Základní matematické metody ve fyzice 2

Téma 7: Ukázkové příklady

Obsah tématu

1. Geometrické a fyzikální charakteristiky rovinných útvarů.
2. Geometrické a fyzikální charakteristiky prostorových útvarů.
3. Geometrické a fyzikální charakteristiky plošných útvarů v $\mathbb{R}^3$.
4. Tok vektorového pole plochou, integrální věty.
5. Práce silového pole, integrální věty.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi II/2 a III/1.
Konkrétní odkazy viz předchozí prezentace.

Jsou uváděny příklady typické pro závěrečnou písemku. V písemce nebudou tak obsáhlé, jako zde, a spíše lehčí.

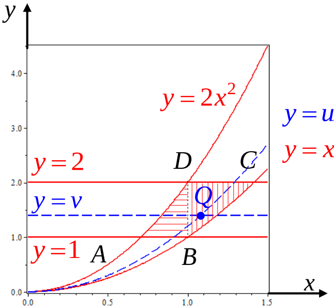
Předpokládáme, že všechny používané objekty (integrační obory a integrované funkce) splňují předpoklady stanovené v předchozích tématech, aniž bychom je zde opakovali.

Geometrické a fyzikální charakteristiky rovinných útvarů

ZADÁNÍ: Určete plošný obsah, hmotnost, polohu těžiště a momenty setrvačnosti rovinného útvaru M omezeného grafy funkcí $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 1$ a $y = 2$ (obrázek). Plošná hustota je $\sigma(x, y) = \alpha xy$, kde $\alpha = 1\,\mathrm{kg\,m^{-4}}$ je rozměrová konstanta. Výpočet proveďte

(a) přímým výpočtem v kartézských souřadnicích,

(b) ve vhodných křivočarých souřadnicích pomocí věty o transformaci integrálu.



$$A = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right),\; B = (1, 1)$$

$$C = \left(\sqrt{2}, 2\right),\; D = (1, 2)$$

$M_1 \ldots ABD$

$M_2 \ldots BCD$

ŘEŠENÍ: Vztahy pro výpočet charakteristik:

- plošný obsah: $P = \int\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
- hmotnost: $m = \int\limits_M \sigma(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
- těžiště: $x_T = \frac{1}{m}\int\limits_M x\sigma(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $y_T = \frac{1}{m}\int\limits_M y\sigma(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
- momenty setrvačnosti:

$$
\begin{aligned}
J_{xx} &= \int\limits_M y^2\sigma(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\\
J_{xy} &= J_{yx} = -\int\limits_M xy\sigma(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\\
J_{yy} &= \int\limits_M x^2\sigma(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

(a) Přímý výpočet (Fubiniova věta) – postupné kroky:

- Výpočet průšečíků křivek:

$$
\begin{aligned}
A:&\quad 2x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{2}},\;\; y = 1 \;\Rightarrow\; A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, 1\right),\\
B:&\quad x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = ,\;\; y = 1 \;\Rightarrow\; B = (1,\, 1),\\
C:&\quad x^2 = 2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{2},\;\; y = 2 \;\Rightarrow\; C = \left(\sqrt{2},\, 2\right),\\
D:&\quad 2x^2 = 2 \;\Rightarrow\; x = 1,\;\; y = 2 \;\Rightarrow\; D = (1,\, 2).
\end{aligned}
$$

- Vyjádření integrálu z obecné funkce $f(x,\, y)$ na množině M (množinu M si rozdělíme na dvě části, $M_1 = ABD$, $M_2 = BCD$, protože omezující funkce jsou sice spojité, ale na intervalu $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\, \sqrt{2}\right]$ je nelze vyjádřit jediným vzorcem).

$$
\int\limits_M f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\int\limits_{1}^{2x^2} f(x,\, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} \left(\int\limits_{x^2}^{2} f(x,\, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x
$$

- Výpočet plošného obsahu:

$$S = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\int_{1}^{2x^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\int_{1}^{2x^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{1/\sqrt{2}}^{1} (2x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} (2-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^3 - x \right]_{1/\sqrt{2}}^{1} + \left[2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{1}^{\sqrt{2}} =$$

$$= \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] + \left[2\sqrt{2} - 2 - \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} + \frac{1}{3} \right] = -2 + \frac{5}{3}\sqrt{2}$$

$$S = -2 + \frac{5}{3}\sqrt{2}$$

- Výpočet hmotnosti:

$$m = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\int_{1}^{2x^2} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{2} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} x \left(\frac{1}{2}(2x^2)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} x \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2 \right) =$$

$$\left[\frac{2}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^2 \right]_{1/\sqrt{2}}^{1} + \left[x^2 - \frac{1}{12}x^6 \right]_{1}^{\sqrt{2}} =$$

$$= \left[\frac{2}{6} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \right] + \left[2 - 1 - \frac{1}{12} \cdot 8 + \frac{1}{12} \right] = \frac{7}{12}$$

$$m = \frac{7}{12}$$

- Výpočet polohy těžiště (započaté výpočty dokončete):

$$x_T = \left(\frac{7}{12}\right)^{-1} \left[\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\int_{1}^{2x^2} x \cdot xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{2} x \cdot xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right] =$$

$$= \frac{12}{7} \left[\int_{1/\sqrt{2}}^{1} x^2 \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_{1}^{2x^2} \right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} x^2 \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^2}^{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{12}{7} \left[\int_{1/\sqrt{2}}^{1} x^2 \left(\frac{1}{2} (2x^2)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} x^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \mathrm{d}x \right]$$

$$x_T = \frac{2}{49} (33\sqrt{2} - 20)$$

$$y_T = \left(\frac{7}{12}\right)^{-1} \left[\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\int\limits_{1}^{2x^2} y \cdot xy \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \left(\int\limits_{x^2}^{2} y \cdot xy \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$\frac{12}{7} \left[\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} x \left(\frac{1}{3} y^3 \Big|_{1}^{2x^2} \right) \, \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} x \left(\frac{1}{3} y^3 \Big|_{x^2}^{2} \right) \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= \frac{12}{7} \left[\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} x \left(\frac{1}{3} (2x^2)^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) \, \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} x \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} (x^2)^3 \right) \, \mathrm{d}x \right]$$

$$y_T = \frac{45}{28}$$

- Momenty setrvačnosti (pro ukázku vypočteme jen J_{xx}, ostatní vypočtěte podle vzoru sami):

$$J_{xx} = \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\int\limits_{1}^{2x^2} y^2 \cdot xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \left(\int\limits_{x^2}^{2} y^2 \cdot xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} x \left(\frac{1}{4} y^4 \Big|_{1}^{2x^2} + \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} x \left(\frac{1}{4} y^4 \Big|_{x^2}^{2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} x \left(\frac{1}{4} (2x^2)^4 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} x \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} (x^2)^4 \right) \mathrm{d}x$$

$$J_{xx} = \frac{31}{20}$$

(b) Výpočet pomocí věty o transformaci:

- Transformace souřadnic: obecný bod P integračního oboru leží na parabole $y = ux^2$, $x \in [1, 2]$ a na přímce o rovnici $y = v$, $v \in [1, 2]$. Vyjádříme funkce $x = x(u, v)$ a $y = y(u, v)$:

$$ux^2 = v \implies x = u^{-1/2} v^{1/2}, \quad y = v.$$

- Jacobiho matice zobrazení $\alpha : [1, 2] \times [1, 2] \ni (u, v) \to (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}^2$:

$$D\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} u^{-3/2} v^{1/2} & 0 \\ \frac{1}{2} u^{-1/2} v^{-1/2} & 1 \end{pmatrix}$$

- Jakobián: $J(u, v) = |\det D\alpha(u, v)| = \frac{1}{2} u^{-3/2} v^{1/2}$
- Vyjádření integrálu z obecné funkce $f(x, y)$:

$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{[1,2]\times[1,2]} f(x(u, v), y(u, v))\, J(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

- Výpočet hmotnosti:

$$m = \int_1^2 \int_1^2 (u^{-1/2} v^{1/2} \cdot v) \cdot \left(\frac{1}{2} u^{-3/2} v^{1/2} \right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 u^{-2} \, \mathrm{d}u \right) \left(\int_1^2 v^2 \, \mathrm{d}v \right) = \frac{1}{2} \left[-u^{-1} \right]_1^2 \left[\frac{1}{3} v^3 \right]_1^2 = \frac{7}{12}$$

- Výpočet momentu setrvačnosti J_{xx} (ostatní už vypočtěte sami):

$$J_{xx} = \int_1^2 \int_1^2 \overbrace{v^2}^{y^2} \overbrace{(u^{-1/2} v^{3/2})}^{\sigma = xy} \overbrace{\left(\frac{1}{2} u^{-3/2} v^{1/2} \right)}^{\text{jakobián}} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 u^{-2} \, \mathrm{d}u \right) \left(\int_1^2 v^4 \, \mathrm{d}v \right) = \frac{1}{2} \left[-u^{-1} \right]_1^2 \left[\frac{1}{5} v^5 \right]_1^2 = \frac{31}{20}$$

- Výpočet polohy těžiště (y_T vypočtěte sami):

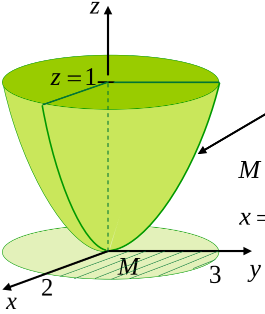
$$x_T = \left(\frac{7}{12}\right)^{-1} \int_1^2 \int_1^2 \overbrace{(u^{-1/2}v^{1/2})}^{x} \overbrace{(u^{-1/2}v^{3/2})}^{\sigma=xy} \overbrace{\left(\frac{1}{2}u^{-3/2}v^{1/2}\right)}^{\text{jakobián}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{12}{7} \cdot \frac{1}{2} \left(\int_1^2 u^{-5/2}\,\mathrm{d}u\right) \left(\int_1^2 v^{5/2}\,\mathrm{d}v\right) = \frac{6}{7}\left[-\frac{2}{3}u^{-3/2}\right]_1^2 \left[\frac{2}{7}v^{7/2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{8}{49}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(8\sqrt{2} - 1\right) = \frac{2}{49}(33\sqrt{2} - 20)$$

Výsledky získané pomocí věty o transformaci jsou samozřejmě stejné, výpočet je však podstatně jednodušší.

ZADÁNÍ: Určete objem, hmotnost, polohu těžiště a momenty setrvačnosti útvaru V omezeného plochami $36z - 9x^2 - 4y^2 = 0$, $z = 1$. Určete tytéž charakteristiky části tohoto útvaru ležící v prvním oktantu. Rozložení hmotnosti útvaru je dáno hustotou $\varrho = \kappa|xyz|$, $\kappa = 1\,\mathrm{g\,cm^{-6}}$.



$$z = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2, \quad 0 \le z \le 1$$

$$M : [0,1] \times [0, \tfrac{\pi}{2}] \ni (r, \varphi) \to (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

$$x = 2r\cos\varphi, \quad y = 3r\sin\varphi, \quad z = r^2$$

Rovnici plochy je vhodné upravit takto: $z = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2$. Víte proč?

ŘEŠENÍ: Vztahy pro výpočet charakteristik:

- objem: $V = \int\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, hmotnost: $m = \int\limits_V \varrho(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,
- těžiště: $x_T = \frac{1}{m}\int\limits_V x\varrho(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,
  $y_T = \frac{1}{m}\int\limits_V y\varrho(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $z_T = \frac{1}{m}\int\limits_V z\varrho(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
- momenty setrvačnosti (označení $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$):

$$J_{xx} = \int\limits_V (y^2+z^2)\varrho(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}V,\quad J_{xy} = J_{yx} = -\int\limits_V xy\varrho(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}V,$$

$$J_{yy} = \int\limits_V (x^2+z^2)\varrho(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}V,\quad J_{yz} = J_{zy} = -\int\limits_V yz\varrho(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}V,$$

$$J_{zz} = \int\limits_V (x^2+y^2)\varrho(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}V,\quad J_{xz} = J_{zx} = -\int\limits_V xz\varrho(x,\,y,\,z)\,\mathrm{d}V.$$

V předchozím příkladu jsme viděli výhodu použití věty o transformaci k převedení integrálu z kartézských souřadnic do vhodných souřadnic křivočarých, zvolených tak, aby jistým způsobem vystihovaly tvar integračního oboru, popřípadě tak, abychom místo v proměnných mezích mohli integrovat v konstantních mezích. Křivočarých souřadnic využijeme i v tomto příkladu.

Budeme řešit druhou část úlohy – útvar v prvním oktantu soustavy souřadnic. Pro celý útvar je určete sami (mění se jen meze integrace).

- Volba křivočarých souřadnic: útvar je tzv. eliptický paraboloid. (Znáte jistě rotační paraboloid, který má rotační symetrii, např. při otočení kolem osy z a řezy útvaru rovinami kolmými k ose z jsou kruhy. Tam je namístě volba válcových souřadnic $x = r\cos\varphi$), $y = r\sin\varphi$, $z = z$. V našem případě však jsou řezy útvaru rovinami kolmými k ose z elipsy, půdorysem útvaru je elipsa o poloosách $a = 2$, $b = 3$. Zde jsou vhodné zobecněné válcové souřadnice

$$x = 2r\cos\varphi,\ y = 3r\sin\varphi,\ \ z = z,\ r \in [0,\,1],\ \varphi \in \left[0,\,\frac{\pi}{2}\right],\ z \in [r^2,\,1].$$

- Jacobiho matice zobrazení
  $\alpha: \ K = [0,\, 1] \times [0,\, \frac{\pi}{2}] \times [r^2,\, 1] \ni (r,\, \varphi,\, z) \longrightarrow (x,\, y,\, z) \in V$:

$$D\alpha(r,\, \varphi,\, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi & 3\sin\varphi & 0 \\ -2r\sin\varphi & 3r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J(r,\, \varphi,\, z) = \det D\alpha(r,\, \varphi,\, z) = \dots \text{vypočtěte} \dots = 6r.$$

- Výpočet objemu a hmotnosti: Na výpočtu objemu (integrovaná funkce je rovna jedné) a hmotnosti (integrovanou funkcí je hustota) ukážeme obecný postup při integraci. Ostatní úlohy se už liší jen volbou integrované funkce.

$$V = \int_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_K J(r,\, \varphi,\, z)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 6r\left(\int_{r^2}^1 \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$V = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 6r\left(1-r^2\right)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 6\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}\pi, \quad V=\frac{3}{4}\pi$$

$$m = \int_V xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_K \overbrace{(2r\cos\varphi\cdot 3r\sin\varphi\cdot z)}^{\varrho=xyz}\ \overbrace{6r}^{\text{jakobián}}\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 36r^3\cos\varphi\sin\varphi\left(\int_{r^2}^1 z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 36\left(\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^1 r^3\cdot\frac{1}{2}z^2\Big|_{z=r^2}^{z=1}\right)\mathrm{d}r = \ldots \text{počítejte} \ldots$$

$$= 36\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\pi/2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{8}r^8\right]_0^1 = \ldots \text{dosazujte} \ldots \frac{9}{8}, \quad m=\frac{9}{8}$$

- Výpočet polohy těžiště (vypočteme x_T, ostatní zvládnete sami):

$$x_T = \left(\frac{9}{8}\right)^{-1} \int_V x\varrho(x,\, y,\, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{8}{9} \int_K \overbrace{4r^2\cos^2\varphi \cdot 3r\sin\varphi \cdot z}^{x\varrho = x^2yz} \cdot \overbrace{6r}^{\text{jakobián}} \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 64 \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin\varphi\right) \left(\int_0^1 r^4 \cdot \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=r^2}^{z=1}\right) = \ldots \text{ integrujte } \ldots =$$

$$= 64 \left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}r^5 - \frac{1}{9}r^9\right] = \ldots \text{ dosazujte } \ldots \Rightarrow x_T = \frac{128}{135}$$

- Výpočet momentu setrvačnosti J_{zz} (už trochu rychleji – zapojte se):

$$J_{zz} = \int\limits_V (x^2 + y^2)\, xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_K r^2(4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi) 6r^2 \cos\varphi \sin\varphi \cdot z \cdot 6r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 36 \left(\int\limits_0^{\pi/2} (4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi) \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \right) \left[\int\limits_0^1 r^5 \left(\int\limits_{z=r^2}^1 z\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right] =$$

$$= 36 \left[4(-\frac{1}{4}\cos^4\varphi) + \frac{9}{4}\sin^4\varphi \right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} r^6 - \frac{1}{8} r^8 \right]_0^1 \ldots \; J_{zz} = \frac{39}{16}$$

POZOR: Při výpočtu charakteristik celého útvaru dejte pozor na absolutní hodnotu ve vyjádření hustoty. Lze využít symetrie útvaru a integrovaných funkcí.

Geometrické a fyzikální charakteristiky plošných útvarů v $\mathbb{R}^3$

V příkladech tohoto typu se jedná o plošný integrál prvního druhu, tj.

$$\int_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \int_K f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{\det G(u, v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

$$\text{kde zobrazení} \quad K \ni (u, v) \longrightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

je parametrizace plochy S a G je matice utvořená ze skalárních součinů vektorů tečných k souřadnicovým křivkám daným zvolenou parametrizací. (Za chvíli to připomeneme prakticky.)

ZADÁNÍ: Vypočtěte geometrické a fyzikální charakteristiky plochy S o rovnici $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le R^2$. Plošná hustota útvaru je $\sigma(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$.

ŘEŠENÍ: Vztahy pro výpočet charakteristik (je to pořád dokola):

- plošný obsah: $P = \int\limits_S \mathrm{d}S$, hmotnost: $m = \int\limits_S \sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S$,
- těžiště: $x_T = \frac{1}{m}\int\limits_S x\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S$,

  $y_T = \int\limits_S y\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S$, $z_T = \frac{1}{m}\int\limits_S z\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S$,
- momenty setrvačnosti:

$$J_{xx} = \int\limits_S (y^2 + z^2)\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S, \quad J_{xy} = J_{yx} = -\int\limits_S xy\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S,$$

$$J_{yy} = \int\limits_S (x^2 + z^2)\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S, \quad J_{yz} = J_{zy} = -\int\limits_S yz\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S,$$

$$J_{zz} = \int\limits_S (x^2 + y^2)\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S, \quad J_{xz} = J_{zx} = -\int\limits_S xz\sigma(x, y, z)\,\mathrm{d}S.$$

Zadaná plocha je rotační paraboloid. Je rotačně symetrická vzhledem k ose z a její řezy rovinami kolmými k ose z jsou kružnice (na rozdíl od předchozího příkladu, kdy řezy rovinami kolmými k ose z byly elipsy). Pro představu můžeme použít obrázek z předchozího příkladu, na osách x a y však nebudou hodnoty 2 a 3, nýbrž hodnota R.

- Parametrizace plochy S (vzhledem k symetrii volíme polární souřadnice):

$$S: \ K = [0,\, R] \times [0,\, 2\pi] \ni (r,\, \varphi) \longrightarrow (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$x(r,\, \varphi) = r\cos\varphi,\ y(r,\, \varphi) = r\sin\varphi,\ z(r,\, \varphi) = r^2,$$

kde $z = z(r,\, \varphi)$ se „dopočítává“ z rovnice plochy.

- Jacobiho matice parametrizace a matice G:

$$DS(r,\, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 2r \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(r,\, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + 4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\det G(r,\, \varphi)} = r\sqrt{1 + 4r^2}.$$

- Výpočet plošného obsahu (integrovanou funkcí je $f(x, y, z) = 1$):

$$P = \int_K \sqrt{\det G(r, \varphi)}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r\sqrt{1+4r^2}\, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$\left| \text{substituce } 1 + 4r^2 = t,\ 8r\, \mathrm{d}r = \mathrm{d}t \right| =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_1^{1+4R^2} t^{1/2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_1^{1+4R^2} \Rightarrow \ P = \frac{1}{6}\pi \left((1+4R^2)^{3/2} - 1 \right)$$

- Výpočet hmotnosti (hustota $\sigma = (x^2 + y^2)z,\ \sigma \circ S = r^4$):

$$m = \int_K r^4 \cdot r\sqrt{1+4r^2}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \left| \text{substituce } 1 + 4r^2 = t \right| =$$

$$2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_1^{1+4R^2} \left(\frac{t-1}{4} \right)^2 t^{1/2}\, \mathrm{d}t \ldots \text{ počítejte} \ldots$$

$$= \frac{\pi}{64} \int_{1}^{1+4R^2} (t^{5/2} - 2t^{3/2} + t^{1/2})\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{64} \left[\frac{2}{7} t^{7/2} - \frac{4}{5} t^{5/2} + \frac{2}{3} t^{3/2} \right]_1^{1+4R^2}$$

$$m = \frac{\pi}{64} \left[\frac{2}{7}(1+4R^2)^{7/2} - \frac{4}{5}(1+4R^2)^{5/2} + \frac{2}{3}(1+4R^2)^{3/2} - \frac{16}{105} \right]$$

- Výpočet polohy těžiště: Plocha je rotačně symetrická vzhledem k ose z, plošná hustota rovněž. Mělo by vyjít $x_T = y_T = 0$.

$$x_T = \frac{1}{m} \int_K (r\cos\varphi) \cdot r^4 \cdot r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{m} \overbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \right)}^{\text{integrál je nulový}} \left(\int_0^R r^6 \sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r \right), \quad x_T = 0.$$

Tok vektorového pole plochou, integrální věty

Tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z)$ plochou S orientovanou jednotkovou normálou $\vec{n}(x, y, z)$ je plošným integrálem druhého druhu z vekorového pole $\vec{F}$ po ploše S (jeho znaménko závisí na orientaci plochy):

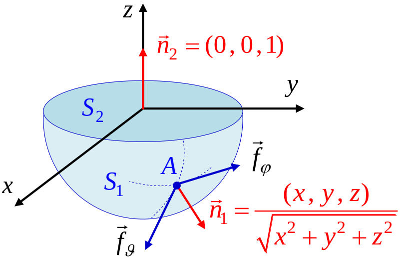
$$\Phi = \int_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S (\vec{F}\vec{n})\,\mathrm{d}S. \qquad (*)$$

Poslední integrál ukazuje, že tok můžeme počítat i jako integrál prvního druhu ze skalární funkce $f = \vec{F}\vec{n}$ s tím, že na orientaci závisí integrand.

Je-li $S : K \ni (u, v) \to (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizace plochy S a $\vec{f}_u(u, v)$, $\vec{f}_v(u, v)$ tečné vektory k odpovídajícím souřadnicovým křivkám (jejich složky jsou v řádcích Jacobiho matice zobrazení S), počítáme tok také takto:

$$\Phi = \int_K (\vec{F} \circ \alpha)(\vec{f}_u \times \vec{f}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \qquad (**)$$

ZADÁNÍ: Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$ uzavřenou plochou S, která je tvořena dolní částí kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leq 0$, a kruhem $x^2 + y^2 \leq R^2$, $z = 0$. Plocha je orientována vnější normálou.



$$S_1 : x = R \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = R \sin\vartheta \sin\vartheta$$
$$z = R \cos\vartheta$$
$$(\vartheta, \varphi) \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi] \times [0, 2\pi]$$

S_2 : parametrizujte

Tok určete

(a) přímým výpočtem,

(b) užitím vhodné integrální věty.

ŘEŠENÍ: Nejprve přímý výpočet, opět v postupných krocích. Zadaná plocha je po částech hladká. Je složena ze dvou hladkých ploch, S_1 je dolní část kulové plochy, S_2 je kruh (obrázek).

- Parametrizace ploch:

$$S_1 : \ K_1 = [\frac{\pi}{2}, \pi] \times [0, 2\pi] \ni (\vartheta, \varphi) \longrightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$x(\vartheta, \varphi) = R \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y(\vartheta, \varphi) = R \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z(\vartheta, \varphi) = R \cos\vartheta,$$

$$S_2 : \ K_2 = [0, R] \times [0, 2\pi] \ni (r, \alpha) \longrightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$x(r, \alpha) = r \cos\alpha, \quad y(r, \alpha) = r \sin\alpha, \quad z = 0.$$

Kulovou plochu jsme parametrizovali sférickými úhly ϑ („zeměpisná šířka“ měřená od severního pólu) a φ („zeměpisná délka“), kruh polárními souřadnicemi r („vzdálenost“) a α („azimutální úhel“).

- Jacobiho matice a tečné vektory

$$\text{obecně}: \quad DS(u,\,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \dots & \vec{f}_u \\ \dots & \vec{f}_v \end{array},$$

složky tečných vektorů $\vec{f}_u(u,\,v)$ a $\vec{f}_v(u,\,v)$ jsou v řádcích. Pořadí parametrů (a tedy i řádků) musí být zvoleno souhlasně se zadanou orientací plochy, tedy tak, aby báze $(\vec{f}_u,\,\vec{f}_v,\,\vec{n})$ byla pravotočivá. To poznáme tak, že determinant matice, která vznikne z Jacobiho matice přidáním složek normály $\vec{n} = (n_x,\,n_y,\,n_z)$ do třetího řádku, je kladný.

$$DS_1(\vartheta,\,\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi & R\cos\vartheta\sin\varphi & -R\sin\vartheta \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi & R\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \dots & \vec{f}_\vartheta \\ \dots & \vec{f}_\varphi \end{array},$$

$$\vec{f}_\vartheta \times \vec{f}_\varphi = (R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi,\; R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi,\; R^2\sin\vartheta\cos\vartheta).$$

$$DS_2(r,\,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -r\sin\alpha & r\cos\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cc} \ldots & \vec{f}_r \\ \ldots & \vec{f}_\alpha \end{array}$$

$$\vec{f}_r \times \vec{f}_\alpha = (0,\,0,\,r).$$

Vektorový součin tečných vektorů je v obou případech souhlasně rovnoběžný s vnější normálou k odpovídající ploše, pořadí parametrů jsme tedy volili správně: v případě S_1 je prvním parametrem ϑ, druhým φ (a je to vidět i na obrázku), v případě S_2 je prvním parametrem r, druhým α.

Teď už bychom mohli rovnou počítat tok pomocí vztahu (**). Ale možná bude jednodušší, vzhledem ke konkrétnímu poli $\vec{F}$, použít (*). Je totiž $\vec{F} = (x^2yz,\, xy^2z,\, xyz^2) = xyz(x,\, y,\, z)$, což je na ploše S_1 vektor rovnoběžný s jednotkovou vnější normálou. Samozřejmě, výsledek musí vyjít oběma způsoby stejně, ale je výhodné volit postup, který výpočet technicky usnadní. Uvidíme.

- Matice G:

$$G_1 = \begin{pmatrix} \vec{f}_\vartheta \vec{f}_\vartheta & \vec{f}_\vartheta \vec{f}_\varphi \\ \vec{f}_\vartheta \vec{f}_\varphi & \vec{f}_\varphi \vec{f}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\det G_1} = R \sin \vartheta,$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \vec{f}_r \vec{f}_r & \vec{f}_r \vec{f}_\alpha \\ \vec{f}_r \vec{f}_\alpha & \vec{f}_\alpha \vec{f}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\det G_2} = r$$

Výsledky pro $\sqrt{\det G}$ jistě nejsou překvapující. Jednodušší se zdá výpočet integrálu pomocí (*). Na ploše S_1 je totiž $\vec{F} \parallel \vec{n}$.

- Integrandy (za x, y a z dosadíme funkce dané parametrizací):

$$\vec{F}\vec{n}_1 = xyz(x,\ y,\ z) \cdot \frac{(x,\ y,\ z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = xyz\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$(\vec{F}\vec{n}_1) \circ S_1 = R^4 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi, \quad (\vec{F}\vec{n}_2) \circ S_2 = 0.$$

(Na ploše S_2 je totiž $\vec{F} = \vec{0}$, neboť $z = 0$.)

- Integrály (podle (*)):

$$\Phi_1 = \int\limits_{S_1} (\vec{F}\vec{n}_1)\,\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{K_1} (\vec{F}\vec{n}_1) \circ S_1 \sqrt{\det G_1}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= R^5 \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^3\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi \cos\varphi \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= R^5 \left(\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^3\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \right) \underbrace{\left(\int\limits_{0}^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \right)}_{0} = 0,$$

$\Phi_2 = 0$ neboť $\vec{F} = \vec{0}$ na ploše S_2, $\quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0.$

(Ale co ta nula dala práce!)

Nyní vypočteme tok vektorového pole $\vec{F}$ plochou $S = S_1 + S_2$ pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty,

$$\Phi = \int_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{d}V,$$

kde V je prostorový útvar obepnutý plochou S. Orientace plochy je zadána vnější normálou, proto můžeme G-O větu použít přímo.

- Parametrizace útvaru V (sférické souřadnice) a (dávno známý) jakobián:

$$V:\ K = [0,\, R] \times [\frac{\pi}{2},\, \pi] \times [0,\, 2\pi] \ni (r,\, \vartheta,\, \varphi) \longrightarrow (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$x(r,\, \vartheta,\, \varphi) = r \sin\vartheta \cos\varphi,\ ; y(r,\, \vartheta,\, \varphi) = r \sin\vartheta \sin\varphi,$$

$$z(r,\, \vartheta,\, \varphi) = r \cos\varphi,\ \ J(r,\, \vartheta,\, \varphi) = r^2 \sin\vartheta.$$

- Integrand:

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,\, y,\, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 6xyz,$$

$$\operatorname{div} \vec{F} \circ V = 6r^3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi,$$
$$(\operatorname{div} \vec{F} \circ V) \cdot J = 6r^5 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi.$$

- Integrál:

$$\Phi = \int_V \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}V = 6 \int_0^R \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} r^5 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi = 0.$$

V tomto případě je výpočet pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty podstatně jednodušší. Nemusí však tomu tak být vždy.

Práce silového pole, integrální věty

Práce silového pole je dána křivkovým integrálem druhého druhu

$$W = \int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_C (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z),$$

kde $\vec{F}(x,\,y,\,z)$ je silové (obecně vektorové) pole. Je-li
$C:\ [a,\,b] \ni t\ \to\ (x(t)\,y(t),\,z(t)) \in \mathbb{R}^3$ parametrizace křivky, pak

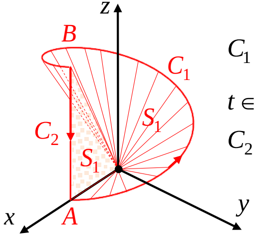
$$W = \int_a^b (\vec{F} \circ C)(t) \cdot \vec{\tau}(t)\,\mathrm{d}t, \ \ \text{kde}\ \ \vec{\tau}(t) = (\dot{x}(t),\,\dot{y}(t),\,\dot{z}(t))$$

je tečný vektor k C. Je-li křivka C uzavřená, lze použít Stokesovu větu:

$$W = \int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S},$$

S je libovolná (souhlasně s C orientovaná) plocha, jejíž hranicí je C.

ZADÁNÍ: Vypočtěte práci silového pole $\vec{F} = a(z, x, y)$, $a = 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ je rozměrová konstanta, po uzavřené křivce $C = C_1 + C_2$, kde C_1 je část šroubovice s počátečním bodem $A = (R, 0, 0)$ a koncovým bodem $B = (R, 0, R)$, a C_2 je úsečka BA.



$$C_1 : x = R\cos t\,,\ y = R\sin t\,,\ z = \frac{Rt}{2\pi}$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$C_2 : x = R\,,\ y = 0\,,\ z \in [0, R]$$

$$S_1 : x = r\cos t\,,\ y = r\sin t\,,\ z = \frac{rt}{2\pi}, \quad t \in [0, 2\pi],\ r \in [0, R]$$

Výpočet proveďte

(a) přímo (křivkový integrál druhého druhu),

(b) užitím Stokesovy věty (převod na plošný integrál).

ŘEŠENÍ: Nejprve přímý výpočet, opět postupně.

- Parametrizace křivek a tečné vektory:

$$C_1 : [0, 2\pi] \ni t \longrightarrow \left(R\cos t,\ R\sin t,\ \frac{Rt}{2\pi} \right) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{\tau}_1(t) = \left(-R\sin t,\ R\cos t,\ \frac{R}{2\pi} \right)$$

$$C_2 : [0, R] \ni t \longrightarrow (R, 0, R - t) \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{\tau}_2(t) = (0, 0, -1)$$

- Integrandy pro $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$:

$$\vec{F} \circ C_1(t) = \left(\frac{Rt}{2\pi},\ R\cos t,\ R\sin t \right),$$

$$(\vec{F} \circ C_1(t)) \cdot \vec{\tau}_1(t) = \frac{R^2}{2\pi}(-t\sin t + 2\pi\cos^2 t + \sin t),$$

$$\vec{F} \circ C_2(t) = (R - t, R, 0), \quad (\vec{F} \circ C_2(t)) \cdot \vec{\tau}_2(t) = 0.$$

- Integrály:

$$W_1 = \int\limits_{C_1} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \frac{R^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (-t\sin t + 2\pi\cos^2 t + \sin t)\,\mathrm{d}t = \dots$$

$$\dots \text{ integrujte } \dots = R^2(1+\pi), \quad W_2 = 0, \quad W = W_1 + W_2 = R^2(1+\pi).$$

Nyní použijeme Stokesovu větu. Plocha, jejíž hranicí je křivka $C = C_1 + C_2$ je po částech hladká a je tvořena tzv. přímkovou plochou S_1 a plochou trojúhelníka AOB (leží v rovině $y = 0$) – viz obrázek.

- Parametrizace ploch:

$$S_1 : [0,\ R] \times [0,\ 2\pi] \ni (r,\ t) \longrightarrow \left(r\cos t,\ r\sin t,\ \frac{rt}{2\pi}\right) \in \mathbb{R}^3,$$

$$S_2 : [z,\ R] \times [0,\ R] \ni (x,\ z) \longrightarrow (x,\ 0,\ z) \in \mathbb{R}^3.$$

- Jacobiho matice a tečné vektory

$$DS_1(r,\ t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \frac{t}{2\pi} \\ -r\sin t & r\cos t & \frac{r}{2\pi} \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \dots & \vec{f_r} \\ \dots & \vec{f_t} \end{array},$$

$$\vec{f_r} \times \vec{f_t} = \frac{r}{2\pi}\left(\sin t - t\cos t,\ -t\sin t - \cos t,\ r\right),$$

$$DS_2(x,\ z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \dots & \vec{f_x} \\ \dots & \vec{f_z} \end{array}, \quad \vec{f_z} \times \vec{f_x} = (0,\ 1,\ 0).$$

Přesvědčte se, že jsme pořadí parametrů (a tedy i tečných vektorů ve vektorovém součinu) zvolili kompatibilní s orientací plochy, která je indukována orientací křivky – prsty ve směru orientace křivky, palec ukáže správnou normálu k ploše. Vektorový součin tečných vektorů má správné pořadí, vyjde-li souhlasně rovnoběžný se správnou normálou.

- Integrandy: Nejprve vypočteme rotaci vektorového pole $\vec{F}(x, y, z)$ v kartézských souřadnicích:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = (1, 1, 1).$$

Rotace pole $\vec{F}$ je konstantní, tedy na každé ploše stejná.

$$\operatorname{rot} \vec{F} \cdot (\vec{f}_r \times \vec{f}_t) = \frac{r}{2\pi} (\sin t - t \cos t - t \sin t - \cos t + 2\pi),$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} \cdot (\vec{f}_x \times \vec{f}_z) = 1.$$

- Integrály: Na ploše S_1 platí

$$\int\limits_{S_1} \operatorname{rot} \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{R} \frac{r}{2\pi} (\sin t - t \cos t - t \sin t - \cos t + 2\pi) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}r =$$

$$= \left(\int_0^R \frac{r}{2\pi}\,\mathrm{d}r \right) \left(\int_0^{2\pi} (\sin t - \cos t - t \sin t - t \cos t + 2\pi)\,\mathrm{d}t \right) =$$

$$= \ldots \text{integrujte} \ldots = \frac{R^2}{4\pi}(2\pi + 4\pi^2) = R^2 \left(\frac{1}{2} + \pi \right).$$

Na ploše S_2 je

$$\int_{S_2} \mathrm{rot}\, \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_0^R \left(\int_x^R 1 \cdot \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x = \int_0^R (R - x)\,\mathrm{d}x = \frac{R^2}{2}.$$

Výsledný integrál je součtem integrálů po plochách S_1 a S_2:

$$W = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = R^2(1 + \pi).$$

V tomto případě byl jednodušší přímý výpočet, i přes to, že rotace vektorového pole $\vec{F}$ je konstantní vektorové pole.