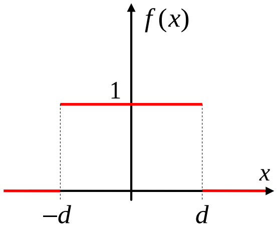
Je to Fourierův integrál z funkce $f(x)$, kde $f(x) = 1$ pro $x \in [-d, d]$ a $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus [-d, d]$. Tato funkce popisuje propustnost clony $C$.

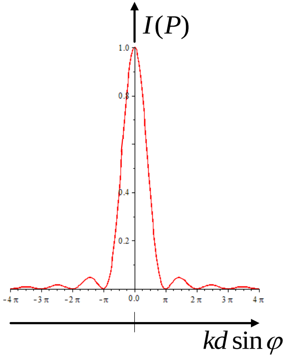
Na stínítku pozorujeme rozložení intenzity světla $I = |E|^2$. (Pozor, figuruje zde dvojí „intenzita“: intenzita světla $I$ a elektrická intenzita $\vec{E}$ elektromagnetického pole, jímž světlo je.)

$$I(P) = \frac{|E_0|^2}{a^2}\left(\frac{\sin(kd\sin\varphi)}{kd\sin\varphi}\right)^2.$$

Na stínítku vzniká difrakční obraz clony, který je, jak jsme zjistili, Fourierovým obrazem propustnosti clony.

Difrakční obrazec vykazuje hlavní maximum pro $kd \sin \varphi = 0$ a vedlejší maxima, resp. minima pro $kd \sin \varphi = n\pi$. Protože je $\sin \varphi \doteq \operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta}{a}$, jsou maxima osvětlení stínítka v bodech $\eta_n = \frac{n\pi a}{kd} = \frac{na\lambda}{2d}$.




Obrázek ukazuje rozložení intenzity světla na stínítku pro $|E_0|/a = 1$.

# Úlohy k procvičení

Řešte následující úlohy (toto už nepřeskakujte):

- Určete funkci, jejíž Taylorova řada je $\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
  (Návod: Řadu člen po členu zderivujte, sečtěte a znovu zintegrujte. Výsledek: $\ln \frac{1+x}{1-x}$, $D = (-1, 1)$.)
- Určete přibližnou hodnotu $8,05^{2/3}$ s přesností na 4 desetinná místa. (Návod: Řada alternuje, tj. odhad chyby je určen prvním zanedbaným členem Taylorovy řady. Zvolte vhodně $x_0$. Výsledek: $4,0166$.)
- Zapište Fourierovu řadu funkce $f(t) = t^2$ pro $D = (-1, 1)$, tj. $t_0 = -1$, $T = 2$.
  (Výsledek: $f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi t$.)